

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

СПРАВОЧНИК ПО ТЕПЛООБМЕННИКАМ

ТОМ
1

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Представляемое в переводе на русский язык справочное издание по теории и методам расчета и конструирования теплообменного оборудования не имеет аналогов ни в отечественной, ни в мировой литературе по объему и полноте материала, по тщательности систематизации известных научных и технических достижений в этой области.

Отсутствие до недавнего времени такого издания объясняется, конечно же, трудоемкостью задачи составления справочного руководства, которое охватывало бы даже только основные стороны задачи расчета и проектирования теплообменников. Между тем вряд ли следует говорить о том, насколько велика потребность в справочном издании, где в систематической и удобной для практического использования форме были бы изложены новые достижения гидродинамики и тепломассообмена, имеющие отношение к конструированию теплообменников, тем более что задачи создания и внедрения в различных областях промышленности и технологии эффективного и экономичного теплообменного оборудования неразрывно связаны с совершенствованием, повышением надежности методов его расчета и проектирования.

Поэтому можно надеяться, что справочник, подготовленный международным коллективом ведущих ученых и специалистов из Великобритании, СССР, США, ФРГ и других стран по инициативе и под эгидой Международного центра по тепло- и массообмену, будет с интересом встречен советскими читателями.

Справочник охватывает практически все аспекты расчета и проектирования теплообменного оборудования: теорию теплообменников; основы гидродинамики и тепломассообмена; тепловой и гидродинамический расчет теплообменников и их механический расчет; физические свойства теплоносителей.

Столь обширное содержание потребовало координации усилий многих авторов из разных стран. Возглавляемый известным специалистом из ФРГ Шлюндером коллектив редакторов, в котором представителем от СССР был акад. АН ЛитССР А. А. Жукаускас, прекрасно справился с этой задачей, используя при создании Справочника все современные достижения и добившись единого стиля изложения разнообразного материала. Справочник содержит систематическое и лаконичное изложение основ теории теплообмена, современных методов расчета теплообменников разных типов и назначения. По широте представленного материала в сочетании с глубиной и ясностью изложения он представляет собой современное энциклопедическое издание в этой области.

На русском языке Справочник выходит в 2-х томах. В первый том Справочника вошли части первая и вторая, во второй том — третья, четвертая и пятая. В первой части Справочника изложены теоретические основы расчета теплообменников. В нее включены клас-

сификация типов теплообменников, основные методы описания и элементы теории теплообменников, аналитические решения для распространенных схем и геометрий теплообменного оборудования. Значительное внимание уделено численным методам расчетов, которые становятся важнейшим средством при анализе, проектировании и оптимизации теплообменного оборудования. Наряду с этим представлены и упрощенные методы расчета, имеющие особое значение для инженерных оценок.

Вторая часть содержит богатый материал по основам гидродинамики и тепломассообмена; в ней рассмотрены физические процессы переноса импульса, теплоты и массы в однородных и неоднородных системах, способы описания процессов течения и тепло- и массообмена. Представлены также все основные имеющие практическое значение разделы тепломассообмена: теплопроводность; конвективный теплообмен в однородных средах; теплообмен при конденсации, тепломассообмен при кипении и испарении (в том числе в двухфазных потоках); теплообмен в дисперсных средах; радиационный и сложный теплообмен и др. В целом эта часть содержит довольно полный набор сведений по гидродинамике и тепломассообмену в тех их аспектах, которые находят непосредственное применение в расчетах и исследованиях теплообменников, и охватывает широкий круг случаев.

В третьей части представлена тщательно отобранная и имеющая практическую направленность информация о тепловых и гидравлических расчетах различных теплообменников: кожухотрубных для однофазных сред, конденсаторов, испарителей, пластинчатых теплообменников, компактных теплообменников, тепловых труб, печей и топок градирен, устройств для сушки и камер смешения.

Четвертая часть Справочника содержит сведения о физических свойствах теплоносителей и обобщает данные по свойствам чистых жидкостей и газов, жидких смесей, реологических систем и твердых материалов.

Последняя, пятая часть посвящена механическому расчету теплообменников различных типов, при этом значительное внимание уделено прочностным расчетам при вибрационных нагрузках. Здесь же представлены данные о конструкционных материалах.

Справочник предназначен для широкого круга читателей — инженеров-конструкторов теплообменного оборудования, технологов, энергетиков, научных работников в области тепломассообмена, а также студентов.

Перевод и редактирование Справочника осуществлены совместно коллективом специалистов из Института высоких температур АН СССР, Института тепло- и массообмена АН БССР и Института ядерной энергетики АН БССР.

*О. Г. Мартыненко, А. А. Михалевич,
В. К. Шикоз*

Идея создания «Справочника по теплообменникам» возникла на семинаре «Последние достижения в теплообменном оборудовании», организованном Международным центром по тепло- и массообмену в Трогире (Югославия) в 1972 г.

Хотя существует множество данных и корреляционных зависимостей по теплообмену, эта информация рассеяна в обширной литературе или заключена в малодоступных отчетах фирм. Для создателей и пользователей теплообменным оборудованием становится все более и более затруднительным не только знакомиться с постоянно растущим объемом информации по теплообмену, но и сравнивать данные и корреляционные зависимости, получаемые из разных источников. Кроме того, часто информация, получаемая из разных источников, не согласуется между собой, и пользователям трудно решить, какие данные и зависимости лучше всего подходят для их собственных целей. Наконец, с течением времени многие публикации становятся все более аналитическими и академическими, что затрудняет их непосредственное применение инженерами, занимающимися теплообменным оборудованием.

В этой ситуации группа специалистов решила собрать всю известную им по существующей литературе информацию по теплообмену, а также — насколько это возможно — получить сведения от фирм для того, чтобы создать информационную базу по вопросам теплообмена. Рекомендованные корреляционные соотношения, основанные на выбранном экспериментальном материале, можно было бы затем распространить на все данные, необходимые для конструирования теплообменников.

Хотя эта идея была встречена с огромным энтузиазмом, прогресс в ее осуществлении был очень незначителен вплоть до пятой Международной конференции по теплообмену, которая проходила в Токио в 1974 г.

На этой конференции была сформулирована идея публикации справочника под эгидой Международного центра по тепло- и массообмену. Восемь представителей различных университетов, промышленности и фирм сформировали редакционный совет, который сразу же приступил к работе по определению содержания Справочника. В результате этих совместных усилий были запланированы и составлены следующие разделы Справочника.

В части 1 представлена теория теплообменников; даны основные определения, объясняется их содержание, сформулированы общие положения теплового и гидравлического проектирования теплообменников, методология необходимых оценок.

Часть 2 содержит корреляционные зависимости, рекомендуемые для определения конструкционных и оценочных параметров и основанные на анализе имеющихся на сегодняшний день сведений. Экспериментальные результаты представлены вместе с рекомендуемыми корреля-

циями в целях демонстрации согласованности различных данных и надежности корреляционных зависимостей.

В части 3 показано, как применять материал, представленный в частях 1 и 2, при решении реальных задач проектирования теплообменников. Вследствие огромного объема имеющегося материала было невозможно описать в этом разделе все известные типы теплообменников. Тем не менее в деталях обсуждается большинство обычно используемых типов теплообменного оборудования вместе с установками и устройствами, к которым они относятся, такими как градирни и камеры сгорания.

Часть 4 содержит данные по физическим свойствам теплоносителей и материалов, которые необходимы для проведения конструкторских расчетов.

Часть 5 посвящена механическим расчетам теплообменников, которые по существу не могут быть отделены от теплового и гидравлического расчетов.

В качестве главного редактора каждой из пяти частей выступал член редакционного совета. Хотя каждый такой редактор принял дополнительную административную ответственность за свою часть, в целом Справочник явился плодом совместных усилий всего редакционного совета, рецензировавшего и редактировавшего весь материал.

Многочисленные авторы — все хорошо известные специалисты в разных областях теплообмена — внесли свой вклад в этот Справочник. Каждая рукопись прошла процедуру рецензирования, а многие рукописи обсуждались на регулярных заседаниях редакционного совета, которые происходили каждые полгода, начиная с 1975 г.

Тем не менее этот Справочник нужно рассматривать только как первый шаг на пути к конечному результату. Хотя идея его создания была ясной, ее осуществление оказалось не столь простым, и все еще есть возможности для улучшения содержания Справочника. Кроме того, из-за постоянного появления все новых данных и корреляционных зависимостей по теплообмену установлена процедура пополнения Справочника новейшими сведениями. Этот дополнительный материал будет регулярно предлагаться подписчикам.

Мы обращаемся к научным работникам и инженерам, пользующимся Справочником, с просьбой сообщить нам, не упущено ли что-нибудь составителями Справочника, и вносить свои предложения по улучшению его содержания. Это взаимодействие между читателями и издателями должно не только улучшить качество Справочника, но и стимулировать дальнейшую исследовательскую работу, направляемую требованиями проектировщиков теплового оборудования.

Редакционный совет благодарит издателя и авторов за их очень ценный вклад и плодотворное сотрудничество при издании Справочника.

У. Шлюндер

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Ниже приведены наиболее часто используемые обозначения для параметров тепло- и массообмена. При этом авторы руководствовались следующими принципами.

1. Заглавными латинскими буквами обозначены абсолютные значения величин, выраженные в основных единицах системы СИ, или в единицах, производных от них; например, $N = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$; $\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}$, $\text{Вт} = \text{Дж}/\text{с}$.

Исключения составляют время t , переменные координаты x, y, z, r , характерные длины в безразмерных единицах l, d, s .

2. Строчными латинскими буквами обозначены соответствующие удельные параметры, отнесенные к единице массы, молю, единицам длины, площади или объема (но не времени). Точка над символом означает, что данный абсолютный или удельный параметр отнесен к единице времени.

Исключения составляют компоненты скорости u, v, w .

Параметры, отнесенные к одному молю, обозначены тильдой.

Исключения составляют универсальная газовая постоянная $\bar{R}$, число Лошмидта $\bar{L}$, относительная молекулярная масса $\bar{M}$, химический потенциал μ .

3. Строчными греческими буквами обозначены коэффициенты и физические свойства.

Исключения составляют коэффициенты теплопередачи U , теплоемкости c_p, c_v .

Заглавными греческими буквами обозначены характеристики турбулентности; например, буквой Λ обозначена турбулентная теплопроводность.

4. Безразмерные переменные помечены верхним индексом "+", следующим за соответствующим обозначением; например, y^+ обозначает безразмерную координату.

5. Десятичная доля и значение, кратное порядкам единиц СИ, обозначены соответствующим символом, предшествующим единице СИ; например, $\text{МВт} = 10^6 \text{ Вт}$.

Продолжение табл.

Величина	Обозначение	Единицы физических величин
Плотность	ρ	$\text{кг}/\text{м}^3$
Концентрация	c	$\text{кг}/\text{м}^3$
Молярная плотность	$\bar{\rho}$	$\text{моль}/\text{м}^3$
Молярная концентрация	$\bar{c}$	$\text{моль}/\text{м}^3$
Массовая доля	x_i, y_i	$\text{кг}/\text{кг}$
Массовое отношение	X_i, Y_i	$\text{кг}/\text{кг}$
Молярная массовая доля	x_i, y_i	$\text{моль}/\text{моль}$
Молярное отношение	$\bar{X}_i, \bar{Y}_i$	$\text{моль}/\text{моль}$
Объем	V	м^3
Объемный расход	$\dot{V}$	$\text{м}^3/\text{с}$
Скорость	u, v, w	$\text{м}/\text{с}$
Площадь поверхности	A	м^2
Площадь поперечного сечения	S	м^2
Длина или диаметр	L, D, l, d, s	м
Координата	$\psi, \varphi, r, x, y, z$	—
Объемное содержание	ε	—
Доля объемного расхода	ε	—
Массовое газосодержание (паросодержание)	x	—
Газосодержание потока	$\dot{x}$	—
Работа	W	Дж

Основные величины

Величина	Обозначение	Единицы физических величин
Тепловой поток (мощность)	$\dot{Q}$	Вт
Количество теплоты	$Q = \int \dot{Q} dt$	Дж
Плотность теплового потока	$\dot{q} = \dot{Q}/A$	$\text{Вт}/\text{м}^2$
Время	t	с
Частота	f	$1/\text{с}$
Масса	M	кг
Массовый расход	$\dot{M}$	$\text{кг}/\text{с}$
Массовая скорость (массовый расход на единицу площади)	$\dot{m} = \dot{M}/S$	$\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$
Плотность потока массы	$\dot{m}_n = \dot{M}_n/S$	$\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$
Число молей	N	моль
Молярный массовый расход	$\dot{N}$	$\text{моль}/\text{с}$
Молярная массовая скорость	$\dot{n} = \dot{N}/S$	$\text{моль}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$
Относительная молекулярная масса	$\bar{M}$	$\text{г}/\text{грамм-моль}$

Коэффициенты переноса

Величина	Обозначение	Единицы физических величин
Коэффициент теплоотдачи	α	$\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$
Коэффициент массообмена	β	$\text{м}/\text{с}$
Коэффициент теплопередачи	U	$\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$
Коэффициент гидравлического сопротивления	ξ	—
Коэффициент сопротивления трения	f	—
Излучательная способность (степень черноты)	ε	—
Угловой коэффициент	φ_{12}	—
Коэффициент теплопроводности	λ	$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
Коэффициент диффузии	δ	$\text{м}^2/\text{с}$
Кинематический коэффициент вязкости	ν	$\text{м}^2/\text{с}$
Динамический коэффициент вязкости	η	$\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$
Коэффициент температуропроводности	$k = \lambda/\rho c_p$	$\text{м}^2/\text{с}$
Коэффициент поверхностного натяжения	σ	$\text{Н}/\text{м}$
Касательное напряжение	τ	$\text{Па} (\text{Н}/\text{м}^2)$
Давление	p	$\text{Па} (\text{Н}/\text{м}^2)$
Перепад давлений	Δp	$\text{Па} (\text{Н}/\text{м}^2)$

Термодинамические величины

Величина	Обозначение ¹	Единицы физических величин
Энтальпия (удельная)	h	Дж/кг
Внутренняя энергия (удельная)	u	Дж/кг
Функция Гиббса, или свободная энтальпия (удельная)	$g = h - Ts$	Дж/кг
Свободная энергия (удельная)	$f = u - Ts$	Дж/кг
Энергия (удельная)	s	Дж/(кг·К)
Химический потенциал	μ	Дж/кг
Удельная теплоемкость	c_p, c_v	Дж/(кг·К)
Температура	T	К, °С
Среднелогарифмическая разность температур	ΔT_{LM}	К, °С

¹ Для полных значений величин используются заглавные буквы H, U .

Величины, характеризующие химические реакции

Величина	Обозначение	Единицы физических величин
Энтальпия реакции, энтальпия фазового перехода, скрытая теплота	Δh	Дж/кг
Энергия активации	ΔE	Дж/кг
Константа равновесия	K	Различные
Константа скорости реакции	k	Различные
Скорость реакции	r	моль/(м ³ ·с)
Коэффициент активности	γ_i	—
Коэффициент летучести	γ_g	—
Стехиометрические коэффициенты	ν_i	—

Физические константы

Величина	Обозначение	Единицы физических величин
Универсальная газовая постоянная	$\bar{R}$	8,314 Дж/(моль·К)
Число Лошмидта	$\bar{L}$	$2,6872 \cdot 10^{19}$ см ⁻³
Число Авогадро	$\bar{L}$	$6,0252 \cdot 10^{23}$ 1/моль
Постоянная Стефана—Больцмана	C_s	$5,6697 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Ускорение силы тяжести	g	м/с ²
Стандартное ускорение силы тяжести	g_n	9,8 м/с ²

Индексы

Величина	Обозначение	Величина	Обозначение
Стенка	w	Жидкость	l
Объем	b	Газовая фаза	g
Среднее значение	m	Вход	in
Твердая фаза	s	Выход	out

Безразмерные числа (наиболее часто используемые)

Наименование	Обозначение и определение
Число Архимеда	$Ar = g l^3 \Delta \rho / (v^2 \rho) = g l^3 \rho \Delta \rho / \eta^2$
Число Био	$Bi = \alpha_g l / \lambda_s$ или $\alpha l_i / \lambda_s$
Эффективность	E
Число Эйлера	$Eu = \Delta p / (\rho u^2 / 2)$
Число Фурье	$Fo = kt / l^2 = \lambda t / (\rho c_p l^2)$
Число Фруда	$Fr = u^2 / gl$
Число Галилея	$Ga = l^3 g / v^2 = l^3 g \rho^2 / \eta^2$
Число Грасгофа	$Gr = g l^3 \Delta \rho / (v^2 \rho) = g l^3 \rho \Delta \rho / \eta^2$
Число Гретца	$Gz = ud^2 / (kl) = ud^2 \rho c_p / (\lambda l) = Re Pr \frac{d}{l}$
Число Кнудсена	$Kn = l_0 / l$, где l_0 — длина свободного пробега молекул
Число Льюиса	$Le = k / \delta = \lambda / (\rho c_p \delta)$
Число Маха	$Ma = u / u_{звук}$
Число единиц переноса	NTU
Число Нуссельта	$Nu = \alpha l / \lambda$
Число Пекле	$Pe = ul / k = ul \rho c_p / \lambda = Re Pr$
Число фазового перехода ¹	$Ph = c_p \Delta T / \Delta h g l$
Число Прандтля	$Pr = \nu / k = \eta c_p / \lambda$
Число Релея	$Ra = Cr Pr$
Число Рейнольдса	$Re = ul / \nu = ul \rho / \eta = ml / \eta$
Число Шмидта	$Sc = \nu / \delta = \eta \rho / \delta$
Число Шервуда	$Sh = \beta l / \delta$
Число Стентона	$St = \alpha / (\rho u c_p) = Nu / (Re Pr)$
Число Струхала	$Sr = fl / u$
Число Вебера	$We = u^2 \rho l / \sigma$

¹ Параметр фазового перехода часто называют числом Якоба. — Прим. пер.

Безразмерные числа массообмена отличаются от безразмерных чисел теплообмена наличием штриха около буквенного обозначения. Например, $Bi' = \beta l / \delta$. Исключения: $Nu' = \beta l / \delta = Sh$ и $Pr' = \nu / \delta = \eta / (\rho \delta) = Sc$.

Раздел 1.1

ОПИСАНИЕ ТИПОВ ТЕПЛООБМЕННИКОВ¹

Д. Б. Сполдинг

1.1.1. Структура главы

Ниже приведена классификация теплообменного оборудования различного назначения по шести признакам.

В § 1.1.2 анализируются варианты схем движения теплоносителей. Основные типы рассматриваемых течений: противоток, параллельное однонаправленное течение, перекрестный ток и т. д.

В § 1.1.3 рассматриваются типы взаимодействия между потоками теплоносителей в теплообменнике, а именно чистый теплообмен или теплообмен в совокупности с массообменом. Даны определения коэффициентов взаимодействия.

В § 1.1.4 изучается характер изменения температуры теплоносителей вдоль аппарата.

Поверхности, разделяющие взаимодействующие потоки теплоносителей, могут иметь различную геометрическую форму. В 1.1.5 описаны обычно встречающиеся варианты этих поверхностей.

В § 1.1.6 приведены названия различных типов теплообменного оборудования, классифицированного в соответствии с его функциональным назначением. Описаны теплообменники без фазового перехода теплоносителя, бойлеры, конденсаторы и другие виды теплообменных аппаратов. Здесь же рассмотрены различные варианты работы теплообменников в нестационарных условиях.

Можно использовать и другие принципы классификации теплообменников. Например, их можно подразделять по областям применения (авиация, нефтепереработка и т. д.). Первая часть Справочника является вводной, и этим объясняется краткость изложения представленного материала.

1.1.2. Варианты схем движения теплоносителей

А. Введение. Теплообменники обеспечивают передачу теплоты между двумя или большим числом потоков теплоносителей, проходящих через аппарат. Основной характеристикой конструкции теплообменника является тип относительного движения потоков теплоносителей, взаимная геометрия этих течений. Ниже рассмотрены наиболее общие типы конфигураций течений.

Следует подчеркнуть, что описанные конфигурации представляют собой некоторую идеализацию реальных ситуаций. На практике никогда нельзя достигнуть течения теплоносителя, совпадающего с идеальным вариантом.

В. Противоток. В противоточном теплообменнике два теплоносителя движутся параллельно друг другу, но в противоположных направлениях. Этот тип течения схематически представлен на рис. 1, где изображена одиночная труба относительно малого диаметра, расположенная коаксиально внутри трубы большого диаметра. Один

теплоноситель течет во внутренней трубе, другой — в кольцевом пространстве между двумя трубами. На практике внутри одной трубы большого диаметра (кожуха) может быть расположено значительное число труб.

На рис. 1 буквой T обозначена температура, индекс 1 относится к первому теплоносителю, а индекс 2 — ко

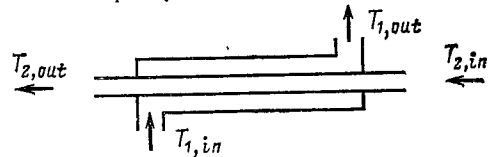


Рис. 1. Схема противоточного теплообменника

второму; индекс in — означает условия на входе, а индекс out — на выходе из теплообменника.

Противоточные теплообменники наиболее эффективны, поскольку обеспечивают наилучшее использование располагаемой разности температур, в них также может быть достигнуто наибольшее изменение температуры каждого теплоносителя.

С. Параллельное однонаправленное течение. В теплообменниках этого типа два теплоносителя движутся

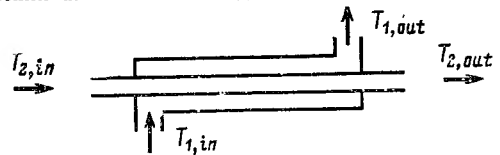


Рис. 2. Схема теплообменника с параллельным однонаправленным движением теплоносителей

также параллельно друг другу, но в одном и том же направлении. Схематически такой теплообменник изображен на рис. 2. При значительном изменении температуры теплоносителей располагаемая разность температур в таком теплообменнике используется плохо. В этом случае, если эффективность передачи теплоты является определяющим параметром при проектировании, такого типа теплообменники не применяют. Однако температура теплопередающей стенки в таких теплообменниках оказывается более однородной, чем в противоточных теплообменниках.

Д. Перекрестный ток. В теплообменнике с перекрестным током два теплоносителя движутся под прямым углом друг к другу. Например, первый поток может течь внутри труб, собранных в пучок, тогда как второй поток может двигаться в пространстве между трубами в направлении, в целом перпендикулярном оси этих труб.

Схематически теплообменники с перекрестным током теплоносителей обычно изображают так, как это показано на рис. 3. По своей эффективности они занимают промежуточное положение между теплообменниками с параллельным однонаправленным движением теплоносителей и противоточным теплообменником. Если же исходить

¹ Пер. с англ. Ю. А. Зейгарника.

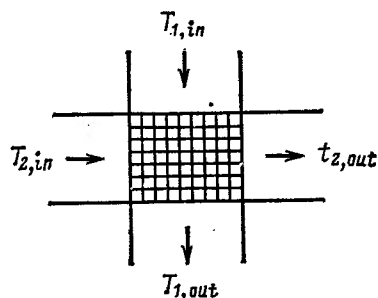


Рис. 3. Схема теплообменника с перекрестным током теплоносителей

из практических соображений, связанных с подачей теплоносителей к поверхностям теплообмена, то такой теплообменник сконструировать проще, чем указанные выше типы аппаратов.

Е. Перекрестный ток с противотоком. В некоторых случаях конфигурация течения теплоносителей в реальных теплообменниках приблизительно соответствует идеализированным схемам, приведенным на рис. 4. Эти схемы классифицируются как перекрестный ток с противотоком.

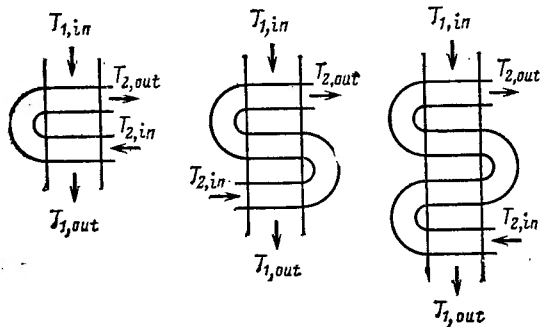


Рис. 4. Схема теплообменников со смешанным движением теплоносителей (перекрестный ток с противотоком)

На рис. 4 показаны двух-, трех- и четырехходовые теплообменники. Возможное число ходов, естественно, не ограничено.

Теплообменники со смешанным течением теплоносителей (перекрестный ток с противотоком) можно рассматривать как компромиссный вариант между требованием высокой эффективности аппарата и простотой конструкции. Чем больше число ходов в таком теплообменнике, тем ближе он по экономичности к противоточному варианту.

Г. Многоходовое течение в межтрубном пространстве и трубах. В пределах одного теплообменника можно осу-

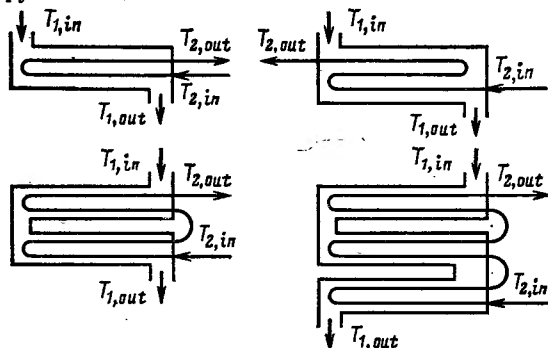


Рис. 5. Схема движения теплоносителей в многоходовых кожухотрубных теплообменниках

ществить комбинацию некоторых характерных черт, свойственных теплообменникам с односторонним движением теплоносителей и противоточным теплообменникам. Это достигается поворотом труб внутри единого корпуса. Такие повороты можно осуществлять многократно. Аналогичный эффект может быть достигнут и при наличии прямых труб, если соответствующим образом организовать коллекторы: U-образные трубы, или серпантин, обеспечивают более простую конструкцию аппарата, поскольку отверстия для прохода труб в этом случае нужно выполнять не с двух, а с одной стороны кожуха.

Примеры идеализированных конфигураций этого типа показаны на рис. 5. Здесь приведены схемы с объединением нескольких кожухов. Безусловно, здесь невозможно описать все возможные варианты, с которыми можно встретиться на практике, однако наиболее общие случаи рассмотрены в разд. 4.2 Справочника.

Г. Общий случай. Все описанные выше идеализированные схемы движения теплоносителей представляют собой частные варианты общего случая многоходовых течений

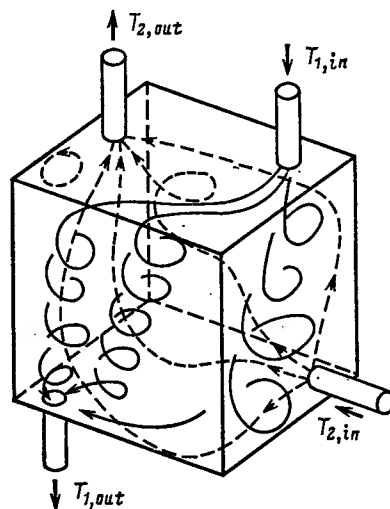


Рис. 6. Общий случай взаимопроникающих сред для двух теплоносителей (твердые элементы типа труб, перегородок и т. п. не изображены)

взаимно проникающих сплошных сред. При этом различные потоки теплоносителей поступают в общий объем в нескольких фиксированных входных точках и покидают его в нескольких фиксированных выходных точках, разделяясь после входа в объеме теплообменника и вновь объединяясь в выходных точках.

На рис. 6 показана воображаемая схема движения двух теплоносителей. Течение жидкостей в пространстве теплообменника оказывается трехмерным, при этом могут существовать зоны рециркуляции, в которых линии тока замкнуты.

Н. Схемы течения при разделенном во времени теплообмене греющей и обогреваемой сред: регенераторы. Во всех приведенных выше примерах подразумевалось, что течение является стационарным и оба потока теплоносителей проходят через теплообменник одновременно. Такого класса теплообменники называются рекуператорами. Имеются и другого класса теплообменники, именуемые регенераторами, в которых два потока теплоносителей проходят через одно и то же пространство попеременно. В регенераторах теплота, переданная от одного из теплоносителей твердым стенкам канала, аккумулируется ими, а затем отдается второму теплоносителю, когда наступает его очередь движения через аппарат.

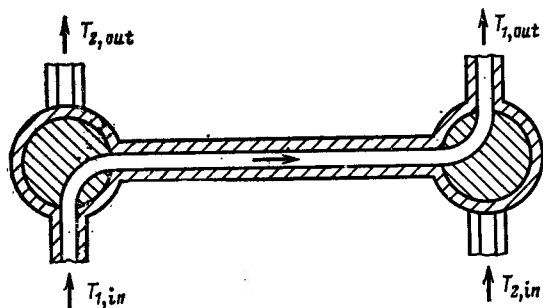


Рис. 7. Схема регенеративного теплообменника

Регенераторы могут быть выполнены с противоточным однопоточным и перекрестным течением теплоносителей так же, как и рекуператоры. Таким образом, простейшим противоточным генератором является прямая горизонтальная труба (рис. 7). Через трубу один теплоноситель подается слева направо (в периоды его пропуска); через нее же протекает и вторая жидкость после окончания пропуска первой, при этом направление ее течения справа налево. Передача теплоты стенкам и отвод теплоты от них обеспечиваются различием входных температур двух теплоносителей.

Регенераторы являются аппаратами периодического действия, поскольку они устроены так, что два потока теплоносителей сменяют друг друга регулярным и предопределенным образом. На рис. 7 показано, как с помощью поворотных клапанов на концах трубы можно надлежащим образом регулировать течение теплоносителей.

1. Заключение. Для того чтобы рассчитать характеристики теплообменника, необходимо задать схему движения теплоносителей в нем, установить расходы теплоносителей по выбранным направлениям и определить значения термических сопротивлений передаче теплоты от одного теплоносителя другому в каждой точке объема теплообменника. После этого отыскание распределения температуры в отдельных потоках является чисто математической операцией.

При простых схемах течений теплоносителей типа приведенных выше и при однородных по объему значениях термических сопротивлений часто удается решить уравнения, описывающие характеристики теплообменников, аналитически (см. разд. 1.3).

Если же схема течения является сложной или термические сопротивления изменяются от точки к точке, то соответствующие уравнения могут быть решены только численными методами. Этот вопрос рассмотрен в разд. 1.4.

Безусловно не просто сразу определить, какие значения термических сопротивлений могут быть приняты для условий, существующих в реальных теплообменниках. Часто они зависят от местных значений температур теплоносителей. В данном Справочнике много внимания уделено определению формул для расчета этих сопротивлений.

1.1.3. Типы взаимодействий между потоками

А. Теплообмен. Под теплообменом понимается взаимодействие между средами, вызываемое существованием между ними разницы температур. Такое взаимодействие является наиболее общим случаем для теплообменных аппаратов, и ему уделено основное внимание в Справочнике.

Теплообмен между потоками теплоносителей обычно происходит без непосредственного контакта между ними — между потоками размещается твердая разделяющая среда, например стенка металлической трубы или пластина, или

даже упругая мембрана. Теплота передается от одного теплоносителя к другому через твердую среду. Вследствие этого часто возникают местные перегревы холодного теплоносителя и чрезмерное охлаждение горячей жидкости. В некоторых случаях это может также привести к изменению фазового состояния одного или обоих теплоносителей.

Теплообмен может происходить также и при прямом контакте жидкостей друг с другом, например когда одним из теплоносителей является горячая вода, а другим — холодный воздух. Теплообмен при непосредственном контакте сред очень часто встречается при охлаждении циркуляционной воды электростанций (охлаждающей воды конденсаторов турбин). Соответствующие теплообменные устройства обычно называются градирнями.

В некоторых случаях теплотой с потоком жидкости обмениваются твердые частицы. В таком теплообменнике с псевдооживленным слоем горячий газ может проходить вверх через плотное облако твердых частиц, которые хотя и пребывают в постоянном хаотическом движении, все же не уносятся с газом в результате действия силы тяжести. Эти частицы бомбардируют твердые поверхности, находящиеся в этом слое (например, трубы с охлаждающей водой), и передают им теплоту.

Существуют и другие способы передачи теплоты от одного теплоносителя к твердой стенке и далее от нее ко второму теплоносителю.

В. Совместный тепло- и массообмен. Непосредственный контакт теплоносителей создает возможность осуществлять между ними массообмен. Часто массообмен происходит при испарении части жидкости или конденсации одного из компонентов газового потока. Первый процесс наблюдается в упоминавшихся градирнях, последний — в некоторых аппаратах по удалению влаги.

Фазовые переходы часто сопровождаются значительными тепловыми эффектами, связанными со скрытым теплом фазового перехода. Эти эффекты могут существенно сказываться на работе теплообменника, что полностью справедливо для градирен с непосредственным контактом теплоносителей (мокрых градирен), в которых площадь теплопередающей поверхности примерно в 5 раз меньше соответствующей площади в теплообменниках, в которых массообмен отсутствует из-за отсутствия непосредственного контакта сред (сухие градирни).

Массоперенос, в принципе, может происходить и в теплообменниках, в которых отсутствует прямой контакт теплоносителей. Таким аппаратом является, например, паровой конденсатор. В нем охлаждающая вода течет по трубам, а пар конденсируется на наружной поверхности труб. Строго говоря, в этом аппарате существуют три компонента: охлаждающая вода, водяной пар (в смеси с небольшим количеством воздуха) и конденсат. Потоки двух последних сред находятся в непосредственном контакте.

С. Коэффициент взаимодействия. Если два потока теплоносителя взаимно проникают друг в друга в объеме теплообменника, то степень их взаимодействия в единице объема обычно характеризуется неким коэффициентом. Так, например, если речь идет о передаче теплоты, то она описывается объемным коэффициентом теплопередачи U_{vol} , который можно определить следующим образом:

$$\dot{q}_{vol} = U_{vol} (T_1 - T_2), \quad (1)$$

где $\dot{q}_{vol}$ — скорость передачи теплоты в единице объема от жидкости 1 к жидкости 2; T_1 и T_2 — соответственно температуры жидкостей.

Выражение для обменного коэффициента массообмена β_{vol} имеет вид

$$\dot{m}_{vol} = \beta_{vol} \rho (x_1 - x_2), \quad (2)$$

где $\dot{m}_{vol}$ — скорость переноса массы в единице объема от жидкости 1 к жидкости 2; x_1 и x_2 — массовые концент-

рации переносимого вещества в двух рассматриваемых жидкостях; ρ — плотность жидкости, выбранной в качестве определяющей.

Объемные коэффициенты взаимодействия U_{vol} и β_{vol} используются на практике, они связывают изменения параметров теплоносителей в теплообменнике. Особенно они удобны в тех случаях, когда поверхности, разделяющие теплоносители, развиты и могут иметь неправильную форму. Так, эффективность разбрызгивающих цилиндрических насадок градиент или насадок газоабсорбционных установок лучше всего характеризовать именно такими параметрами. В полной мере это справедливо и для насадок из оребренных труб.

Можно также оценить интенсивность взаимодействия теплоносителей, зная площадь разделяющей их поверхности. В этом случае нужно определить соответствующие поверхностные коэффициенты взаимодействия. Среди конструкторов теплообменного оборудования такой подход более распространен, поэтому в последующем будем преимущественно использовать именно его.

Соответствующие коэффициенты теплопередачи U и массообмена β индексов не имеют. Определяются эти коэффициенты следующим образом:

$$\dot{q} = U(T_1 - T_2) \quad (3)$$

и

$$\dot{m}_n = \beta \rho (x_1 - x_2), \quad (4)$$

где $\dot{q}$ и $\dot{m}_n$ — соответственно потоки теплоты и массы в единицу времени через единицу площади поверхности. Если обозначить площадь поверхности раздела через A , а объем, в котором происходит взаимодействие, через V и если выбрать достаточно малый элемент, в пределах которого коэффициенты взаимодействия могут считаться однородными, то между рассматриваемыми параметрами существует следующая связь:

$$\frac{\dot{q}U}{q_{vol}U_{vol}} = \frac{\dot{m}_n\beta}{m_{n,vol}\beta_{vol}} = \frac{V}{A}. \quad (5)$$

Это соотношение следует из определения параметров.

В действительности коэффициенты взаимодействия редко оказываются однородными по всему пространству теплообменника. Тем не менее для упрощения анализа часто принимается допущение об однородности этих коэффициентов. При использовании расчетных формул, опирающихся на это допущение, надо всегда относиться к полученным результатам с определенной осторожностью.

1.1.4. Типичные варианты изменения температур теплоносителей

А. Теплообменники на однофазных теплоносителях.

Чаще всего в теплообменниках каждый теплоноситель покидает аппарат, оставаясь в том же фазовом состоянии, что и на входе в него. В результате, поскольку теплота передается от горячего теплоносителя холодному, температура первого уменьшается, а второго — возрастает.

Часто изменение температуры пропорционально переданной теплоте. Именно этот случай обычно и анализируется (см., например, § 1.3.1 и разд. 1.5).

На рис. 1 показано изменение по длине теплообменника температур двух теплоносителей в случаях их противоточного и однонаправленного движения. Видно, что в первом случае выходная температура одного из теплоносителей приближается к входной температуре второго теплоносителя. Лучшее, что может быть достигнуто в

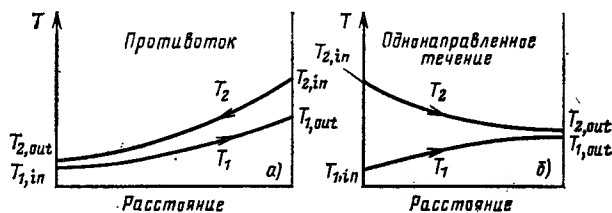


Рис. 1. Распределение температур в противоточном теплообменнике (а) и в теплообменнике с однонаправленным движением теплоносителей (б)

случае однонаправленного движения потоков, это близость значений выходных температур теплоносителей.

При перекрестном течении теплоносителей нельзя так просто проиллюстрировать распределение температур в теплообменнике, поскольку температура даже в идеализированном случае не является функцией только расстояния.

В. Котлы и конденсаторы. В теплообменниках другого типа, в частности в котлах и конденсаторах, существенную роль играет изменение фазового состояния одного из теплоносителей. В этих случаях изменение температуры этого теплоносителя обычно настолько мало, что им можно пренебречь.

Если мы имеем дело с котлом, то жидкость, в которой происходит фазовый переход, может поступать в теплообменник недогретой до температуры насыщения и соответственно ее температура повысится до температуры точки кипения. После этого в области фазового перехода температура жидкости будет изменяться лишь из-за слабого изменения давления в аппарате. Далее, на выходе из котла теплоноситель может быть перегрет относительно температуры насыщения. Поэтому в котле температура теплоносителя, изменяющего фазовое состояние, в действительности меняется, однако конструктор часто пренебрегает этим обстоятельством, стремясь использовать аналитическое выражение, которое справедливо лишь при отсутствии изменения температуры.

На рис. 2 показано изменение температуры в котле с однонаправленным движением теплоносителей. Первый поток — это вода и водяной пар. Вода поступает недогретой до температуры насыщения, водяной пар выходит перегретым. Второй поток соответствует газообразным продуктам сгорания. Следует заметить, что в реальных котлах схема движения теплоносителей является комбинацией и включает однонаправленное течение, противоток и перекрестный ток.

В большой степени сказанное относится и к паровым конденсаторам. Наличие воздуха ведет к тому, что температура газовой фазы в аппарате не остается однородной, так как она должна падать по мере снижения концентрации пара. Однако конструкторы часто пренебрегают этим обстоятельством или учитывают его лишь приближенно. Аналогичные проблемы возникают и в конденсаторах для многокомпонентных смесей.

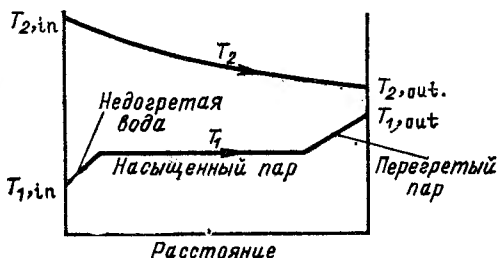


Рис. 2. Распределение температуры в котле, генерирующем перегретый пар из воды, недогретой до температуры насыщения. Движение теплоносителей однонаправленное

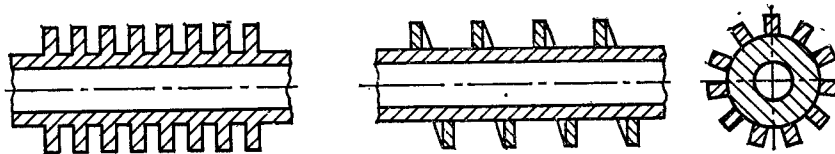


Рис. 1. Варианты наружного оребрения труб

С. Общий случай. В общем случае температура потока теплоносителя по мере подачи теплоты изменяется нелинейно. Такая нелинейность существует, как указывалось, даже в паровых котлах и конденсаторах, где ею зачастую пренебрегают. В других аппаратах, особенно в тех, где происходят химические реакции (установки для крекинга нефти) или фазовый переход (мокрые градирни; сушильные установки для текстиля, бумаги или пищевых продуктов; конденсаторы для многокомпонентных смесей), нелинейности изменения температуры слишком значительны, чтобы ими можно было пренебрегать. Даже в теплообменниках без фазового перехода следует учитывать характерное для многих материалов изменение с температурой удельной теплоемкости (см. § 1.2.2).

Эти нелинейности так же, как и изменение в пространстве теплообменника коэффициента теплопередачи, ограничивают возможность аналитического подхода к расчету теплообменников, описанного в разд. 1.3 и 1.5. Однако эти расчеты могут быть выполнены численными методами (см. разд. 1.4).

1.1.5. Типы поверхностей раздела между теплоносителями

Контакт потоков теплоносителей в теплообменнике (прямой или опосредованный) может осуществляться по-разному. Ниже кратко описаны типы теплопередающих поверхностей и указаны источники более полной информации по этому вопросу.

А. Гладкие трубы. Очень часто используются конструкции, в которых один теплоноситель течет внутри прямых или искривленных труб круглого поперечного сечения, а второй омывает их снаружи в продольном, перпендикулярном или наклонном к оси трубы направлении.

Поверхностью раздела в этом случае служит стенка трубы, и контакт теплоносителей осуществляется через нее. Поперечное сечение труб, естественно, может не быть круглым: часто эти трубы изготавливают волнистыми или придают им форму змеевиков.

В. Оребренные трубы. В том случае, когда теплоотдача внутри трубы более интенсивная, чем снаружи, прибегают к развитию площади наружной поверхности с помощью ребер, как это показано на рис. 1. Эти ребра могут быть выполнены заодно с трубой или же соединены с ней сваркой или пайкой. Ребра могут иметь форму кольцевых дисков, спиральных пластин или плоских листов, расположенных вдоль оси трубы.

Ребра увеличивают площадь поверхности на единицу объема теплообменника. Поверхность взаимодействия одного из теплоносителей и металла оказывается больше, чем для второго теплоносителя. В некоторых случаях такие ребра устанавливают внутри труб; это целесообразно делать тогда, когда коэффициент теплоотдачи внутри труб ниже, чем снаружи.

Поскольку площадь теплоотдающей поверхности на единицу объема для каждого теплоносителя оказывается разной, всегда нужно точно оговаривать, о какой поверхности идет речь, когда определяют плотность теплового потока на единицу поверхности. Проблема, естественно, исчезает, если используют объемные параметры. Следует отметить целесообразность задания значения

поверхности теплоотдачи на единицу объема и пересчета соответствующих объемных коэффициентов взаимодействия вместо непосредственного измерения поверхностных коэффициентов. Первый путь проще и дает более точные результаты, если измерена интенсивность теплопередачи на единицу объема, поскольку при задании соответствующих геометрических характеристик определить удельную поверхность теплообмена не составляет труда.

С. Матричные конструкции. Изобретательность конструкторов часто направлена на отыскание экономичных путей увеличения площади теплопередающей поверхности с тем, чтобы значения объемных коэффициентов взаимодействия были высокими. Разработанные для этого конструкции сильно отличаются от систем с гладкими или оребренными трубами. Обычно их называют матричными теплообменниками.

Выполненные как единое целое блоки труб и ребер, встречающиеся в автомобильных радиаторах и в устройствах кондиционирования воздуха, — типичные примеры таких конструкций.

Д. Пленочные теплообменники. Примеры теплообменников такого рода уже рассматривались, когда речь шла о прямом контакте между потоком газа, с одной стороны, и пленкой жидкости, текущей по твердой поверхности, — с другой. В инженерной практике имеется много других примеров, таких, как абсорбционные колонны, в которых поглощающая жидкость стекает вниз в виде пленки неправильной конфигурации. Эти пленки обтекают насадки из колец Рашига, шайб или даже обломков камня. Одновременно смесь газов, один из компонентов которой подлжет удалению путем растворения в жидкости, движется вверх через пустоты насадки.

Другим примером служат градирни электростанций, в которых охлаждаемая вода может стекать вниз по поверхности волнистых асбоцементных плит (рис. 2). Воздух, движущийся вверх в пространстве между плитами, нагревается и в то же время насыщается водяным паром.

Е. Теплообменники с распылением. Эти теплообменники, пожалуй, встречаются реже, чем пленочные аппараты, в которых жидкость всегда находится в контакте с твердой поверхностью: лишь при большой скорости газа неизбежно образуется какое-то число капель. Существуют также тепло- и массообменные устройства, в которых основное взаимодействие происходит через капли, образующиеся в специальных распылителях и свободно падающие в газообразной среде.

Аппараты такого рода включают в себя пароохладители паровых котлов электростанций, увлажнители в

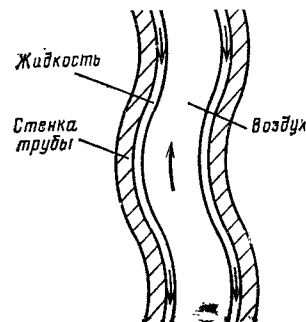


Рис. 2. Нисходящее течение жидкой пленки и восходящее движение воздуха между волнистыми асбоцементными плитами, образующими насадку мокрой градирни электростанции

кондиционерах воздуха, устройства для производства порошкового молока и другие установки. Даже топки и камеры сгорания двигателей входят в эту категорию, поскольку топливо в этих устройствах часто вводят в виде распыленных капель, которые должны испариться до начала горения.

Г. Поверхности с механическим удалением теплоносителя. Естественное течение пленок по поверхности теплообмена целесообразно лишь при использовании жидкостей низкой вязкости. В этом случае течение определяется только гравитационными силами и силами трения. Если же требуется организовать течение пленок высоковязкой жидкости, то для этого используются, например, устройства скребкового типа. Они включают в себя механические системы, приводимые в действие от постороннего источника энергии.

1.1.6. Виды теплообменного оборудования

В данном параграфе теплообменники классифицируются по их конструктивному исполнению и функциональному назначению. Указаны типичные названия основных типов аппаратов и описаны их специфические особенности.

А. Кожухотрубные теплообменники без фазового превращения теплоносителя. Большинство теплообменников без «огиевого» обогрева, работающих на теплоносителях без фазовых превращений, представляют собой кожухотрубные аппараты с внутренними перегородками. Это означает, что один из теплоносителей движется внутри прямых или волнистых труб, другой — в межтрубном пространстве, обтекая эти трубы. Весь аппарат заключен в единый кожух, течение теплоносителя организуется с помощью перегородок. Эти же перегородки обеспечивают дистанционирование труб и в какой-то мере определяют направление течения жидкости.

Используется много типов кожухотрубных теплообменников; конкретный выбор типа аппарата зависит от относительной значимости отдельных факторов и назначения аппарата. К числу этих факторов относятся стоимость изготовления аппарата (капитальные затраты), эксплуатационные расходы (особенно расходы на прокачку теплоносителей), возможность очистки аппарата, склонность к коррозии, разность рабочих давлений сред, опасности, связанные с утечкой теплоносителя, рабочий диапазон температур и предрасположенность к возникновению термических напряжений, возможность возникновения вибраций труб и появления усталостных повреждений.

Конструкции могут различаться и по другим признакам (по числу ходов теплоносителя в трубах, изменению направления движения теплоносителя, наличию перегородок в межтрубном пространстве и т. д.).

Не все теплообменники, работающие на однофазных теплоносителях, кожухотрубные. В пищевой и фармацевтической промышленности используются теплообменники, состоящие из более или менее плоских пластин, которые разделяют теплоносители и через которые передается теплота. Подобные пластинчатые теплообменники применяются, когда перепад давлений между двумя потоками не очень велик, а также когда необходима просто осуществляемая очистка поверхностей.

В. Испарители, бойлеры и ребойлеры. Если теплообменник предназначен для перевода одного из теплоносителей из жидкого состояния в парообразное, применяют модифицированный кожухотрубный аппарат. По сравнению с аппаратами без изменения фазового состояния теплоносителя теплообменники, генерирующие пар, обычно снабжают объемами, в которых может быть осуществлена сепарация жидкости и пара.

Если пар генерируется внутри труб, то сепарация

осуществляется либо в верхних коллекторах больших размеров, либо в дополнительных емкостях, соединенных с коллекторами. Если пар генерируется в межтрубном пространстве, то внутри кожуха (корпуса) может быть предусмотрена свободная от труб зона насколько можно большего диаметра. Варианты исполнения могут быть различными: корпус может быть вертикальным или горизонтальным, с внешними опускными трубами, предназначенными для рециркуляции жидкости к нижней части корпуса, или без них. В испарителях с генерацией пара в трубах также часто организуется подобная рециркуляция, которая может быть либо естественной (под действием силы тяжести), либо принудительной (осуществляемой с помощью насоса).

С. Конденсаторы. Гравитационная сепарация жидкости и пара играет важную роль и в обеспечении работы конденсаторов, конструкции которых также весьма многообразны и в большой степени определяются отношением количества конденсирующегося и иконденсирующегося компонентов в потоке охлаждаемой жидкости.

Даже если охлаждаемый поток пара теоретически может быть сконденсирован полностью (например, в паровых конденсаторах электростанций), присосы воздуха могут сделать необходимым отвод части неконденсирующейся фазы. При этом скорости течения должны быть такими, чтобы восходящий поток воздуха не уносил с собой стекающую вниз воду. Это требование обеспечивается устройством соответствующих коридоров между пучками труб. Перегородки в конденсаторе установлены таким образом, чтобы исключить возможность протекания пара по короткому пути от места подачи пара до точки отсоса воздуха.

В конденсаторах электростанций пар обычно конденсируется в межтрубном пространстве, а охлаждающая вода течет по горизонтальным трубам. В технологических аппаратах конденсация обычно происходит внутри труб. В этих случаях трубы обычно выполняют вертикальными.

Д. Градири. Охлаждающая вода, пропускаемая через конденсатор электростанции или используемая в химической установке, часто должна быть охлаждена в свою очередь путем контакта с окружающим воздухом. Для этого используются так называемые градири. В первом приближении их можно классифицировать по признаку наличия или отсутствия непосредственного контакта между воздухом и водой и по способу циркуляции воздуха (естественная циркуляция или прокачка с помощью механических средств).

Наименьшие эксплуатационные расходы достигаются в градириях с естественной тягой. Они имеют высокий корпус, открытый у основания для доступа атмосферного воздуха, поступающего с последним по направлению хода воды к теплообменным поверхностям. Чем выше корпус градири, тем протяженнее путь воздушного потока; однако при этом возрастают капитальные затраты. Таким образом, существует оптимальная с экономической точки зрения высота.

Градири с механической тягой менее высоки, поэтому их строительство дешевле; однако установленные в них вентиляторы для прокачки воздуха потребляют значительное количество электроэнергии, что также определяет необходимость отыскивать оптимальную высоту градири.

Если допустимы потери воды вследствие ее испарения и загрязнение атмосферы влагой, а подпитка не ограничена, то воздух может непосредственно контактировать с водой. В пользу такого решения говорят следующие соображения. Использование скрытой теплоты парообразования увеличивает охлаждающую способность того же самого количества воздуха. Кроме того, в градириях с естественной тягой из-за низкой относительной молекулярной массы водяного пара увеличивается результирующая подъемная сила среды. Прямой контакт сред

является общепринятым решением в аппаратах как с механической, так и с естественной тягой.

В градирнях с опосредованным контактом теплоносителей охлаждающая вода отделена от воздуха твердой стенкой, обычно стенкой металлической трубы. Стенка трубы с воздушной стороны часто снабжена ребрами для интенсификации теплопередачи. Сооружение подобных градирен без прямого контакта сред (часто их в отличие от мокрых градирен с прямым контактом теплоносителей называют сухими) обходится дорого, однако эти градирни предотвращают потери воды в атмосферу.

Приведенная выше классификация не охватывает все типы устройств: существуют, например, комбинированные градирни; в некоторых конструкциях используется одновременно естественная и механическая тяга.

Е. Сушильные установки. В некоторых теплообменниках необходимо осуществлять испарение воды (или какой-либо иной жидкости). Этой цели служат упомянутые выше испарители, а также сушильные установки, в которые твердый материал поступает с большим содержанием влаги, а после взаимодействия с потоком должен покинуть аппарат, имея низкое влагосодержание.

Сушильное оборудование очень сильно различается по устройству и способу работы в зависимости от осушаемого материала. Так, порошковое молоко может быть получено распылением жидкого молока в горячих газах — продуктах сгорания топлива; бумага сушится при протягивании ее по поверхности обогреваемого паром вращающегося барабана, при этом над бумагой пропускается воздух; ткань сушится под действием струй пара или воздуха при ее перемещении вдоль конвейера.

Г. Топки. Об использовании продуктов сгорания топлива в воздухе в качестве одного из теплоносителей в теплообменнике уже упоминалось выше. Если сжигание топлива осуществляется внутри теплообменника, а не во внешней камере сгорания (как, например, в газотурбинной установке), теплообменник можно назвать топкой или подогревателем с огневым нагревом.

Теплообменники этого типа различаются по форме в зависимости от рода сжигаемого топлива (газообразное, жидкое или твердое), нагреваемому материалу (им может быть мазут в экранированных трубах топках, ванна расплавленного чугуна, кладка твердых изделий из глины) и производительности установки. Здесь важно подчеркнуть значение радиационного переноса теплоты.

1.1.7. Нестационарная работа теплообменников

А. Переходные процессы в теплообменниках стационарного действия. Хотя это не подчеркивалось, но все же имелось в виду, что все теплообменники, упоминавшиеся

в § 1.1.6, рассчитаны на стационарный режим эксплуатации. Однако работа теплообменника всегда имеет начальный и конечный периоды; кроме того, при промышленной эксплуатации неизбежны переходы от одного стационарного режима к другому. Может оказаться, что продолжительность переходных периодов составит значительную долю полного времени работы теплообменника.

Это одна из причин необходимости количественного анализа нестационарных режимов работы теплообменников, поскольку показатели, определяемые исключительно на основе характеристик стационарных режимов работы, могут существенно расходиться с действительностью.

Существует и другая причина. Часто характеристики теплообменника в периоды его пуска и останова связаны с проблемой безопасности работы установки в целом, особенно если переходный процесс осуществляется в незапланированном порядке, например в результате отключения электропитания. Тогда в результате быстрого изменения температуры могут возникнуть термические напряжения, а при гидравлических ударах, связанных с резким торможением пробок жидкости, — разрушении трубопроводов и их соединений.

В. Периодически работающие теплообменники (регенераторы). Работа некоторых теплообменников по своей сути носит нестационарный характер. Такие теплообменники известны как регенераторы. Их характерной чертой является то, что обменивающиеся теплом жидкости занимают одно и то же пространство поочередно.

Типичным примером является регенератор для промышленной печи нагрева объема стеклянной массы под действием факела над поверхностью стекла. Назначение регенератора — предварительный подогрев воздуха, подаваемого для сжигания топлива, путем отбора части теплоты от продуктов сгорания. Это выполняется поочередным пропусканием воздуха и продуктов сгорания через одну и ту же лабиринтовую кирпичную кладку. При течи продуктов сгорания кирпичи нагреваются, а газ охлаждается. В свою очередь при течи воздуха происходят подогрев воздуха и охлаждение кирпичей. Описанный процесс повторяется периодически.

Для того чтобы подача воздуха в топку была непрерывной, обычно на каждую топку устанавливают по крайней мере два регенератора. Подача воздуха переключается с одного теплообменника на другой клапанами; продукты сгорания в этот период поступают в тот аппарат, который не используется для нагрева воздуха.

Известны два основных типа регенераторов. В одном из них, как в приведенном примере, твердый материал теплообменной насадки остается неподвижным; в другом твердая насадка постоянно вращается и поочередно проходит отсеки, через которые пропускаются греющий и обогреваемый теплоносители.

Раздел 1.2

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕННИКОВ¹

Д. Б. Сполдинг

1.2.1. Введение

В данном разделе представлены количественные соотношения, необходимые для проектирования теплообменного оборудования.

¹ Пер. с англ. Ю. А. Зейгарника.

В § 1.2.2 рассмотрены соответствующие термодинамические параметры. Их описание должно обеспечить эффективное использование большинства расчетных соотношений для теплообменников. Однако читателям, которые имеют дело, скажем, с неидеальными смесями, за дальнейшими разъяснениями придется обратиться к специальным работам.

В § 1.2.3 вводятся и определяются важные параметры, описывающие плотность межфазного теплового потока и плотность потока массы, а также коэффициенты взаимодействия между фазами. Хотя соотношения между плотностью теплового потока и разностью температур, а также между плотностью потока массы и разностью концентраций редко являются чисто линейными, все же оказывается полезным разделить значение соответствующего потока на определяющую разность параметров и получить коэффициенты пропорциональности для расчетных соотношений.

Конструктору необходимо знать используемые коэффициенты. Поскольку они зависят от местных значений скорости теплоносителя, его физических свойств и геометрических характеристик аппарата, необходимы формулы, связывающие эти параметры. Такие соотношения имеются. Однако для эффективного описания различных частных случаев необходимо ввести параметры, входящие в эти формулы. В частности, требуется определить широко используемые безразмерные комплексы, такие, как числа Нуссельта и Стентона. Здесь же приведены некоторые наиболее употребительные формулы.

В § 1.2.5 приведены уравнения сохранения массы и энергии в целом для всего теплообменника. Полученные соотношения являются частью математических основ теории теплообменников. В § 1.2.6 уравнения сохранения записаны по отношению к поперечному сечению аппарата; здесь же получены обыкновенные дифференциальные уравнения для определения характеристик теплообменника.

В § 1.2.7 уравнения сохранения применяются к бесконечно малому по объему элементу аппарата. В результате получается система дифференциальных уравнений в частных производных, которую предстоит решить, если осуществляется более детальный анализ теплообменников, свободный от допущений относительно распределений температуры и скорости теплоносителей по поперечному сечению аппарата. Эти дифференциальные уравнения составляют основу численного анализа теплообменников, обсуждаемого в разд. 1.4.

1.2.2. Термодинамические параметры (краткие сведения)

А. Температура. В рамках принятого в Справочнике подхода температуру достаточно определить как такое свойство вещества, разности которого обуславливают передачу теплоты. Температура — интенсивный параметр. В Справочнике температура обозначена буквой T и измеряется в градусах Кельвина (К) или Цельсия (°С).

В. Удельная внутренняя энергия. Удельная внутренняя энергия u вещества является экстенсивным параметром. Ее значение изменяется в результате передачи теплоты или совершения работы в соответствии с линейным соотношением

$$M \Delta u = Q - W, \quad (1)$$

где M — масса вещества; Δ — приращение параметра; Q — количество теплоты, переданной веществу; W — совершенная внешняя работа. Значения u измеряются в джоулях на 1 кг (Дж/кг).

С. Удельная энтальпия. Удельная энтальпия вещества h — экстенсивный параметр, связанный с удельной внутренней энергией u , давлением p и плотностью ρ соотношением

$$h = u + p/\rho. \quad (2)$$

Как и u , h является функцией двух переменных, например давления и температуры. Измеряется энтальпия в джоулях на 1 кг (Дж/кг).

Давление в данном случае понимается как сила, с

которой материал действует на окружающую среду по нормали к поверхности раздела, отнесенная к единице площади. Единица измерения давления — ньютон на 1 м² (Н/м²). Плотность — это масса материала в единице объема; единица ее измерения — килограммы на 1 м³ (кг/м³).

Удельная энтальпия — параметр, используемый в расчетах теплообменников, входящий в уравнение энергии стационарного потока,

$$M \Delta \left(h + \frac{v^2}{2} + g_n z \right) = \dot{Q} - \dot{W}_s, \quad (3)$$

где $\dot{M}$ — массовый расход, кг/с; Δ , как и прежде, — приращение; $h + v^2/2 + g_n z$ — сумма энтальпии, кинетической энергии и потенциальной энергии в гравитационном поле; $\dot{Q}$ — тепловой поток, подводимый к исследуемой области; $\dot{W}_s$ — мощность на валу, т. е. работа в единицу времени, совершаемая над внешним объектом, например мощность на валу турбины.

Для многих теплообменников существенными величинами в уравнении являются лишь $\dot{M}$, Δh и Q .

Д. Газосодержание (паросодержание). Для двухфазной смеси, например для пароводяной, массовое газосодержание x представляет собой массу газовой (паровой) фазы в единице массы смеси. Оно измеряется в килограммах на 1 кг (кг/кг) и может принимать значения от 0 до 1.

Удельная энтальпия двухфазной смеси связана с удельной энтальпией жидкости и пара на линии насыщения h_l и h_g соответственно следующим соотношением:

$$h = h_l(1-x) + h_g(x). \quad (4)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для обратных плотностей

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-x}{\rho_l} + \frac{x}{\rho_g}, \quad (5)$$

где ρ_l и ρ_g — соответственно плотности жидкости и пара на линии насыщения. Следующее соотношение между h и ρ можно записать как следствие

$$x = \frac{h - h_l}{h_g - h_l} = \frac{1/\rho - 1/\rho_l}{1/\rho_g - 1/\rho_l}. \quad (6)$$

Это соотношение полезно иметь в виду при проектировании котлов. Заметим, что величина x была выше определена через параметры двух фаз, присутствующих в заданном объеме. Однако иногда используется другое определение, связанное с отношением скоростей фаз. Рассмотрим движущуюся в канале двухфазную смесь и будем считать, что массовый расход жидкости $\dot{M}_l$, а массовый расход газа $\dot{M}_g$. Тогда газосодержание потока $\dot{x}$

$$\dot{x} = \frac{\dot{M}_g}{\dot{M}_l + \dot{M}_g}, \quad (7)$$

$\dot{x}^*$ будет иметь то же значение, что и x , только лишь тогда, когда обе фазы движутся с одинаковыми скоростями. Временами такая ситуация действительно имеет место, например если одна фаза, распределенная в другой, имеет очень тонкую дисперсность; однако эти случаи являются исключениями.

В некоторой части литературы по двухфазным потокам термин «газосодержание» используется для обозначения массового (расходного) газосодержания потока. Рекомендуется в каждом конкретном случае специально проверять, с каким определением (x или $\dot{x}$) читатель имеет дело.

* Величину x часто называют истинным объемным паросодержанием. — Прим. пер.

Е. Массовая доля. Состав смесей различных химических веществ можно описать многими способами. Для расчета теплообменников наиболее удобным понятием является массовая доля x_i различных компонентов. Она определяется как масса i -го компонента, приходящаяся на единицу массы смеси, и измеряется в килограммах на 1 кг (кг/кг).

Из определения x_i следует, что

$$\sum_i x_i = 1. \quad (8)$$

Полезно заметить, что для целей расчета теплообменников удельную энтальпию смеси иногда достаточно точно можно записать в виде

$$h = \sum_i x_i h_i, \quad (9)$$

где h_i — удельная энтальпия i -й компоненты при ее парциальном давлении. Это соотношение справедливо для идеальных смесей, например смесей химически стойких газов при давлениях, заметно меньших критического. Однако в большинстве общих случаев зависимость h от x_i нелинейна.

Г. Удельные теплотемкости. Составители настоящего Справочника не ставили перед собой задачу дать все сведения по термодинамике, в которых нуждается конструктор теплообменников; они считали необходимым лишь обновить в его памяти наиболее общие положения. Поэтому применительно к удельным теплотемкостям при постоянных объеме и давлении здесь приведено лишь их определение и указано, что их часто можно рассматривать для определенного вещества как постоянные величины.

Указанные удельные теплотемкости определяются соответственно следующим образом:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (10)$$

и

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad (11)$$

где в правых частях уравнений указано дифференцирование по температуре при постоянных v или p .

В общем случае c_v и c_p для любого вещества — функции температуры и давления. Однако часто они являются слабо изменяющимися параметрами в диапазоне температур, характерном для данного теплообменника, и этими изменениями часто можно пренебречь.

Запишем удельную энтальпию одофазного вещества в следующем виде:

$$h = c_p (T - T_0), \quad (12)$$

где T_0 — произвольно выбранная температура.

Для идеальной смеси удельная энтальпия

$$h = \sum_i x_i c_{p,i} (T - T_{0,i}), \quad (13)$$

где $c_{p,i}$ и $T_{0,i}$ — величины c_p и T_0 для i -го компонента.

Это соотношение является также полезным рабочим приближением и для неидеальных смесей, однако в этом случае необходимо использовать значения $c_{p,i}$.

В отдельных случаях для вещества, удельная теплотемкость которого изменяется с температурой, полезно ввести среднюю удельную теплотемкость $c_{p,1,2}$

$$\bar{c}_{p,1,2} = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT / (T_2 - T_1), \quad (14)$$

которая, естественно, имеет то же значение, что и

$$\bar{c}_{p,1,2} \equiv (h_2 - h_1) / (T_2 - T_1). \quad (15)$$

Поскольку стационарные течения, при описании которых целесообразнее использовать c_p , а не c_v , преобладают на практике, то иногда обозначение c применяется без индекса; при этом имеется в виду удельная теплотемкость при постоянном давлении c_p .

Г. Равновесие между фазами. На практике в зонах, непосредственно примыкающих к любой из поверхностей стенки, разделяющей жидкость и пар или две жидкости, теплоносители всегда могут считаться находящимися в термодинамическом равновесии, даже в том случае, если через поверхность раздела осуществляется передача теплоты и массы. Основанием для этого является то обстоятельство, что хотя при конечных значениях потоков обязательно существует некоторое отклонение от равновесия, реальные значения этих отклонений чаще всего пренебрежимо малы. Естественные исключения из этого правила наблюдаются при очень низких давлениях (намного ниже давлений, характерных, например, для любого парового конденсатора), при конденсации жидких металлов и при очень быстрых переходных процессах.

Следствиями наличия равновесия являются равенство температур газа и жидкости непосредственно у каждой из поверхностей и наличие определенной связи массовых долей каждого из компонентов смеси по обеим сторонам поверхности раздела, а также с температурой и давлением

$$x_{i,g} = x_{i,l}(x_i, l, p, T), \quad (16)$$

где $x_{i,g}$ и $x_{i,l}$ — массовые доли i -го компонента соответственно с газовой и жидкостной сторон поверхности раздела; p и T — давление и температура.

На рис. 1 показано распределение массовой доли пара в воздухе в зоне, примыкающей к чистой воде. Поскольку для воды $x_{i,l}$ по определению равно 1, то соотношение (16) примет вид

$$x_{H_2O,g} = x_{H_2O,g}(p, T). \quad (17)$$

Уравнение (17) можно записать в более конкретном виде, если принять молекулярные массы водяного пара и воздуха равными соответственно 18,0 и 29,0,

$$x_{H_2O,g} = \left(\frac{29,0}{18,0} \frac{p}{p_{H_2O}} - \frac{11,0}{18,0} \right)^{-1}, \quad (18)$$

где p_{H_2O} — парциальное давление водяного пара, находящегося в контакте с жидкой водой, при заданной температуре (это значение берут из таблиц водяного пара).

При $p_{H_2O} = p$ $x_{H_2O,g} = 1$, поскольку при этом рабочая температура равна температуре кипения. При более низких значениях p_{H_2O} значение $x_{H_2O,g} < 1$. Уравнение (18) вместе с зависимостью $p_{H_2O}(T)$ из таблиц водяного пара необходимо для проектирования мокрых градирен, сушильных установок и паровых конденсаторов.

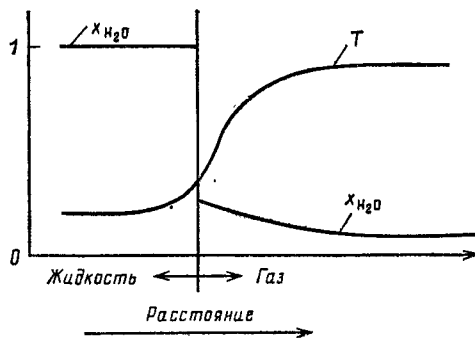


Рис. 1. Распределения T и x_{H_2O} по нормали к поверхности раздела между водой (слева) и воздухом (справа)

Н. Законы сохранения. Уравнение энергии для стационарного течения (3) используется для анализа теплообменников. Соответствующее уравнение сохранения i -го химического компонента имеет вид

$$\Delta(\dot{M}x_i) = \dot{M}_i, \quad (19)$$

где $\dot{M}$, как и ранее, обозначает полный массовый расход всех компонентов; $\dot{M}_i$ — массовый расход i -го компонента. В этом соотношении принято, что все компоненты смеси движутся с одинаковой линейной скоростью, т. е. диффузия в осевом направлении отсутствует. В отличие от уравнения (3) в уравнении (19) величина $\dot{M}$ стоит в скобках, на которые распространяется действие оператора Δ , поскольку значение $\dot{M}$, как правило, изменяется в результате массопередачи. Кроме того, существует еще и уравнение сохранения полной массы

$$\dot{M} = \sum_i \dot{M}_i. \quad (20)$$

Эти уравнения сохранения вместе с уравнениями для потоков теплоты и массы составляют основу теории теплообменников.

Следует заметить, что параметры h и x сначала были введены как локальные величины, а затем использовались в уравнениях (3) и (19) как параметры, характеризующие поток в канале в целом. Поскольку значения h и x чаще всего неоднородны по сечению потока, то используемые в двух приведенных уравнениях значения h и x являются, строго говоря, усредненными величинами.

1.2.3. Соотношения для плотностей тепловых потоков и потоков массы

А. Коэффициенты теплоотдачи и коэффициенты теплопередачи. Запишем еще раз уравнение (3), § 1.1.3

$$\dot{q} = U(T_1 - T_2), \quad (1)$$

где $\dot{q}$ — плотность теплового потока от теплоносителя 1 к теплоносителю 2, которые характеризуются средними по сечению температурами T_1 и T_2 . Тепловой поток отнесен к единице поверхности, разделяющей теплоносители; U — коэффициент теплопередачи.

Теперь ответим на вопросы, что собственно подразумевается под поверхностью теплообмена, разделяющей теплоносители, и какова связь между результирующим коэффициентом теплопередачи U и индивидуальными термическими сопротивлениями, обусловленными твердой

стенкой, разделяющей две жидкости (если она имеется), отложениями загрязнений, которые могут прилипать к поверхностям стенки, и текучими с малой скоростью пристенными слоями жидкости, контактирующими с указанными отложениями или, если они отсутствуют, непосредственно со стенкой.

На рис. 1 показаны изменения в степени наклона профиля температуры на различных участках. Эти изменения происходят в точках a (внутренняя поверхность внутренних отложений), b (наружная поверхность внутренних отложений) и одновременно внутренняя поверхность стенки трубы и одновременно внутренняя поверхность наружных отложений) и d (наружная поверхность наружных отложений). Можно также заметить, что температуры жидкостей лежат выше T_1 и ниже T_2 , поскольку T_1 и T_2 определены как среднемассовые, т. е. усредненные по поперечным сечениям каналов. При этом каждый элемент сечения взят с весом, равным удельной теплоемкости c , умноженной на местную массовую скорость ρu . Таким образом,

$$T_{1 \text{ или } 2} = \left(\frac{\int c \rho u T dS}{\int \rho u c dS} \right)_{1 \text{ или } 2}, \quad (2)$$

причем усреднение ведется по всему поперечному сечению каждого из каналов.

Пусть теперь α_{1a} и α_{d2} представляют коэффициенты теплоотдачи соответственно с внутренней и внешней сторон трубы; α_{ab} и α_{cd} — коэффициенты переноса теплоты в слоях отложений, а α_{bc} — коэффициент переноса теплоты в стенке самой трубы. Коэффициенты α_{1a} и α_{d2} могут быть рассчитаны по одной из формул, которые будут рассмотрены позднее, а α_{ab} , α_{bc} и α_{cd} определяются толщиной соответствующего материала δ и его теплопроводностью λ .

$$\alpha_{ab} = \lambda_{ab} / \delta_{ab}; \quad (3)$$

$$\alpha_{bc} = \lambda_{bc} / \delta_{bc}; \quad (4)$$

$$\alpha_{cd} = \lambda_{cd} / \delta_{cd}. \quad (5)$$

Каждый коэффициент теплоотдачи необходимо отнести к соответствующей поверхности A . Если это сделать и при этом учесть, что тепловой поток, проходящий через все рассматриваемые элементы, одинаков¹, получим

$$UA(T_1 - T_2) = \alpha_{1a}A_{1a}(T_1 - T_a) = \alpha_{ab}A_{ab}(T_a - T_b) = \alpha_{bc}A_{bc}(T_b - T_c) = \alpha_{cd}A_{cd}(T_c - T_d) = \alpha_{d2}A_{d2}(T_d - T_2). \quad (6)$$

Здесь A_{ab} , A_{bc} , A_{cd} можно рассматривать как среднearифметические внутренней и внешней поверхностей рассматриваемых материалов; A_{1a} и A_{d2} лучше всего взять как площади поверхностей, соответствующих точкам a и d . Площадь поверхности A (без индекса), связанная с определением U , можно определить произвольно, например ее можно принять равной любой из упомянутых поверхностей.

Исключая в уравнениях (6) T_a , T_b , T_c и T_d , приходим к следующему важному соотношению между коэффициентом теплопередачи U и индивидуальными коэффициентами теплоотдачи:

$$U = \left(\frac{A}{\alpha_{1a}A_{1a}} + \frac{A}{\alpha_{ab}A_{ab}} + \frac{A}{\alpha_{bc}A_{bc}} + \frac{A}{\alpha_{cd}A_{cd}} + \frac{A}{\alpha_{d2}A_{d2}} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Очевидно, что это соотношение становится более наглядным, если учесть, что величина, обратная произведению

¹ Это справедливо только для стационарного процесса теплопередачи. — Прим. ред.

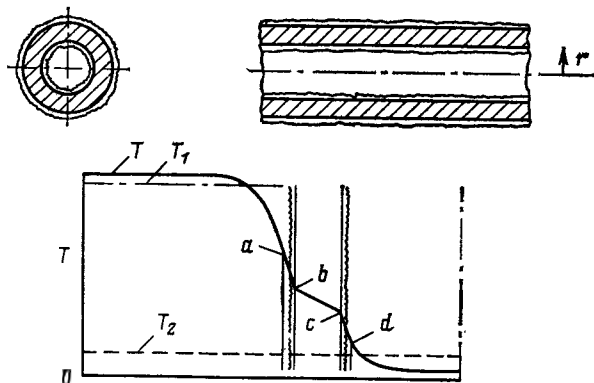


Рис. 1. Распределение температуры в окрестности стенки трубы при наличии отложений загрязнений на ее внутренней и внешней поверхностях. Теплота передается от жидкости, текущей внутри трубы и имеющей среднюю температуру T_1 , к жидкости снаружи трубы со средней температурой T_2 .

UA, является результирующим сопротивлением передаче теплоты, которое равно сумме индивидуальных термических сопротивлений $(\alpha_{ia}A_{ia})^{-1}$, $(\alpha_{ab}A_{ab})^{-1}$ и т. д.

При передаче теплоты через плоскую стенку площадь всех поверхностей одинакова. Тогда уравнение (7) сводится к соотношению

$$U = \left(\frac{1}{\alpha_{ia}} + \frac{1}{\alpha_{ab}} + \frac{1}{\alpha_{bc}} + \frac{1}{\alpha_{cd}} + \frac{1}{\alpha_{de}} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Оно часто используется и для цилиндрических теплопередающих поверхностей, причем в качестве теплопередающей поверхности, к которой относятся все коэффициенты теплоотдачи, произвольно выбирается одна из поверхностей теплоотдачи, например, A_c .

В. Коэффициенты массоотдачи и коэффициенты массообмена. Хотя коэффициент массообмена β был введен выше по аналогии с коэффициентом теплопередачи U , напрашивающееся предположение, что β также является неким результирующим коэффициентом, тогда не было опровергнуто. Это целесообразно сделать сейчас. Суть дела в том, что, хотя параметр β можно трактовать как некую результирующую величину, это редко приносит пользу из-за различий в ролях, которые играют концентрации и температуры двух фаз в соответствующих процессах при наличии поверхности раздела¹.

Как правило, когда массообмен осуществляется через поверхность раздела фаз, следует рассматривать лишь две составляющих сопротивления процессу: сопротивление диффузии из объема первой фазы к поверхности раздела и далее в объем второй фазы.

Для конкретности предположим, что первой фазой является газ, второй — жидкость, и определим плотность потока i -го компонента смеси $\dot{m}_i$ на единицу площади. Эта величина может быть связана с соответствующими коэффициентами массоотдачи $\beta_{i,g}$ и $\beta_{i,l}$ со стороны газа и жидкости

$$\dot{m}_i = \beta_{i,g} \rho_g (x_{i,1} - x_{i,g}); \quad (9)$$

$$\dot{m}_i = \beta_{i,l} \rho_l (x_{i,l} - x_{i,2}). \quad (10)$$

Здесь $x_{i,g}$ и $x_{i,l}$ — массовые доли i -го компонента в газовой и жидкой фазах непосредственно на поверхности раздела фаз; $x_{i,1}$ и $x_{i,2}$ — усредненные по потоку массовые доли компонентов в соответствующих фазах; ρ_g и ρ_l — плотности фаз при параметрах на поверхности раздела.

Далее нужно ввести параметр, иногда называемый числом Генри He , который определяет отношение массовых долей компонентов в газовой и жидкой фазах, находящихся в термодинамическом равновесии:

$$He = x_{i,g} / x_{i,l}. \quad (11)$$

С помощью этого параметра из уравнений (9) и (10) можно исключить $x_{i,g}$ и $x_{i,l}$. В результате имеем

$$\frac{\dot{m}_i}{x_{i,1} - He x_{i,2}} = \left(\frac{1}{\beta_g} + \frac{He}{\beta_l} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Выражение, стоящее в правой части, несомненно, можно рассматривать как своего рода результирующий коэффициент массопереноса. Однако следует заметить, что, для того чтобы с его помощью рассчитать плотность потока массы, он должен быть умножен не на разность

$x_{i,1} - x_{i,2}$, а на $x_{i,1} - He x_{i,2}$. Таким образом, это не совсем тот результирующий коэффициент, о котором шла речь в § 1.1.3.

К счастью, во многих задачах существенную роль играет лишь сопротивление с газовой стороны. Поэтому дальнейшее обсуждение этой проблемы нецелесообразно.

С. Совместный тепло- и массообмен. Ниже рассмотрена система воздух — водяной пар — вода. Необходимо рассчитать плотность теплового потока при одновременном протекании процессов тепло- и массообмена на границе раздела воздух — вода.

Для этого нужно одновременно решать уравнения, описывающие теплоотдачу со стороны жидкости, теплоотдачу с газовой стороны, массоотдачу с газовой стороны, условие равновесия состава смеси с газовой стороны и уравнение энергии, учитывающее скрытую теплоту испарения.

Эти пять уравнений позволяют определить следующие пять неизвестных: $\dot{q}_l$ — плотность теплового потока в жидкой фазе; $\dot{q}_g$ — плотность теплового потока в газовой фазе; $\dot{m}_{H_2O}$ — скорость испарения (или конденсации); $x_{H_2O,g}$ — массовую долю¹ водяного пара у поверхности раздела; $T_{g,1}$ — температуру поверхности раздела.

Этот вопрос подробно проанализирован в [1], где рассмотрен также и излагаемый ниже упрощенный подход к задаче. Его основные положения:

1. Коэффициент теплоотдачи со стороны воды в градирнях и сушильных установках обычно значительно выше коэффициента теплоотдачи с газовой стороны; поэтому термическое сопротивление со стороны воды относительно мало.

2. Наибольший интерес представляет плотность теплового потока к жидкости или от нее $\dot{q}_l$.

3. Если удельные энтальпии воздуха и воды при 0°C приняты равными нулю, то уравнения тепло- и массопереноса сводятся к соотношению

$$\dot{q}_l = \beta_g \rho_g (h_1 - h_2), \quad (13)$$

где h_1 — удельная энтальпия воздушного потока; h_2 — удельная энтальпия воздуха, насыщенного водяным паром при температуре водяного потока T_2 .

4. Выражение для h_1 имеет вид

$$h_1 = [(1 - x_{H_2O,1}) c_{p,air} + x_{H_2O,1} c_{p,steam}] (T_1 - T_0) + x_{H_2O,1} \Delta h_0, \quad (14)$$

где T_0 принята равной 0°C; Δh_0 — скрытая теплота испарения воды при этой температуре.

С другой стороны, выражение для h_2 имеет вид

$$h_2 = [(1 - x_{H_2O,sat,2}) c_{p,air} + x_{H_2O,sat,2} \times c_{p,steam}] (T_2 - T_0) + x_{H_2O,sat,2} \Delta h_0, \quad (15)$$

где $x_{H_2O,sat,2}$ — массовая доля пара в насыщенном воздухе при температуре T_2 .

5. Значение $\beta_g \rho_g = \alpha_g / c_{p,air}$.

Анализ (13) — (15) показывает, что плотность теплового потока к воде увеличивается с ростом температуры

¹ В данном справочнике параметр x_{H_2O} означает массу водяного пара в единице массы смеси. Однако общепринято характеризовать состав смеси отношением массы H_2O к массе воздуха (часто называемого сухим воздухом). Преимущество такого подхода с практической точки зрения в том, что масса воздуха всегда остается неизменной (воздух слабо растворим в воде), тогда как полная масса газовой смеси, проходящей, например, через градирню, меняется с изменением содержания влаги. По этой же причине в специальной литературе удельная энтальпия приводится в джоулях на 1 г сухого воздуха. Этот подход не описывается в первой части Справочника, поскольку его преимущества не оправдывают отхода от стандартных термодинамических представлений. Однако при чтении специальной литературы следует обращать внимание на используемые в ней единицы измерений.

и содержания пара в воздухе, и поэтому она не равна нулю, если температуры двух фаз равны.

Впервые указание на приближенную справедливость уравнений для воздуха и воды в условиях, близких к атмосферным, по-видимому, содержались в [2].

Д. Общие замечания. Методы описания с использованием коэффициентов теплопередачи и массообмена столь удобны и настолько напоминают методы теории электрических цепей, что существует некоторая опасность того, что их справедливость может быть расценена как неограниченная. Поэтому следует сделать несколько замечаний относительно этих ограничений.

1. Необходимо указать, что уравнения, приведенные в п. С, свидетельствуют о некотором нарушении теории, базирующейся на использовании коэффициента теплопередачи, поскольку тепловой поток (q жидкости) не пропорционален только разности температур. В качестве других примеров можно указать на задачи, связанные не только с фазовыми переходами, но и с химической реакцией.

2. Значения коэффициентов лишь в наиболее благоприятных ситуациях не зависят от разности значений параметров, на которую эти коэффициенты умножаются. Однако хорошо известно, например, что в случае теплоотдачи при естественной конвекции коэффициенты возрастают с увеличением приложенной разности температур. В случае массообмена нелинейности оказываются еще более существенными, что подробно рассмотрено в [1].

3. Имеются случаи, когда неоднородности температуры или концентрации вдоль поверхности раздела столь велики, что оказывают влияние на коэффициенты переноса и даже на их знак. В этих случаях лучше иметь дело непосредственно с плотностями потоков и разностями параметров (полностью исключая коэффициенты переноса из расчетов).

4. Полезно обобщить понятие коэффициента переноса, введя новый параметр — проводимость g_ϕ , которая связана с потоком следующими соотношениями:

$$\dot{m}_n = g_\phi B_\phi; \quad (16)$$

$$B_\phi = \frac{\phi_b - \phi_i}{\phi_i - \phi_t}. \quad (17)$$

Здесь B_ϕ — безразмерная «движущая сила» для процесса массопереноса; ϕ — некоторая накопленная характеристика (параметр) жидкости — концентрация или удельная энтальпия. Индексы b, i, t соответственно означают среднемассовые параметры потока жидкости, параметры на поверхности раздела со стороны этого потока и параметры переносимого вещества. Плотность потока $\dot{m}_n$ считается положительной, если поток направлен от поверхности раздела в объем жидкости.

Полное описание применения уравнений (16) и (17) изложено в [1]. Здесь g_ϕ измеряется в $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$; в простых случаях теплообмена g_ϕ можно интерпретировать как α/c_p , при этом параметром ϕ является удельная энтальпия h , а $q = \dot{m}_n (h_i - h_t)$.

В качестве g_ϕ можно использовать произведение $\beta_i \rho_i$, при этом роль ϕ играет x . Это допустимо при значениях $x_i \ll 1$, т. е. если смесь является слабым раствором.

Многие задачи удобнее описывать с помощью проводимости g_ϕ , а не α или β , поскольку g_ϕ легко придать физический смысл, считая ее плотностью рейнольдсова потока, а также потому что для нее можно получить приближенные численные значения при меньшем объеме вычислительных работ.

Под рейнольдсовым потоком понимается такой поток массы вещества из потока жидкости к поверхности раздела (отнесенный к единице площади этой поверхности и взятый в единицу времени), который, будучи приведенным в равновесное состояние с веществом на этой по-

верхности раздела, обеспечит реально существующий перенос теплоты и массы. Именно такой переход в равновесное состояние по скорости, температуре и концентрации имеется в виду, когда говорят о наличии хорошо известной аналогии Рейнольдса.

Другим существенным свойством g_ϕ является то, что она равна коэффициенту обмена субстанции ϕ , деленному на толщину неподвижной пленки жидкости, которая создает основное сопротивление тепло- и массопереносу. Коэффициент обмена равен коэффициенту диффузии, помноженному на плотность, если под ϕ понимается концентрация, или коэффициенту теплопроводности, деленному на удельную теплоемкость, если под ϕ понимается энтальпия. Понятие неподвижной пленки является базовым для многих книг по массообмену в химической технологии и имеет важный физический смысл. В этом плане диффузия через неподвижную пленку иногда называется стефановским потоком.

1.2.4. Зависимости для расчета коэффициента теплоотдачи

А. Введение. Независимо от того, какой параметр используется (α , β или g_ϕ), основная проблема состоит в описании зависимостей, позволяющих рассчитывать численные значения коэффициентов взаимодействия. Эти коэффициенты зависят от свойств жидкости, скорости обтекания поверхности жидкостью, формы и размеров разделяющей стенки и других факторов.

Таким образом, цель состоит в том, чтобы получить формулы или системы формул типа

$$\alpha = \alpha(\lambda, L, c_p, \rho, \nu, \eta, \Delta T \dots), \quad (1)$$

где $\alpha(\dots)$ означает, что α является функцией параметров, представленных в скобках, т. е. теплопроводности, линейного размера, удельной теплоемкости, плотности, скорости, вязкости, разности температур и т. д.

Такие формулы существуют, хотя еще не в достаточном количестве, и для компактности выражения и максимальной общности их обычно записывают в безразмерном виде с использованием таких параметров, как числа Стентона и Рейнольдса. Поэтому для облегчения понимания этих формул ниже даны определения и проведен анализ наиболее важных из этих параметров.

В. Число Стентона¹. Число Стентона характеризует соотношение проводимости и массовой скорости потока. Таким образом,

$$\text{St}_\phi = g_\phi / \dot{m}, \quad (2)$$

где $\dot{m}$ — массовая скорость жидкости, обтекающей поверхность (произведение плотности ρ на скорость u), а число Стентона St_ϕ отнесено к параметру ϕ .

Обычно число Стентона используют для описания только теплообмена. Тогда его можно определить следующим образом:

$$\text{St} = \alpha / (c_p \dot{m}). \quad (3)$$

Указанное соотношение является обычным. На практике значения числа Стентона часто лежат в диапазоне 0,001—0,01. Физически они дают отношение плотности рейнольдсова потока к плотности потока массы (массовой скорости) в основном течении.

Относительно всех вводимых параметров необходимо сделать следующее замечание. Если свойства жидкости в рассматриваемом поле переменны, то недостаточно просто, скажем, привести значение удельной теплоемкости c_p , нужны еще сведения, при каких параметрах она бралась (например, рассчитывалась при среднемассовых параметрах потока).

¹ Во французской научно-технической литературе для параметра, называемого в данном Справочнике числом Стентона, применяется термин «число Марголиса».

Действительно, недостаточно просто упомянуть массовую скорость потока, не уточнив при этом, что имеется в виду: полный массовый расход жидкости через канал, деленный на поперечное сечение канала, или максимальное значение массовой скорости в поперечном сечении, или массовая скорость на большом удалении вверх по потоку от рассматриваемой точки и т. д. Какие-либо универсальные, согласованные принципы описания таких вспомогательных моментов определения параметров отсутствуют¹.

С. Числа Нуссельта и Шервуда. Коэффициент теплоотдачи α входит также в другой безразмерный параметр, число Нуссельта

$$Nu = \alpha L / \lambda, \quad (4)$$

где L — характерный линейный размер аппарата; λ — коэффициент теплопроводности жидкости.

Простым примером формулы для числа Нуссельта является выражение

$$\alpha D / \lambda = 2. \quad (5)$$

Эта формула справедлива для теплоотдачи к поверхности сферы диаметром D от бесконечного неподвижного объема жидкости с коэффициентом теплопроводности λ , в которой эта сфера погружена. Этой формулой пользуются при расчете скорости роста температуры и последующего испарения капель, когда струя этих капель впрыскивается в горячий газ.

Аналогичный числу Нуссельта параметр для массообмена называется числом Шервуда

$$Sh = \beta L / \delta, \quad (6)$$

где δ — коэффициент диффузии рассматриваемого компонента.

Значения чисел Нуссельта и Шервуда изменяются более широко, чем значения числа Стентона. Обычно они превышают единицу и могут быть оценены отношением L к толщине ламинарного слоя, прилегающего к поверхности раздела (толщине так называемой неподвижной пленки), который оказывает сопротивление процессу переноса в целом в той же степени, что и действительное течение. Как правило, толщина этой пленки значительно меньше характерного размера.

Числа Нуссельта и Шервуда, если их выразить через соответствующую проводимость g_F , эквивалентны параметру $g_F L / \Gamma_F$, где Γ_F — коэффициент обмена для субстанции F . Коэффициент обмена Γ_F , кг/(м·с), равен λ / c_p , если речь идет о теплообмене, и $\rho \delta$, если рассматривается массообмен. Следует отметить, что такую же размерность имеет динамическая вязкость.

Д. Коэффициент сопротивления трения f . Безразмерным параметром, часто используемым в исследованиях теплообмена, является коэффициент сопротивления трения f

$$f = \tau / (\rho v^2) = \tau / (\rho \dot{m}), \quad (7)$$

где τ — касательное напряжение, действующее в жидкости на ее границе; ρ — плотность жидкости; v — скорость жидкости. Для параметра f в литературе можно встретить другие обозначения, например $c_f/2$. Более того, этому коэффициенту могут отвечать численные значения,

отличающиеся в 2, 4, 8 и т. д. раз¹; поэтому читатель должен быть внимателен².

Коэффициент сопротивления трения во многом аналогичен числу Стентона. Действительно, известную аналогию Рейнольдса между теплообменом и трением можно выразить равенством

$$St \approx f, \quad (8)$$

в котором, как и всюду далее, f определяется уравнением (7).

Это приближенное равенство наиболее близко к истине при течении газа вдоль гладкой стенки. Если стенка шероховатая, то значение числа St становится меньше f . Такая картина наблюдается для неметаллических теплоносителей; для жидких металлов значение числа St обычно значительно больше f .

Уравнение (8), несмотря на его приближенный характер, полезно для конструкторов, поскольку дает значения St того же порядка величины, что и истинные значения, но при очень малом объеме вычислительных работ.

Е. Числа Рейнольдса и Пекле. Если массовую скорость потока m умножить на характерную длину и разделить на коэффициент вязкости жидкости η , то получается безразмерный параметр, носящий название числа Рейнольдса,

$$Re = \dot{m} L / \eta. \quad (9)$$

Число Рейнольдса характеризует соотношение инерционных и вязкостных сил, поскольку если $\dot{m} = \rho v$, то уравнение (9) можно переписать в виде

$$Re = \frac{\rho v^2}{\eta \nu / L}, \quad (10)$$

где числитель характеризует инерционные силы, а знаменатель — вязкостные.

Число Рейнольдса играет важную роль во всех формулах, учитывающих гидродинамику реальных жидкостей. Например, для полностью развитого течения в гладкой трубе коэффициент сопротивления трения описывается формулой

$$f = 8 / Re \quad (11)$$

при ламинарном течении и формулой

$$f \approx 0,026 Re^{-0,2} \quad (12)$$

при турбулентном течении, где входящий в число Рейнольдса размер L — диаметр трубы.

Если в знаменателе формулы (9) вместо η подставить Γ_F , то получим безразмерный параметр, который будет называться числом Пекле Pe_F для субстанции F

$$Pe_F = \dot{m} L / \Gamma_F. \quad (13)$$

Обычно число Пекле используют только при описании теплообмена. В этом случае оно имеет вид

$$Pe = c_p \dot{m} L / \lambda. \quad (14)$$

¹ Так называемый коэффициент сопротивления трения Фаннинга определяется как $\tau / (\rho v^2/2)$ т. е. отличается в 2 раза от упомянутого выше коэффициента f . С другой стороны, у Шлихтинга [41] используется безразмерный коэффициент сопротивления трения λ , отличающийся в 4 раза от коэффициента Фаннинга и соответственно в 8 раз от f . Наиболее широко, по-видимому, используется коэффициент сопротивления трения Фаннинга, в частности он применяется в диаграмме (рис. 1), описывающей сопротивление стационарному течению жидкости в трубе круглого сечения. По абсциссе на диаграмме отложено число Рейнольдса, параметр e/D — отношение размера шероховатости e к диаметру трубы D .

² Отличия в численных значениях используемых коэффициентов сопротивления трения вызваны применением различных линейных масштабов, а также кинетической энергии потока $\rho v^2/2$ или ее удвоенного значения ρv^2 при их определении, а также отличающихся линейных масштабов при определении числа Рейнольдса, входящего в формулы для коэффициента сопротивления трения. — *Прим. ред.*

¹ В советской и зарубежной литературе по тепломассообмену чаще всего в качестве масштаба массовой скорости, входящего в определение числа Стентона, используются либо массовый расход теплоносителя через сечение, отнесенный к площади поперечного сечения канала (если рассматривается теплообмен в трубах и каналах), либо массовая скорость во внешнем потоке (если рассматривается теплообмен в пограничных слоях при внешнем обтекании тел). — *Прим. ред.*

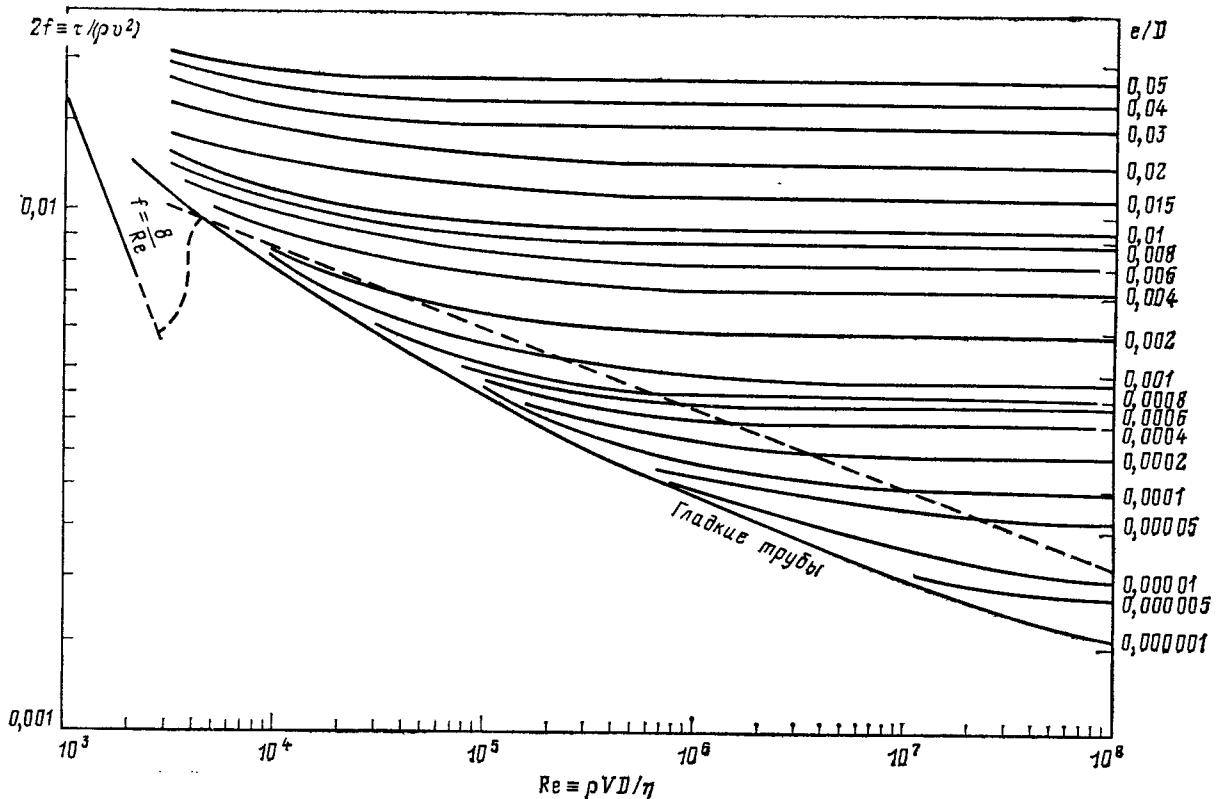


Рис. 1. Зависимость коэффициента сопротивления трения Фаннинга от числа Рейнольдса

Как число Рейнольдса, так и число Пекле изменяются в очень широких пределах, например в диапазоне от 10 до 10^6 . Несомненно, что определение L также влияет на их значения.

В отдельных случаях числа Нуссельта или Стентона можно связать только с числом Пекле. Так, теплоотдача при ламинарном течении жидкого металла к плоской пластине описывается соотношением

$$Nu = 0,565 Re^{1/2}, \quad (15)$$

где в качестве характерного размера для чисел Nu и Re используется длина пластины. Чаще всего на интенсивность теплоотдачи влияют как число Рейнольдса, так и число Пекле.

Г. Числа Прандтля, Шмидта и Льюиса. Отношения коэффициентов, описывающих свойства переноса импульса, теплоты и массы в жидкости, названы специальными терминами и обозначаются следующим образом.

Отношение коэффициентов переноса импульса и теплоты — число Прандтля

$$Pr = \frac{\eta}{\lambda/c_p} = \frac{c_p \eta}{\lambda}; \quad (16)$$

отношение коэффициентов переноса импульса и массы — число Шмидта

$$Sc = \frac{\eta}{\rho \delta} = Pr Le; \quad (17)$$

отношение коэффициентов переноса теплоты и массы — число Льюиса¹

$$Le = \frac{\lambda/c_p}{\rho \delta} = \frac{Pr}{Sc}. \quad (18)$$

¹ Иногда число Льюиса определяют как величину, обратную приведенной здесь.

Для газов все эти параметры примерно равны единице, поскольку перенос теплоты, массы и импульса осуществляется в результате молекулярного движения. Для неметаллических жидкостей числа Прандтля и Льюиса больше единицы, а число Шмидта соответственно еще больше. Причина в том, что перенос импульса в жидкости осуществляется легче, чем перенос теплоты, а диффузия протекает труднее.

Выше указывалось, что на числа Нуссельта и Стентона, как правило, влияют и число Рейнольдса, и число Пекле. Однако обычно в соответствующих формулах стоит только число Рейнольдса, а вместо числа Пекле включают числа Прандтля или Шмидта. Эта подстановка возможна потому, что оба этих числа представляют собой число Пекле, деленное на число Рейнольдса¹. Ниже приводятся некоторые соотношения для числа Нуссельта.

При ламинарном обтекании жидкостью с умеренным числом Pr плоской пластины

$$Nu_{loc} = 0,332 Re^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (19)$$

При турбулентном обтекании жидкостью с умеренным числом Pr плоской пластины

$$Nu_{loc} \approx 0,0295 Re^{0,8} Pr^{1/3}. \quad (20)$$

Для полностью развитого турбулентного течения в гладкой трубе²

$$Nu_{loc} \approx 0,023 Re^{0,8} Pr^{1/3}. \quad (21)$$

¹ Поскольку число Пекле можно представить в виде произведения чисел Рейнольдса и Прандтля $Pe = Re Pr$, более правильным с позиций теории подобия является утверждение, что на интенсивность теплоотдачи влияют число Re и число Pr (см. в этой связи, например, монографию Б. С. Петухова, Л. Г. Геннина, С. А. Ковалева. «Теплообмен в ядерных энергетических установках». М.: Атомиздат, 1974. — Прим. ред.).

² Результаты теоретических расчетов и экспериментальные данные показывают, что пользоваться формулой (21) с постоян-

При внешнем поперечном обтекании круглой трубы, находящейся в глубине трубного пучка,

$$Nu_{arc} \approx 0,3 Re^{0,6} Pr^{1/3}. \quad (22)$$

Аналогия Чилтона — Колбурна между трением и теплообменом записывается следующим образом:

$$St \approx f_{Pr}^{-2/3}. \quad (23)$$

Во всех этих соотношениях в качестве параметра L должна использоваться либо длина пластины, либо диаметр трубы в соответствии с рассматриваемой задачей.

Г. Числа Грасгофа и Релея. Когда в процессах теплообмена существенную роль играют объемные силы, целесообразно представлять их в виде безразмерных комплексов, в которых значения этих сил сопоставляются с силами вязкости. Обычно в качестве объемных сил выступает сила тяжести, характеризующая ускорением силы тяжести g_n . Два наиболее часто встречающихся безразмерных параметра — это

число Грасгофа

$$Gr \equiv L^3 g_n \rho \frac{\Delta \rho}{\eta^2} \quad (24)$$

и число Релея

$$Ra \equiv L^3 g_n \rho c_p \frac{\Delta \rho}{\eta \lambda}, \quad (25)$$

где $\Delta \rho$ — характерное изменение плотности, связанное с изменением температуры или состава смеси.

В качестве примера расчетных формул для теплоотдачи, в которых участвует число Грасгофа, можно указать следующие соотношения: для ламинарного течения около вертикальной пластины

$$Nu = 0,535 Gr^{1/4} Pr^{1/8}; \quad (26)$$

для турбулентного течения около вертикальной пластины

$$Nu \approx 0,135 Gr^{1/3} Pr^{1/8}. \quad (27)$$

На практике числа Грасгофа и Релея могут достигать довольно больших значений (до $3,6 \cdot 10^9$). Обычно при наличии вынужденного течения влияние объемных сил несущественно, если только число Gr не превышает, например, 10^5 .

Из определений (24), (25) и (16) следует соотношение

$$Ra \equiv Gr Pr. \quad (28)$$

Н. Другие безразмерные параметры. Сопоставляя два соизмеримых физических параметра, можно получить их безразмерное отношение.

Ниже приведены используемые в практике расчета теплообмена безразмерные числа.

Число Фурье

$$Fo \equiv \lambda t / (c_p \rho L^2), \quad (29)$$

где t — время. Его можно представить как отношение времени протекания процесса к характерному времени, достаточному для выравнивания температуры.

Число Фруда

$$Fr \equiv v^2 / (L g_n), \quad (30)$$

ними коэффициентами и показателями степени можно только в ограниченном диапазоне чисел Re и Pr . При числах Прандтля, превышающих единицу, и при числах Рейнольдса порядка 10^3 и выше использование этой формулы может привести к значительным погрешностям. Подробнее об этом см. указанную в сноске на с. 20 монографию, в которой дана зависимость для расчета теплоотдачи, при стабилизированном турбулентном течении в круглых трубах в широком диапазоне значений чисел Re и Pr , подтверждаемая всеми известными опытными данными. — *Прим. ред.*

характеризующее соотношение сил инерции и гравитационных сил. Его целесообразно использовать при описании течений жидкости со свободными поверхностями.

Число Гретца

$$Gz \equiv Pe (D/L), \quad (31)$$

где D — характерный размер поперечного сечения канала, который входит также в число Pe ; L — расстояние от входа в канал. При ламинарном течении жидкости в трубе число Нуссельта зависит от этого параметра.

Число Вебера

$$We \equiv v^2 \rho L / \sigma, \quad (32)$$

где σ — поверхностное натяжение жидкости. Оно описывает, например, тенденцию капель жидкости к дроблению при их движении.

Имеется много других безразмерных параметров, которые часто не имеют специальных названий. В их число входят геометрические отношения, например отношение длины к диаметру, шага к диаметру, пористость (отношение свободного объема к полному); отношения скоростей, например отношение скорости вихревого движения к осевой скорости; угол наклона линии тока; отношения температур, например отношение температуры в потоке к температуре на поверхности; отношения энтальпий, например

$$c_p (T_{in} - T_{out}) / \Delta h,$$

где Δh — скрытая теплота парообразования.

1. Расчетные формулы. Коэффициенты тепло- и массообмена, необходимые для расчета теплообменников, как уже говорилось, можно найти из формул, связывающих их с известными (или предполагаемыми) характеристиками течения. Эти формулы можно получить в результате теоретического анализа или обобщения экспериментальных данных, однако они почти всегда выражены с помощью безразмерных параметров. Типичное функциональное соотношение имеет вид

$$St = St(Re, Pr, Gr, L/D, \eta_1/\eta_2, \rho_1/\rho_2 \dots). \quad (33)$$

Часто формулы имеют вид степенного закона, например

$$St = \text{const } Re^a Pr^m. \quad (34)$$

В таком виде они обычно справедливы только в ограниченном диапазоне значений чисел Рейнольдса и Прандтля. Иногда соотношение между безразмерными параметрами дается в виде графиков или номограмм, хотя все более широкое использование ЭВМ сужает необходимость подобного представления данных.

Поскольку соотношения типа (33) или (34) очень часто получают в результате попыток описать опытные данные и отыскать формулу, наилучшим образом соответствующую этим данным (коррелирующую с ними), эти соотношения называют корреляциями¹. Многие из этих расчетных соотношений приведены в данном Справочнике. Здесь необходимо сделать лишь общие замечания.

Расчетные соотношения редко позволяют рассчитывать коэффициенты тепло- и массообмена с точностью, лучшей, чем $\pm 10\%$. Частично это связано с погрешностью экспериментальных данных, на базе которых соотношения получены, а частично вызвано тем, что условия, для которых применяют эти соотношения, иногда не совпадают в точности с условиями, в которых они получены. Поэтому ими необходимо пользоваться с известной осторожностью.

Несмотря на то что исследования теплообмена ведутся уже в течение многих лет, а публикации по результатам этих исследований заполняют библиотечные полки, конструктор часто пребывает в бесплодных поисках рас-

¹ Чрезвычайно распространенному в научно-технической литературе на английском языке термину «корреляция» в отечественной литературе более точно соответствуют термины «расчетное соотношение» или «формула». — *Прим. пер.*

четных соотношений, которые соответствовали бы заданным условиям хотя бы приблизительно. Это положение частично связано с неудачной формой представления большей части опубликованного материала, и в данном Справочнике сделаны попытки исправить этот недостаток. Однако в основном оно вызвано тем, что для выявления влияния всех важных факторов на теплообмен в интересующих условиях чаще всего необходимо провести большое число опытов. Например, для определения функции шести аргументов типа описанной уравнением (33) потребуются 10^6 опытов. Хотя квалифицированный специалист может отбросить часть входящих в первоначально функциональную зависимость аргументов, как не оказывающих заметного влияния на искомую функцию в рассматриваемых условиях, все же остается очевидным, что получение обобщающих соотношений экспериментальным путем является чрезвычайно дорогостоящим делом.

Отсутствие расчетных соотношений или их несоответствие рассматриваемым условиям может быть восполнено либо проведением дорогостоящих непосредственных экспериментов, либо детальным теоретическим анализом, опирающимся на решения соответствующих дифференциальных уравнений. Первый путь обычно труден, дорог и длителен; для реализации второго может оказаться недостаточно имеющихся физических представлений о процессах, возможностей математики и вычислительной техники. Обсуждение этой проблемы, однако, выходит за рамки данного Справочника.

Хотя получаемые с помощью имеющихся соотношений результаты расчетов теплообмена и потерь давления по своей точности часто оставляют желать лучшего, этими формулами отнюдь не следует пренебрегать. Действительно, на их основе рассчитано и создано большинство реальных теплообменников. Для оценки характеристик аппаратов с точностью до порядка величины или для определения верхней и нижней границ плотности теплового потока можно использовать очень простые расчетные соотношения. Иногда эти полученные при сравнительно малых усилиях оценки показывают, что более точные и дорогостоящие исследования нецелесообразны. Это, особенно справедливо, когда эффекты загрязнений, плохое знание физических свойств теплоносителей или другие неопределенности влияют на точность расчетов.

В отдельных случаях имеющиеся опытные данные по перепаду давлений могут быть описаны в форме характеристик трения, а для расчета коэффициента теплоотдачи можно прибегнуть к той или иной «аналогии» между трением и теплоотдачей. Как это можно сделать, описано ниже.

Ж. Соотношение между коэффициентами переноса теплоты, массы и импульса. Ниже рассмотрена аналогия Рейнольдса, о которой упоминалось выше.

В 1874 г. Рейнольдсом было предложено соотношение, связывающее трение и теплоотдачу [3] [см. уравнение (8)], — число Стентона приблизительно равно коэффициенту трения. Рекомендации Рейнольдса первоначально основывались на результатах исследований газов.

Чуть позднее была опубликована аналогия Чилтона — Колбурна [4], широко используемая инженерами-химиками и опирающаяся на результаты экспериментов с широким классом жидкостей,

$$St = f \sigma^{-2/3}, \quad (35)$$

где St — число Стентона для тепло- или массообмена; f — коэффициент сопротивления трения, определяемый согласно уравнению (7); σ — число Прандтля или Шмидта в зависимости от того, какой процесс рассматривается — тепло- или массообмен. Это соотношение подразумевает, что коэффициент теплоотдачи α увеличивается с ростом теплопроводности жидкости, но пропорционально этому параметру всего лишь в степени $2/3$. Аналогичным об-

разом коэффициент массоотдачи β зависит от коэффициента диффузии.

Указанная аналогия подразумевает, что отношения коэффициентов переноса теплоты, массы и импульса не зависят от конкретного значения фактора трения. Однако, начиная с Прандтля [5] и Тейлора [6], многочисленные авторы предполагали, что соотношение между числом Стентона и коэффициентом трения должно иметь вид

$$St^{-1} = b(a f^{-1/2} + f^{-1}), \quad (36)$$

где a и b — постоянные, по крайней мере одна из которых зависит от σ . При записи этого соотношения исходят из представления, что результирующее сопротивление передаче теплоты и массы обычно состоит из двух частей. Одна из них сосредоточена в ламинарном подслое жидкости, расположенном в непосредственной близости к твердой стенке, другая связана с турбулентной частью потока, больше удаленной от стенки. Два члена в правой части уравнения (36) количественно отражают это обстоятельство.

В уравнении (36) более сильно зависит от величины σ именно коэффициент a . С ростом числа исследований выражения для a становятся все более сложными. Среди более обоснованных следует указать на соотношения для случая $\sigma \geq 0,7$ [7] и $\sigma < 0,7$ [8]. Они имеют следующий вид:

$$a = 8,32 \left[\left(\frac{\sigma}{0,9} \right)^{3/4} - 1 \right] [1 + 0,29 \exp(-0,0078\sigma)] \text{ для } \sigma \geq 0,7; \quad (37)$$

$$a = -f^{1/2} + 12,5 \frac{f^{1/2}}{Re} \frac{h}{\sigma} \left(-10,58 \left(\frac{\sigma}{b} \right)^{1,44} - \ln \left[1 + 4,6 \left(\frac{\sigma}{b} \right)^{0,72} \right] + \left(1 + 0,2 \frac{Re}{f^{1/2}} \frac{\sigma}{b} \right) \times \right. \\ \times \ln \left(1 + 0,2 \frac{Re}{f^{1/2}} \frac{\sigma}{b} \right) + 0,2 \frac{Re}{f^{1/2}} \frac{\sigma}{b} \times \\ \times \left. \left\{ 4,6 \left(\frac{\sigma}{b} \right)^{0,72} - \ln \left[1 + 4,6 \left(\frac{\sigma}{b} \right)^{0,72} \right] - 1 \right\} \right) \text{ для } \sigma < 0,7. \quad (38)$$

Значение b , которое имеет смысл турбулентного числа Прандтля (Шмидта), обычно выбирают близким к 0,9.

Уравнение (36) вместе с рекомендациями по определению коэффициентов a и b позволяет рассчитывать характеристики тепло- и массообмена исходя из данных по трению; однако, одну из этих характеристик можно найти, если известна вторая. Эту процедуру можно применять, если поверхность является гладкой, а число Рейнольдса достаточно велико.

Если поверхность шероховата или составляющая профильного сопротивления в f [второй член в (36)] велика в сравнении с сопротивлением трения, рассчитанные по уравнению (36) значения числа Стентона будут завышены.

Некоторые дополнительные возможности использования соотношений, связывающих теплообмен и трение, для расчета теплообменников приведены в § 1.2.5.

1.2.5. Уравнения балансов, описывающие теплообменные аппараты в цепом

А. Соотношение между изменениями энтальпии. Рассмотрим контрольный объем, охватывающий весь теплообменник, через который прокачиваются два теплоносителя, обозначенные индексами 1 и 2. Тогда в стационарных условиях из первого закона термодинамики следует

$$\dot{M}_1(h_{1, \text{out}} - h_{1, \text{in}}) + \dot{M}_2(h_{2, \text{out}} - h_{2, \text{in}}) = 0, \quad (1)$$

где $\dot{M}$ — массовый расход; h — удельная энтальпия.

В данном случае подразумевается, что кинетическая энергия, теплоотдача в окружающую среду и полезная работа пренебрежимо малы. Однако при необходимости учесть соответствующие члены можно с помощью, например, уравнения (3) § 1.2.2.

Уравнение (1) применяют для определения входных и выходных параметров взаимодействующих теплоносителей.

В. Соотношение между изменениями температуры. Если в обоих проходящих через теплообменник теплоносителях не происходят фазовые переходы, уравнение (1) можно записать через изменения температуры

$$\dot{M}_1 c_{p1} (T_{1, \text{out}} - T_{1, \text{in}}) + \dot{M}_2 c_{p2} (T_{2, \text{out}} - T_{2, \text{in}}) = 0,$$

т. е.

$$\dot{C}_1 \Delta T_1 + \dot{C}_2 \Delta T_2 = 0, \quad (2)$$

где c_{p1} и c_{p2} — средние удельные теплоемкости при постоянном давлении двух теплоносителей в указанных диапазонах температур; произведения этих теплоемкостей на массовые расходы обозначены соответственно $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$, изменения температуры как ΔT_1 и ΔT_2 .

Может быть так, что в одном теплоносителе происходит фазовый переход, а в другом нет. Например, в парогенераторе атомной электростанции с теплоносителем первого контура (горячей водой) не происходит фазовых изменений, а с теплоносителем второго контура эти изменения происходят. Тогда уравнение имеет следующий вид:

$$C_1 \Delta T_1 + C_2 \left(\Delta T_2 - \frac{\Delta h_2}{c_{p2}} \right) = 0. \quad (3)$$

Здесь фазовый переход во втором теплоносителе учитывается членом уравнения со скрытой теплотой испарения Δh_2 ; покидающий парогенератор пар считается сухим, насыщенным, т. е. имеющим 100%-ное паросодержание ($x_2 = 1$).

С. Соотношение между изменением концентрации. Если в аппарате происходит массообмен, возникает необходимость в составлении баланса массы конкретного химического вещества, обозначенного индексом i . При условии, что данное вещество в аппарате не образуется и не исчезает в результате химической реакции, и при стационарном течении массовые доли x_i i -компонента на входе и выходе двух теплоносителей связаны соотношением

$$\dot{M}_{1, \text{out}} x_{1, \text{out}} - \dot{M}_{1, \text{in}} x_{1, \text{in}} + \dot{M}_{2, \text{out}} x_{2, \text{out}} - \dot{M}_{2, \text{in}} x_{2, \text{in}} = 0, \quad (4)$$

где индекс i при x для простоты записи опущен.

Сравнивая это уравнение с (1) — (4), видим, что в нем допускается различие входных и выходных массовых расходов теплоносителей. Это, конечно, требует, чтобы перенос i -го компонента смеси из одного потока в другой был в точности сбалансирован противоположно направленным переносом других компонентов.

Естественно, что также выполняется условие сохранения массы для аппарата в целом

$$\dot{M}_{1, \text{out}} - \dot{M}_{1, \text{in}} + \dot{M}_{2, \text{out}} - \dot{M}_{2, \text{in}} = 0, \quad (5)$$

а разница в массовых расходах каждого потока на входе и выходе из аппарата связана с суммарным переносом массы

$$\dot{M}_{1, \text{out}} - \dot{M}_{1, \text{in}} = \dot{M}_{2, \text{in}} - \dot{M}_{2, \text{out}} = \sum_i \dot{M}_{i, 1 \rightarrow 2}, \quad (6)$$

где $\dot{M}_{i, 1 \rightarrow 2}$ — масса i -го компонента, перенесенного из первого потока во второй.

Д. Приближенное соотношение между энтальпиями в системе вода—водяной пар—воздух. При расчете градиента полезно использовать определенным образом упрощенные уравнения. Они получаются, если принять энтальпию воды h и воздуха при 0°C равной нулю (см. § 1.2.3). Кроме того, можно пренебречь увеличением массы воздушного потока с ростом его влагосодержания, поскольку это увеличение незначительно. В этих предположениях уравнение (1) можно использовать для описания совместного тепло- и массообмена, происходящего в аппарате. Конкретно следует записать

$$\dot{M}_{a, \text{in}} (h_{a, \text{out}} - h_{a, \text{in}}) + \dot{M}_{w, \text{in}} (h_{w, \text{out}} - h_{w, \text{in}}) \approx 0, \quad (7)$$

где индексы 1 и 2 заменены на индексы a и w , соответствующие воздуху и воде. Следует указать также на отмеченную соответствующим знаком приближенность равенства.

Е. Средние коэффициенты взаимодействия и движущие силы. Хотя коэффициенты передачи теплоты и массы от одного потока к другому могут изменяться в аппарате от точки к точке, а разности температур и концентраций изменяются, как правило, в достаточно широких пределах, обычно пользуются формулами, в которые входят усредненные по объему параметры. Так, например, для теплопередачи при отсутствии массообмена расчетное соотношение имеет вид

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = A \overline{U} (T_1 - T_2), \quad (8)$$

где $\dot{Q}_{1 \rightarrow 2}$ — количество теплоты, переданной от первого потока ко второму; A — суммарная поверхность раздела теплоносителей в теплообменнике; $\overline{U}$ — локальный коэффициент теплопередачи; черта над произведением $U(T_1 - T_2)$ означает, что этот параметр усреднен по объему аппарата. Формально его можно определить следующим образом:

$$\overline{U(T_1 - T_2)} = \frac{\int_A U(T_1 - T_2) dA}{A}, \quad (9)$$

где dA — элемент поверхности раздела, а $\int_A$ означает интегрирование по всей поверхности.

Возникает вопрос: как рассчитать $\overline{U(T_1 - T_2)}$? Ответ будет дан ниже (см. разд. 1.3 и 1.5). Однако видно, что если $\overline{U}$ берется однородным по объему, вопрос сводится к расчету средней по объему разности температур $\overline{T_1 - T_2}$, где T_1 и T_2 — локальные температуры теплоносителей. Эта разность меньше разности $T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{in}}$, но возникает вопрос: на сколько? Ответ зависит от схемы движения теплоносителей, от того, происходят ли в теплоносителях фазовые переходы и велика или мала поверхность теплообмена.

Из-за важности рассматриваемого вопроса и с учетом более детального его рассмотрения в последующем здесь уместно сделать некоторые полезные замечания относительно $\overline{T_1 - T_2}$.

Величину $\overline{T_1 - T_2}$ часто называют эффективной или средней разностью температур и обозначают ΔT_{LM} , причем ее часто удобно определять с помощью соотношения $\Delta T_{LM} = \Delta T_{LM}^F$, (10) где ΔT_{LM} — так называемая среднеарифметическая разность температур; F — поправочный коэффициент, равный единице для противоточных теплообменников в идеальных условиях. При всех других схемах движения коэффициент F меньше единицы.

Среднеарифметическая разность температур определяется следующим образом:

$$\Delta T_{LM} = \frac{(T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{out}}) - (T_{1, \text{out}} - T_{2, \text{in}})}{\ln(T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{out}}) / (T_{1, \text{out}} - T_{2, \text{in}})}. \quad (11)$$

Это означает, что ΔT_{LM} является логарифмической средней разности температур $T_{1, in} - T_{2, out}$ и $T_{1, out} - T_{2, in}$. Если теплообменник противоточного типа, то эти две разности представляют собой перепады температур на концах теплообменника, однако приведенное определение ΔT_{LM} справедливо и для более общих вариантов.

Если использовать уравнение (10), задача определения эффективной разности температур ΔT_M заменяется задачей определения поправочного коэффициента F . Преимущество состоит в том, что коэффициент F является безразмерным и может быть определен из графиков или с помощью формул, приведенных ниже.

Для последующих ссылок приведем соотношения, связывающие уравнение (8) с (1) и (2).

В общем случае для теплообменников имеет место соотношение

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = AU(T_1 - T_2) = \dot{M}_2(h_{2, out} - h_{2, in}) = \dot{M}_1(h_{1, in} - h_{1, out}). \quad (12)$$

При отсутствии фазовых переходов выполняется соотношение

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = AU(T_1 - T_2) = \dot{C}_2 \Delta T_2 = \dot{C}_1 \Delta T_1. \quad (13)$$

Для случая воздух — вода — водяной пар соотношение имеет вид

$$\dot{Q}_{1, 1 \rightarrow 2} = Ar_g \beta_g (h_a - h_w) \approx \dot{M}_{w, in} (h_{w, out} - h_{w, in}) \approx \dot{M}_{a, in} (h_{a, in} - h_{a, out}). \quad (14)$$

Последнее уравнение отражает более общий случай, чем уравнение (13). В нем индекс 1 при $\dot{Q}$ показывает, что рассматривается количество теплоты, переданной с водяной стороны поверхности раздела, а индексами a и w заменены индексы 1 и 2 в соответствии с пояснением к уравнению (7).

Найти соответствующие средние значения $h_a - h_w$ не труднее, чем определить среднюю разность температур.

Г. Число единиц переноса (NTU). Габариты теплообменника можно оценить лишь при сопоставлении с количеством участвующего в процессе вещества. На практике для этой оценки иногда выбирают параметр, непосредственно следующий из уравнения (3). Его называют числом единиц переноса теплообменника и иногда в сокращенном виде записывают как NTU . Тогда значения NTU_1 или NTU_2 имеют следующий вид:

$$NTU_1 = AU/\dot{C}_1; \quad NTU_2 = AU/\dot{C}_2. \quad (15)$$

Следовательно, при указании NTU теплообменника необходимо оговаривать, о потоке первого или второго теплоносителя идет речь, поскольку, как правило, $\dot{C}_1 \neq \dot{C}_2$.

При рассмотрении градиент принято (для удобства) определять NTU по водяной стороне, поскольку только для этого потока изменение энтальпии пропорционально разности температур. Тогда соответствующее соотношение запишется в виде

$$NTU = Ar\beta/(\dot{M}_{w, in} c_p, w). \quad (16)$$

Г. Эффективность теплообменника без фазового перехода теплоносителей. Число единиц переноса теплообменника или градиент является важным параметром для определения их характеристик. В качестве последней часто выступает так называемая эффективность E (или КПД — Прим. ред.), представляющая отношение действительного переданного количества теплоты к максимальному.

Под максимальным возможным количеством переданной теплоты $\dot{Q}_{max}$ понимается такое количество теплоты, при котором поток с меньшим значением произведения $\dot{M}C_p$, т. е. с $\dot{C}_{min}$, будет покидать теплообменник, имея

выходную температуру, равную температуре на входе другого теплоносителя. Таким образом,

$$\dot{Q}_{max} = \dot{C}_{min} \Delta T_{max}. \quad (17)$$

где $\Delta T_{max} = T_{1, in} - T_{2, in}$. Следовательно, эффективность E можно представить в виде

$$E = \dot{Q}/\dot{Q}_{max}; \quad (18)$$

$$E = AU\Delta T_M/(\dot{C}_{min} \Delta T_{max}) = NTU_{min} \Delta T_M/\Delta T_{max}. \quad (19)$$

Здесь NTU_{min} — число единиц переноса для потока с меньшим значением $\dot{C}$.

Уравнение (19) позволяет рассчитать эффективность E теплообменника как произведение величин, характеризующих размер теплообменника, т. е. NTU_{min} , на отношение средней разности температур к максимально возможной разности температур.

Параметр $\Delta T_M/\Delta T_{max}$ всегда меньше единицы. Его значение зависит от схемы движения теплоносителей (противоточное, одностороннее, перекрестное) и от значений NTU_{min} и отношения $\dot{C}_1/\dot{C}_2$.

Поскольку $\Delta T_M/\Delta T_{max}$, NTU_{min} и $\dot{C}_1/\dot{C}_2$ связаны между собой (этот вопрос рассмотрен в гл. 1.3), удобно выразить эффективность E непосредственно через NTU_{min} и $\dot{C}_1/\dot{C}_2$

$$E = E(NTU_{min}, \dot{C}_1/\dot{C}_2, \text{схема движения}). \quad (20)$$

Примеры таких зависимостей показаны на рис. 1 и 2 § 1.3.1.

Целью поверочного расчета теплообменника является определение значения E при заданных значениях A , отношении $\dot{C}$ и схемы движения теплоносителей. При конструкторском расчете стоят другие задачи: выбор схемы движения теплоносителей и определение соответствующего значения A , которое обеспечит требуемое изменение температуры теплоносителя. Это различие в целях расчетов приводит к различиям в методах представления соотношений, описывающих характеристики, которые рассмотрены ниже.

Н. Некоторые общепринятые способы представления характеристик теплообменников без фазовых превращений теплоносителей. В Справочнике по теплопередаче [9] выделены три способа представления характеристик теплообменников: 1) метод поправочного коэффициента F ; 2) $P = NTU$ -метод; 3) θ -метод.

Ниже изложены основные идеи каждого метода и их взаимосвязь. Способы использования этих методов для определения характеристик теплообменников подробно изложены в разд. 1.3 и 1.5.

Метод поправочного коэффициента F . Поправочный коэффициент F определен уравнением (10). Запишем его в виде

$$F = \Delta T_M/\Delta T_{LM}. \quad (21)$$

С помощью F можно найти необходимую площадь теплопередающей поверхности из уравнения

$$A = \frac{\dot{Q}}{UF \Delta T_{LM}}. \quad (22)$$

Коэффициент F можно использовать также для определения эффективности E теплообменника. Для этого можно скомбинировать уравнения (19) и (22)

$$E = NTU_{min} F \frac{\Delta T_{LM}}{\Delta T_{max}}. \quad (23)$$

Обычно F выражают как функцию отношения произведений $\dot{M}C_p$ теплоносителей и параметра, пропорционального изменению температуры одного из теплоносителей. Эти величины обычно обозначают буквами R и P

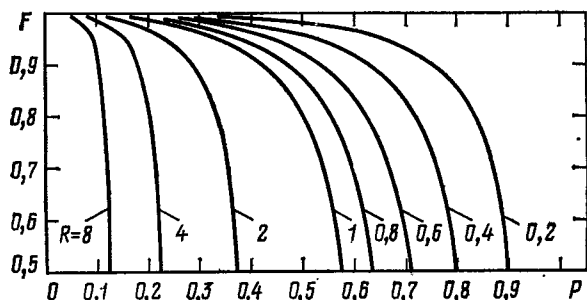


Рис. 1. Зависимость поправочного коэффициента F к среднелогарифмической разности температур от параметра P при различных факторах R для теплообменников с однородным U и одним ходом теплоносителя в межтрубном пространстве и двумя или более ходами внутри труб [9]

соответственно. Тогда

$$R \equiv \dot{C}_2 / \dot{C}_1 \quad (24)$$

и

$$P \equiv \frac{T_{2, \text{out}} - T_{2, \text{in}}}{T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{in}}} = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_{\text{max}}} \quad (25)$$

Тогда

$$F = F(R, P, \text{схема движения теплоносителей}). \quad (26)$$

При определенных упрощающих допущениях для функциональной зависимости F найдены алгебраические выражения, представленные в виде графиков и таблиц. Для примера на рис. 1 показана диаграмма, позволяющая определить F для теплообменников с одним ходом теплоносителя в межтрубном пространстве и с двумя или более ходами теплоносителя внутри труб.

Параметр P в известной мере подобен эффективности E ; он по определению отличается тем, что его значение зависит от выбора теплоносителя, обозначенного индексом 2, тогда как E связано с теплоносителем, имеющим меньшее $\dot{C}$. Отсюда следует, что при

$$R \equiv \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} < 1 \quad P \equiv E; \quad (27)$$

при

$$R \equiv \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} > 1 \quad P \equiv ER. \quad (28)$$

Многие специалисты в области теплообменников предпочитают оперировать с P , а не с E , поскольку в соответствии с его определением в уравнении (22) всегда рассматривается поток только одного теплоносителя (номер 2) и не нужно определять, какое из значений $\dot{C}$ меньше.

Анализ рис. 1 показывает, что значение F уменьшается с ростом как P , так и R ; первое означает трудности достижения высокой эффективности, второе — сложность обеспечения роста температуры в потоке с большим массовым расходом.

P — NTU -метод. Поскольку P — эффективность теплообменника в части передачи теплоты потоку теплоносителя 2, ее удобно выразить через число единиц переноса при заданном отношении параметров $\dot{C}$.

$P = P(NTU_2, R, \text{схема движения теплоносителей}), \quad (29)$ где для NTU_2 выбрано определение согласно уравнению (15) в соответствии с определением P .

Функциональную зависимость (28) можно использовать для определения характеристики теплообменника без расчета ΔT_{LM} или F . Это удобно для поверочного расчета и менее удобно для конструкторского.

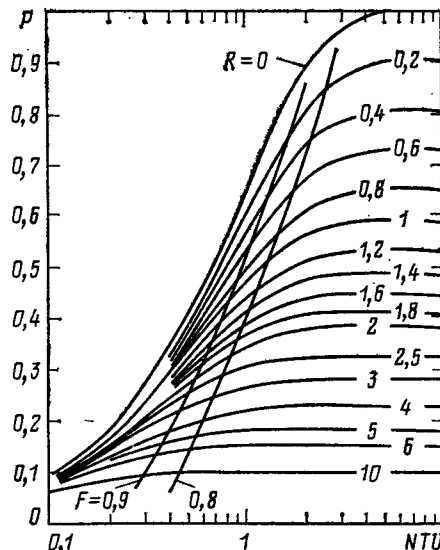


Рис. 2. Зависимость характеристического параметра P (эффективность, отнесенная ко второму теплоносителю) от числа единиц переноса NTU_2 при различных значениях фактора R для многоходовых теплообменников с однородным U [9]

На рис. 2 представлена зависимость $P(NTU, R)$. Анализ показывает, что эта характеристика теплообменника улучшается с ростом NTU и снижением R . В первом случае это связано с увеличением теплопередающей поверхности, во втором — свидетельствует о том, что легче нагреть поток теплоносителя с малым расходом, нежели с большим.

Видно, что P может достигнуть единицы (эффективность составляет 100%) только при $R \equiv \dot{C}_2 / \dot{C}_1$, равном нулю, даже если NTU будет бесконечно большим. Иными словами для данного типа теплообменников, т. е. для теплообменника с одним ходом теплоносителя в межтрубном пространстве и двумя или более ходами внутри труб, невозможно нагреть второй поток до входной температуры первого теплоносителя. Практически важна лишь часть рис. 2, лежащая слева от линии $F=0,8$, поскольку теплообменники, работающие в области справа от этой кривой, редко оказываются неэкономичными. Из-за сближения кривых в левой части диаграммы она не очень удобна для конструкторских расчетов.

θ -метод. Параметр θ определяется следующим образом:

$$\theta = \Delta T_M / \Delta T_{\text{max}}. \quad (30)$$

Он полезен тем, что если его значение известно, то эффективность теплообменника можно определить непосредственно, так как согласно уравнению (19)

$$E = NTU \min \theta. \quad (31)$$

С другой стороны, если рассматривается поток второго теплоносителя, а не теплоносителя с минимумом $\dot{C}$, то параметр P может быть рассчитан непосредственно по формуле

$$P = NTU_2 \theta. \quad (32)$$

Безусловно, параметр θ , как и параметр P , можно выразить как функцию NTU_2 и R . Для примера на рис. 3 представлен график, связывающий E , θ и R [10]. На нем θ является параметром, E_1 отложена по оси ординат, а E_2 (т. е. P) — по оси абсцисс. Значения R отложены по правой вертикальной или верхней горизонтальной шкалам. NTU_2 не представлено непосредственно,

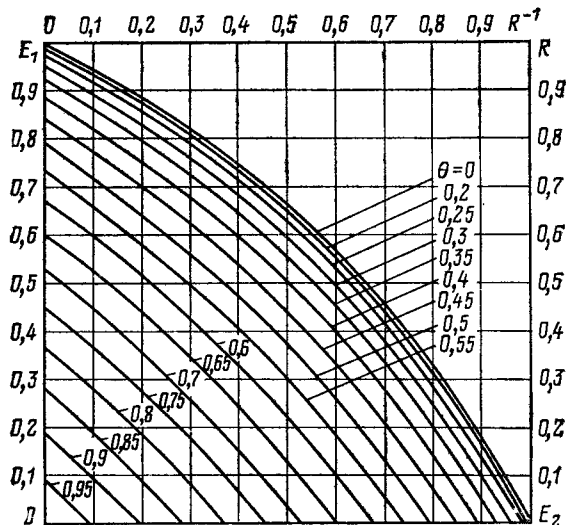
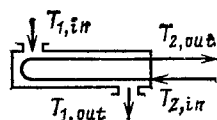


Рис. 3. Значения E_1 и E_2 при различных θ для многоходового теплообменника с одним ходом теплоносителя в межтрубном пространстве и двумя или более ходами внутри труб [10]

однако его значение для любой точки диаграммы можно определить с помощью уравнения (32). Параметр θ представляют также в виде функции P с R и NTU , взятыми в качестве параметров. Обоснования такого представления в сочетании с методом F -коэффициента даны в § 1.5.1.

1. Перепад давления и расход энергии на прокачку теплоносителей. Поскольку число единиц переноса введено в качестве меры способности к переносу теплоты в теплообменнике, полезно ввести меру гидравлического сопротивления последнего (меру потерь на трение), а именно NVH , или число скоростных напоров в перепаде давления¹,

$$NVH = \frac{p_{in} - p_{out}}{\rho_{ref} v_{ref}^2}, \quad (33)$$

где p_{in} и p_{out} — давления соответственно на входе и выходе рассматриваемого потока; ρ_{ref} — плотность жидкости при параметрах отнесения; v_{ref} — скорость в характерном сечении.

Если, как обычно, через аппарат пропускаются два потока теплоносителя, то следует рассчитывать на два значения NVH . Для межтрубного пространства характерную скорость лучше всего рассчитывать, разделив массовый расход $\dot{M}$ на ρ_{ref} и на проходное сечение корпуса. Для жидкости, текущей внутри труб, берется полное поперечное сечение одного хода, т. е.

$$v_{ref} = \frac{\dot{M}}{\rho_{ref} S_{ref}}. \quad (34)$$

где S_{ref} — максимальное сечение для прохода жидкости. Значение ρ_{ref} удобно определять по параметрам на входе.

¹ Как и при определении коэффициентов сопротивления трения, скоростной напор можно определять по-разному. Так, некоторые авторы считают скоростным напором величину $(1/2)\rho_{ref} v_{ref}^2$. Однако в первой части настоящего Справочника принята точка зрения, что числовые коэффициенты целесообразно исключать из подобного рода определений.

Комбинация уравнений (33) и (34) дает

$$NVH = (p_{in} - p_{out}) \frac{\rho_{ref} S_{ref}^2}{\dot{M}^2}. \quad (35)$$

Поскольку NTU по определению [см. уравнение (15)] связано с коэффициентом теплопередачи U , полезно проделать то же самое и для NVH . Для этого введем эффективный коэффициент сопротивления трения

$$f_{ef} A \rho_{ref} v_{ref}^2 = (p_{in} - p_{out}) S_{ref}, \quad (36)$$

где A — теплопередающая поверхность, использованная при определении NTU . Исключив $p_{in} - p_{out}$, получим

$$NVH = f_{ef} \frac{A}{S_{ref}}. \quad (37)$$

Сравнить характеристики теплопередачи и трения можно делением NTU на NVH . В результате имеем

$$\frac{NTU}{NVH} = \frac{\overline{US}_{ref}}{\dot{M} c_p} \frac{1}{f_{ef}}, \quad (38)$$

и, поскольку U/c_p — результирующая проводимость, а $\dot{M}/S_{ref}$ — характерное значение массовой скорости, входящей в число Стентона [уравнение (2) § 1.2.4], уравнение (38) можно выразить через эффективное число Стентона St_{ef} следующим образом:

$$\frac{NTU}{NVH} = \frac{St_{ef}}{f_{ef}}. \quad (39)$$

В § 1.2.4 приведены методы расчета отношений чисел Стентона к коэффициенту сопротивления трения. Однако независимо от того, какой способ расчета выбран, имеется по крайней мере две причины к тому, чтобы значение St_{ef}/f_{ef} (или, что то же самое, NTU/NVH) было заметно ниже, чем St/f . Во-первых, в St_{ef} входит коэффициент теплопередачи, тогда как в число St входит коэффициент теплоотдачи, который значительно больше коэффициента теплопередачи. Во-вторых, f_{ef} определяется из полного перепада давлений в рассматриваемом потоке, в который наряду с потерями давления на трение на теплопередающей поверхности входят потери давления на перегородках и в других сужениях потока, а этот перепад значительно больше собственно потерь на трение.

Однако нужно сделать одно замечание. Конструктор все же располагает некоторыми возможностями регулирования мощности, расходуемой на прокачку теплоносителя при заданном NTU . Мощность на прокачку (если в теплообменнике не происходит очень большого изменения плотности теплоносителя) записывается в следующем виде:

$$\frac{P}{\dot{M}} = \frac{p_{in} - p_{out}}{\rho_{ref}}, \quad (40)$$

т. е.

$$\frac{P}{\dot{M}} = \frac{NTU V_{ref}^2}{NTU/NVH}. \quad (41)$$

Поэтому мощность на прокачку единицы массы теплоносителя можно снизить, уменьшив V_{ref} , т. е. увеличив поперечное сечение теплообменника S_{ref} .

Несомненно, что с ростом S_{ref} обычно увеличиваются другие размеры теплообменника и возрастает его стоимость. В этом случае прежде, чем определять оптимальные значения V_{ref} , S_{ref} и т. д., конструктор должен проводить стоимостный расчет, в котором сопоставляются текущие эксплуатационные расходы и капитальные затраты.

Ж. Выбор формул. Те, кто осуществляют поверочный или конструкторский расчет теплообменников, не едины в вопросе, каким расчетным формулам следует отдавать предпочтение. Поэтому можно сказать только, что такой выбор возможен и под него можно подвести некоторые основания.

При поверочном расчете, когда известны площадь теплопередающей поверхности и схема движения теплоносителей и требуется определить характеристики теплообменника, удобно использовать формулы, в которых число единиц переноса является задаваемым параметром. Тогда характеристики теплообменника можно найти через эффективность E или среднюю безразмерную разность температур θ .

При конструкторском расчете известны искомые характеристики теплообменника; тем самым можно рассчитать среднелогарифмическую разность температур, а также параметр P [см. (25)]. Конструктору необходимо определить эффективную среднюю разность температур, что удобно сделать с помощью поправочного коэффициента F . Если он известен, что легко сделать при однородном U , конструктор может рассчитать необходимую площадь теплопередающей поверхности, вообще не прибегая к определению числа единиц переноса.

1.2.6. Дифференциальные уравнения, описывающие течения теплоносителей

А. Дифференциальные уравнения для энтальпии. На рис. 1 представлен элементарный объем для потока первого теплоносителя в теплообменнике. Длина пути в направлении течения обозначена dz_1 , а соответствующая поверхность раздела dA . Если течение стационарное и диссипацией кинетической энергии, внешней работой и гравитационной потенциальной энергией в поле силы тяжести пренебрегают, то в соответствии с уравнением энергии для стационарного течения [см. (3) из § 1.2.2)] имеем

$$\dot{M}_1 \frac{dh_1}{dz_1} = -\dot{q}_{1 \rightarrow 2} \frac{dA}{dz_1}, \quad (1)$$

где $\dot{q}_{1 \rightarrow 2}$ — плотность теплового потока, передаваемого от первого теплоносителя ко второму. Этот тепловой поток можно рассчитать из соотношения

$$\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = U(T_1 - T_2), \quad (2)$$

где U , T_1 и T_2 — локальные значения.

На рис. 1 также показан и контрольный объем для потока второго теплоносителя. Для этого контрольного объема дифференциальное уравнение энергии для стационарного течения имеет вид

$$\dot{M}_2 \frac{dh_2}{dz_2} = \dot{q}_{1 \rightarrow 2} \frac{dA}{dz_2}. \quad (3)$$

Из уравнений (1) и (3) можно получить следующее соотношение:

$$\dot{M}_1 \frac{dh_1}{dz_1} + \dot{M}_2 \frac{dh_2}{dz_2} = 0. \quad (4)$$

Следует заметить, что в случае теплообменника с однопроводным движением теплоносителей dz_1 и dz_2 равны по значению и имеют одинаковый знак, а при противотоке dz_1 и dz_2 равны по значению и противоположны по знаку. Для перекрестного тока эти уравнения не имеют смысла, поскольку параметры в каждом потоке зависят не от одной координаты, а по крайней мере от двух.

В. Дифференциальное уравнение для температуры. Если поток первого теплоносителя в рассматриваемой

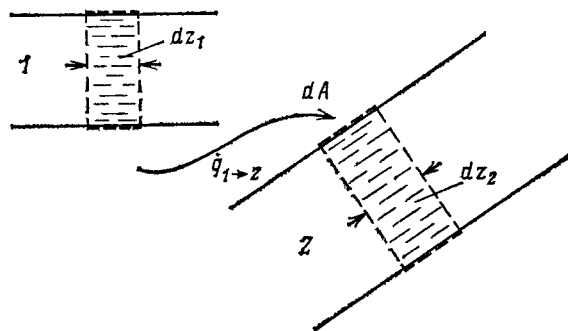


Рис. 1. Контрольные объемы для получения дифференциальных балансовых уравнений

точке не претерпевает фазового перехода, то (1) можно записать в следующем виде:

$$\dot{C}_1 \frac{dT_1}{dz_1} = -\dot{q}_{1 \rightarrow 2} \frac{dA}{dz_1}, \quad (5)$$

а если и в потоке второго теплоносителя фазовые переходы отсутствуют, то

$$\dot{C}_2 \frac{dT_2}{dz_2} = \dot{q}_{1 \rightarrow 2} \frac{dA}{dz_2}. \quad (6)$$

Комбинируя уравнения (5) и (6) и исключая $\dot{q}_{1 \rightarrow 2}$, имеем

$$\dot{C}_1 \frac{dT_1}{dz_1} + \dot{C}_2 \frac{dT_2}{dz_2} = 0. \quad (7)$$

Существует, однако, и другой интересный метод комбинации приведенных выше соотношений. Если умножить (6) на $(\dot{C}_1/\dot{C}_2)(dz_2/dz_1)$ и вычесть из уравнения (5), то получим

$$\dot{C}_1 \frac{d}{dz_1} (T_1 - T_2) = -\dot{q}_{1 \rightarrow 2} \frac{dA}{dz_1} \left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \frac{dz_2}{dz_1} \right). \quad (8)$$

Здесь в члене dA/dz_1 опущен индекс при z , чтобы показать, что dA/dz_1 и dA/dz_2 имеют по существу то же самое положительное значение независимо от того, рассматривается ли однопроводное или противоточное течение.

Последним шагом в этих выкладках является исключение теплового потока с помощью уравнения (2). В итоге приходим к дифференциальному уравнению относительно разности $T_1 - T_2$

$$\frac{1}{T_1 - T_2} \frac{d(T_1 - T_2)}{dz_1} = -U \frac{dA}{dz_1} \left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2} \frac{dz_2}{dz_1} \right). \quad (9)$$

Решение представлено в § 1.3.1.

С. Дифференциальное уравнение для концентрации. Можно легко вывести аналогичные дифференциальные уравнения для концентрации

$$\frac{d}{dz_1} (\dot{M}_1 x_{i,1}) = -\dot{m}_{i,1 \rightarrow 2} \frac{dA}{dz_1} \quad (10)$$

и

$$\frac{d}{dz_2} (\dot{M}_2 x_{i,2}) = \dot{m}_{i,1 \rightarrow 2} \frac{dA}{dz_2}. \quad (11)$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$\frac{d}{dz_1} (\dot{M}_1 x_{i,1}) + \frac{d}{dz_2} (\dot{M}_2 x_{i,2}) = 0. \quad (12)$$

Возможны дальнейшие преобразования с помощью уравнения (12) из § 1.2.4, в результате которых находят

уравнение с зависимой переменной ($x_i, i = H_e x_{i, a}$). Оно, хотя и не полностью, аналогично уравнению (9) [1].

Д. Приближенное дифференциальное уравнение для энтальпии в системе водяной пар — воздух — вода. Следует напомнить, что обмен энергией и массой между воздухом и водой можно выразить в очень простом виде (см. § 1.2.3). Здесь внимание вновь обращается к системе, которая особенно подходит для градиент. Приведенные в § 1.2.5 уравнения в дифференциальной форме представим в следующем виде:

$$\dot{M}_a \frac{dh_a}{dz_a} \approx -\dot{q}_{e, a \rightarrow w} \frac{dA}{dz_a} \quad (13)$$

и

$$\dot{M}_w \frac{dh_w}{dz_w} \approx \dot{q}_{e, a \rightarrow w} \frac{dA}{dz_w} \quad (14)$$

В результате сложения получим

$$\dot{M}_a \frac{dh_a}{dz_a} + \dot{M}_w \frac{dh_w}{dz_w} \approx 0. \quad (15)$$

Тепловой поток удобно ввести с помощью уравнения (13), § 1.2.3, сделав незначительные переобозначения. В результате получим

$$\frac{dh_w}{dz_w} = \frac{\beta g}{M_w} (h_a - h_s) \frac{dA}{dz_w}. \quad (16)$$

Теперь h_a можно выразить как линейную функцию h_w интегрированием уравнения (15); h_w , однако, — нелинейная функция; h_w определяется кривой парциального давления водяного пара в воздухе в зависимости от температуры. Поэтому уравнение (16) можно проинтегрировать численно. Среднелогарифмическую разность энтальпий при расчетах градиент можно использовать лишь в очень редких случаях.

Е. Некоторые замечания относительно решения уравнений. Нелинейность уравнений уже упоминалась в связи с зависимостью $h_s(h_w)$. Могут появиться и другие нелинейности, даже в том случае, если теплообмен рассматривается отдельно от массообмена. Например, коэффициент теплопередачи U в уравнении (9) может зависеть от локального уровня температур. Это происходит, например, в случае, когда вязкость жидкости снижается с ростом температуры. Кроме того, с изменением температуры могут сильно меняться удельные теплоемкости, особенно когда один из теплоносителей находится вблизи термодинамической критической точки.

Если уравнение нелинейное, то в отдельных случаях еще возможно аналитическое решение. Например, если U описывается достаточно простой зависимостью от разности температур $T_1 - T_2$, решение можно получить довольно просто. Однако такие случаи редки.

Практически решения приведенных выше уравнений получаются двумя путями: при однородных U , c_{p1} и c_{p2} используются аналитические решения, которые описаны в § 1.3.1; при наличии нелинейностей решения получаются численными методами.

Г. Заключение. Выше энтальпия, температура и состав жидкостей считались зависящими от одной пространственной переменной. В реальных теплообменниках свойства жидкостей меняются в двух или трех направлениях в пространстве, а при каждом отклонении от стационарного состояния требуется еще учет временного фактора. Таким образом, для реального анализа теплообменников необходимо использовать дифференциальные уравнения в частных производных. Этот вопрос рассмотрен в § 1.2.7.

Тем не менее обычно расчеты теплообменников в основном базируются на одномерных уравнениях. Поэтому некоторые читатели могут предпочесть перейти

непосредственно к гл. 1.3, посвященной аналитическим решениям, а § 1.2.7 можно рассматривать как введение; гл. 1.4 посвящена методам численного решения.

1.2.7. Дифференциальные уравнения в частных производных для описания течений взаимопроникающих сред

А. Введение. Приведенные в § 1.2.6 дифференциальные уравнения пригодны в случае однонаправленного или противоточного течения двух жидкостей или при некоторой комбинации этих течений. Их, однако, нельзя использовать при перекрестном токе, поскольку в этом случае температура изменяется в трех измерениях.

Ниже приведены дифференциальные уравнения, описывающие распределение температуры при перекрестном токе теплоносителей и в более сложных ситуациях. Для простоты не будем учитывать эффекты, связанные с массопереносом и фазовыми переходами. Более детальное описание, учитывающее эти эффекты, можно найти в [11].

Обычно в теории теплообменников предполагается, что движение теплоносителей в аппарате уже описано, и задачей является расчет распределений температуры. Эта задача является как бы задачей первого уровня, для решения которой можно использовать дифференциальные уравнения; входящие в эти уравнения скорости можно рассматривать как известные функции координат.

Однако наши представления о действительном характере течений, скажем, в корпусном аппарате с перегородками крайне ограничены. Поэтому желательно иметь возможность рассчитывать поле скоростей на основе наиболее достоверной из имеющейся общей информации о течении сред с распределенными сопротивлениями. Это можно сделать путем решения соответствующих дифференциальных уравнений для полей скорости и температуры. Эти уравнения будут приведены ниже. В разд. 1.4 описаны методы численного решения всех этих уравнений и даны указания по детальному расчету характеристик теплообменников.

Поскольку записать и решить уравнения для нестационарных течений так же просто, как и для стационарных, в данном разделе будут представлены первые из них. Эти уравнения можно использовать для описания течений в регенераторах и рекуператорах.

Для того чтобы ясно зафиксировать два уровня приближений, в п. В рассмотрены только уравнения для распределения температур, а в п. С — уравнения для полей скорости.

В. Дифференциальные уравнения для описания распределений температуры. Независимые переменные. Поскольку большинство теплообменников имеет форму цилиндра, удобно использовать цилиндрическую систему координат (θ, r, z) , в которой θ — угол, отсчитываемый от произвольно выбранной плоскости, проходящей через ось цилиндра; r — расстояние от оси симметрии; z — расстояние, взятое в направлении, параллельном оси симметрии, и отсчитываемое от плоскости, перпендикулярной этой оси.

Указанная система координат показана на рис. 1. В данном случае ось симметрии расположена вертикально. Полезно представить, что изображенный на рисунке цилиндр — это корпус теплообменника, в котором трубы пролегают в основном вдоль вертикальных линий с постоянными значениями θ и r , а перегородки представлены горизонтальными поверхностями (отвечают постоянному значению координаты z). Однако приведенные ниже уравнения ни в коей мере не зависят от подобного допущения.

Зависимые переменные. Рассматриваемыми зависимыми переменными станут температуры двух теплоносителей

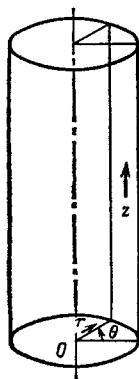


Рис. 1. Цилиндрическая система координат $\theta-r-z$, используемая для описания полей температуры и скорости

T_1 и T_2 , протекающих через теплообменник, и температура металлических стенок T_m .

Анализ осуществляется в предположении, что эти три, а также другие переменные изменяются в пространстве непрерывно. В действительности этого не наблюдается, поскольку первый и второй теплоносители и металл чередуются в пространстве, а не являются переменными средами. Однако модель трех взаимопроникающих сред удобна на практике и не приводит к отрицательным последствиям,

если ее с самого начала рассматривать как некоторое приближение.

Пористости. В действительности пространство полностью не занято каждой средой, что учитывается введением объемных долей пространства R_1 , R_2 и R_m , занятых соответственно первым и вторым теплоносителями и металлом. По определению значения всех трех указанных величин лежат между нулем и единицей и подчиняются следующему соотношению:

$$R_1 + R_2 + R_m = 1. \quad (1)$$

Все три значения R рассчитываются непосредственно. Положим, что первый теплоноситель течет внутри труб, наружный диаметр которых D_e , а внутренний D_i ; и что эти трубы собраны в пучок и расположены по вершинам прямоугольника с расстоянием между центрами X и Y .

Тогда число труб на единицу поперечного сечения составит $1/XY$, а внутренний объем одной трубы единичной длины будет равен $\pi D_i^2/4$. Отсюда получаем выражение

$$R_1 = \pi D_i^2 / (4XY). \quad (2)$$

Соответственно выражение для R_2 — доли межтрубного пространства примет вид

$$R_2 = 1 - \pi D_e^2 / (4XY). \quad (3)$$

Доля объема, занятого металлом,

$$R_m = \pi (D_e^2 - D_i^2) / (4XY). \quad (4)$$

Значения R_i , которые были определены как доли объема, удобно трактовать одновременно и как соответствующие доли поперечного сечения теплообменника и использовать их при определении скоростей. Скорости двух рассматриваемых жидкостей в направлении координат θ , r и z обозначим u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , w_1 и w_2 соответственно. При этом, например, массовая скорость первого теплоносителя (массовый расход через единицу поперечного сечения теплообменника) в направлении θ примет вид $\rho_1 u_1 R_1$, а второго теплоносителя $\rho_2 u_2 R_2$ и т. д.

Уравнение энергии. Модель взаимопроникающих сред позволяет описать тепловое состояние теплообменника уравнениями в частных производных. Например, для первого теплоносителя поле температур описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (R_1 \rho_1 c_1 T_1) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (R_1 \rho_1 u_1 r c_1 T_1) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R_1 \rho_1 v_1 r c_1 T_1) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(R_1 \Lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(R_1 \Lambda_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(R_1 \Lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + \dot{q}_{m \rightarrow 1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где c_1 — удельная теплоемкость первого теплоносителя при постоянном давлении; Λ_1 — его эффективная тепло-

проводность, учитывающая турбулентный перенос теплоты и другие факторы; $\dot{q}_{m \rightarrow 1}$ — интенсивность передачи теплоты (на единицу объема пространства теплообменника) от металла первому теплоносителю.

Ниже приведены члены уравнения, которые были опущены из-за их малой значимости при описании теплового состояния теплообменников: члены $R_1 \partial p / \partial t$, характеризующий влияние изменений давления p на температуру; члены, учитывающие кинетическую энергию движения и влияние вязкой диссипации энергии; члены, учитывающие химические превращения в теплоносителе; члены, учитывающие фазовые переходы.

Последним из указанных членов, безусловно, не всегда можно пренебречь на практике, однако представленный метод анализа может быть непосредственно распространен на случай с фазовым переходом заменой температуры на энтальпию.

Следует заметить, что в описании отсутствует предположение о постоянстве значения удельной теплоемкости; поэтому перейти к описанию случая с изменением фазового состояния легко; в малом диапазоне температуры, охватывающем точку кипения, значение удельной теплоемкости можно искусственно увеличить, чтобы была учтена скрытая теплота парообразования. Безусловно, этот прием используется только при фазовом переходе в пределах потока одного теплоносителя; при переходе массы от одного потока к другому требуется более сложное описание процесса, представленное в [11].

Уравнение энергии для второго теплоносителя, текущего в межтрубном пространстве, можно записать аналогичным образом

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (R_2 \rho_2 c_2 T_2) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (R_2 \rho_2 u_2 r c_2 T_2) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R_2 \rho_2 v_2 r c_2 T_2) + \frac{\partial}{\partial z} (R_2 \rho_2 w_2 c_2 T_2) = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(R_2 \Lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(R_2 \Lambda_2 r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left(R_2 \Lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) + \dot{q}_{m \rightarrow 2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где Λ_2 — эффективная теплопроводность второго теплоносителя; $\dot{q}_{m \rightarrow 2}$ — интенсивность теплоотдачи на единицу объема теплообменника от металлической стенки ко второму теплоносителю.

Уравнение энергии для металла проще, поскольку металл не движется, и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (R_m \rho_m c_m T_m) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(R_m \Lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(R_m \Lambda_m r \frac{\partial T_m}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(R_m \Lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial z} \right) - \dot{q}_{m \rightarrow 1} - \dot{q}_{m \rightarrow 2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь Λ_m — эффективная теплопроводность металла. Уравнение (7) учитывает перенос теплоты от металла к первому и второму теплоносителям.

Общепринятые (но не обязательные) упрощения. Обычно пренебрегают теплопроводностью в металле, так как ее влияние мало. В этом случае уравнение (7) упрощается

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_m \rho_m c_m T_m) = -\dot{q}_{m \rightarrow 1} - \dot{q}_{m \rightarrow 2}. \quad (8)$$

Часто (за одним исключением) пренебрегают и членами, описывающими теплопроводность в обоих теплоносителях. Соответственно (7) и (8) сводятся к следующим

уравнениям:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (R_1 \rho_1 c_1 T_1) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (R_1 \rho_1 u_1 r c_1 T_1) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R_1 \rho_1 v_1 r c_1 T_1) + \frac{\partial}{\partial z} (R_1 \rho_1 w_1 T_1) = \\ & = \dot{q}_{m \rightarrow 1}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (R_2 \rho_2 c_2 T_2) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (R_2 \rho_2 u_2 r c_2 T_2) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R_2 \rho_2 v_2 r c_2 T_2) + \frac{\partial}{\partial z} (R_2 \rho_2 w_2 T_2) = \\ & = \dot{q}_{m \rightarrow 2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Единственным исключением является случай, предполагающий наличие интенсивного перемешивания в одном или двух направлениях. Таким образом, если считать, что теплоноситель в межтрубном пространстве полностью перемешан в плоскости z , то следует брать повышенное значение Λ_z в членах с $\partial/\partial \theta$ и $\partial/\partial r$ и принимать $\Lambda_z = 0$ в члене с $\partial/\partial z$. Эта ситуация, в частности, служит хорошей иллюстрацией возможной анизотропии Λ , что обычно и имеет место в действительности.

Допущения, о которых шла речь выше, не обязательны с точки зрения удобства решения уравнений.

Члены, описывающие тепловые потоки. Члены $\dot{q}_{m \rightarrow 1}$ и $\dot{q}_{m \rightarrow 2}$ можно записать в следующем виде:

$$\dot{q}_{m \rightarrow 1} = U_1 (T_m - T_1); \quad (11)$$

$$\dot{q}_{m \rightarrow 2} = U_2 (T_m - T_2). \quad (12)$$

Здесь U_1 и U_2 — индивидуальные объемные коэффициенты теплообмена, описывающие перенос теплоты с соответствующей стороны металлической стенки через полость ее толщины, прилегающий слой загрязнений и пристенный пограничный слой теплоносителя в ядро потока. Они обычно являются функциями местной температуры жидкости и ее скорости, а также чисто геометрических параметров. Как правило, и U_1 , и U_2 увеличиваются с ростом R_m , т. е. доли металла.

Стационарный случай. Часто требуется проанализировать только стационарное распределение температуры в теплообменнике. Тогда запись уравнения для T_m в дифференциальном виде оказывается ненужной, и оно сводится к соотношению

$$\dot{q}_{m \rightarrow 1} + \dot{q}_{m \rightarrow 2} = 0, \quad (13)$$

из которого с помощью уравнений (11) и (12) можно получить

$$T_m = \frac{U_1 T_1 + U_2 T_2}{U_1 + U_2} \quad (14)$$

и

$$\dot{q}_{m \rightarrow 1} = \dot{q}_{m \rightarrow 2} = \frac{T_2 - T_1}{1/U_1 + 1/U_2}. \quad (15)$$

Уравнение (15) можно подставить в дифференциальные уравнения для T_1 и T_2 , которые предстоит решить при расчете характеристик теплообменника. Если требуется знать температуру металла в любой точке, ее легко получить с помощью уравнения (14).

Расчет характеристик теплообменника. Решение дифференциальных уравнений, которое может быть получено описанными в разд. 1.4 численными методами, дает трехмерное распределение температуры в любой момент времени: $T_1 = T_1(\theta, r, z, t)$; $T_2 = T_2(\theta, r, z, t)$ и $T_m = T_m(\theta, r,$

$z, t)$. Эти функции находят с помощью ЭВМ и представляют в табличном или графическом виде.

Для преобразования этих данных в удобную для специалистов по теплообменникам форму необходимы не очень значительные усилия, и это можно сделать с помощью ЭВМ. Обычно желательно знать выходные температуры теплоносителей. Эту информацию можно получить простым интегрированием полей температур, при этом массовая скорость выступает в качестве массового коэффициента.

Количество передаваемой теплоты можно найти исходя из этих параметров с учетом суммарного теплового баланса или интегрированием значений $\dot{q}_{m \rightarrow 1}$ и $\dot{q}_{m \rightarrow 2}$ по всему объему теплообменника.

Применение к теплообменнику с перекрестным током. Покажем, как приведенные выше уравнения можно применить для расчета стационарных режимов идеализированного теплообменника с перекрестным движением теплоносителей.

Для такого теплообменника можно использовать двукратное описание: изменениями параметров по координате θ пренебрежем и примем, что первый теплоноситель течет только в направлении r , второй — в направлении z , а перемешивание происходит (если происходит вообще) в направлениях, перпендикулярных направлениям течения. В этом случае дифференциальные уравнения для T_1 и T_2 записываются следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R_1 \rho_1 v_1 r c_1 T_1) = \frac{\partial}{\partial z} \left(R_1 \Lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + \frac{T_2 - T_1}{1/U_1 + 1/U_2}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (R_2 \rho_2 w_2 c_2 T_2) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(R_2 \Lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{T_1 - T_2}{1/U_1 + 1/U_2}. \quad (17)$$

Для того чтобы удовлетворить обычным допущениям, коэффициенты Λ следует положить равными нулю (перемешивание отсутствует) или взять большими (идеальное перемешивание).

В классической задаче о теплообменнике с поперечным током параметры $R_1 \rho_1 v_1 c_1$, $R_2 \rho_2 w_2 c_2$ и $1/U_1 + 1/U_2$ рассматриваются как постоянные, а их изменениями по r как малыми величинами пренебрегают. Тогда уравнения можно свести к выражениям

$$C_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = C_2 \frac{\partial T_1}{\partial z} + C_3 (T_2 - T_1) \quad (18)$$

и

$$C_4 \frac{\partial T_2}{\partial z} = C_5 \frac{\partial T_2}{\partial r} + C_3 (T_1 - T_2), \quad (19)$$

где $C_1 - C_5$ — постоянные.

Решение этих уравнений численными методами осуществляется непосредственно; результаты этих решений представлены в § 1.3.1.

С. Дифференциальные уравнения для скорости и давления. Рассматриваемые физические принципы и явления. Если задание или идеализация распределений скорости в межтрубном пространстве теплообменника приводит к неудовлетворительным результатам, эти распределения можно рассчитать с помощью дифференциальных уравнений в частных производных, которые могут быть решены, если имеется информация относительно некоторых вспомогательных функций, входящих в эти уравнения. Совместное решение этих уравнений и уравнения, описывающего поле температур, позволяет непосредственно определить характеристики теплообменника.

Вспомогательные функции представляют собой алгебраические соотношения для переноса импульса, они аналогичны выражениям для Λ и U в температурных уравнениях.

В кожухотрубных теплообменниках режим течения внутри труб в действительности известен с самого начала.

Поэтому рассчитывать распределение скорости нужно только для межтрубного пространства. Нужно решить четыре дифференциальных уравнения, по одному для каждой составляющей скорости и одно для давления. Первые три уравнения — это уравнения сохранения импульса, давление определяется с использованием уравнения сохранения массы.

В уравнении сохранения импульса содержится источниковый член, не имеющий аналога в уравнениях энергии. Это член, связанный с подъемной силой, пропорциональной разности плотностей жидкости в рассматриваемой точке и средней плотности на данном горизонтальном уровне. В приведенных ниже уравнениях принято, что ось z по-прежнему направлена вертикально. Если корпус установлен под углом к вертикали, то члены, связанные с подъемной силой, появятся не только в уравнении для w , но и в уравнениях для u и v .

Уравнения сохранения массы. Из условий сохранения массы следует соотношение между плотностью и скоростью компонентов

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\rho) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(R\rho ur) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(R\rho vr) + \frac{\partial}{\partial z}(R\rho w) = 0. \quad (20)$$

Для простоты записи уравнение не содержит индексов. Если, как подразумевалось ранее, в межтрубном пространстве течет второй теплоноситель, то, естественно, соответствующие параметры должны содержать индекс 2.

Если течение стационарное или если жидкость считается несжимаемой, уравнение сохранения массы имеет более простой вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(R\rho ur) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(R\rho vr) + \frac{\partial}{\partial z}(R\rho w) = 0. \quad (21)$$

Уравнения импульса. Дифференциальное уравнение сохранения углового импульса ur записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\rho ur) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(R\rho urur) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(R\rho vrur) + \frac{\partial}{\partial z}(R\rho wur) = -R \frac{\partial p}{\partial \theta} - f_{\theta} r, \quad (22)$$

где p — давление жидкости; f_{θ} — сила, приведенная к единице объема, действующая в направлении отрицательных значений θ и учитывающая все эффекты, связанные с трением (между двумя потоками теплоносителей или между первым теплоносителем и некоторой твердой поверхностью).

Дифференциальное уравнение сохранения импульса в направлении r имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\rho v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(R\rho urv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(R\rho vr) + \frac{\partial}{\partial z}(R\rho wv) = -R \frac{\partial p}{\partial r} + R\rho \frac{(ur)^2}{r^3} - f_r, \quad (23)$$

где f_r — сила на единицу объема теплообменника, действующая в направлении отрицательных значений r . Эта сила также учитывает все эффекты, связанные с трением. Член с $(ur)^2$ учитывает центробежную силу.

Дифференциальное уравнение сохранения импульса в направлении оси z (вертикальном направлении) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\rho w) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(R\rho urw) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(R\rho vrw) + \frac{\partial}{\partial z}(R\rho ww) = -R \frac{\partial p}{\partial z} - f_z + g_n(\bar{\rho} - \rho), \quad (24)$$

где f_z учитывает все эффекты, связанные с трением, и действует в направлении отрицательных значений z ;

$g_n(\bar{\rho} - \rho)$ учитывает гравитационные эффекты. Эта сила заставляет жидкость двигаться вверх, если ее плотность падает ниже среднего значения $\bar{\rho}$, которое можно считать постоянным для всего теплообменника или функцией координаты z .

Члены, учитывающие трение. Как уже говорилось, члены f_{θ} , f_r и f_z учитывают эффекты, связанные с трением. Эти эффекты могут быть двоякого рода: первые могут быть названы «внутренним трением», вторые — связаны с потерями импульса, обусловленными наличием твердых поверхностей (труб, перегородок и т. д.).

Эффекты первого рода можно описать через эффективную вязкость и градиенты скорости. Но для экономии места и в связи с тем, что эти члены уравнений при описании теплообменников часто несут незначительный вклад по сравнению с другими, здесь для них не приведены полные выражения. Вместо этого вязкостные составляющие обозначены символами $f_{\eta\theta}$, $f_{\eta r}$ и $f_{\eta z}$ с тем, чтобы указать на их связь с вязкостными эффектами, и оставлены в таком виде в уравнениях, чтобы в последующем их можно было либо учесть, либо проигнорировать.

Другие составляющие f записаны в виде произведений f'_{θ} , f'_r и f'_z на соответствующие составляющие скорости. Такой подход указывает на то, что значения соответствующих членов увеличиваются с ростом скорости. Однако линейный характер зависимостей является кажущимся, поскольку надо иметь в виду, что сами f' могут сложным образом зависеть от скоростей.

В соответствии с описанным подходом члены, учитывающие трение, представим в следующем виде:

$$f_{\theta} = f_{\eta\theta} + \frac{1}{r} f'_{\theta} ur; \quad (25)$$

$$f_r = f_{\eta r} + f'_r v; \quad (26)$$

$$f_z = f_{\eta z} + f'_z w. \quad (27)$$

Начальные и граничные условия. Для завершения математического описания задачи приведенные дифференциальные уравнения и вспомогательные функции необходимо дополнить граничными условиями, а если течение нестационарное, еще и ввести начальные условия.

Применительно к теплообменникам в качестве граничных условий: 1) задают скорость, температуру и фазовые состояния жидкостей во входных сечениях; 2) все компоненты скорости теплоносителя на границах с твердой стенкой (кожух теплообменника) считаются равными нулю; 3) градиенты температуры по нормали к поверхности принимаются на этой поверхности равными нулю (для теплоизолированного кожуха) или в виде произведения некоторой постоянной на разность температур между кожухом и окружающей средой (при наличии тепловых потерь от кожуха).

Начальные условия, необходимые в задачах неустановившихся течений, в идеальном случае включают задание всех переменных в поле течения в момент начала процесса. Подобная информация едва ли когда-либо существует в непосредственном виде; однако часто достаточно предположить, что условия в теплообменнике в начальный момент таковы, что они отвечают его работе в стационарном режиме с преобладающими на начальной стадии граничными условиями. Анализ переходного процесса в этом случае состоит в определении изменений параметров, вызванных заданным изменением граничных условий.

Обсуждение математических проблем. Сравнение уравнений импульса с уравнениями энергии показывает, что решение первых, по-видимому, заметно сложнее. Это связано не только с большим числом членов в уравнении движения, но также и с тем, что эти члены с большей очевидностью являются нелинейными и взаимообусловленными.

Нелинейность может присутствовать и в уравнениях энергии, даже если массовые скорости заранее известны. Она может быть связана с зависимостью U от T и взаимобусловленностью членов уравнения из-за зависимости тепловых потоков от соответствующих разностей температур. Однако нелинейность в уравнениях количества движения появляется даже в конвективных членах, где скорости перемножаются.

Аналитические методы решения взаимосвязанных уравнений крайне ограничены, а для нелинейных взаимосвязанных уравнений практически отсутствуют. Отсюда следует, что решение этих уравнений должно осуществляться численными методами. После такого выбора решение уравнений импульса отличается от решения уравнения энергии скорее по своей трудоемкости, нежели качественно. Как будет показано в разд. 1.4, в настоящее время обе эти задачи решаются.

Характер решения. В результате решения уравнений получают систему трехмерных полей скорости для последовательных моментов времени, а также сопутствующие поля давления:

$$\begin{aligned}u &= u(\theta, r, z, t); \\v &= v(\theta, r, z, t); \\w &= w(\theta, r, z, t); \\p &= p(\theta, r, z, t).\end{aligned}$$

Поле давлений или даже частичные данные о нем, характеризующие перепад давлений между входом и вы-

ходом теплообменника, дают сведения о затратах мощности на прокачку жидкости через межтрубное пространство теплообменника. Однако поле давлений дает также нужную информацию о силах, действующих на перегородки, камеры и тому подобные элементы.

Поля скоростей безусловно необходимы для получения конкретных полей температур, коль скоро мы отошли от простого задания rho_l , rho_v и rho_w . Знание полей скорости позволяет точнее рассчитать значения U_2 , поскольку коэффициенты конвективной теплоотдачи зависят от локальных значений относительной скорости. В действительности наши знания о зависимости коэффициента теплоотдачи от относительной скорости еще недостаточно полны, особенно в тех случаях, когда течение направлено ни перпендикулярно и ни параллельно пучку труб или когда средние линии тока сильно искривлены. Тем не менее полезно знать зоны, где относительные скорости высоки, а где низки, чтобы по крайней мере представлять степень неравномерности распределения коэффициента теплоотдачи.

Итогом полного решения уравнений движения и энергии могут быть: 1) более точные расчеты характеристик теплообменников; 2) выявление отклонений реального течения от идеального; 3) получение количественных данных по переходным процессам; 4) выявление потребностей в формулах для расчета коэффициента конвективной теплоотдачи (например, при обтекании пучка труб под углом) для увеличения точности расчетов.

Эти вопросы рассмотрены в разд. 1.4. В разд. 1.3, однако, рассмотрены те довольно немногочисленные случаи, для которых можно получить аналитические решения.

Раздел 1.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ В ТЕПЛООБМЕННИКАХ¹

Д. Б. Сполдинг

1.3.1. Решения для однородного коэффициента теплопередачи в теплообменниках без фазовых превращений

А. Введение. Ниже приведены решения обыкновенных дифференциальных уравнений для температур в идеализированных (одномерных) многоходовых теплообменниках с однонаправленным и противоточным движением теплоносителей. Приведены также решения дифференциальных уравнений в частных производных для распределения температур в многоходовых теплообменниках с перекрестным током.

Решения справедливы для теплообменников без фазовых переходов теплоносителей. Однако если любой из теплоносителей должен входить в теплообменник и покидать его при одной и той же температуре, претерпевая по пути фазовые изменения, то полученные решения можно использовать и в этом случае. Это достигается с помощью следующего приема: полагают, что между температурой насыщенной жидкости и температурой насыщенного пара существует некоторая произвольно выбранная разница δT_{lg} , например 10^{-50}°C . Тогда удельная теплоемкость, эквивалентная скрытой теплоте парообразования,

$$c_{p,lg} = \frac{\Delta h}{\delta T_{lg}}, \quad (1)$$

Если это значение удельной теплоемкости подставить в уравнения, описывающие процессы в теплообменнике,

¹ Пер. с англ. Ю. А. Зейгарника.

появится возможность рассчитать случай с фазовым переходом. Коэффициент теплоотдачи U считается однородным по объему.

В. Одноходовое противоточное течение. В противоточном теплообменнике отношение dz_2/dz_1 в уравнении (9) § 1.2.6 равно -1 . Если принять, что вход первого теплоносителя происходит на нижней отметке z_1 , то в результате интегрирования уравнения получим

$$(T_{1,out} - T_{2,in}) = (T_{1,in} - T_{2,out}) \exp(NTU_2 - NTU_1). \quad (2)$$

Теперь можно связать эффективную разность температур с изменением температуры двух теплоносителей, используя для этого уравнения, полученные с учетом определения числа единиц переноса NTU_1 и NTU_2 [см. уравнение (15), § 1.2.5], и определения самой эффективной разности температур [см. уравнение (13), § 1.2.5] при принятом постоянным U . В результате имеем

$$\Delta T_M = T_1 - T_2 = \frac{T_{1,in} - T_{1,out}}{NTU_1} = \frac{T_{2,out} - T_{2,in}}{NTU_2}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\text{Из этого уравнения получаем} \\ \Delta T_M &= \frac{(T_{1,in} - T_{1,out}) - (T_{2,out} - T_{2,in})}{NTU_1 - NTU_2} = \\ &= \frac{(T_{1,in} - T_{2,out}) - (T_{1,out} - T_{2,in})}{NTU_1 - NTU_2}. \quad (4)\end{aligned}$$

Теперь из (2) получим следующее соотношение:

$$NTU_1 - NTU_2 = \ln \frac{(T_{1,out} - T_{2,out})}{(T_{1,out} - T_{2,in})}. \quad (5)$$

Комбинация уравнений (4) и (5) дает полезное выражение для средней разности температур, записанной через входные и выходные температуры двух теплоносителей,

$$\Delta T_M = \frac{(T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{out}}) - (T_{1, \text{out}} - T_{2, \text{in}})}{\ln [(T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{out}})/(T_{1, \text{out}} - T_{2, \text{in}})]}. \quad (6)$$

Таким образом, средняя разность температур, определяющая передачу теплоты от одного теплоносителя другому, равна среднелогарифмическому значению разностей температур на концах теплообменника.

Сравнение уравнений (6) и (11) § 1.2.5 показывает, что обозначение ΔT_{LM} уже встречалось для данного частного случая, т. е. в однокходовом противоточном теплообменнике $\Delta T_M = \Delta T_{LM}$.

Важно знать, как выглядит соотношение (6) в том случае, когда изменения температур обоих теплоносителей одинаковы, т. е. когда $C_1 = C_2 (R = 1)$.

Для удобства алгебраических выкладок перепишем уравнение (6) в виде

$$\Delta T_M = \frac{\Delta T_x - \Delta T_y}{\ln (\Delta T_x / \Delta T_y)}. \quad (7)$$

Разложив логарифм в ряд, получим

$$\Delta T_M \rightarrow \frac{\Delta T_x - \Delta T_y}{(\Delta T_x - \Delta T_y) / \Delta T_y - \frac{1}{2} [(\Delta T_x - \Delta T_y) / \Delta T_y]^2 + \dots} \rightarrow \frac{\Delta T_y}{\left[1 + \frac{1}{2} (\Delta T_x - \Delta T_y) / \Delta T_y\right]}. \quad (8)$$

После преобразований знаменателя уравнения (8) получаем выражение для ΔT_M в виде

$$\Delta T_M \approx \Delta T_y \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(\Delta T_x - \Delta T_y)}{\Delta T_y}\right], \quad (9)$$

откуда следует, что

$$\Delta T_M \approx \frac{1}{2} (\Delta T_x + \Delta T_y). \quad (10)$$

Таким образом, среднелогарифмическая разность температур сводится к среднеарифметической на концах теплообменника, что вполне естественно.

Теперь результаты анализа можно описать с помощью трех сформулированных в § 1.2.5 способов.

Метод поправочного коэффициента F . С учетом того, что для противоточного теплообменника с однородным U $\Delta T_M = \Delta T_{LM}$ и из уравнения (21) § 1.2.4 следует, что поправочный коэффициент $F = 1$.

$P - NTU_2$ -метод. Для того чтобы выразить характеристический параметр P через число единиц переноса NTU_2 и отношение R , необходимо лишь исключить температуру из уравнения (25) § 1.2.5 и уравнений (2) и (3). В результате получим

$$P = \frac{1 - \exp [-NTU_2 (1 - R)]}{1 - R \exp [-NTU_2 (1 - R)]}. \quad (11)$$

Это уравнение подразумевает, что P растет с увеличением NTU_2 и уменьшением R . Характер изменения P показан на рис. 1 для значений R в пределах от 0 до 1 ($C_2 < C_1$), когда P и E идентичны.

При $R \rightarrow 1$ уравнение (11) становится неопределенным. Однако в результате обычного анализа пределов приходим к следующему выражению:

$$R \rightarrow 1 \quad P \rightarrow \frac{NTU_2}{1 + NTU_2}. \quad (12)$$

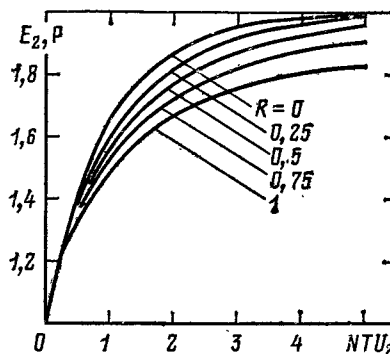


Рис. 1. Зависимость эффективности от числа единиц переноса для противоточного теплообменника с однородным U при различных факторах R

θ -метод. Поскольку θ связано с P и NTU_2 уравнением (32) § 1.2.5, легко вывести следующее соотношение между θ и двумя числами единиц переноса:

$$\theta = \frac{1}{NTU_2} \frac{1 - \exp [-NTU_2 (1 - R)]}{1 - R \exp [-NTU_2 (1 - R)]}, \quad (13)$$

которое можно записать в более симметричном виде

$$\theta = \frac{\exp (NTU_2) - \exp (NTU_1)}{NTU_2 \exp (NTU_2) - NTU_1 (\exp NTU_1)}. \quad (14)$$

Если отношение $R \rightarrow 1$, т. е. значения NTU_1 и NTU_2 выравниваются, это выражение сводится к

$$\theta \rightarrow \frac{1}{1 + NTU}. \quad (15)$$

С. Однокходовое однонаправленное течение. Для теплообменника с однонаправленным движением теплоносителей dz_2/dz_1 в уравнении (9) § 1.2.6 равно 1. Поэтому интегрирование этого уравнения дает

$$T_{1, \text{out}} - T_{2, \text{out}} = (T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{in}}) \exp [-(NTU_1 + NTU_2)]. \quad (16)$$

Теперь уравнение (3), представляющее собой не более чем определение параметра ΔT_M в сочетании с тепловым балансом, оказывается справедливым для теплообменника с любой схемой течения теплоносителей. С его помощью можно записать эффективную разность температур

$$\Delta T_M = \frac{(T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{in}}) - (T_{1, \text{out}} - T_{2, \text{out}})}{NTU_1 + NTU_2}. \quad (17)$$

Комбинируя это уравнение с уравнением (16), получаем

$$\Delta T_M = \frac{(T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{in}}) - (T_{1, \text{out}} - T_{2, \text{out}})}{\ln [(T_{1, \text{in}} - T_{2, \text{in}})/(T_{1, \text{out}} - T_{2, \text{out}})]}. \quad (18)$$

Это уравнение отличается от уравнения (6), дающего ΔT_M для противоточного движения теплоносителей, только индексами in и out при T_2 . Выражение для средней разности температур в теплообменниках с однонаправленным и противоточным движением теплоносителей остается среднелогарифмическим ΔT_{LM} , и в общем случае в духе уравнения (7) его можно записать как

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_x - \Delta T_y}{\ln (\Delta T_x / \Delta T_y)}, \quad (19)$$

где ΔT_x и ΔT_y — разности температур теплоносителей на концах теплообменника.

Результаты анализа можно теперь представить одним из описанных ниже методов (см. также § 1.2.5).

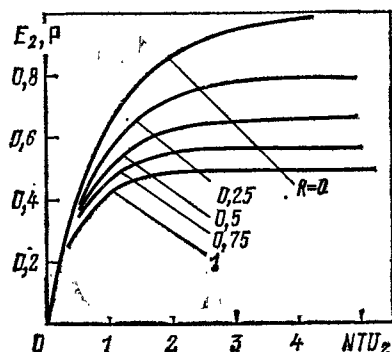


Рис. 2. Зависимость эффективности от числа единиц переноса для теплообменника с односторонним движением теплоносителей и однородным U при различных факторах R

Метод поправочного коэффициента F . Отношение значений эффективной разности температур для теплообменников с односторонним и противоточным течением теплоносителей при одном и том же числе единиц переноса и отношении R можно получить с помощью соответствующих выражений для θ [см. приведенное выше уравнение (14) и уравнение (26), которое будет дано ниже]. Однако такой прием не соответствует методу поправочного коэффициента F , поскольку F определяется как отношение средних разностей температур при одних и тех же значениях P и R .

Найденная указанным путем формула для F имеет вид

$$F = \frac{\eta/\xi}{\ln \left| \frac{2-P(1+R-\eta)}{2-P(1+R+\eta)} \right|}, \quad (20)$$

где

$$\eta = \sqrt{R^2 + 1} \quad (21)$$

и при $R=1$

$$\xi = \frac{R+1}{\ln |(1-P)(1-PR)|}, \quad (22)$$

при $R=1$

$$\xi = (1-P)/P. \quad (23)$$

Общий вид функции $F(P, R)$, соответствующий этим выражениям, аналогичен представленному на рис. 1 § 1.2.5, однако между ними имеются количественные расхождения.

$P-NTU_2$ -метод. Характеристический параметр P , являющийся одновременно эффективностью E_2 , отнесенной ко второму теплоносителю, можно определить путем исключения температур из уравнений (3) и (17), а также (25) § 1.2.5. В результате получим

$$P = \frac{1 - \exp [-(R+1)NTU_2]}{R+1}. \quad (24)$$

Это уравнение показывает, что P увеличивается с ростом NTU_2 и снижением R . Зависимость P от NTU_2 и R графически представлена на рис. 2.

Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что противоточный теплообменник при заданных числе единиц переноса и отношении R всегда лучше теплообменника с односторонним движением теплоносителей (значения параметра P в первом случае оказываются выше).

θ -метод. Отношение средней эффективной разности температур к максимальной, т. е. параметр θ , представляет собой отношение $P/(NTU_2)$. Таким образом,

$$\theta = \frac{1 - \exp [-(R+1)NTU_2]}{(R+1)NTU_2} \quad (25)$$

или в более симметричной записи

$$\theta = \frac{1 - \exp [-(NTU_1 + NTU_2)]}{NTU_1 + NTU_2}. \quad (26)$$

Д. Теплообменники с перекрестным течением теплоносителей. Необходимо остановиться на трех типах перекрестных течений: 1) ни один из теплоносителей не перемешивается в пространстве; 2) оба теплоносителя перемешиваются; 3) один из теплоносителей перемешивается, второй — нет.

В первом случае существует точное решение соответствующих уравнений, впервые опубликованное в [39, 40] и проанализированное в [35]. В [12] также представлена приближенная формула

$$P = 1 - \exp \left[\frac{\exp (-NTU_2 R \eta) - 1}{R \eta} \right], \quad (27)$$

где η определяется следующим образом:

$$\eta = NTU_2^{0,22}. \quad (28)$$

Для второго случая в [5] приводится формула

$$P = \{ [1 - \exp (-NTU_2)]^{-1} + R [1 - \exp (-RNTU_2)]^{-1} \}^{-1}. \quad (29)$$

Для третьего случая (если не перемешивается первый теплоноситель) в [5] получена следующая формула (более удобный ее вывод дан в [35]):

$$P = 1 - \exp \frac{[1 - \exp (-RNTU_2)]}{P}. \quad (30)$$

Если же не перемешивается второй теплоноситель, то там же дана формула

$$P = R^{-1} (1 - \exp \{ -R [1 - \exp (-N_2)] \}). \quad (31)$$

Другие параметры, такие как θ и F , безусловно, можно получить из приведенных выше выражений для P на основе соответствующих определений.

Е. Другие типы течений. Более сложные типы течений описываются более сложными аналитическими выражениями, если такие выражения вообще существуют. Так, в теплообменнике с одним ходом теплоносителя в межтрубном пространстве и двумя ходами внутри труб или при числе ходов внутри труб, кратном двум, параметр P можно выразить через NTU_2 и R следующим образом:

$$P = 2 \left[1 + R + \frac{1 + \exp (-NTU_2 \sqrt{1+R^2})}{1 - \exp (-NTU_2 \sqrt{1+R^2})} \sqrt{1+R^2} \right]^{-1}. \quad (32)$$

В работе [13], из которой взята эта формула, содержатся многочисленные аналитические выражения и графические представления для большого набора схем движения теплоносителей. Довольно полный набор уравнений, графиков и таблиц содержится также в разд. 1.5 настоящего Сборника.

1.3.2. Другие аналитические решения

До появления цифровых вычислительных машин искусство исследователей в области теории теплообменников проверялось при получении аналитических решений для моделей аппаратов, в большей мере отвечающих реальности, чем варианты с однородным U или стационарная модель из § 1.3.1 [36, 37].

Таким образом, можно допустить изменение U в зависимости от координаты или разности температур, не считая тем самым уравнения, описывающие теплообменники с односторонним и противоточным движением теплоноси-

телей, полностью неразрешимыми в этих случаях. В простых случаях аналитически были решены также и нестационарные задачи.

Однако это направление деятельности было исключено простотой, с которой сегодня можно получить численные решения. Численные методы допускают значительно большие отклонения от идеальности, а решения в большей степени соответствуют действительности, чем это достигается при использовании аналитических методов. Поэтому,

по-видимому, нет необходимости рассматривать упоминавшиеся аналитические работы.

Формулы и диаграммы § 1.3.1 имеют скорее учебную, нежели практическую значимость, поскольку, если это сделать просто, можно с самого начала принять в расчет неоднородность коэффициента теплопередачи и свойств жидкости. Графики включены в данный Справочник потому, что они лежат в основе широко практикуемых сегодня расчетов теплообменного оборудования.

Раздел 1.4

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕПЛООБМЕННИКОВ¹

Д. Б. Сполдинг

1.4.1. Случаи заданного поля скоростей

А. Введение. Ниже обсуждаются способы расчета теплообменников в тех случаях, когда упрощения, рассматривавшиеся в разд. 1.3, слишком далеки от реальности, например течение является неуставившимся; коэффициент теплоотдачи непостоянен по объему; свойства жидкости изменяются; ожидается, что условия на входе и влияние перегородок вызывают большие отклонения от идеальной картины течения.

Последняя причина, требующая расчета поля скоростей, рассмотрена в § 1.4.2. В настоящем параграфе рассмотрены те задачи, в которых поле скоростей можно считать заданным.

Почти во всех реальных теплообменниках распределение температуры трехмерно, поскольку даже в тех случаях, когда большая часть конфигурации осесимметрична, сопла и коллекторы, через которые жидкость входит и выходит из теплообменника, почти неизбежно вызывают отклонение от симметрии.

Градирия с естественной циркуляцией в форме гипербола представляет собой теплообменник, наиболее приближающийся к идеалу осесимметричности. И все же наличие даже небольшого горизонтального ветра приводит к тому, что поля параметров внутри и вокруг градирии становятся трехмерными. Поэтому в данной главе прежде всего рассматриваются расчеты трехмерных течений.

В. Дискретизация. Разбиение пространства. Как и в § 1.2.7, будем рассматривать цилиндрическую систему координат θ , r , z .

Численные методы имеют дело с ограниченным набором чисел, поэтому целесообразно разбить пространство на конечное число неперекрывающихся областей, обычно называемых ячейками, и каждой из зависимых переменных приписать внутри каждой ячейки одно значение.

Цилиндрическую область, представляющую теплообменник, разобьем тремя наборами поверхностей: плоскостями с фиксированным θ , цилиндрами с фиксированным r и плоскостями с фиксированным z . Получающееся в результате разбиение (дискретизация) пространства показано на рис. 1. Интервалы по θ , r и z не обязательно должны быть постоянными; как правило, их целесообразно делать непостоянными, чтобы иметь возможность сосредоточить внимание на тех областях теплообменника, которые представляют особый интерес.

Предположим теперь, что размеры ячеек велики по сравнению с размерами элементов теплообменника, например с диаметром труб (рис. 2). Поскольку необходимо приписать определенные значения T_1 , T_2 и T_m соответственно

температурам, жидкости внутри труб, жидкости вне труб и металла, ясно, что необходимо провести усреднение. Оно проводится таким образом, чтобы при подстановке средних величин в конечно-разностные уравнения получались пра-

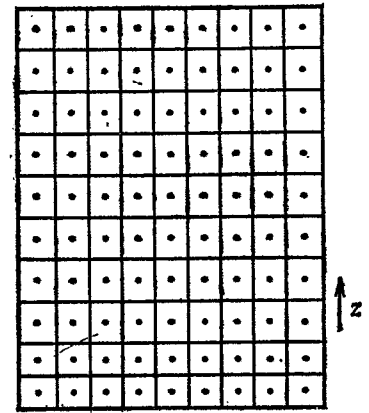
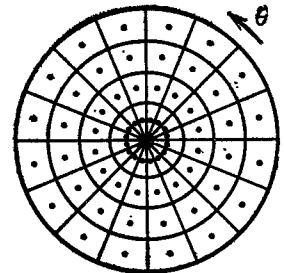


Рис. 1. Разбиение объема цилиндрического теплообменника плоскостями для цилиндрами с постоянными θ , r , z



вильные значения плотностей потоков через поверхности ячейки.

Удобно представлять, что средние значения температур действительно реализуются в некоторых типичных точках внутри ячеек, например в точках внутри ячеек, изображенных на рис. 1.

На рис. 3 в более крупном масштабе показана одна ячейка и приведены используемые обозначения. Центральная точка обозначена буквой P ; центральные точки соседних ячеек обозначены, соответственно N , S , E , W , H и L . Показана также точка P^- , в которой находился центр рассматриваемой ячейки в момент времени, непосредственно

¹ Пер. с англ. И. Г. Зальцмана.

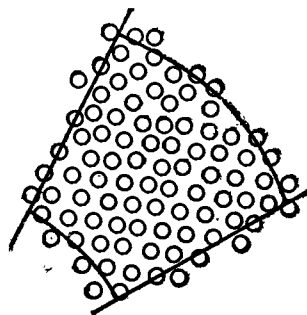


Рис. 2. Ячейка разностной схемы, включающая много трубок или других элементов теплообменника

предшествующий рассматриваемому. Шесть граней ячейки обозначены символами n, s, e, w, h, l . Все эти буквы будут использоваться как индексы значений температуры, плотности, скорости и т. д., показывающие, к какой ячейке или грани ячейки относятся эти значения.

Дискретизация пространства при расчете теплообменников проводится в самом начале вычислений. В процессе вычислений положения границ ячеек остаются неизменными.

Разбиение времени. Время, так же как и пространство, разбивается на конечные интервалы. Время в процессе вычислений изменяется скачками. При этом, однако, размер интервала времени можно регулировать. Так, при анализе отклика теплообменника на внезапное изменение температуры на входе удобно вначале использовать малые временные интервалы, чтобы правильно рассчитывать быстрые изменения. Дальнейший более плавный выход на стационарное состояние можно рассчитать, используя большие интервалы времени.

С. Конечно-разностные уравнения. Природа конечно-разностных уравнений. Если пространство разбито на n_θ интервалов в направлении θ , на n_r в направлении r и n_z в направлении z , то в каждый момент времени для каждой из трех независимых переменных T, ρ и T_m должны быть рассчитаны $n_\theta n_r n_z$ величин. Обычно значения n примерно равны 10, т. е. в каждый момент времени нужно рассчитать около 3000 величин. Для этого составляется набор алгебраических уравнений для переменных, связывающих значение каждой переменной, например T_{1P} , с ее значениями в соседних ячейках $T_{1N}, T_{1S}, T_{1E}, T_{1W}, T_{1H}, T_{1L}$ и в предыдущий момент времени T_{1P-} . Эти уравнения называются конечно-разностными.

Уравнения обычно имеют следующий вид:

$$\Phi_P = (a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_H \Phi_H + a_L \Phi_L + \alpha_P \Phi_{P-} + S_P) / (a_N + a_S + a_E + a_W + a_H + a_L + \alpha_P - S_P). \quad (1)$$

Здесь Φ обозначает какую-либо из зависимых переменных T, ρ, T_m , а коэффициенты a_N , a_S и т. д. характеризуются

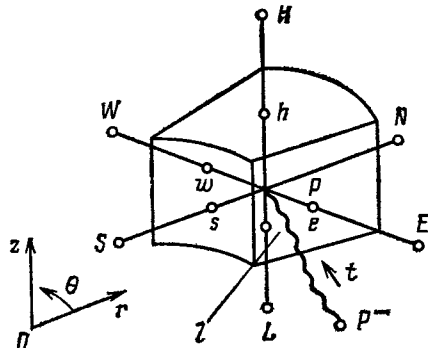


Рис. 3. Типичная ячейка с центральной точкой P, центральными точками соседних ячеек N, S, E, W, H, L и центрами граней ячейки s, e, w, h, l. P- представляет собой точку P в непосредственно предшествующий момент времени

следующими свойствами: все они неотрицательны; отражают эффекты конвекции и диффузии; могут быть функциями Φ (например, если коэффициент теплопроводности зависит от температуры), следовательно, уравнения являются нелинейными.

Величины S_P и S_P^* представляют собой линеаризованный источник в соответствии с соотношением

$$\Phi \equiv S_P + S_P^* \Phi_P. \quad (2)$$

Получение уравнений. Конечно-разностные уравнения вида (1), число которых составляет $3 \times n_\theta n_r n_z$, можно получить из соответствующих уравнений в частных производных для трех переменных T, ρ, T_m (см. § 1.2.7) путем интегрирования этих уравнений по объемам соответствующих ячеек.

Интегрирование приводит к уравнениям, содержащим трех- и четырехкратные интегралы соответственно для грани ячейки и объема. Следующий шаг может быть сделан лишь на основе выбора определенных способов интерполяции и неизбежно содержит элемент произвола, что естественно, поскольку произвольным было разбиение непрерывного пространства на конечное число областей.

Рекомендуемые способы интерполяции заключаются в следующем. Все потоки через стенки ячейки вычисляются с использованием величин, соответствующих концу временного интервала. При вычислении конвективных потоков через стенки ячеек считают, что среднее значение Φ на стенке соответствует значению на «навстречной» стороне стенки.

Диффузионные потоки на стенках вычисляются с использованием значений Φ в центральных точках ячеек по обе стороны стенки.

Изменения во времени рассматриваются как конвективные потоки, в которых произведение *плотность* $\times$ *площадь* $\times$ *скорость* $\times$ *интервал времени* заменяется произведением *плотность* $\times$ *объем*.

Источники вычисляются с использованием значений Φ , соответствующих концу временного интервала.

Приведенные рекомендации являются не единственными среди имеющих разумное обоснование, однако они доказали свою работоспособность на практике.

Некоторые детали. Вследствие этих рекомендаций коэффициент a_N , например, в случае, когда Φ обозначает температуру, можно вычислить с использованием выражений

$$a_N = \frac{1}{2} (R_P + R_N) A_N (D_N + C_N); \quad (3)$$

$$D_N = \frac{1}{2} \frac{\Lambda_P + \Lambda_N}{r_N - r_P}; \quad (4)$$

$$C_N = 0 \text{ при } v_N \geq 0; \quad (5)$$

$$C_N = -\rho_P v_N c_{pN} \text{ при } v_N < 0. \quad (6)$$

Здесь R_P и R_N — доли объема, доступные рассматриваемой жидкости; Λ — коэффициент теплопроводности; A_N — площадь стенки ячейки; D_N — диффузионный (т. е. кондуктивный) вклад в плотность теплового потока; C_N — соответствующий конвективный вклад; c_{pN} — удельная теплоемкость (характерное значение для интервала температур от T_P до T_N).

Остальные коэффициенты a вычисляются аналогично, за исключением a_{P-} , для которого имеем выражение

$$a_{P-} = R_P V_P \rho_{P-}, \quad (7)$$

где V_P — объем ячейки; ρ_{P-} — плотность жидкости в начале рассматриваемого временного интервала.

Д. Прямой метод решения. Допустим, что все значения скорости жидкости известны; тогда всем Λ можно приписать численные значения и, используя заданную геометрию теплообменника, определить доступные части объ-

ема, а для заданного интервала времени можно рассчитать значения всех коэффициентов a в конечно-разностных уравнениях.

Будем считать далее, что коэффициенты теплоотдачи U_1 и U_2 , входящие в уравнения энергии из § 1.2.7, также известны во всех ячейках, тогда можно вычислить значения источниковых членов S_p и S_p' согласно выражениям

$$S_p = U \times \text{объем ячейки} \times T_m; \quad (8)$$

$$S_p' = -U \times \text{объем ячейки}. \quad (9)$$

Решение для одного шага по времени можно получить с помощью простого метода, называемого релаксационной процедурой Гаусса—Зайделя. В этом методе значения всех переменных по очереди вычисляются из конечно-разностных уравнений, в которых они расположены слева, причем в правые части уравнений подставляются значения переменных в соседних точках. Так как при смещении на одну ячейку корректируется значение температуры, использованное до этого при вычислении значения температуры в соседней ячейке, то очевидно, что процесс нужно повторять много раз. Не столь очевиден, но тем не менее имеет место тот факт, что при многократном повторении величин изменения температуры в каждой ячейке делаются все меньше и наконец становятся пренебрежимо малыми. Тогда говорят, что достигнута сходимость решения. Затем можно перейти к следующему шагу по времени.

Поскольку необходимы многократные повторения процедуры (итерации), то представляется возможность при итерациях изменять в случае надобности значения коэффициентов. Это нужно делать, если уравнения нелинейны, например если коэффициенты теплоотдачи зависят (как это всегда бывает в той или иной степени) от температур или разностей температур. Отсюда видно, что при применении численных методов нелинейность задачи не вызывает затруднений.

Е. Более экономичные методы решения. На практике в программах для ЭВМ, предназначенных для экономичного решения крупномасштабных задач, метод Гаусса—Зайделя применяется редко. Обычно используются методы, позволяющие получать решение быстрее, такие, как неявный метод переменных направлений, метод последовательной верхней релаксации и др.

Детали вычислений представляют интерес для специалистов по численным методам¹. Читателю данного Справочника важно знать, что существует много методов решения и что при использовании подходящего метода решение задачи, в которой объем теплообменника разбит на несколько тысяч ячеек, является не столь дорогостоящим. По всей вероятности, больше времени и средств необходимо для адекватной постановки задачи и для того, чтобы ввести в ЭВМ всю необходимую информацию, чем для непосредственного ее решения.

Г. Использование результатов расчетов, выполненных при заданном поле скоростей. Теперь, когда дано представление о том, как проводятся численные расчеты теплообменников, полезно рассмотреть возможные применения результатов этих расчетов. При этом нужно помнить, что поле скоростей предполагается заданным.

Чувствительность к полю скоростей. Может оказаться, что теплообменник спроектирован на основе определенных представлений о том, где имеются параллельные, где скрещивающиеся, а где встречные потоки жидкостей. При этом

истинная картина течения может заметно отличаться от исходных представлений. Насколько такое отличие может оказаться существенным для работы теплообменника?

На подобный вопрос ответ дать легко. Для этого делаются различные предположения о поле скоростей, охватывающие весь ожидаемый диапазон изменений. По тому, насколько изменения в картине течения влияют на тепловые характеристики теплообменника, можно судить о роли тех или иных деталей течения.

Нестационарные характеристики. Зависимость от времени температур на выходе из теплообменника, обусловленную произвольными изменениями скоростей или температур входящих потоков, нетрудно вычислить с помощью описанных выше численных методов и весьма сложно или невозможно получить другим путем.

Влияние непостоянства коэффициентов теплоотдачи. Если при течении вязкой жидкости через теплообменник температура ее значительно изменяется, то сильно меняются и коэффициенты теплоотдачи. Обусловленную этим нелинейность можно учесть корректно, лишь применяя численные методы.

На практике учет указанной нелинейности часто проводится в рамках численного решения задачи в одномерной постановке, однако при этом теряются многие существенные детали. Неоднородность температуры по сечению теплообменника ведет к неоднородности потока. Если температурная зависимость коэффициентов сопротивления такова, что сопротивление оказывается большим в областях, где скорость течения меньше, то возможно возникновение неустойчивости. Подобные эффекты можно обнаружить только при проведении двумерных или трехмерных расчетов.

Параметрический анализ. Малочисленность имеющихся таблиц и графиков, описывающих работу теплообменников, обсуждалась в разд. 1.3. Общий метод численного решения позволил бы получить нужное число соответствующих таблиц. При этом конструктор имел бы возможность чаще обращаться к справочникам и реже использовать ЭВМ. В настоящее время еще имеется значительное поле деятельности для параметрического анализа и публикации его результатов.

В. Влияние шага разбиения. При использовании численных методов моделирования течения сплошной среды всегда приходится идти на компромисс между требованиями точности и экономии, достигаемый путем оптимального выбора шага разбиения.

Пусть расчет одной и той же задачи выполняется несколько раз и при этом число ячеек с каждым разом удваивается. Тогда окажется, что некоторая характеристика теплообменника как функция числа ячеек стремится к своему асимптотическому значению (рис. 4). Если характеристика с приемлемой точностью близка к асимптотическому значению, то число ячеек можно считать достаточным. Поскольку стоимость вычислений, связанная с затратами времени ЭВМ, растет пропорционально числу ячеек (а для некоторых методов и еще быстрее), то использовать большее число ячеек нецелесообразно.

Невозможно дать общее правило относительно того, на сколько ячеек нужно производить разбиение. Требуемое число ячеек зависит от конфигурации течения, числа элементов, в которых происходит теплопередача, вида темпе-

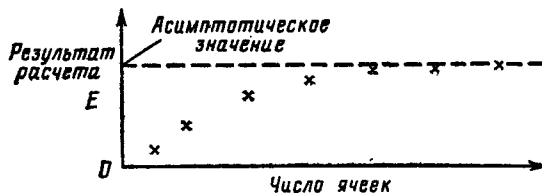


Рис. 4. Влияние шага разбиения на значение рассчитываемой характеристики теплообменника

¹ Существует несколько монографий, посвященных численным методам расчета течений в теплообменниках, их построению и использованию, например книги: В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов, «Численное моделирование процессов тепло- и массообмена», М.: Наука, 1984; Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов «Разностные методы исследования задач теплообмена», Минск: Наука и техника, 1976, а также представляющая несомненный интерес, выпущенная в переводе на русский язык книга Патанкара «Численные методы решения задач теплообмена в динамике жидкости», Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. — Прим. ред.

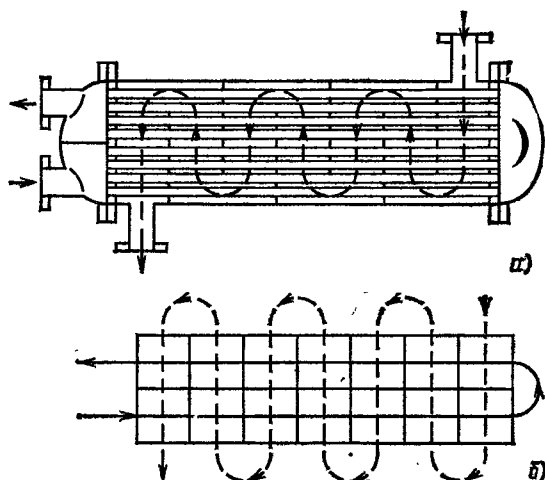


Рис. 5. Многоходовый кожухотрубный теплообменник с перегородками (а) и его идеализация (б)

ратурной зависимости коэффициентов теплоотдачи и, конечно, требуемой точности расчета. Поэтому обычно для того, чтобы убедиться в приемлемости результатов, нужно проводить вычисления с различным шагом разбиения.

Следует отметить, что необходимое число ячеек можно уменьшить, если использовать в выражениях (8) и (9) эффективный коэффициент теплоотдачи U , поскольку входящие в эти выражения источники члены пропорциональны разностям между температурами жидкости и металла в ячейке, и если ячейка велика, то нужно учитывать изменение температур внутри нее. Эту мысль легче всего понять, если рассматривать индивидуальную ячейку как микротеплообменник, имеющий небольшое, но конечное число элементов, для которого $\theta < 1$ [уравнение (25) из § 1.3.1]. Значение θ зависит, конечно, от NTU и локальной конфигурации течения, и для его выбора можно использовать соотношения § 1.3.1 и графики в разд. 1.5. Входящие в выражения (8) и (9) величины U следует умножать на θ .

Если подходить к задаче с точки зрения анализа микротеплообменника, то можно упустить из вида то обстоятельство, что используется конечно-разностный метод. Однако специалист по численным методам может не заметить целесообразности включения в формулы θ . Первый подход рассмотрен в [38], из которой заимствован рис. 5.

1.4.2. Случай, когда поле скоростей подлежит расчету

А. Введение. Выше было показано, что уравнения энергии можно решить, используя численные методы, и что процесс решения не усложняется из-за наличия нелинейностей и взаимосвязей между уравнениями. Уравнения импульса и неразрывности также можно решать численно, и хотя взаимосвязь этих уравнений представляет существенную проблему, эта проблема разрешима.

Как правило, расчет требуется провести только для течения вне труб, поскольку распределение течения жидкости по трубам может быть определено стандартными методами. Однако существуют и такие теплообменники (например, состоящие из пластин), в которых численный расчет нужно проводить для обеих жидкостей. В общем случае поэтому может оказаться необходимым решать шесть уравнений импульсов. Однако для наших целей достаточно рассмотреть три уравнения, соответствующих одной жидкости.

В. Дискретизация. Проводившееся выше разбиение пространства на n_θ , n_r , n_z ячеек для расчета температур

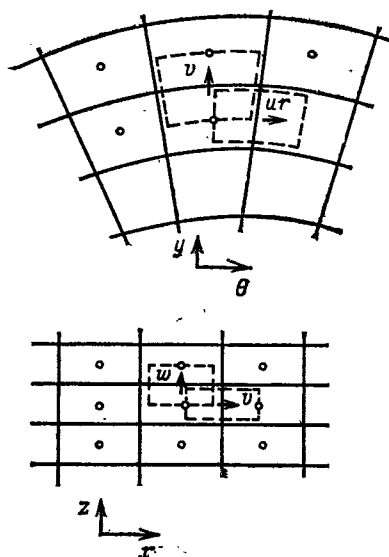


Рис. 1. Ячейки, используемые при решении конечно-разностных уравнений для u_r , v и w

остается применимым и в том случае, когда нужно рассчитывать скорости; те же ячейки будут применяться и для расчета значений давления с использованием уравнения неразрывности. Однако для расчета компонент скорости нужно ввести дополнительные ячейки.

На рис. 1 показано расположение этих дополнительных ячеек. Они образованы следующим образом: берется ячейка, используемая для расчета температуры и давления, и смещается на половину интервала θ для получения ячейки u_r , на половину интервала r для получения ячейки v и на половину интервала z для получения ячейки w . Такое расположение ячеек, обусловленное тем, что скорости должны вычисляться в местах, расположенных на стенках ячеек для температуры и давления, иногда называют зигзагообразной сеткой.

С. Конечно-разностные уравнения. Конечно-разностные уравнения для переменных u_r , v и w имеют тот же вид, что и уравнения для температур. Следует только иметь в виду, что все точки должны быть сдвинуты на половину интервала в соответствующем направлении (в направлении θ , когда Φ означает u_r , в направлении r для v и в направлении z для w).

Вклады конвекции в конечно-разностные уравнения вычислить теперь не столь просто, поскольку скорости на границах новых ячеек должны определяться путем интерполяции; однако эта процедура не вызывает затруднений.

Источниковые члены теперь включают: 1) силы, действующие на элемент объема и обусловленные разностью давлений; 2) центробежные силы; 3) гидростатические подъемные силы; 4) силы сопротивления, связанные с изгибом сочленений труб и перегородок; 5) те из сил внутреннего трения, которые сложно включить в коэффициенты a . Каждую из этих компонент можно выразить через зависящие переменные.

Особого внимания требует уравнение сохранения массы. Его можно представить в виде

$$b_n + b_s + b_e + b_w + b_k + b_l + RV(\rho_p - \rho_p) = 0, \quad (1)$$

где члены b означают потери массы из ячейки за рассматриваемый интервал времени, например

$$b_n = \frac{1}{2} (R_N + R_P) A_n \rho_p v_n \text{ при } v_n \geq 0; \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{2} (R_N + R_P) A_n \rho_p v_n \text{ при } v_n < 0. \quad (3)$$

Здесь используются «навстречные» значения плотности по аналогии с выражением (6) из § 1.4.1.

Из уравнения (4) выводится конечно-разностное уравнение для давления или, точнее, для поправки к давлению. Процедура заключается в следующем. До тех пор, пока не достигнута сходимость решения, скорости не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнению (1). Если значения коэффициентов b обозначить звездочкой, а необходимые поправки к ним — штрихом, то (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} b_n^* + b_s^* + b_e^* + b_w^* + b_h^* + b_i^* = \\ = -RV(\rho_P - \rho_{P1}) - b_n^* - b_s^* - b_e^* - b_w^* - \\ - b_h^* - b_i^* \equiv E_P. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим далее, что поправки b' связаны линейными соотношениями с поправками к давлению, обозначаемыми p' ,

$$b_n' = b_n''(p_P' - p_{1P}') ; \quad (5)$$

$$b_s' = b_s''(p_P' - p_{1S}') ; \quad (6)$$

$$b_e' = b_e''(p_P' - p_{1E}') ; \quad (7)$$

$$b_w' = b_w''(p_P' - p_{1W}') ; \quad (8)$$

$$b_h' = b_h''(p_P' - p_{1H}') ; \quad (9)$$

$$b_i' = b_i''(p_P' - p_{1I}') . \quad (10)$$

Коэффициенты b_n'' , b_s'' и т. д. получаются дифференцированием конечно-разностных уравнений для скоростей (которым пропорциональны b) относительно членов S_P (содержащих давление).

Подстановка (5)–(10) в (4) дает

$$\begin{aligned} p_P' = (b_n'' p_{1N}' + b_s'' p_{1S}' + b_e'' p_{1E}' + \\ + b_w'' p_{1W}' + b_h'' p_{1H}' + b_i'' p_{1I}' + \\ + E_P) / (b_n'' + b_s'' + b_e'' + b_w'' + b_h'' + b_i'') . \end{aligned} \quad (11)$$

Это конечно-разностное уравнение для поправки к давлению формально весьма сходно с общим конечно-разностным уравнением (1) § 1.4.1. Нужно только отождествить p' с Φ , b'' с a и E_P с S_P и положить $S_P' = 0$.

Уравнение (11) завершает систему подлежащих решению конечно-разностных уравнений.

Д. Прямой метод решения. В § 1.4.1 показано, как применение итерационного метода Гаусса—Зайделя последовательно ко всем ячейкам приводит в результате к сходящемуся решению уравнений для температур. Рассмотрим теперь, как этим же методом решаются уравнения для скоростей.

Каждой ячейке для температур соответствуют шесть скоростей. Поэтому примем, что процедура Гаусса—Зайделя применяется к каждой из этих скоростей сразу после того, как получены поправки к температурам.

Пусть далее полученные значения скоростей подставлены в выражения для коэффициентов b . В общем случае окажется, что они не удовлетворяют уравнению сохранения массы, т. е. что E_P , определяемая выражением (4), не равна нулю. Это означает, что давление в точке P , а также и скорости подлежат корректировке.

Необходимую добавку к p_P , а именно p_P' , можно получить из выражения (11), сводящегося, поскольку соседние $p' = 0$ (при нахождении поправки в данной точке значения в соседних точках не корректируются), к

$$p_P' = E_P / (b_n'' + b_s'' + b_e'' + b_w'' + b_h'' + b_i'') . \quad (12)$$

Окончательный шаг заключается в оценке соответствующих поправок и коэффициентов b , т. е. b_n' , b_s' и т. д., и в корректировке значений шести скоростей. После этого делается переход к следующей ячейке.

Этот метод, применяемый итеративно ко всему объему, в конце концов приводит к набору значений температур, давлений и скоростей, удовлетворяющих всем конечно-разностным уравнениям с любой желаемой степенью точности.

Е. Более экономичные методы. Для решения полного набора уравнений, как и для уравнений энергии, можно использовать методы, более экономичные по сравнению с методом Гаусса—Зайделя. Так как в этих методах используются одновременно несколько ячеек, они значительно уменьшают время, необходимое для достижения сходимости.

Здесь нет надобности описывать методы решения, поскольку читатель скорее захочет использовать готовую программу для ЭВМ, чем сам будет разрабатывать методику. Поэтому достаточно сказать, что имеющиеся методы позволяют получить решение для многих практически важных случаев при приемлемых затратах машинного времени и что прогресс вычислительной техники и численных методов неуклонно ведет к уменьшению затрат.

В настоящее время имеется мало публикаций по результатам расчетов картины течения в теплообменниках и ее влияния на их рабочие характеристики. В [14, 15] даны предварительные сведения, а в [16] содержится более широкое обсуждение возможных применений. Информацию о численных методах можно найти в [17–20].

1.4.3. Специальные приложения численных методов

А. Определение характеристик двухфазных течений.

В тех случаях, когда имеет место кипение жидкости или конденсация пара, при численном анализе нужно учитывать два новых фактора. Первый состоит в том, что при практически постоянной температуре плотность и другие свойства среды изменяются значительно. Таким образом, проблема перемены свойств, с которой в некоторой степени приходится иметь дело и при анализе однофазных течений, в данном случае приобретает большое количественное значение.

Второй фактор состоит в том, что две фазы, присутствующие в одной и той же области теплообменника и смешанные одна с другой, могут двигаться в разных направлениях и с разными скоростями. Этот фактор приводит к значительному усложнению численного анализа, поскольку теперь нужно вычислять вместо одного два набора компонентов скорости, причем соответствующие уравнения связаны друг с другом не только общим давлением, но и членами межфазного обмена импульсом, зависящими от относительных скоростей фаз.

Данная область механики жидкостей в настоящее время быстро и интенсивно развивается. Методы решения уравнений уже разработаны, и задача состоит в углублении знаний относительно законов межфазного обмена.

Следует отметить, что постановка задачи, состоящая просто в получении двух наборов компонентов скоростей, является идеализацией, не всегда применимой. Дело в том, что в каждой данной точке не все частицы жидкости или газа движутся с одной и той же скоростью. В общем случае для описания двухфазных течений требуется более сложный подход, чем описания выше процедура расчета шести компонентов скоростей. Здесь, однако, еще много предстоит сделать, прежде чем такой подход можно будет применять на практике.

Обсуждение проблем и методов численного расчета двухфазных течений содержится в [11, 42, 43].

В. Турбулентное течение в незаполненных областях. Поскольку инженерное оборудование имеет значительные размеры, числа Рейнольдса велики, следовательно, течение является турбулентным. Поэтому возникает вопрос, могут ли уравнения, приведенные в § 1.2.7 и в данном разделе, использоваться для описания турбулентного течения?

Эти уравнения можно использовать для этой цели, но их следует дополнить дифференциальными уравнениями, описывающими пространственное распределение основных характеристик турбулентности.

Затронутый здесь вопрос называется моделированием турбулентности; вводные сведения о нем можно найти в [21, 22]. Для пояснения существа дела сделаем несколько замечаний.

Модель турбулентности должна дать необходимые для решения уравнений энергии и импульса значения эффективной теплопроводности и эффективной вязкости. В большинстве моделей турбулентности используется представление о том, что эти переносные свойства определяются главным образом локальными значениями энергии пульсаций и размеров вихрей (иногда используются более общие представления).

Поэтому модель турбулентности обычно основана на двух дифференциальных уравнениях для энергии и характерного размера пульсаций (или других связанных с ними величин), которые нужно решать одновременно с уравнениями энергии и импульса.

Таким образом, задача о турбулентном течении в незаполненном пространстве несколько (но только несколько) сложнее задачи о течении в пространстве, заполненном элементами, препятствующими течению. Число уравнений увеличивается на два уравнения модели турбулентности, причем эти уравнения сильно связаны с уравнениями скорости.

В литературе представлено значительное число результатов успешных расчетов (количественно согласующихся с реальностью) турбулентных течений. Однако нельзя утверждать, что всегда достигается хорошее согласие с экспериментом или что все проблемы, связанные с разработкой моделей турбулентности, уже решены. Существенная неопределенность имеет место в тех областях течения, где существенны гидростатические подъемные силы, а также в условиях, когда эффективные переносные свойства лишь немного превосходят значения соответствующих параметров при ламинарном течении. Можно ожидать, что исследования в этой области будут продолжаться еще много лет, прежде чем потребности конструкторов теплообменников будут удовлетворены полностью.

С. Течения при наличии химических реакций. Хотя основное внимание в данном Справочнике уделяется теплообменникам, в которых отсутствует горение, может оказаться полезным краткое обсуждение специальных проблем, возникающих при расчете потоков, в которых существенную роль играют экзотермические химические реакции (например, горение топлива).

Обычно горение происходит в незаполненном пространстве и течение является турбулентным. Поэтому все замечания, приведенные в и. В, имеют непосредственное отношение к данному случаю. Однако возникают и дополнительные сложности: если требуется предсказать поведение пламени (а иначе едва ли можно рассчитать интенсивность теплообмена), необходимо решать дифференциальные уравнения по крайней мере для некоторых концентраций компонентов.

Существует один случай, когда можно получить вполне удовлетворительные результаты, решая всего одно дополнительное уравнение для концентрации какого-либо химически нейтрального компонента (например, азота), или для массовой доли какого-либо химического элемента (независимо от того, в каких соединениях он связан), топлива (независимо от того, прореагировало оно или нет).

В этом случае топливо вводится отдельным от окислителя потоком; реагирующая способность топлива такова, что оно сгорает сразу же, как приходит в контакт с окислителем; течение является полностью турбулентным.

Такой случай обычно реализуется в топках и другом нагревательном оборудовании, и он легко поддается расчету, поскольку имеется всего одно дополнительное диффе-

ренциальное уравнение, которое к тому же не имеет источника члена.

В более общем случае, когда химические реакции протекают медленно и скорость смешения не является лимитирующей, нужно иметь в виду следующие обстоятельства.

Большинство химических реакций протекает в виде последовательности промежуточных стадий, поэтому полное описание может включать расчет концентраций нескольких десятков компонентов.

Хотя данные о константах скоростей реакций, в которых участвуют эти компоненты, никогда не бывают настолько точными или полными, как хотелось бы, в последние годы в химической кинетике был достигнут столь значительный прогресс, что неполнота информации о константах редко является главной причиной неудовлетворительных результатов расчетов.

В случае, когда течение является ламинарным, имеющиеся численные методы позволяют описывать поведение пламени, хотя часто ценой значительных затрат (требуется решать много уравнений, а для узких зон реакций использовать малый шаг разбиения). Для турбулентного течения, поскольку объединение теорий химической кинетики и турбулентности вызывает ряд затруднений, в настоящее время нет достаточно общих методов описания процессов. Следовательно, описание турбулентного горения следует пока считать полем деятельности исследователей, а не инженеров. Однако есть основания надеяться, что эта ситуация вскоре может измениться.

Завершим этот краткий обзор ссылкой на источники информации [23—26].

Д. Течения при наличии излучения. Часто основную роль в передаче теплоты от пламени играет излучение. Поэтому коснемся здесь вопроса о том, как включить учет излучения в методы численного решения.

В принципе, конечно, возможно применение зонального метода [27]. Однако на практике, когда приходится иметь дело с сильными неоднородностями распределений температуры и концентраций, характерными для камеры сгорания, применение этого метода оказывается чрезвычайно дорогостоящим. Поэтому данный метод совместно с решением уравнений гидродинамики используется редко.

Как правило, применяется тот или иной вариант метода потоков [28, 29]. Примеры его использования при расчете топок имеются в [30—32]. Этот метод требует решения дополнительных конечно-разностных уравнений, обычно более простых, чем приведенные выше, и решаемых аналогичными методами.

В то время как конечно-разностные уравнения для температуры, концентрации и скорости находятся в полном соответствии (при достаточно малом шаге разбиения) с исходными дифференциальными уравнениями, для излучения полного соответствия конечно-разностных и дифференциальных уравнений нельзя добиться никаким выбором шага. Дело в том, что во всех имеющихся вариантах метода потоков идеализируется угловое распределение излучения. Считается, что излучение имеет характер пучков лучей, перпендикулярных поверхностям ячеек. Такое представление, существенное для возможности численного решения, игнорирует важное свойство реального излучения, а именно то, что излучение распространяется под различными углами к поверхностям ячеек.

До сих пор не было найдено способа разрешения этой трудности, достаточно простого для практического использования. С этой точки зрения задачу о переносе излучения можно решить лишь приближенно.

Следует, однако, отметить, что указанное математическое затруднение является не единственным препятствием для точного расчета излучения пламени, поскольку требуется знание локальных спектральных радиационных свойств газов. Надо указать также, что часто основную роль

в теплообмене играет излучение присутствующих в пламени частиц сажи, а кинетика сажеобразования является одной из наименее изученных областей химической кинетики.

Поэтому излучение пламени в настоящее время также следует считать областью деятельности исследователей, а не инженеров.

Е. Вычисление коэффициентов теплоотдачи. Ниже рассмотрена роль численных методов в определении коэффициентов теплоотдачи.

Для этого требуется радикальное изменение масштабов объекта исследования. Вместо того чтобы рассматривать теплообменник в целом, исследуем небольшой участок течения между тремя трубками. При этом мы приходим к задаче о турбулентном течении, подобной обсуждавшейся в п. В. Но рассматриваемый объем пространства теперь

намного меньше, и соответственно уменьшаются характерные числа Рейнольдса.

Последнее обстоятельство является важным, так как, чтобы в результате решения конечно-разностных уравнений получить зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса, эти уравнения должны быть справедливы для областей, примыкающих к стенкам. А там вклад турбулентности в переносные свойства потока может лишь незначительно изменять их по сравнению с ламинарным течением. Для таких условий, как уже отмечалось выше, модели турбулентности наименее разработаны, поэтому возможность получить указанным способом формулы для интенсивности теплоотдачи сильно ограничена.

Тем не менее для дальнейшего прогресса в этой области имеются хорошие перспективы. В [33, 34] приведены соответствующие ссылки.

Раздел 1.5

ДИАГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ РАЗНОСТИ ТЕМПЕРАТУР ПРИ ТИПИЧНЫХ ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ СХЕМАХ ДВИЖЕНИЯ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ¹

Дж. Таборек

1.5.1. Введение

А. Общие замечания. В данном разделе представлены диаграммы (вместе с описывающими их уравнениями), предназначенные для расчета характеристик или проектирования промышленных теплообменников с определенными схемами движения теплоносителей. Эти рабочие диаграммы соответствуют методу поправочного коэффициента и θ -NTU-методу (см. § 1.2.5 и 1.3.1).

Поскольку оба метода исходят из одних и тех же основных уравнений, они должны приводить к одинаковым результатам. Однако при выполнении тех или иных конкретных расчетов более эффективным может оказаться один из них. В частности, можно указать следующее.

Преимущество метода поправочного коэффициента F состоит в том, что он непосредственно дает отклонение значения эффективного движущего температурного напора ΔT_m для любой схемы движения теплоносителей от максимально достижимого при противотоке ΔT_{LM} . Этот метод особенно удобен при расчетах технологических теплообменников, когда из условий протекания технологических процессов обычно заданы распределения температур и тепловые балансы, но коэффициент теплопередачи U , а часто и площадь теплопередающей поверхности A неизвестны. Коэффициент теплопередачи U обычно зависит от рассматриваемой схемы движения теплоносителей. Задача в этом случае состоит в выборе типа конструкции теплообменника, который будет работать с максимально возможным эффективным движущим температурным напором, или в быстром исключении из рассмотрения таких конструкций, которые вообще могут оказаться неработоспособными.

θ -NTU-метод особенно подходит для предварительной оценки систем, в которых коэффициент U можно рассматривать как известную и постоянную величину (как, например, в компактных теплообменниках), и (или) в тех случаях, когда поверхность A можно регулировать добавлением единичных теплообменных модулей без изменения значения U . Примером последнего случая могут служить пластинчатые теплообменники и так называемые

компактные элементы с пластинчатыми ребрами. Во многих подобных случаях стоимость установки в целом сильно зависит от оптимального использования располагаемого напора ΔT с учетом капиталовложений в теплопередающие поверхности. Площадь теплопередающей поверхности и обычно одна из конечных температур априори не заданы, а выбираются в результате оптимизационных технико-экономических проработок или исходя из требований технологии.

В. Условия применимости. В § 1.2.5 сформулированы три основных допущения, при которых применим метод поправочного коэффициента F и θ -метод, — это постоянство по всему пространству теплообменника коэффициента теплопередачи U , массовой скорости и удельной теплоемкости обоих теплоносителей. Допущение о постоянстве U никогда не бывает точным, но его часто принимают исходя из практических соображений. Кроме того, при определении среднелогарифмической разности температур, а тем самым и при построении F и θ -диаграмм подразумевается наличие некоторых других допущений. Отметим следующие из них:

1. Для чисто противоточного и чисто однонаправленного течений температура любого теплоносителя однородна в любом поперечном сечении по ходу движения жидкости. Иными словами, предполагается полное перемешивание теплоносителя и отсутствие какого-либо расслоения среды или байпасирования потоков.

2. Для кожухотрубных теплообменников с перегородками отсека, переданная в каждом выгороженном перегородками отсеке, мала по сравнению с суммарным количеством переданной теплоты, т. е. число перегородок велико (обычно больше или равно пяти).

3. В какой-либо обособленной части теплообменника отсутствуют фазовые переходы. Если кипение и конденсация имеют место, то они должны происходить равномерно по всей теплоотдающей поверхности. Таким образом, одинаковым изменениям температуры теплоносителя отвечают одинаковое количество переданной теплоты, т. е. зависимость количества переданной теплоты от температуры носит линейный характер (изотермическое кипение и конденсация «подгоняются» под эти условия).

¹ Пер. с англ. Ю. А. Зейгарника.

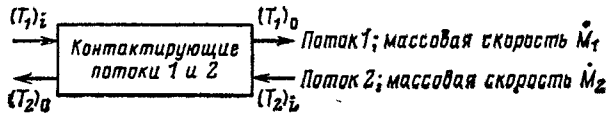


Рис. 1. Потоки теплоносителей в теплообменнике с произвольной схемой движения

4. В каждой из труб или в каждом из ходов теплообменника передается одно и то же количество теплоты.

5. Тепловые потери в окружающую среду пренебрежимо малы.

С. Определение параметров. На рис. 1 показана условная схема теплообменника. Потоки теплоносителей 1 и 2 обмениваются количеством теплоты Q . В методах поправочного коэффициента F и θ -метода используются следующие определения (детально они описаны в § 1.2.5). Прежде всего это общее уравнение теплопередачи

$$Q = UA\Delta T_m, \quad \text{пож.} \quad (1)$$

где U — результирующий коэффициент теплопередачи; A — поверхность теплопередачи; ΔT_m — эффективная средняя разность температур. Для чисто противоточного теплообменника при указанных в п. В допущениях $\Delta T_m = \Delta T_{LM}$ — среднелогарифмической разности температур, причем

$$\Delta T_{LM} = \frac{[(T_1)_i - (T_2)_o] - [(T_1)_o - (T_2)_i]}{\ln \{[(T_1)_i - (T_2)_o] / [(T_1)_o - (T_2)_i]\}}. \quad (2)$$

Однако Q можно определить и через тепловой баланс, записанный для обоих теплоносителей,

$$Q = C_1[(T_1)_i - (T_1)_o] = C_2[(T_2)_o - (T_2)_i], \quad (3)$$

где $C_1 = \dot{M}c_{p1}$ и $C_2 = \dot{M}c_{p2}$ — водяные эквиваленты двух потоков теплоносителей.

Для схем движения, отличающихся от противоточной, поправочный коэффициент F определяется следующим образом:

$$F = \Delta T_m / \Delta T_{LM}. \quad (4)$$

Параметр F обычно удобно выражать через параметры R (отношение водяных эквивалентов теплоносителей или изменений температур теплоносителей) и P (тепловую эффективность)

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}; \quad (5)$$

$$P = \frac{(T_2)_o - (T_2)_i}{(T_1)_i - (T_2)_i}. \quad (6)$$

Тепловая эффективность P представляет собой отношение изменения температуры второго теплоносителя к максимально возможной разности температур, т. е. к разности между входными температурами теплоносителей. Величину ΔT_{LM} также можно выразить через параметры R и P

$$\Delta T_{LM} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{R} \left\{ \ln \left[\frac{R-1}{(1-P)/(1-PR)} \right] \right\} \quad R \neq 1. \quad (7)$$

Член, стоящий в скобках, будет часто повторяться в соответствующих выкладках, поэтому целесообразно обозначить его одним символом δ

$$\delta = \frac{R-1}{\ln [(1-P)/(1-PR)]} \Big|_{R \neq 1} = \frac{1-P}{P} \Big|_{R \rightarrow 1}. \quad (8)$$

Число единиц переноса для второго теплоносителя NTU_2 определяется следующим образом:

$$NTU_2 = \frac{AU}{C_2} = \frac{(T_2)_o - (T_2)_i}{\Delta T_m}. \quad (9)$$

Значение NTU само по себе имеет достаточно неопределенный физический смысл. Как величина, пропорциональная произведению U на A , она выступает как грубая оценка «масштаба теплообменника». Причина введения NTU -метода состоит в том, что неопределенный тепловой баланс, когда неизвестны значения выходных температур обоих теплоносителей, мог быть решен без итераций — ситуация, невозможная при использовании поправочного коэффициента F . Детальное описание NTU -методов дано в разд. 2.5. Из многих методов, использующих NTU , выбран θ -метод, поскольку его графическое представление можно дать вместе (на современных диаграммах) с методом поправочного коэффициента F .

Параметр θ определится следующим образом:

$$\theta = \frac{\Delta T_m}{(T_1)_i - (T_2)_i}. \quad (10)$$

Эти диаграммы таковы, что, зная два из трех параметров (P и R или NTU_2), можно непосредственно определить θ , а тем самым и ΔT_m . Однако только θ -метод позволяет осуществить эту операцию довольно просто. Заметим, что приведенные выше параметры взаимосвязаны

$$NTU_2 = \frac{1}{F\delta}; \quad (11)$$

$$\theta = FP\delta = \frac{P}{NTU_2}. \quad (12)$$

Д. ΔT_m — θ — NTU_2 — F -диаграммы и рекомендации по их использованию. Исходя из приведенных в п. С определений, был рассчитан комплект диаграмм, использующих описанные в последующих разделах уравнения. Эти диаграммы дают два вида зависимостей (рис. 2):

- 1) зависимость θ и NTU_2 от P и R как параметра;
- 2) зависимость F от P и R как параметра. Заметим, что взаимную связь всех параметров можно легко установить визуально.

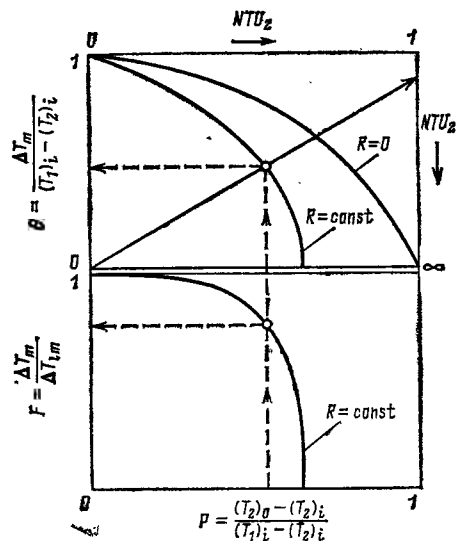


Рис. 2. Схематическое изображение $F=P$ и $\theta=P-NTU_2$ -диаграмм

Эти диаграммы приведены в § 1.5.2 для наиболее широко употребляемых кожухотрубных теплообменников и в § 1.5.3 для некоторых схем с поперечным током теплоносителей. Использование диаграмм демонстрируется на следующих примерах.

Пример 1. Проведем расчет средней эффективной разности температур ΔT_m по известным входным и выходным температурам обоих теплоносителей.

Данную задачу можно решить с помощью F-диаграмм следующим образом:

1. По уравнениям (5) и (6) рассчитывают параметры R и P .

2. Для заданной схемы течения по этим значениям R и P по диаграмме определяют значение F (или рассчитывают его по приведенным уравнениям).

3. С помощью уравнения (2) рассчитывают ΔT_{LM} .

4. Рассчитывают $\Delta T_m = F \Delta T_{LM}$ [см. уравнение (4)].

Для этого же можно воспользоваться и θ -диаграммой:

1. По уравнениям (5) и (6) рассчитывают R и P .

2. Для заданной схемы течения по верхней диаграмме находят θ (или рассчитывают его по приведенным уравнениям).

3. Рассчитывают ΔT_m по уравнению (10). Заметим, что в последнем случае NTU_2 можно найти непосредственно по диаграмме.

Пример 2. Проведем расчет выходных температур обоих теплоносителей по известным значениям C_1 , C_2 , U , A и входным температурам. Эта задача решается с помощью θ -диаграмм:

1. По уравнению (5) рассчитывают R , а по уравнению (9) — NTU_2 .

2. По θ -диаграмме находят значение P , соответствующее рассчитанным значениям R и NTU_2 (P можно также найти и расчетным путем с помощью представленных уравнений).

3. Преобразовав надлежащим образом уравнение (6), с его помощью определяют $(T_2)_0$ по P и входной температуре

$$(T_2)_0 = P [(T_1)_i - (T_2)_i] + (T_2)_i. \quad (13)$$

4. Рассчитывают $(T_1)_0$ с помощью уравнения (5)

$$(T_1)_0 = (T_1)_i - R [(T_2)_0 - (T_2)_i]. \quad (14)$$

Если использовать для этих же целей метод поправочного коэффициента F , то придется прибегать к итерациям.

Пример 3. Выполним расчет необходимой площади теплопередающей поверхности A по известным входной и выходной температурам обоих теплоносителей и известному коэффициенту теплопередачи U .

Для решения этой задачи можно следующим образом использовать θ -диаграмму:

1. По уравнениям (5) и (6) рассчитывают R и P .

2. По найденным R и P по θ -диаграмме определяют NTU_2 .

3. Рассчитывают A по соотношению $A = NTU_2 C_2 / U$. (15)

Эти же расчеты можно выполнить с помощью F-диаграммы, однако в этом случае нужно дополнительно рассчитать ΔT_{LM} . Кроме того, значения NTU_2 , полученные с помощью θ -метода, можно использовать для сравнения вариантов.

Пример 4. Определим соотношения между NTU_2 , F и F_{min} с помощью диаграммы.

Соотношение между NTU_2 и F можно получить с помощью двойных диаграмм. Определение таких соотношений полезно, потому что экономичные аппараты должны работать при значениях F , превышающих некоторое минимальное F_{min} . Если система работает со слишком низкими F , то она попадает в область, где малым отклонениям P соответствует значительное снижение F . Таким образом,

характеристика системы оказывается чувствительной к отклонениям от заданных температур.

Какой-то непосредственный критерий для определения F_{min} отсутствует. По существу это оценка того, насколько конструктор может пожертвовать величиной ΔT_m в интересах выигрыша в других параметрах или в стоимости аппарата. Для иллюстрации этого положения рассмотрим два типичных примера.

1. Если $(T_1)_0 > (T_2)_0$, значения коэффициента F могут оказаться очень низкими. Простым средством, позволяющим уберечься от этой ситуации, является использование двух или более последовательно установленных теплообменников, что обеспечит увеличение F . Однако это приведет к существенному удорожанию системы, и конструктор может пойти на потерю в значении F , но использовать один аппарат больших размеров.

2. В одноходовом со стороны труб кожухотрубном теплообменнике ТЕМА ¹ E с противоточным движением теплоносителей отсутствуют какие-либо ограничения на соотношение выходных температур, т. е. в таком теплообменнике $F=1$. Однако скорость теплоносителя внутри труб при одном ходе жидкости может оказаться низкой, что приведет к низким значениям коэффициента теплоотдачи внутри труб и повышенной угрозе заноса труб. Переход к двум (или более) ходам теплоносителя внутри труб улучшит ситуацию, но при этом уменьшится коэффициент F , а следовательно, и ΔT_m . И снова конструктору придется принимать решение об оптимальном варианте, которое в большинстве случаев не совсем очевидно.

Имеются предложения ограничить F_{min} такими значениями, чтобы $(T_2)_0 \geq (T_1)_0$. Этот критерий дает для теплообменников ТЕМА E и J приемлемое значение $F_{min} \approx 0,8$. Однако этот критерий оказывается слишком жестким для аппаратов, установленных последовательно, и для аппаратов с перекрестным током и большим числом ходов труб $F_{min} \approx 0,95$, где может допускаться и быть экономически оправданным более существенное снижение значений F .

В целом, наиболее общей является рекомендация ориентироваться на $F_{min} \approx 0,8$, но при этом страховать, чтобы это значение на кривых, описывающих поведение F , не попадало в зоны резкого снижения характеристик, т. е. не приходилось на очень малые и очень большие значения R .

1.5.2. F- и θ -диаграммы для кожухотрубных теплообменников

На приведенных ниже рис. 1—12 представлены диаграммы для различных типов обычных кожухотрубных теплообменников. Кроме того, даны также необходимый описательный материал, комментарии к использованию диаграмм и соответствующие формулы, по которым эти диаграммы были построены, а также схемы движения теплоносителей для каждой диаграммы.

А. Противоточное движение. Рассматривается здесь только лишь как демонстрация наилучшего из возможных вариантов использования температурного напора. В данном случае по определению $\Delta T_m = \Delta T_{LM}$ и $F=1,0$. Соответствующая θ -диаграмма приведена на рис. 1

$$\theta = P\delta = P/NTU_2. \quad (1)$$

Пересечение кривых $R = \text{const}$ с осью $\theta=0$ происходит при

$$P_{\max} = \frac{1}{R} \Big|_{R > 1,0} = 1,0 \Big|_{R < 1,0}. \quad (2)$$

¹ ТЕМА — классификация типов кожухотрубных аппаратов, принятая Американской ассоциацией изготовителей трубных теплообменников (Tubular Exchange Manufacturers Association — ТЕМА). — Прим. пер.

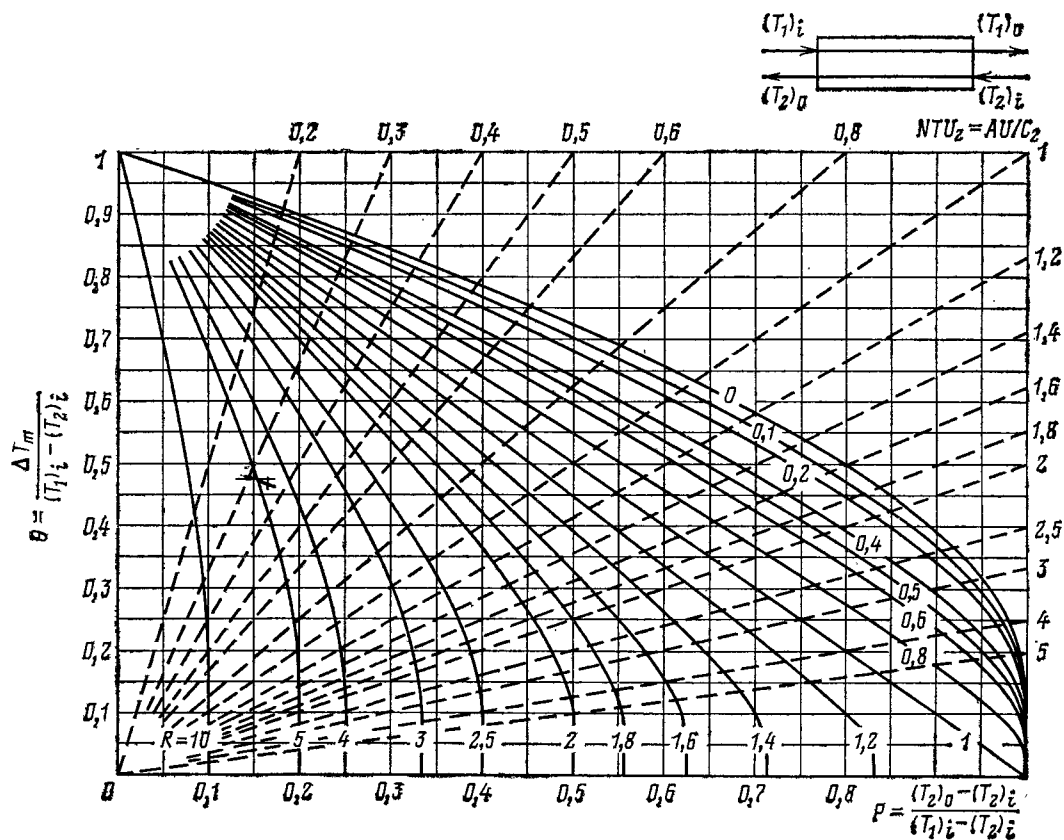


Рис. 1. θ - P - NTU_2 -диаграмма для противотока;

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ взаимозаменяемы}$$

Кривая $R=0$ одна и та же для всех схем движения теплоносителей, поскольку она соответствует изотермическому состоянию второго теплоносителя. В этом случае

$$\theta = \frac{-P}{\ln(1-P)} \Big|_{R=0} \quad (3)$$

В. Однонаправленное течение. При однонаправленном течении ΔT_m можно рассчитать непосредственно по ΔT_{LM} , тем не менее оно представлено в данном Справочнике в виде F -диаграммы, поскольку это наименее эффективная схема движения теплоносителей. Принципиальным ограничением, безусловно, является то, что температура холодного теплоносителя на выходе должна быть ниже выходной температуры горячего теплоносителя. Во многих случаях это ограничение неприемлемо, особенно при регенерации отработавшей теплоты.

Показатели всех остальных течений будут лежать где-то между чистым противотоком и чисто однонаправленным течением. Однако, прежде чем дискредитировать однонаправленное течение как нежелательное, сделаем следующие замечания:

1. Однонаправленное течение обеспечивает наиболее однородную температуру стенок между входом и выходом аппарата, сводя тем самым к минимуму температурные напряжения.

2. Наиболее высокое значение температуры стенки при однонаправленном течении меньше, чем при противоточном. Тем самым в соответствующих случаях исключаются

проблемы, связанные с высокой температурой стенки (загрязнение стенок, выбор подходящего материала и т. п.).

3. В котлах однонаправленное течение дает наиболее высокое значение ΔT на входе потоков, тем самым обеспечивается раннее начало пузырькового кипения, чего нельзя сделать при противотоке.

Из основных определений легко вывести следующее уравнение:

$$F = \frac{-(R+1)}{\delta \ln[1-P(R+1)]} \quad (4)$$

Величина $P_{\max}$ при $F=0$ имеет вид

$$P_{\max} = \frac{1}{R+1} \quad (5)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2.

С. Кожухотрубная конструкция ТЕМА Е. Ниже рассмотрены наиболее общие схемы кожухотрубных теплообменников, включая большое число вариантов течений в межтрубном пространстве и схем движения теплоносителей по трубам.

Теплообменник ТЕМА Е с четным числом ходов труб (схема 1—2N). Наиболее широко распространенным вариантом является схема с одним ходом движения теплоносителя в межтрубном пространстве и с четным числом ходов труб. Она обозначается как схема 1—2N. Подобные обозначения используются и в последующих разделах Справочника.

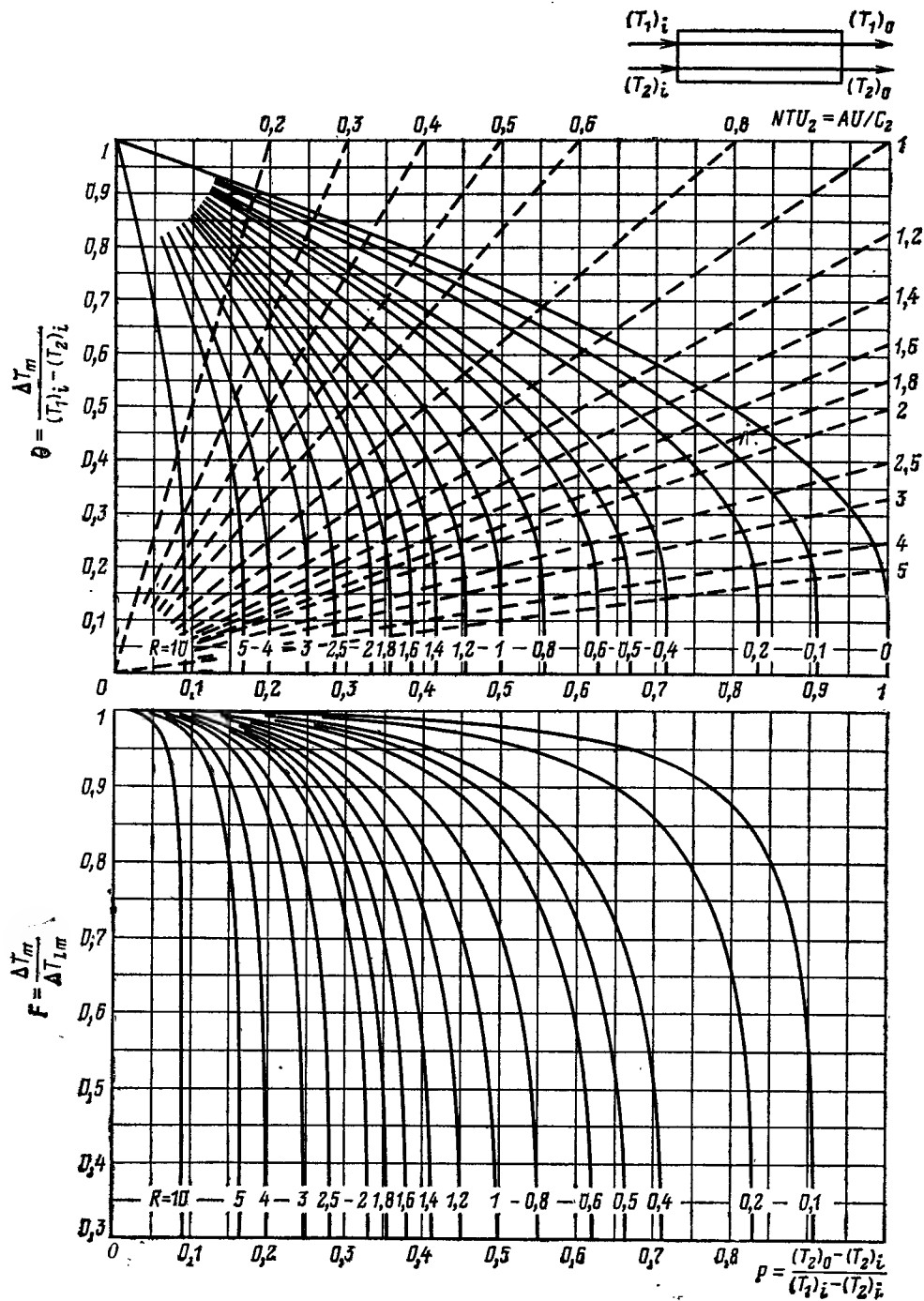


Рис. 2. F - P - и θ - P - NTU_2 -диаграммы для однонаправленного движения;

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ взаимозаменяемы}$$

В [44] осуществлено оригинальное интегрирование уравнений, описывающих процесс в теплообменнике $1-2N$ при условии, что теплоноситель в межтрубном пространстве перемешан. Результаты интегрирования можно представить в следующем виде:

$$F = \frac{\eta}{\delta \ln \{ [2 - P(1 + R - \eta)] / [2 - P(1 + R + \eta)] \}} \quad (6)$$

где

$$\eta = \sqrt{R^2 + 1}. \quad (6a)$$

Доказано также, что не имеет значения, является ли течение внутри труб первого хода противоточным (как это показано на рис. 3) или однонаправленным по отношению к течению теплоносителя в межтрубном пространстве [44]. В дальнейшем в [45] были проанализированы схемы с четырьмя ходами теплоносителя внутри труб. Было установлено, что расхождения с базовым вариантом не очень велики. Поэтому уравнение (6) считается справедливым для любого четного числа ходов теплоносителя в трубах. Для бесконечного числа ходов F -диаграмма переходит в случай перекрестного течения с перемешиванием внутри потока каждого теплоносителя (§ 1.5.3). Даже в этом предельном случае значения F , если они больше 0,7, отличаются от решения для варианта $1-2N$ не более чем на 2%.

Асимптотическое значение P достигается при

$$P_{\max} = \frac{2}{1 + R + \eta}. \quad (7)$$

Многоходовое течение в теплообменниках типа E с последовательным включением отсеков и с двумя или любым четным числом ходов внутри труб. Если интервал температур очень велик, например если $(T_2)_0 > (T_1)_0$, то однокорпусный вариант с $2N$ ходами труб окажется неприемлемым ($P > P_{\max}$, см. рис. 4-8.). В этих случаях (если противоток исключен по каким-либо иным соображениям) часто прибегают к вариантам, в которых отдельные корпуса или отсеки теплообменника включаются последовательно по обоим теплоносителям. Если используются M идентичных аппаратов типа ТЕМА E , включенных последовательно, то поправочный коэффициент F (или NTU_2) может быть рассчитан с помощью уравнения (6), если согласно [45] выразить параметр P в виде

$$P = \frac{1 - (X)^{1/M}}{R - (X)^{1/M}} \bigg|_{R \neq 1} = \frac{P_0}{M - P_0(M-1)} \bigg|_{R=1}; \quad (8)$$

$$X = \frac{P_0 R - 1}{P_0 - 1}, \quad (9)$$

где R и P_0 рассчитываются по результирующим конечным температурам системы.

Асимптотические значения $P_{\max}$ можно определить из следующих соотношений:

$$P_{\max} = \frac{ZM - 1}{ZM - R} \bigg|_{R \neq 1} = \frac{2M}{2M + \sqrt{2}} \bigg|_{R=1} \quad (10)$$

где

$$Z = \frac{\eta - R + 1}{\eta + R - 1},$$

а η определяется уравнением (6a).

Хотя это никогда не было доказано математически, согласно [46] аналогичную операцию можно осуществить применительно к любым последовательно включенным

идентичным теплообменникам, с идентичными схемами движения теплоносителей от входа к выходу.

D. Кожухотрубная конструкция ТЕМА J (разделяющиеся потоки теплоносителя). Разделение потока теплоносителя в межтрубном пространстве (в кожухе) обычно применяется для обеспечения малых перепадов давления. Поскольку одна половина потока теплоносителя проходит лишь половину возможной длины пути, то перепад давлений в межтрубном пространстве такого теплообменника составит всего лишь примерно 1/8 соответствующего перепада давлений в теплообменнике типа ТЕМА E . Эскиз распределений потоков в таком теплообменнике показан на рис. 9. Отметим, что вход теплоносителя по схеме показан через один патрубок (обычно применяемая компоновка) и что температуры теплоносителя на выходе из двух половин теплообменника не будут одинаковыми. В расчете аппарата используется средняя после смешения указанных потоков температура. Следовательно, если два аппарата с кожухами типа J установлены последовательно и для их расчета используется уравнение (8), то корпуса аппаратов нужно соединить так, чтобы подача теплоносителя во второй аппарат вновь осуществлялась через один патрубок, — вариант довольно неудобный с точки зрения компоновки трубопроводов. Если же вход во второй аппарат осуществляется по двум патрубкам, подсоединенным к двум выходным патрубкам первого аппарата, то соотношения для ΔT_m нельзя использовать непосредственно, так как они могут дать ненадежные результаты. Анализ ΔT_m для аппаратов с кожухами типа J обобщен в [47].

Теплообменник типа J с одним ходом труб. Решение для этого варианта (рис. 9) идентично решению для вариантов ТЕМА E ($1-2N$) с неперемешанным теплоносителем. Оно согласно [48] записывается следующим образом:

$$P = 1 - \left(\frac{2R-1}{2R+1} \right) \frac{2R + \varphi^{-(R+0.5)}}{2R - \varphi^{-(R+0.5)}} \bigg|_{R \neq 0.5}; \quad (11a)$$

$$P = 1 - \frac{1 + 1/\varphi}{2 + \ln \varphi} \bigg|_{R \rightarrow 0.5}, \quad (11b)$$

$$\varphi = \exp \left(\frac{1}{F\delta} \right) = \exp(NTU_2); \quad (12a)$$

$$\ln \varphi = \frac{1}{F\delta} = NTU_2 = \frac{P}{\theta}. \quad (12b)$$

Значения $P_{\max}$ можно найти из уравнения

$$P_{\max} = 1 - \frac{2R+1}{2R-1} \bigg|_{R > 0.5} = 1,0 \bigg|_{R \leq 0.5}. \quad (13)$$

При определении R и P T_1 относится к теплоносителю, текущему в межтрубном пространстве; T_1 и T_2 в расчетных соотношениях нельзя менять местами.

Теплообменник типа J с двумя или любым четным числом ходов труб. В [47] проанализированы варианты с двумя и четырьмя ходами труб и установлено, что результаты расчетов отличаются очень мало. Если принять число ходов труб бесконечным, то данный вариант станет идентичным варианту с перекрестным током теплоносителей и перемешиванием теплоносителя после каждого хода, расчетные соотношения для которого были получены в [49]. И опять результаты решения для интересующей нас области, т. е. для $F \geq 0.5$, пренебрежимо мало отличаются от решения для аппарата с двумя ходами труб. Поэтому рекомендуется для любого четного числа ходов труб решение [49]

$$P = \left(\frac{R\varphi^R}{\varphi^R - 1} + \frac{\varphi}{\varphi - 1} - \frac{1}{\ln \varphi} \right)^{-1}. \quad (14)$$

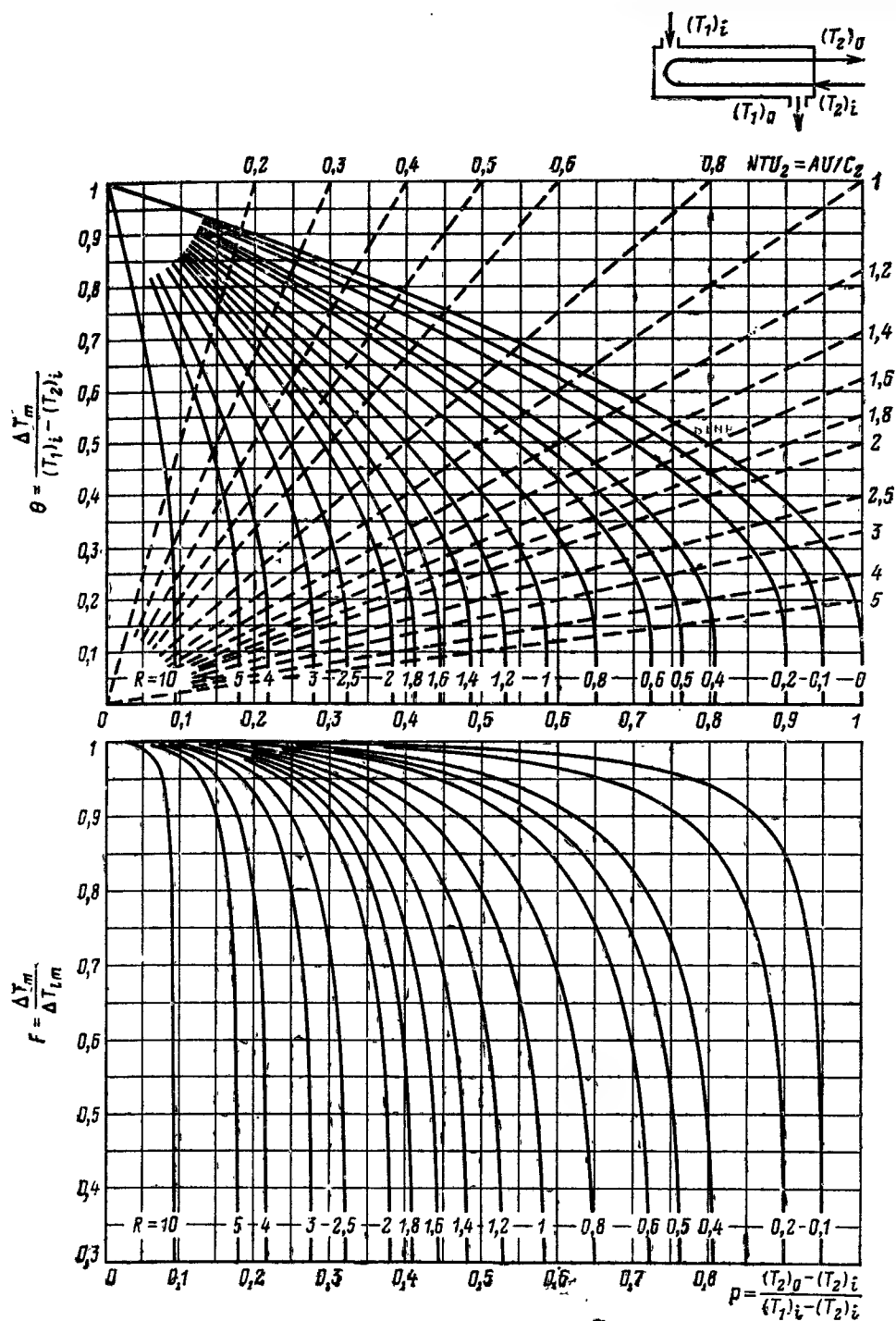


Рис. 3. F-P- и θ -P-NTU₂-диаграммы (один корпус E с любым четным числом ходов труб, жидкость в межтрубном пространстве перемешана);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ взаимозаменяемы}$$

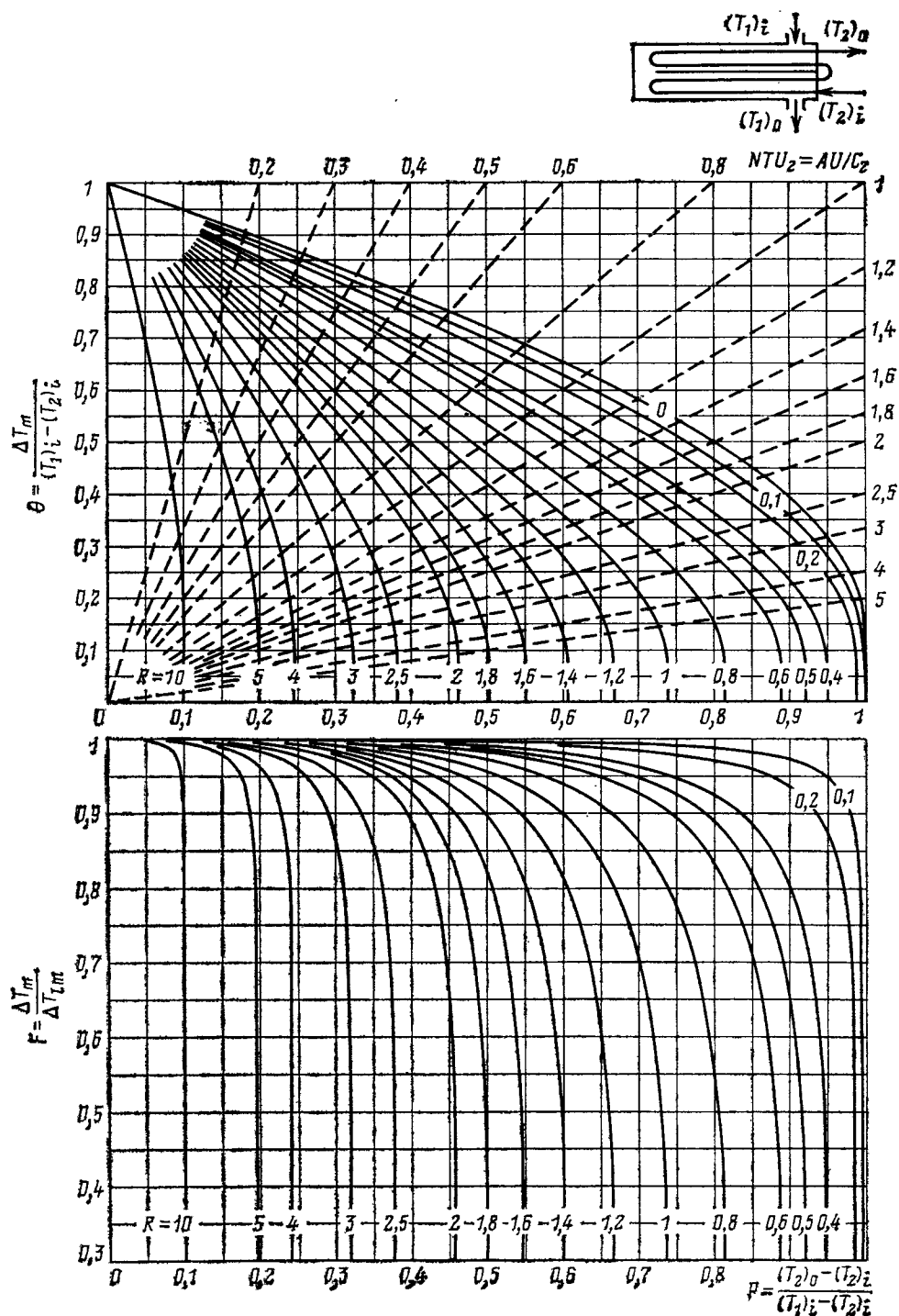


Рис. 4. F-P- и θ -P-NTU₂-диаграммы (два последовательно соединенных корпуса E с двумя или любым четным числом ходов труб в каждом);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ взаимозаменяемы}$$

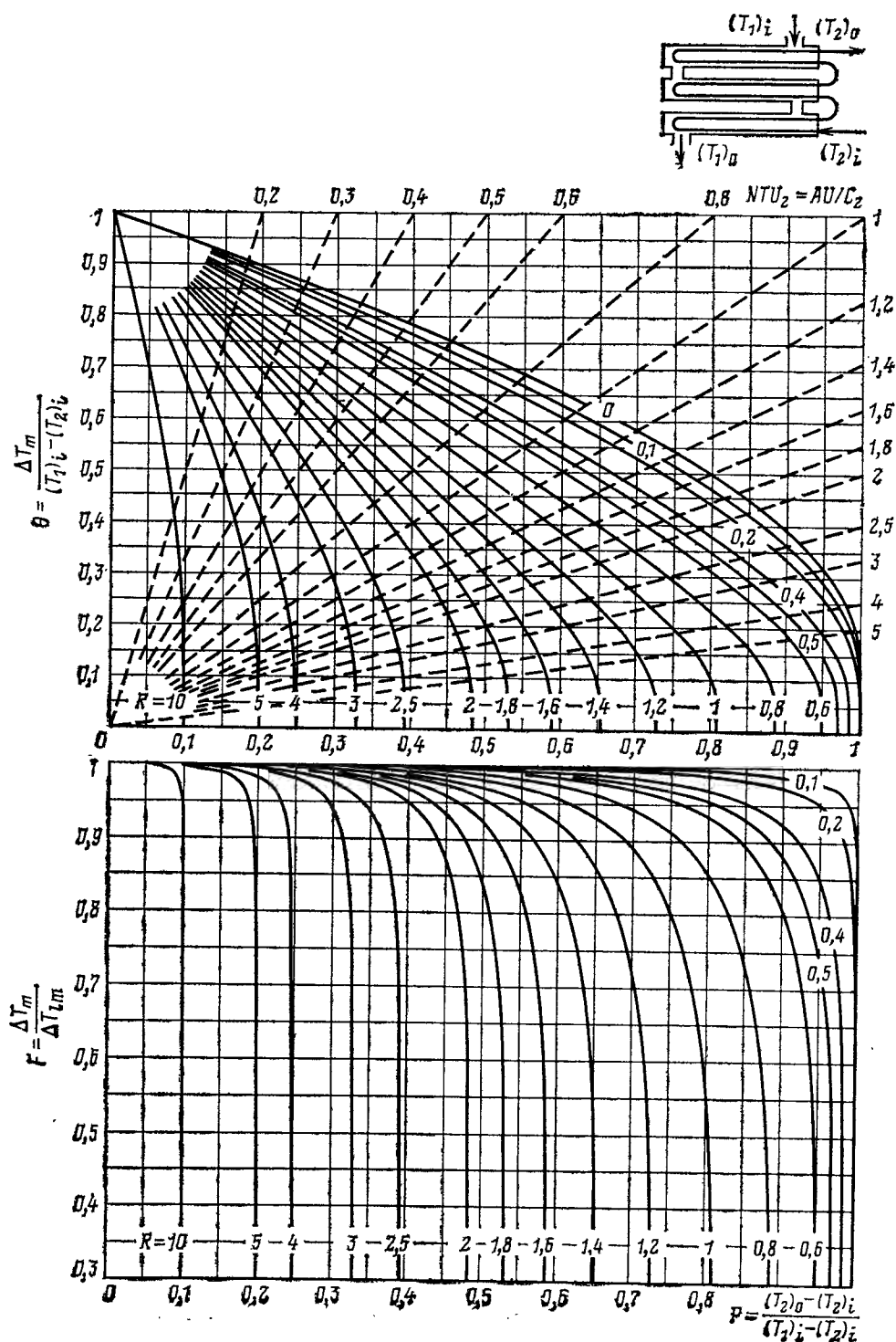


Рис. 5. F-P- и θ -P-NTU-диаграммы (три последовательно соединенных корпуса E с двумя или любым четным числом ходов труб в каждом);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_2)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ взаимозаменяемы}$$

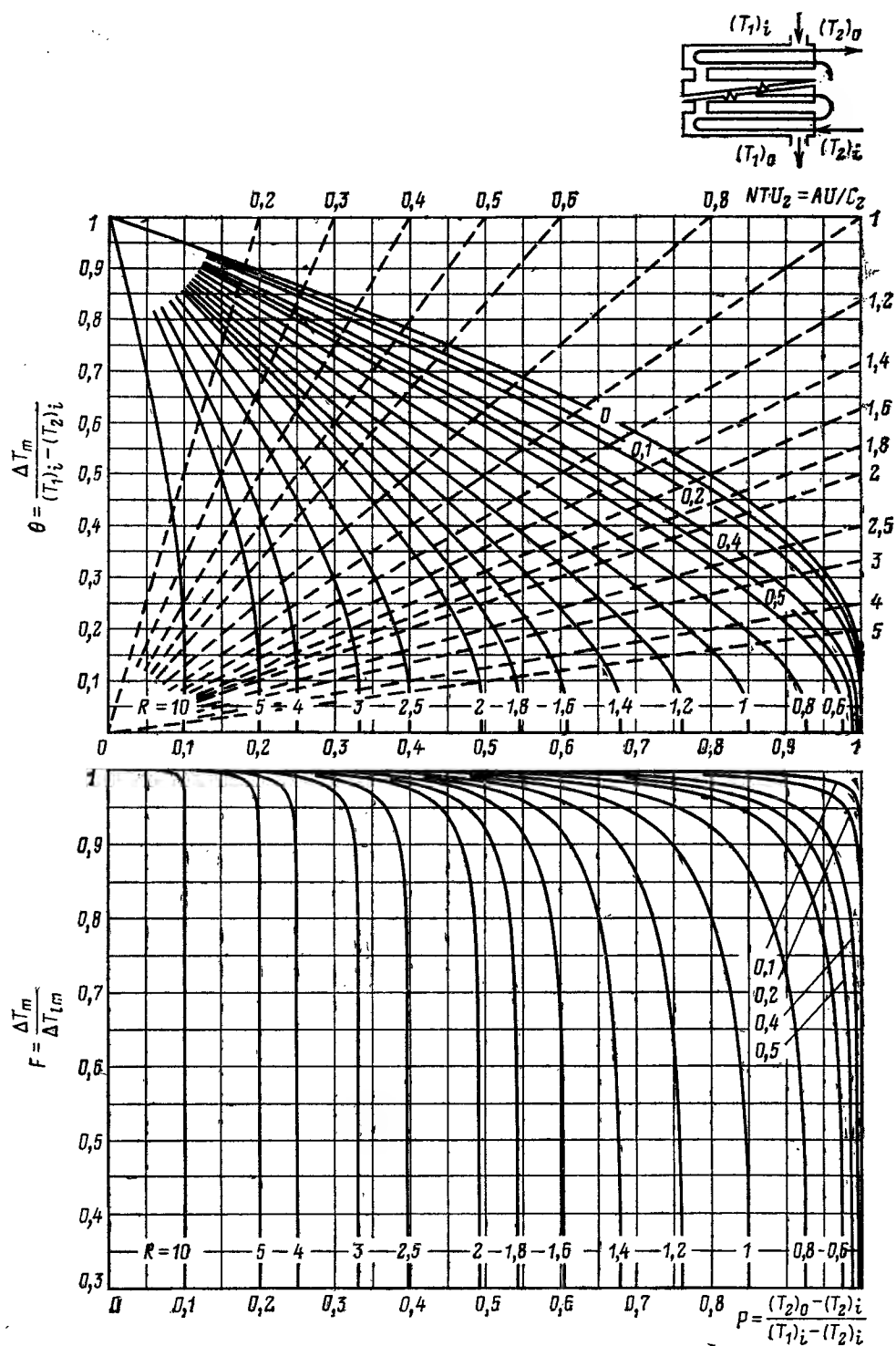


Рис. 6. $F-P$ и $\theta-P-NTU_2$ -диаграммы (четыре последовательно соединенных корпуса E с двумя или любым четным числом ходов труб в каждом);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ — взаимозаменяемы}$$

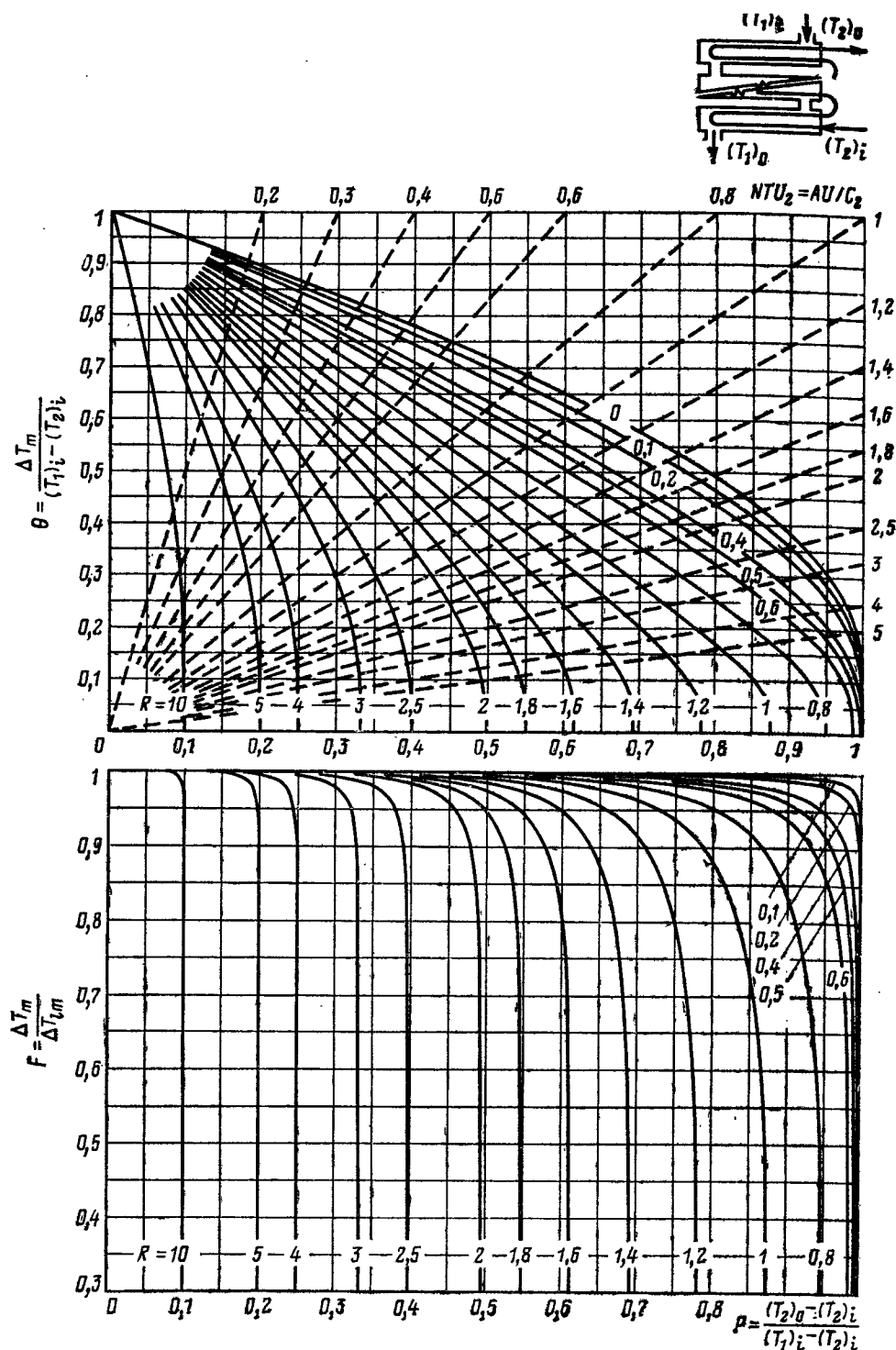


Рис. 7. F-P- и θ -P-NTU-диаграммы опять последовательно соединенных корпусов E с двумя или любым четным числом ходов труб в каждом;

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ взаимозаменяемы.}$$

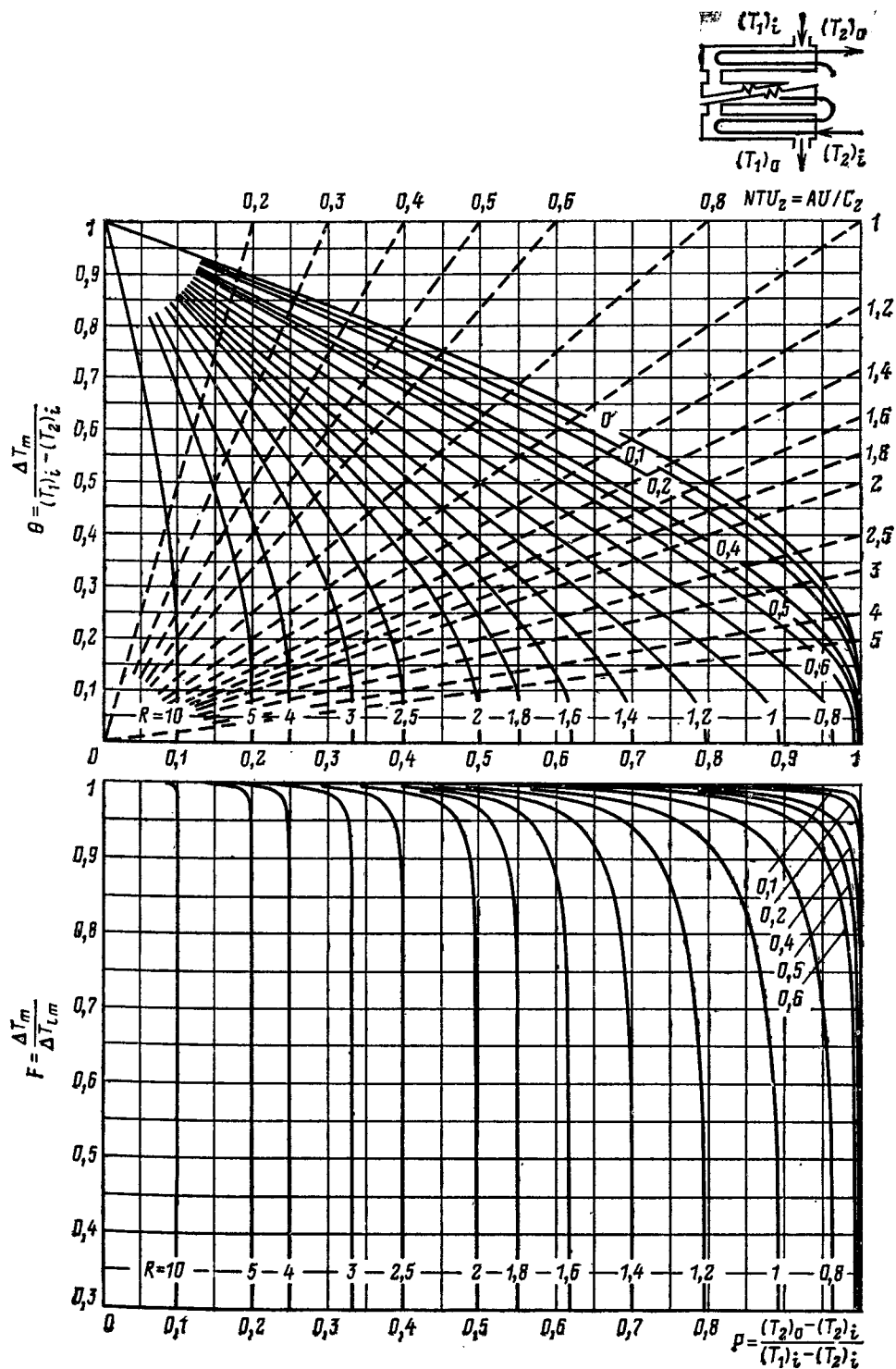
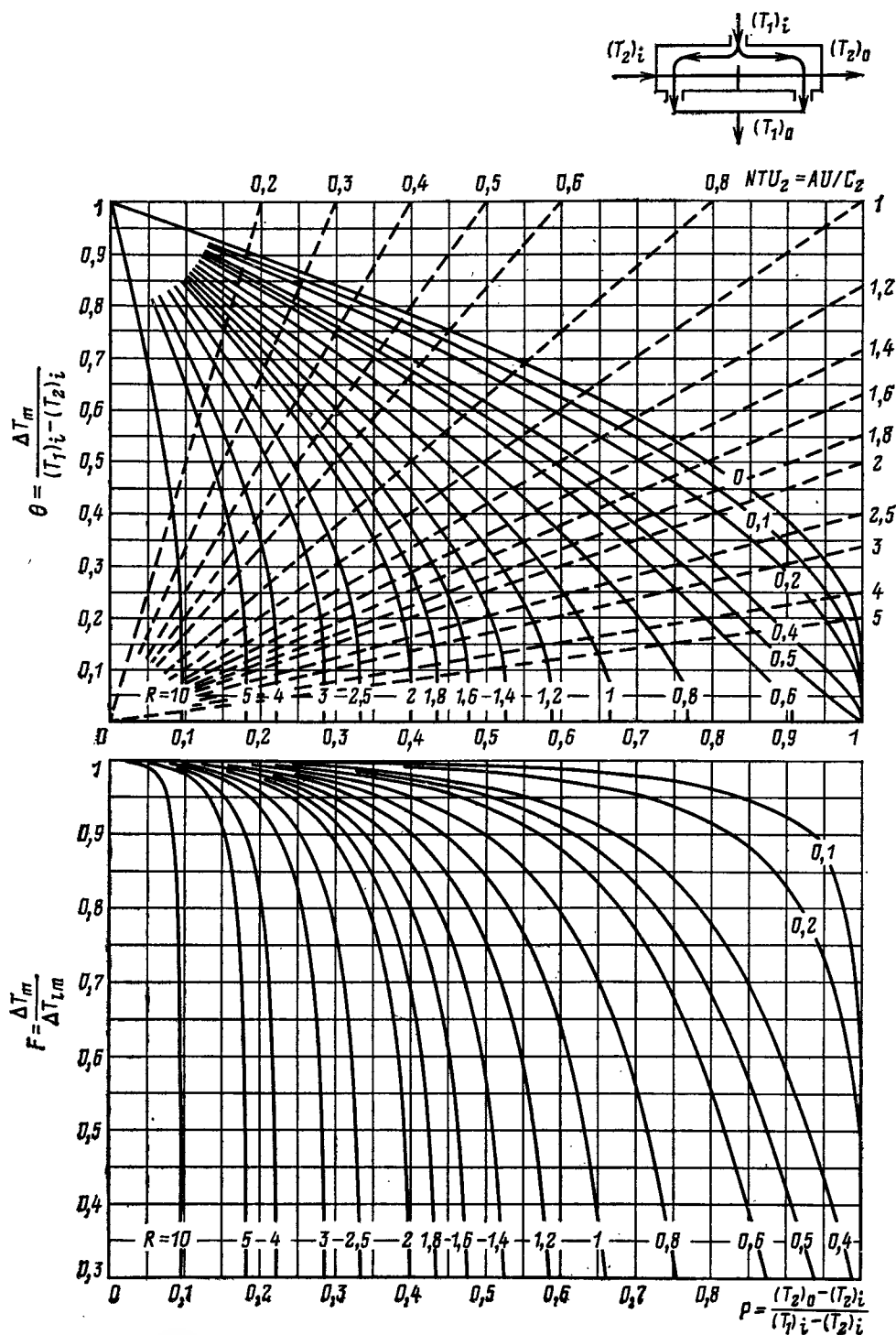


Рис. 8. F - P - и θ - P - NTU_2 -диаграммы (шесть последовательно соединенных корпусов E с двумя или любым четным числом ходов труб в каждом);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, T_1 \text{ и } T_2 \text{ взаимозаменяемы.}$$


 Рис. 9. F-P- и θ -P-NTU-диаграммы (корпус типа ТЕМА J, один ход труб);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

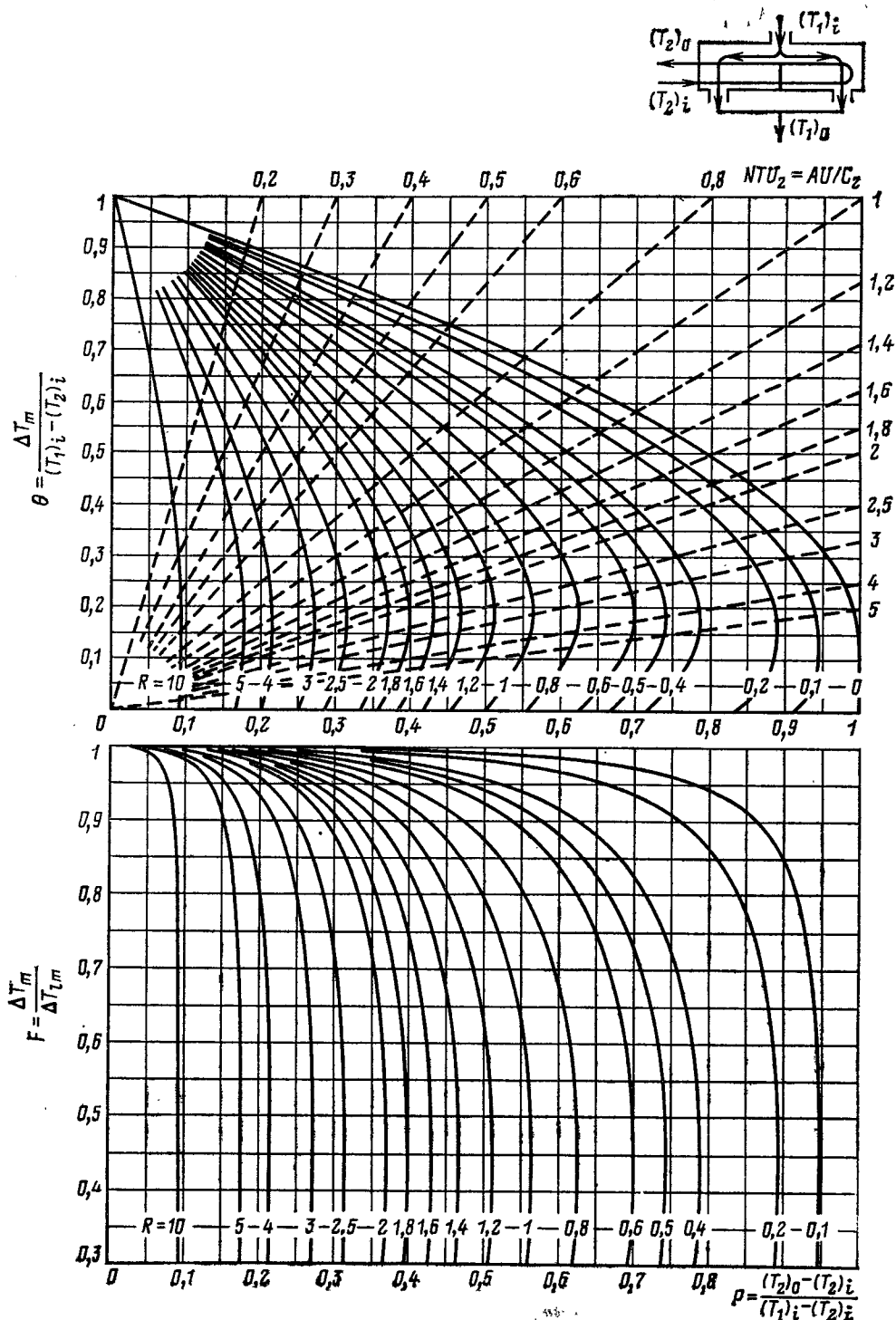


Рис. 10. F - P - и θ - P - NTU_2 -диаграммы (корпус типа ТЕМА J, два или любое четное число ходов труб, перекрестное течение перемешанных теплоносителей);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

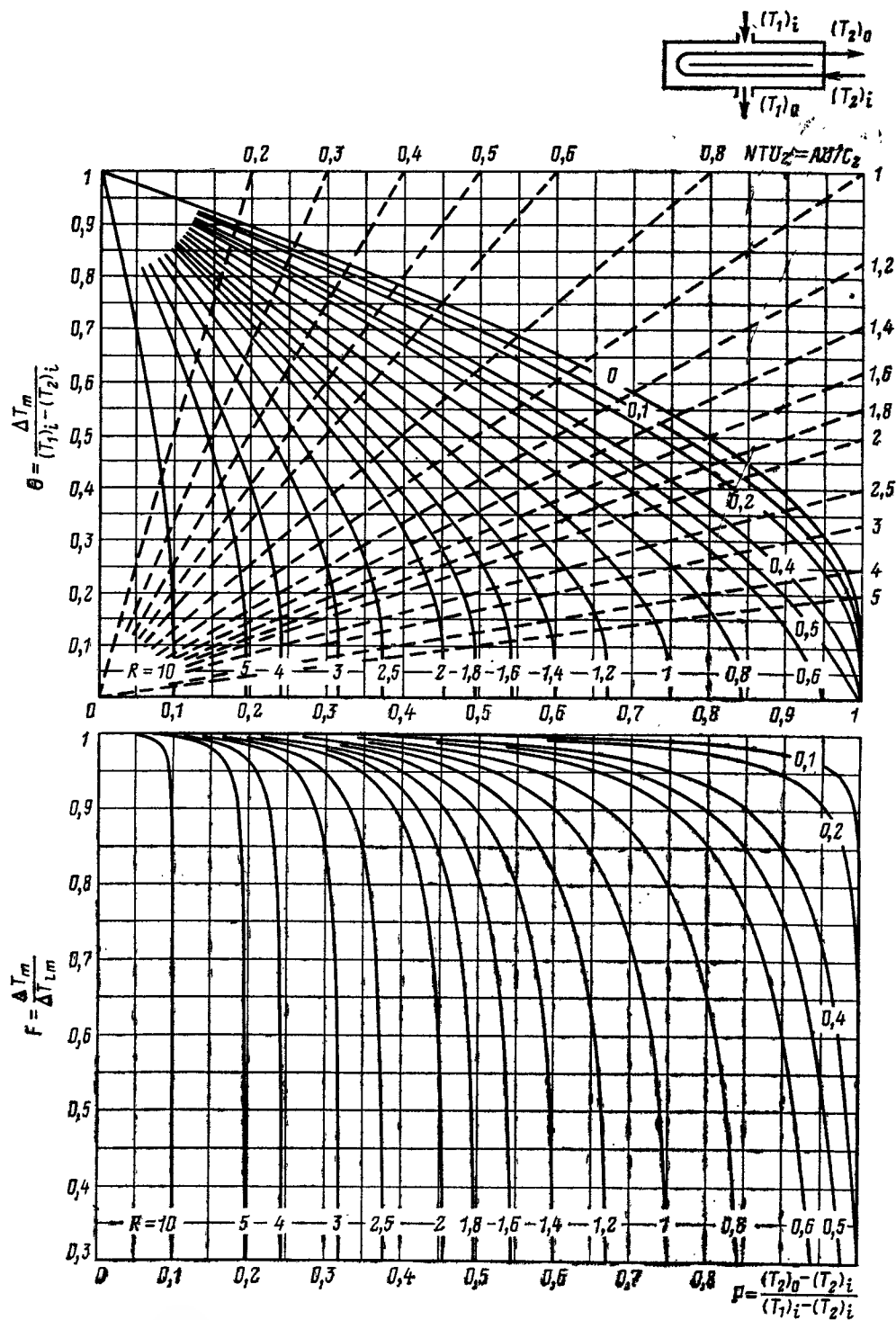


Рис. 11. F - P - и θ - P - NTU_2 -диаграммы (корпус типа ТЕМА G, два или любое четное число ходов труб);

$$R = \frac{c_2}{c_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

При выводе расчетной формулы подразумевалось, что теплоноситель, текущий внутри труб, входит в аппарат со стороны выходных патрубков теплоносителя, движущегося в межтрубном пространстве. Из рис. 10 видно, что кривые для θ достигают значений $P_{\max}$ приблизительно при $F=0,5$, после чего они снова уходят в область меньших значений P . Работа при $P < P_{\max}$ не рекомендуется.

Сравнение значений F для одноходового теплообменника и для теплообменника с $2N$ ходами теплоносителя внутри труб показывает, что тепловая эффективность одноходового теплообменника выше.

Е. Теплообменник ТЕМА G с разделяющимися потоками теплоносителя в кожухе и с $2N$ ходами теплоносителя в трубах. В теплообменниках с кожухами, выполненными по схеме ТЕМА G, поток разделяется на два, отделенных продольной перегородкой (рис. 11). Перепад давления в межтрубном пространстве приблизительно такой же, как и в теплообменнике с кожухом типа ТЕМА Е. При условии, что вход теплоносителя в трубы происходит с той стороны кожуха, где осуществляется выход теплоносителя из межтрубного пространства, тепловая эффективность такого аппарата оказывается существенно выше, чем в теплообменнике типа Е ($1-2N$).

Решение для данного варианта получено в [50]; после некоторых преобразований его можно представить в следующем виде:

$$P = \frac{J-1}{J+2\text{Re}^a}; \quad (15)$$

$$J = \frac{1}{1-D} [(1+G+2RG) \exp a + 2RD]; \quad (16)$$

$$G = \frac{1 - \exp b}{2R-1} \Big|_{R \neq 0,5} = \frac{1}{2F\delta} \Big|_{R \rightarrow 0,5}; \quad (17)$$

$$D = \frac{1 - \exp a}{2R+1}; \quad (18)$$

$$a = \frac{2R+1}{4F\delta}; \quad (19)$$

$$b = \frac{2R-1}{2F\delta}. \quad (20)$$

В формулах для расчетов P и R индекс 1 присвоен теплоносителю, текущему в межтрубном пространстве, его параметры нельзя менять местами в расчетных формулах с параметрами второго теплоносителя. Определение δ дано в уравнении (8) § 1.5.1.

Г. Теплообменник типа ТЕМА F. Теплообменник типа F имеет продольную перегородку, разделяющую его на два отсека. Если он, как обычно, имеет два хода труб, то получается чисто противоточная схема движения теплоносителей, для которой $F=1$. При четырех ходах труб теплообменник может рассматриваться как два аппарата Е ($1-2N$), включенных последовательно.

Имеются две присущие аппаратам с кожухами типа Е проблемы.

1. Поскольку продольная перегородка с одной стороны подвергается воздействию потока горячего теплоносителя, а с другой — более холодного, то через нее происходит передача теплоты теплопроводностью, которая снижает эффективность использования температурного напора. Метод, позволяющий учесть указанное снижение эффективности, был впервые развит в [51]; позднее он был представлен в безразмерном виде в [52] и заключается во введении дополнительного поправочного коэффициента

$$\Delta T_m = F(F_b) \Delta T_{LM}. \quad (21)$$

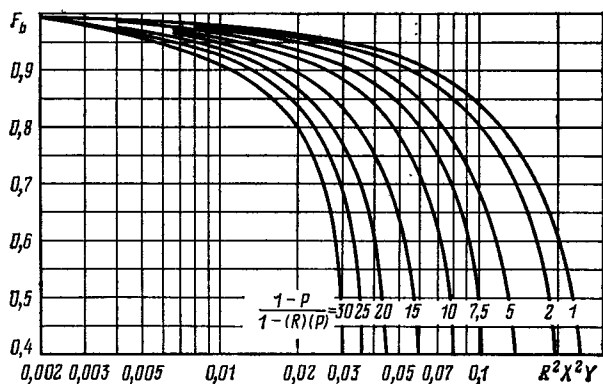


Рис. 12. Зависимость поправочного коэффициента F_b на перетечку теплоты через продольную перегородку в теплообменниках с корпусом типа ТЕМА F от параметра $R^2 X^2 Y$

Для двухходового по трубной стороне теплообменника $F=1,0$. Поправочный коэффициент на перетечку теплоты по перегородке имеет следующий вид:

$$F_b = \frac{Z\delta}{\ln [(1+ZX)/(1-ZX)]}; \quad (22)$$

$$Z = \sqrt{4R^2 Y + (R-1)^2}; \quad (23)$$

$$X = \frac{P}{2-PR-P}; \quad (24)$$

$$Y = \frac{A_b}{A} \frac{U_b}{U_0}, \quad (25)$$

где A — полная наружная поверхность труб; A_b — поверхность продольной перегородки; U_0 — результирующий коэффициент теплопередачи; U_b — коэффициент теплопередачи через перегородку, причем

$$U_b = \left(\frac{2}{\alpha_s} + \frac{L_b}{\lambda_b} \right)^{-1}; \quad (26)$$

α_s — коэффициент конвективной теплоотдачи к перегородке, обычно принимаемый равным коэффициенту теплопередачи в межтрубном пространстве пучка; L_b — толщина перегородки; δ определяется уравнением (8) § 1.5.1; λ_b — коэффициент теплопроводности материала перегородки.

Соответствующая расчетная диаграмма приведена на рис. 12.

2. Перегородка может быть приварена к стенкам корпуса, в этом случае перетечки теплоносителя между двумя половинами корпуса отсутствуют. Однако в большинстве случаев сохраняется возможность выемки трубного пучка из корпуса для его очистки; в этом случае устанавливаются гибкие уплотняющие полосы, которые будут эффективно предотвращать перетечки теплоносителя из отсека с высоким давлением, который примыкает к входному патрубку, в отсек с низким давлением, расположенный у выходного патрубка. Эти уплотнения зачастую повреждаются во время выемки трубного пучка, и тогда последующие — временами весьма существенные — перетечки искажают эффективное распределение температурного напора в пучке.

Данный случай проанализирован в [52]. Трудность расчета состоит в выборе нужного зазора, его можно только оценить.

1.5.3. F- и θ -диаграммы для теплообменников с перекрестным течением теплоносителей

Ниже представлены решения для наиболее общих вариантов теплообменников с перекрестным течением теплоносителей. Весьма полный обзор работ, посвященных этому общему случаю, содержится в [53], где представлены аналитические решения для многочисленных схем, некоторые из которых, правда, представляют лишь академический интерес. Указанная работа не содержит, однако, численных или графических решений. Другим очень полезным источником информации является библиографический обзор [54], который специально посвящен аппаратам с воздушным охлаждением.

А. Основные определения. Перемешанный и неперемешанный потоки. При аналитических выкладках выделяют два крайних состояния теплоносителя: перемешанное и неперемешанное. Используемые определения частично базируются на заимствованных из [54] положениях (рис. 1).

Полное перемешивание подразумевает, что вся жидкость в любой заданной плоскости, нормальной к направлению течения, имеет одинаковую температуру, хотя эта температура и изменяется в направлении течения. Неперемешанное течение означает, что в жидкости существует разности температур по крайней мере в направлении одной из нормалей к направлению течения, однако тепловой поток, связанный с этими разностями температур, отсутствует.

Если жидкость не перемешана, то конечная температура любого потока определяется все же как значение, которое имело бы место после условного полного перемешивания.

Если принять, что любой из теплоносителей либо полностью перемешан, либо совсем не перемешан, то можно выделить три возможные основные схемы течений для одноходовых теплообменников с перекрестным током теплоносителей. Они показаны здесь схематически. При этом принято, что изменение температуры в третьем измерении отсутствует.

В [55] отмечено, что если один или оба теплоносителя лишь частично перемешаны, метод расчета ΔT_m отсутствует. Они также указывали, что ΔT_m ниже, когда один теплоноситель перемешан, чем, когда оба теплоносителя не перемешаны.

Во многих реально существующих теплообменниках действительное течение оказывается частично перемешанным, хотя при наличии высоких ребер на трубах и при тесной упаковке труб эти ребра будут играть роль устройств, расслаивающих течение, и течение по своему характеру приблизится к неперемешанному.

Схемы потоков. В многоходовых аппаратах с поперечным током результирующее направление течения одного теплоносителя относительно другого является противоточным либо однонаправленным. Чисто противоточная схема обеспечивает максимально достижимую разность температур, тогда как однонаправленное течение дает наименьшую

разность при тех же конечных значениях температур теплоносителей. Поэтому многоходовые воздухоохладители почти неизбежно выполняются противоточными, за исключением некоторых экстраординарных случаев. Примером могут служить аппараты, использующие жидкость с низкой температурой плавления или высокой вязкостью, где сама технология диктует применение однонаправленного течения теплоносителей. В § 1.5.3 рассматривается преимущественно смешанная схема: противоток с перекрестным током, когда теплоноситель в соседних ходах движется во взаимно противоположных направлениях. Некоторые случаи однонаправленного течения будут обсуждены позднее. В [56] отмечено, что многоходовая схема, в которой теплоноситель в соседних ходах движется в одном и том же направлении, обеспечивает несколько большую ΔT_m при тех же конечных значениях температур. По очевидным практическим соображениям такие схемы редко применяются в технологических аппаратах. В [54] перечислены несколько случаев однонаправленного движения с двумя или тремя ходами, однако полученные численными методами результаты не приведены, и читателя отсылают к работе [56].

Анализ распределения температуры. Во всех неизотермических условиях все ограничения, обеспечивающие применимость понятия среднеарифметической разности температур (§ 1.5.1), должны быть учтены с добавлением следующего условия: поток обоих теплоносителей равномерно распределен по всей площади течения. Считается, что в охлаждаемых воздухом теплообменниках это условие соблюдается с приемлемой точностью, хотя некоторое перераспределение потоков воздуха, иногда весьма существенное, будет наблюдаться. Влияние отдельных факторов на справедливость соотношений для ΔT_m никогда не исследовалось, и в инженерной практике обычно считается, что различные погрешности расчета взаимно компенсируются и в итоге принятые зависимости сохраняют свою силу. Некоторые предостережения тем не менее высказываются, особенно для случаев, когда профили температур обоих теплоносителей по длине аппарата оказываются достаточно близкими. Аналогичные предостережения о возможных отклонениях в равномерности распределения жидкости по трубам высказываются также применительно к зоне входного коллектора, особенно при использовании вязких жидкостей или двухфазных смесей.

Представляют интерес некоторые дополнительные соображения относительно ΔT_m при перекрестном токе. В любой схеме с перекрестным током (даже когда оба теплоносителя полностью перемешаны) температуры обоих потоков могут «пересекаться». Чем больше число ходов в схеме перекрестного тока с противотоком, тем чаще это может случаться, и в предельном случае очень большого числа ходов значение ΔT_m окажется таким же, как и при противотоке.

При одном ходе теплоносителя внутри труб, но при большом числе секций труб в теплообменнике его эффективность возрастает с ростом числа секций и достигает значений, характерных для перекрестных течений неперемешанных теплоносителей. Практически это имеет место при $F > 0.8$ при числе трубных секций больше четырех.

Графические решения в виде θ и F-диаграмм для наиболее общих случаев представлены в § 1.5.3 вместе с рабочими уравнениями и соответствующими необходимыми комментариями. Рассмотрены следующие варианты:

- 1) поперечное течение с двумя неперемешанными теплоносителями (рис. 2);
- 2) однокходовое течение с одной секцией труб (рис. 3);
- 3) однокходовое течение с двумя секциями труб (рис. 4);
- 4) однокходовое течение с тремя секциями труб (рис. 5);
- 5) однокходовое течение с четырьмя секциями труб (рис. 6);
- 6) двухходовое течение с двумя секциями; перемешивание между ходами отсутствует (рис. 7);

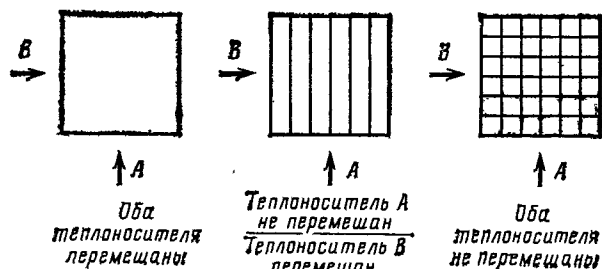


Рис. 1. Схема вариантов перемешивания теплоносителей

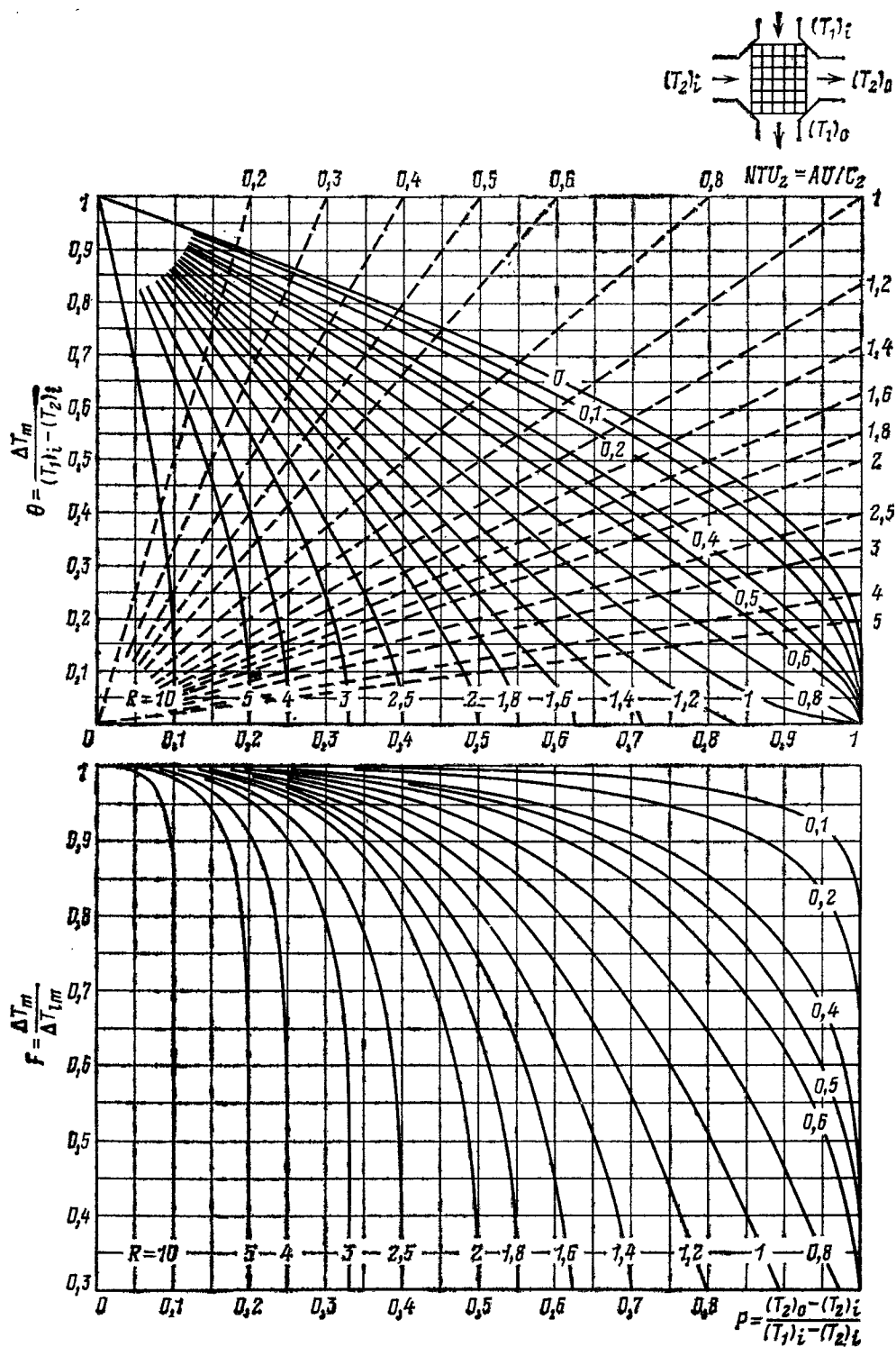


Рис. 2. $F-P$ и $\theta-NTU_2$ -диаграммы (перекрестный ток, оба теплоносителя не перемешаны);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ взаимозаменяемы}$$

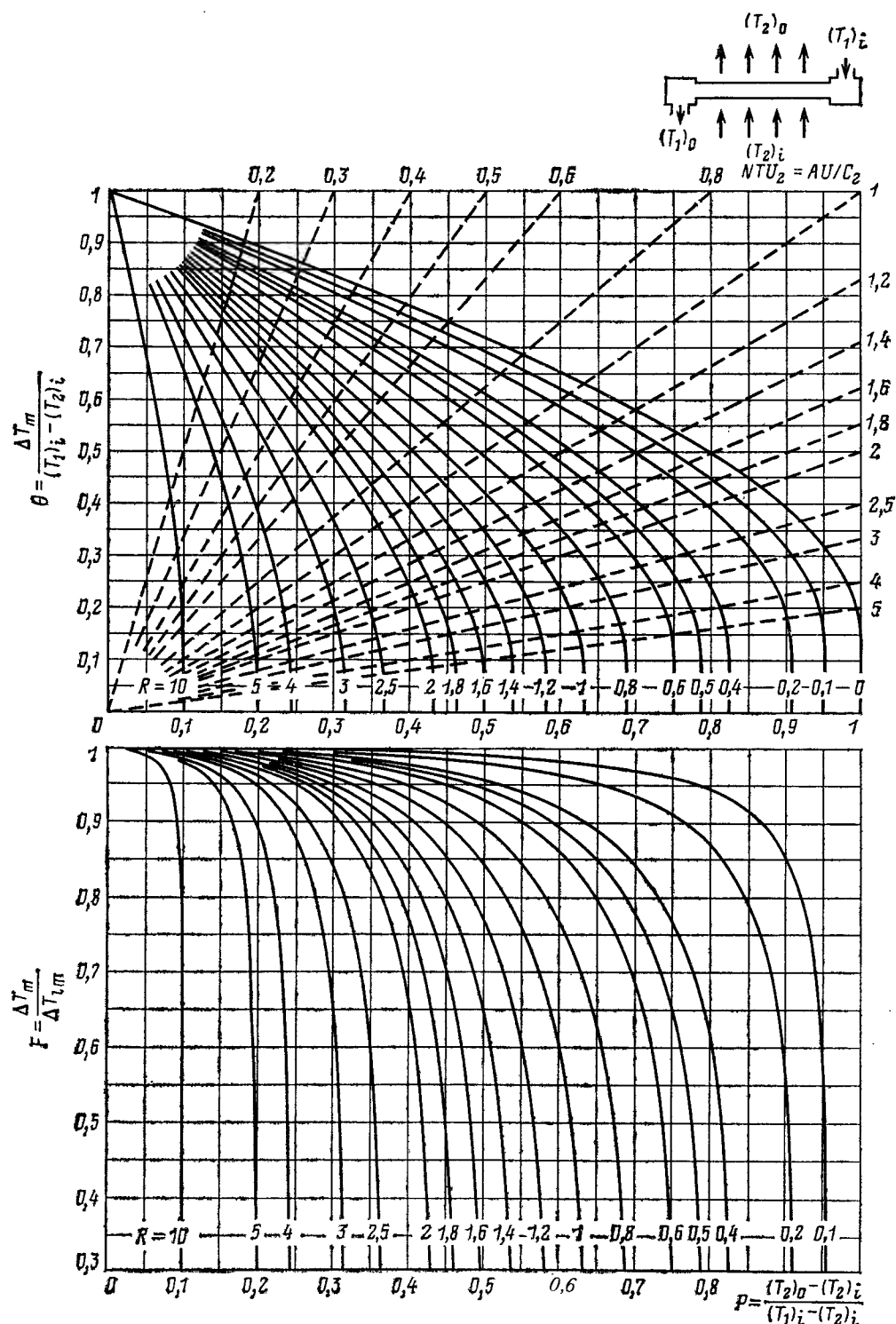


Рис. 3. F - P - и θ - P - NTU_2 -диаграммы (перекрестный ток, одна секция труб, теплоноситель не перемешан);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

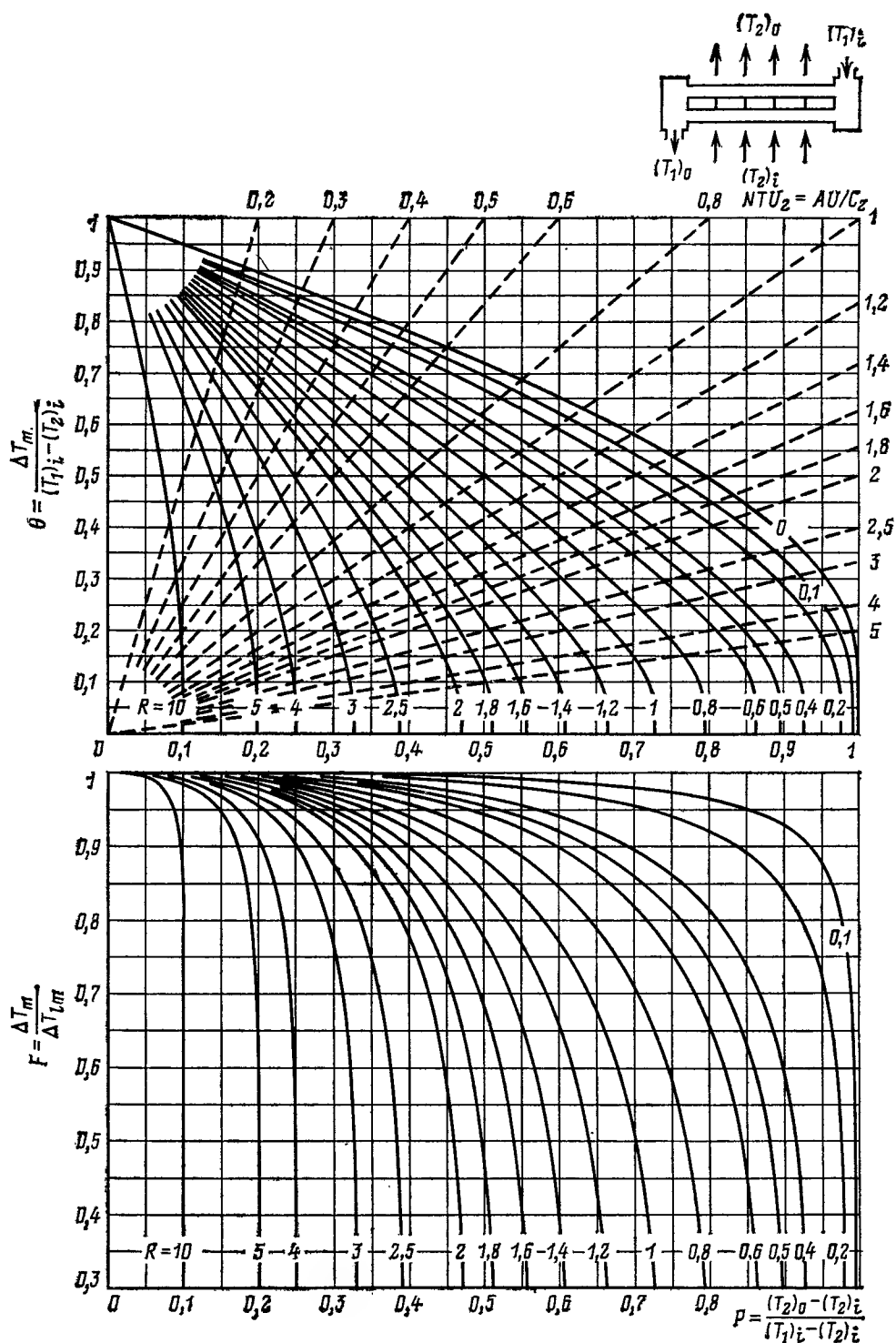


Рис. 4. F - P - и θ - P - NTU_2 -диаграммы (перекрестный ток, две секции труб, один ход, теплоноситель не перемешан);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

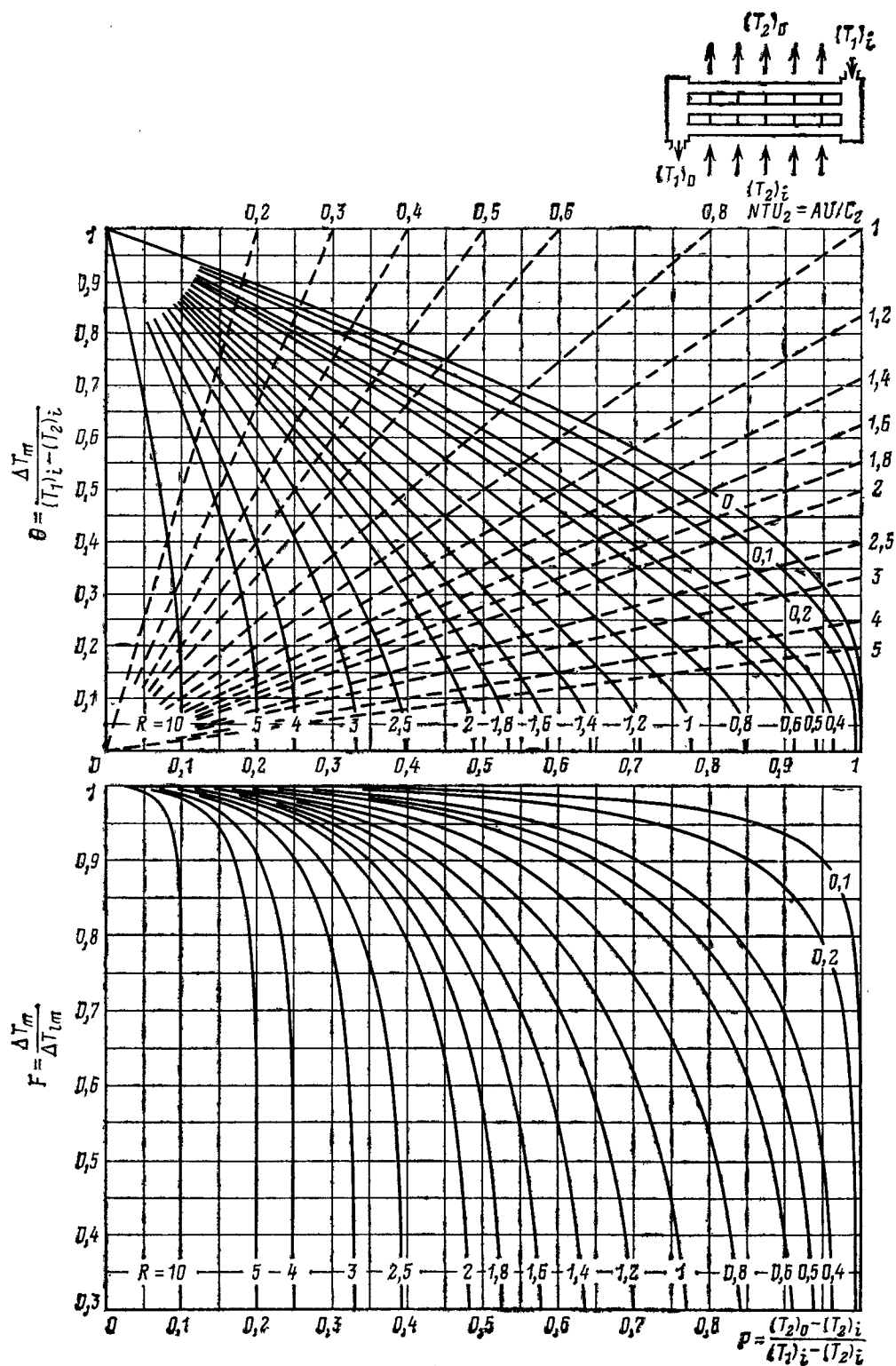


Рис. 5. F-P- и θ -P- NTU_2 -диаграммы (перекрестный ток, три секции труб, один ход, теплоноситель не перемешан);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_0}{(T_2)_0 - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

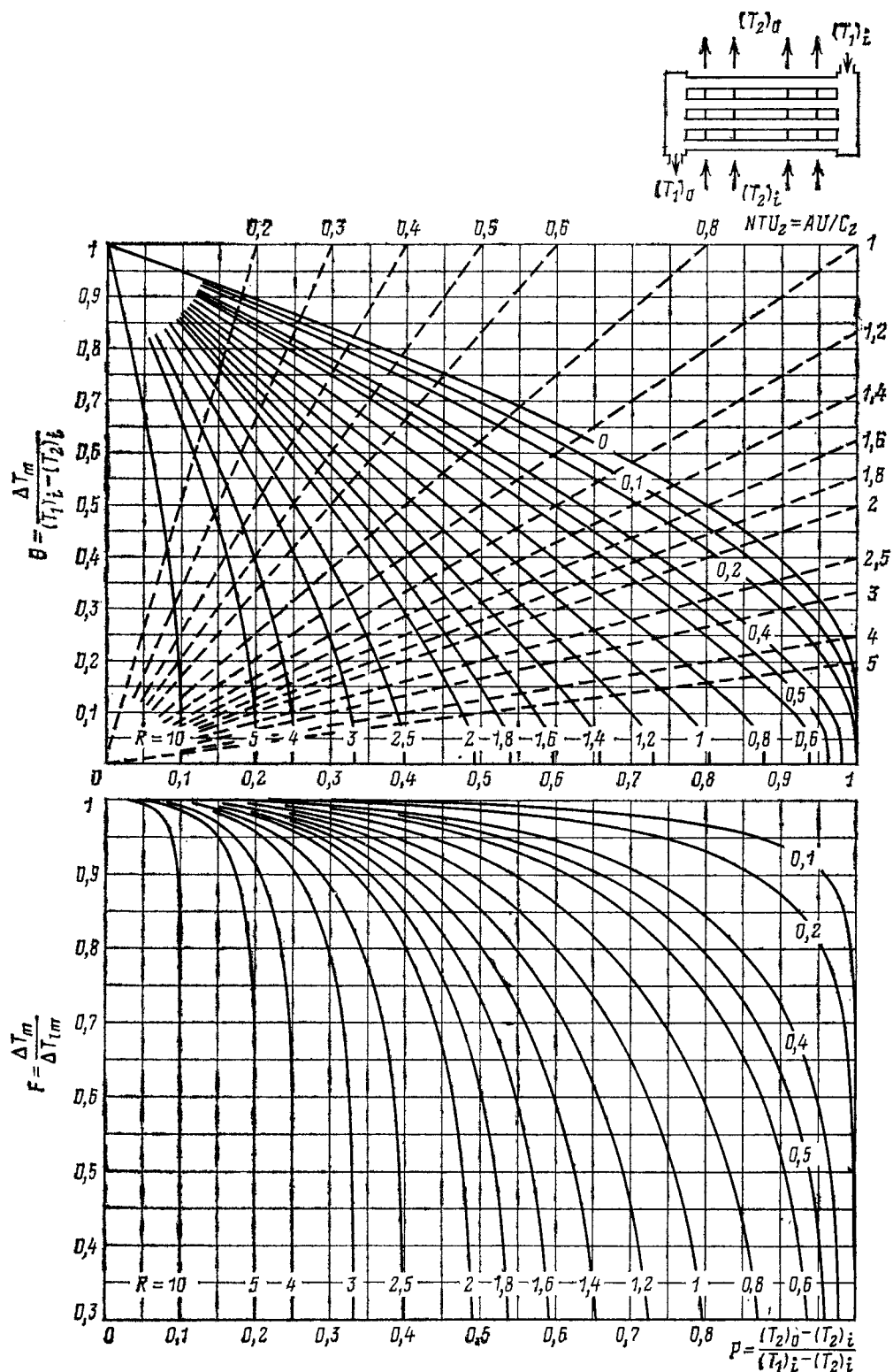


Рис. 6. F - P - и θ - P - NTU -диаграммы (перекрестный ток, четыре секции труб, один ход, теплоноситель не перемешан);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

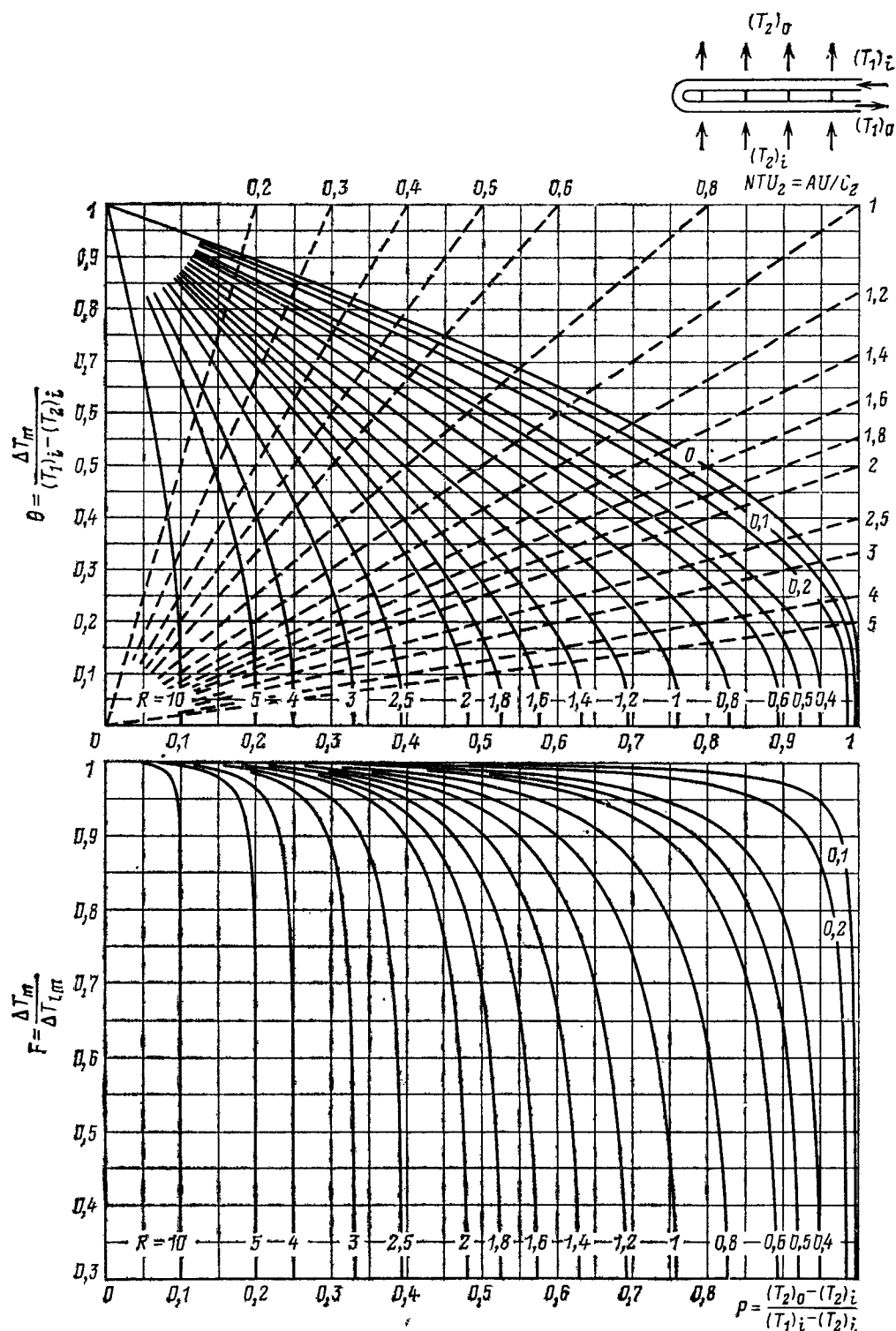


Рис. 7. F-P- и θ-P-NTU₂-диаграммы (перекрестный ток, две секции труб, два хода, перемешивание между ходами отсутствует);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

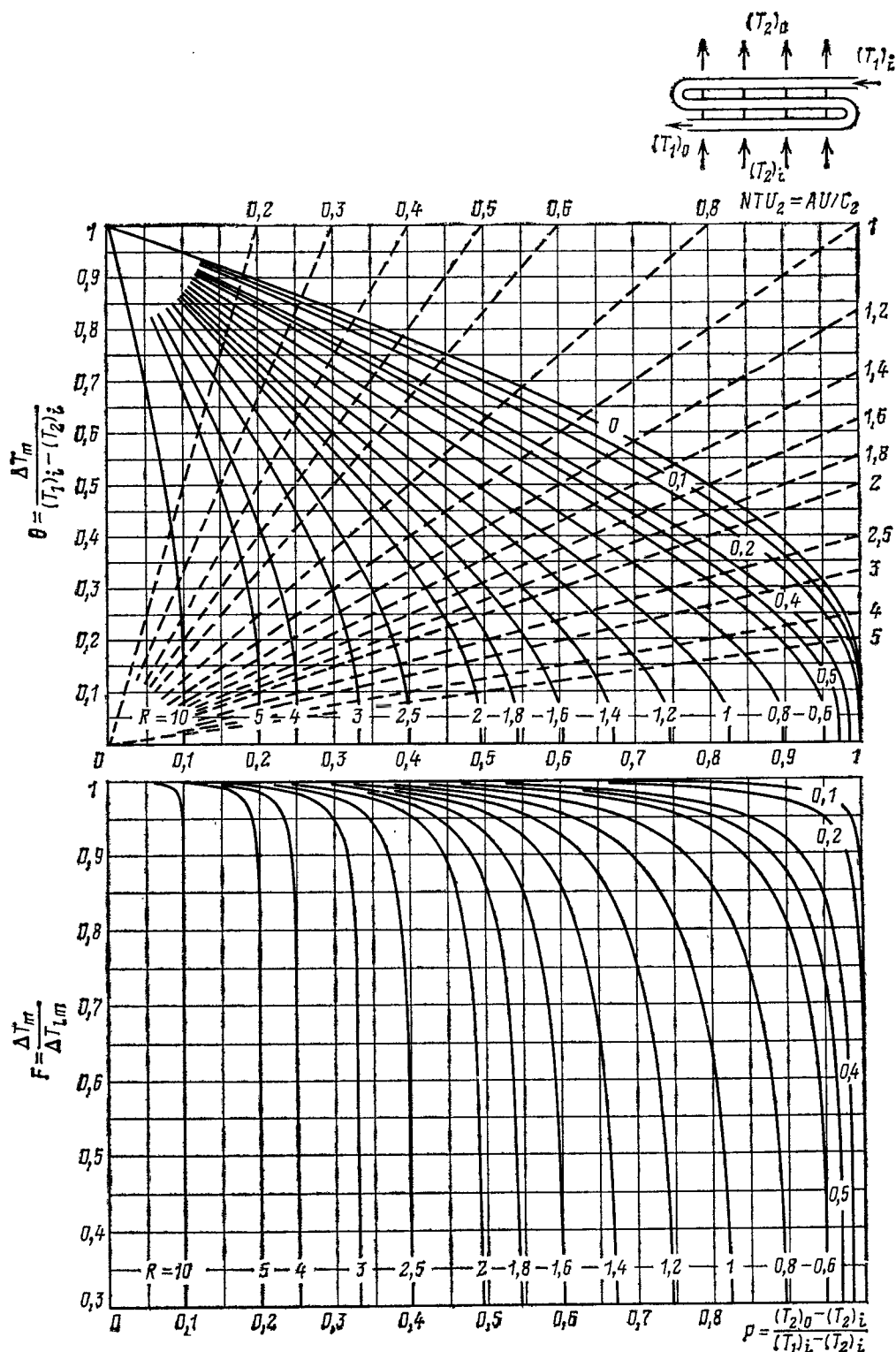


Рис. 8. F - P и θ - P - NTU_2 -диаграммы (перекрестный ток, три секции-труб, три хода, перемешивание между ходами отсутствует);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_0}{(T_2)_0 - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

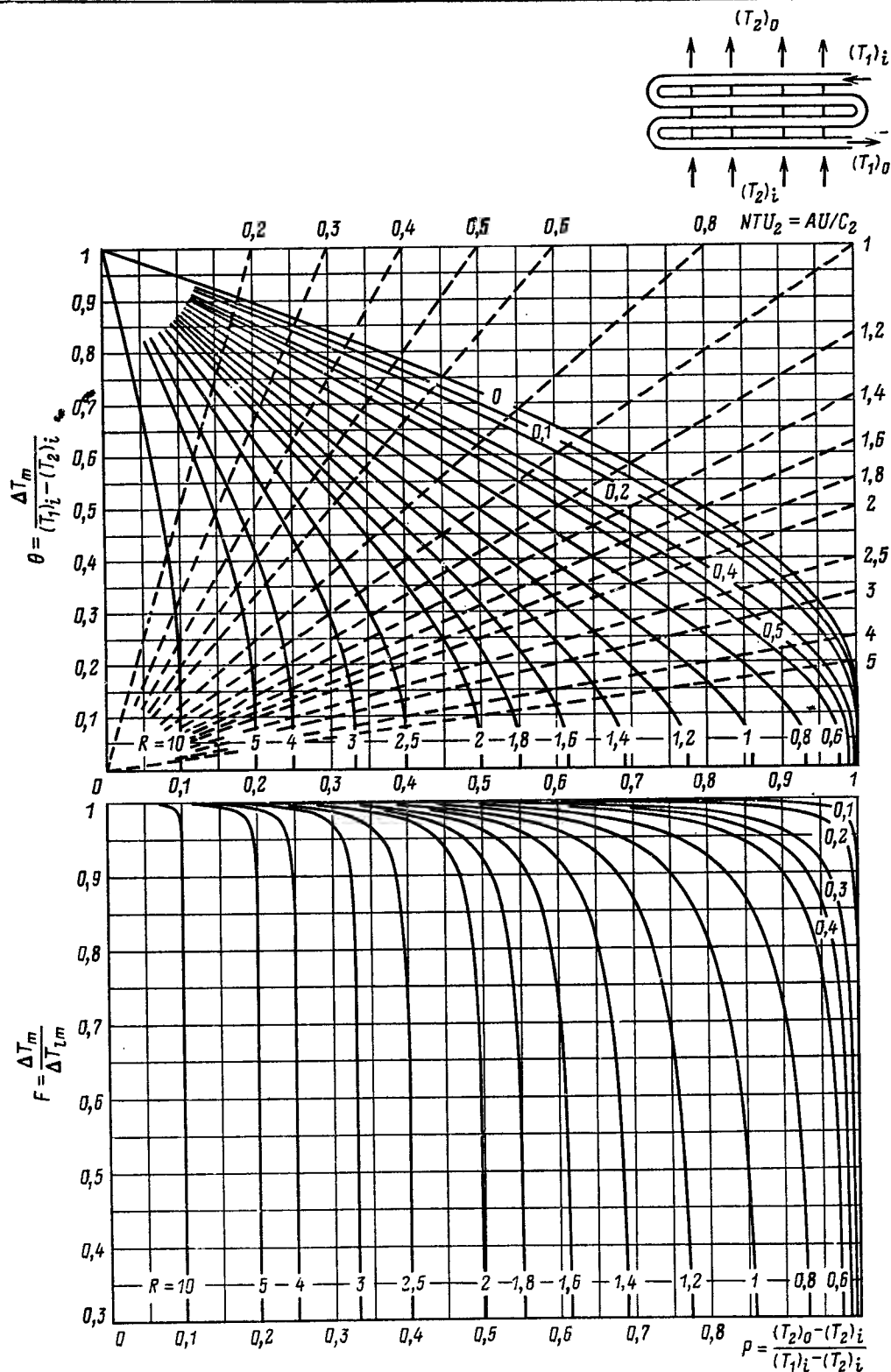


Рис. 9. F - P - и θ - P - NTU_2 -диаграммы (четыре секции труб, четыре хода, перемешивание между ходами отсутствует);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

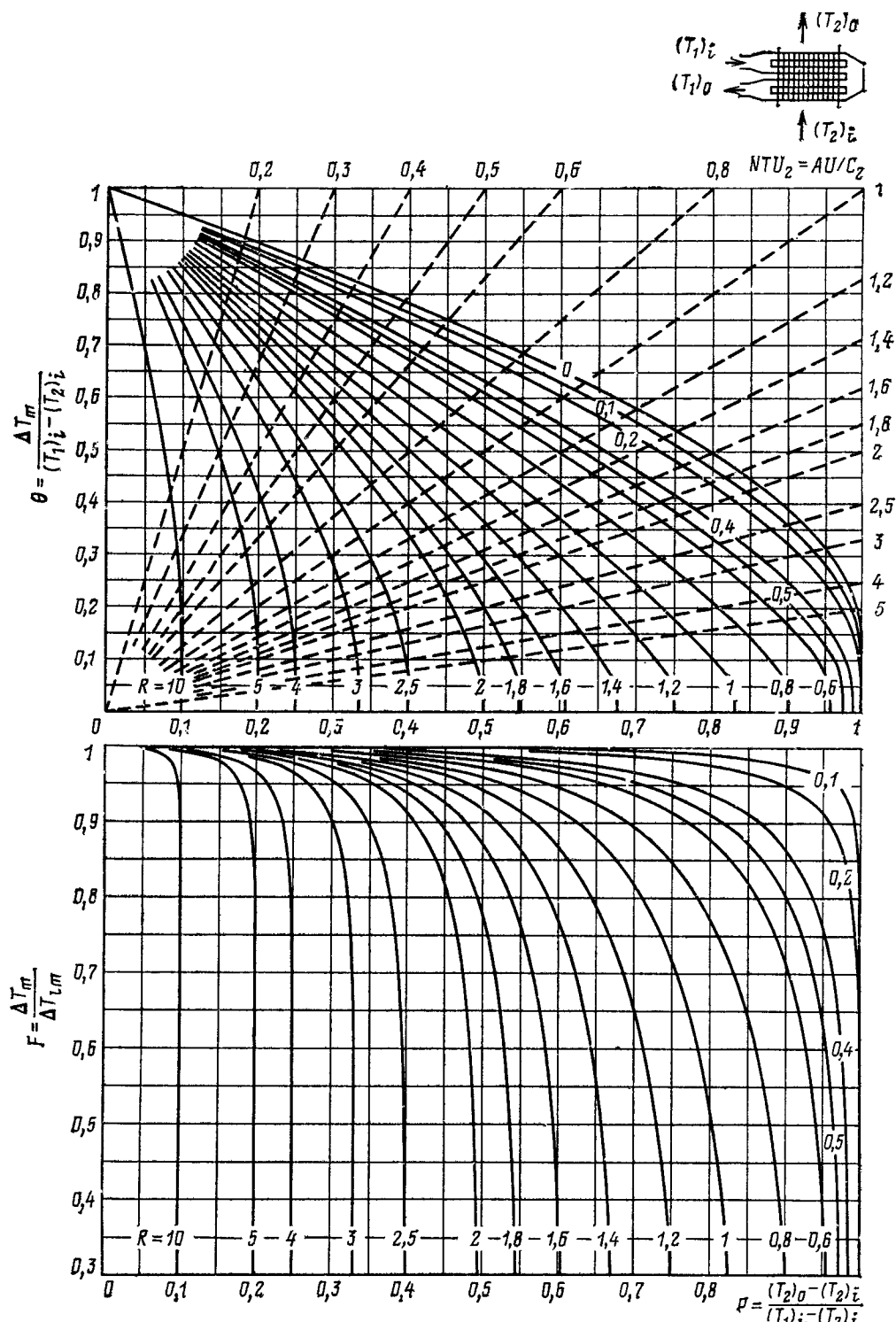


Рис. 10. F - P - и θ - P - NTU_2 -диаграммы (перекрестный ток, четыре секции труб в двух ходах по два пучка на ход, перемешивание в камере);

$$R = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(T_1)_i - (T_1)_o}{(T_2)_o - (T_2)_i}, \quad T_1 \text{ и } T_2 \text{ не взаимозаменяемы}$$

7) трехходовое течение с тремя секциями; перемешивание между ходами отсутствует (рис. 8);

8) четырехходовое течение с четырьмя секциями; перемешивание между ходами отсутствует (рис. 9);

9) двухходовое течение с четырьмя секциями; перемешивание между ходами (рис. 10).

В. Решения для T_m для наиболее общих схем с перекрестным током. Перекрестное течение с двумя перемешиваемыми теплоносителями. Этот вариант представляет собой очень важную с практической точки зрения схему, соответствующую аппарату с большим числом не обменивающихся жидкостью каналов по обоим теплоносителям. Первоначальное решение было получено в [57], позднее оно было модифицировано и представлено в более удобном виде в [6]

$$P = \frac{1}{RN} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 - e^{-N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N^m}{m!} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 - e^{-RN} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(RN)^m}{m!} \right] \right\}, \quad (1)$$

где δ определяется уравнением (8) § 1.5.1, а

$$N = NTU = 1/F\delta. \quad (2)$$

Рисунок 2 построен с помощью уравнения при $p=10$. Даже с помощью быстродействующих ЭВМ расчеты методом проб и ошибок оказываются довольно продолжительными. Другой, более быстрый метод описан в [53]; в нем используется численное интегрирование.

Перекрестное течение с двумя перемешиваемыми теплоносителями. Этот вариант не имеет каких-либо известных автору практических применений и приведен здесь лишь в качестве предельного случая схемы с перекрестным током. Соответствующая диаграмма изображена на рис. 10 § 1.5.2, она идентична диаграмме для теплообменника ТЕМА J с $2N$ ходами труб.

Одноходовая схема с одной, двумя, тремя или четырьмя секциями труб. Эти варианты, схематически представленные на рис. 3–6, являются практически важными промышленными аппаратами. Трубы секций (их число n) присоединены параллельно к общему коллектору.

Общее решение для этих вариантов представлено в [54]. Используемые в [54] параметры следующим образом связаны с применяемыми в данном Справочнике: $p=PR$; $q=P$ и $r=\theta=FR\delta=P/NTU_2$. С учетом этих соотношений формулы примут вид

$$P = (1/R) \left\{ 1 - \left[n \exp(nKR) \left/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \right) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times K^j \exp \left\{ - \left[(i-j) (P/nR) \right] \sum_{k=0}^j \left| (nKR)^k / k! \right| \right\} \right] \right\}^{-1}, \quad (3)$$

где

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{(i-j)!j!}$$

представляет собой число сочетаний из i по j и

$$K = 1 - \exp \left(- \frac{1}{nF\delta} \right) = 1 - \exp \left(- \frac{P}{n\theta} \right) = \\ = 1 - \exp \left(- \frac{NTU_2}{n} \right). \quad (3a)$$

Варианты уравнения (3) приведены в [54]. Следует напомнить, что идентичные решения были получены в [59], однако они никогда не публиковались. В наших обозначениях

решения для различного числа секций записываются следующим образом:

для одной секции (см. рис. 3)

$$P = \frac{1}{R} (1 - e^{-KR}); \quad (4)$$

для двух секций (см. рис. 4)

$$P = \frac{1}{R} [1 - e^{-2KR} (1 + RK^2)]; \quad (5)$$

для трех секций (см. рис. 5)

$$P = (1/R) \left\{ 1 - \left[\frac{e^{3KR}}{1 + RK^2(3-K) + \frac{3}{2} R^2 K^4} \right]^{-1} \right\}; \quad (6)$$

для четырех секций (см. рис. 6)

$$P = (1/R) \{ 1 - [e^{4KR} / \{ 1 + RK^2(6-4K+K^2) + 4R^2 K^4(2-K) + (8/3)(R^3 K^6) \}]^{-1} \}. \quad (7)$$

При большом числе секций решение стремится к решению для варианта с двумя перемешиваемыми потоками теплоносителей (см. рис. 2).

Многоходовая схема с равным числом многорядных секций (схема с U-образными пучками). Схематически эти варианты показаны на рис. 7–9. По существу это U-образные пучки, в которых течение теплоносителя внутри труб изменяет направление движения от секции к секции. Решение для данного варианта опирается на результаты [54]. Как и ранее, те же решения были выведены в неопубликованной работе [59].

Общая формула имеет вид

$$P = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{A} \right). \quad (8)$$

Выражения для A записываются следующим образом: для двух секций и двух ходов (см. рис. 7)

$$A = \frac{K}{2} + \left(1 - \frac{K}{2} \right) e^{2KR}; \quad (9)$$

для трех секций и трех ходов (см. рис. 8)

$$A = K \left[1 - \frac{K}{4} - RK \left(1 - \frac{K}{2} \right) \right] e^{KR} + \left(1 - \frac{K}{2} \right)^2 e^{3KR}; \quad (10)$$

для четырех секций и четырех ходов (см. рис. 9)

$$A = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{K}{2} + \frac{K^2}{4} \right) + K \left(1 - \frac{K}{2} \right) \times \\ \times \left[1 - \frac{R}{8} K \left(1 - \frac{K}{2} \right) e^{2KR} \right] + \left(1 - \frac{K}{2} \right)^3 e^{4KR}; \quad (11)$$

для пяти секций и пяти ходов (рисунок не приведен)

$$A = \left\{ K \left(1 - \frac{3}{4} K + \frac{K^2}{2} - \frac{K^3}{2} \right) - RK^2 \left[1 - K + \frac{3}{4} K^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4} K^3 - \frac{R}{2} K^2 + \left(1 - \frac{K}{2} \right)^2 \right] \right\} e^{KR} + \\ + \left[K \left(1 - \frac{3}{4} K + \frac{1}{16} K^3 \right) - 3RK^2 \left(1 - \frac{K}{2} \right)^3 \right] e^{3KR} + \\ + \left(1 - \frac{K}{2} \right)^4 e^{5KR}; \quad (12)$$

для шести секций и шести ходов (рисунок не приведен)

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{K}{2} \left(1 - K + K^2 - \frac{1}{2} K^3 + \frac{1}{8} K^4 \right) + \\
 & + K \left(1 - K + \frac{3}{4} K^2 - \frac{5}{16} K^3 + \frac{1}{32} K^4 \right) e^{2KR} - \\
 & - RK^2 \left[2 - 3K + 3K^2 - \frac{7}{4} K^3 + \frac{3}{8} K^4 - \right. \\
 & \left. - RK^2 \left(2 - 3K + \frac{3}{2} K^2 - \frac{1}{4} K^3 \right) \right] e^{2KR} + \\
 & + \left[\frac{K}{2} \left(2 - 2K + \frac{1}{2} K^3 - \frac{1}{8} K^4 \right) - \right. \\
 & \left. - 4RK^2 \left(1 - \frac{K}{2} \right)^4 \right] e^{4KR} + \\
 & + \left(1 - \frac{K}{2} \right)^4 e^{4KR} + \left(1 - \frac{K}{2} \right)^5 e^{6KR}.
 \end{aligned} \quad (13)$$

При числе секций и ходов более шести решения для всех практически важных случаев приближаются к решению для чистого противотока, по крайней мере в представляющем для промышленности значении диапазоне параметров, т. е. при $F > 0,8$. Даже при четырех секциях и четырех ходах решение уже дает значения, близкие к противотоку. Именно поэтому соответствующие диаграммы для пяти секций и пяти ходов, а также для шести секций и шести

ходов уже не показаны, а решения приведены лишь для памяти.

Многоходовые схемы с любым числом секций, с перемешиванием между секциями и без него. Число возможных вариантов по секциям и по числу лучков, по наличию или отсутствию перемешивания как в самом теплообменнике, так и между секциями очень велико. Их рассмотрение выходит за пределы возможного в рамках настоящего Справочника. Многие решения приведены в [53, 60], но лишь ограниченное число из этих решений представляет практический интерес. Далее, как отмечено в представляющем для нас большой интерес обсуждении к [53], многие решения с точностью до 2% совпадают с базовыми вариантами. Если оценить ряд допущений, обеспечивающих справедливость полученных решений (многие из которых приняты по крайней мере с натяжкой), то станет ясной возможность некоторых рациональных упрощений. Эта возможность предоставлена последующим исследователям. Из многих возможных решений, достижимых в явном виде или получаемых только путем численного интегрирования, в Справочнике представлен относительно простой, но часто встречающийся на практике вариант двухходового теплообменника с четырьмя секциями труб, т. е. по две секции на ход (рис. 10). Полученное в [54] аналитическое решение описывается уравнением (8)

$$\begin{aligned}
 A = & \left[\frac{R}{2} K^3 (4 - K + 2RK)^2 + e^{4KR} + \right. \\
 & \left. + K \left(1 - \frac{K}{2} + \frac{K^2}{8} \right) (1 - e^{4KR}) \right] (1 + RK^2)^{-2}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

ПРЕДИСЛОВИЕ¹

Ф. В. Шмидт

Конструкторам тепловых установок приходится использовать в своих проектах имеющиеся в литературе корреляционные соотношения или экспериментальные данные. Во многих случаях точность этих соотношений неизвестна. Ниже приведен критический анализ этих соотношений и отобраны наилучшие из них. Везде, где это возможно, корреляционные соотношения сопоставляются с результатами измерений и указывается возможная погрешность.

Некоторые авторы, понимая, что во многих случаях к Справочнику будут обращаться также инженеры, мало сведущие в области теплообмена, включили в свои разделы обсуждение исходных физических явлений. Особое внимание обращается на те случаи, когда только специальное детальное рассмотрение гарантирует от возможных погрешностей. В Справочник включены только наиболее общие соотношения; однако большинство авторов приводит обширную библиографию, что поможет читателям при необходимости легко найти более подробную информацию.

Существует такое разнообразие форм и типов теплообменников, что для их проектирования требуются корреляционные соотношения, применимые в довольно различных геометрических конфигурациях и условиях протекания процессов переноса. Понимая это, редакционный совет Справочника попытался возможно более полно охватить все важнейшие вопросы, имеющие отношение к теплообменным устройствам. Поэтому часть 2 представляет интерес не только для специалистов по теплообменникам, но и для всех, кого интересуют широкие аспекты тепловых установок.

В разд. 2.1 изложены основы теории явлений переноса теплоты, массы и импульса. Однофазные течения как ньютоновских, так и неньютоновских жидкостей в каналах, пучках гладких и оребренных труб и около погруженных в жидкость тел рассмотрены в разд. 2.2. Там же обсуждается течение в неподвижных и псевдооживленных слоях.

Раздел 2.3 посвящен описанию течений многофазных сред с потерей давления в них. После изложения основных закономерностей таких течений детально обсуждаются течения газожидкостных систем и смесей газов или жидкостей с твердыми частицами.

Перенос теплоты теплопроводностью рассмотрен в разд. 2.4. Обсуждаются стационарная и нестационарная теплопроводность как без фазовых превращений, так и с ними. Включен также раздел, посвященный контактному термическому сопротивлению.

В разд. 2.5 приведены корреляционные соотношения, описывающие конвективный теплообмен в однофазных потоках. Рассматриваются случаи вынужденной, естественной и совместной естественной и вынужденной (смешанной) конвекции ньютоновской и неньютоновской жидкостей, а также жидких металлов. Описаны способы интенсификации теплообмена.

Довольно полное описание конденсации чистого пара и паровых смесей содержится в разд. 2.6. Кроме того, в этом разделе обсуждаются капельная конденсация, образование туманов, а также способы интенсификации теплообмена.

Раздел 2.7 посвящен кипению и испарению. В нем изложены методы расчета теплоотдачи и скорости парообразования при кипении однокомпонентной жидкости в объеме, кипении снаружи и внутри труб и трубных пучков. Обсуждается кипение бинарных и многокомпонентных смесей.

В разд. 2.8 рассмотрен перенос теплоты в системах газ — твердое тело применительно к неподвижным слоям, заполненным газом, псевдооживленным слоям и засадочным слоям с перемешиванием.

Исчерпывающее изложение вопросов теплообмена излучением содержится в разд. 2.9. Детально обсуждаются радиационные характеристики поверхностей, радиационный теплообмен между зеркальными и диффузными поверхностями и излучение газовых объемов.

¹ Пер. с англ. М. В. Брыкина.

Раздел 2.1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА¹

2.1.1. Введение

Е. У. Шлюндер

Методы теплового и гидравлического расчета теплообменников основаны на законах термодинамики и явлений переноса. Законы термодинамики определяют условия, при которых система находится в равновесном состоянии,

и, таким образом, позволяют найти предельное количество теплоты или массы, которое можно в конечном счете передать в любом типе теплообменника. Однако эти законы не дают ответа на вопрос, насколько быстро происходит переход системы к равновесному состоянию, и поэтому не позволяют определить время пребывания среды в теплообменнике, необходимое для достижения равновесного состояния. Размер теплообменника прямо пропорционален необходимому времени пребывания в нем рабочей среды, поэтому определение этого времени является одной из важнейших задач, возникающих в процессе конструирования теплообменника. Проведение такого расчета требует

¹ Пер. с англ. М. В. Брыкина.

дополнительной информации, которая дается уравнениями переноса энергии, массы и импульса. Эти уравнения вместе с феноменологическими уравнениями для потоков позволяют связать потоки энергии, массы и импульса с отклонением соответствующих величин от их равновесных значений.

Законы термодинамики рассматриваются здесь в качестве априорных и используются по мере необходимости без вывода. Уравнения переноса применяются апостериори, они менее строгие, в некоторых случаях они носят характер гипотез, в определенной степени не доказаны и поэтому и являются предметом продолжающихся исследований. Однако эти соотношения весьма полезны и часто позволяют получить недостающие данные, необходимые для конструирования.

Важность таких уравнений для инженерной практики отмечалась Вильгельмом Нуссельтом еще в 1923 г. [1]. Нуссельт был инженером-механиком, и большинство из опубликованных им работ посвящено решению задач в этой области. С 1923 г. химическая технология интенсивно развивалась, выдвигая на повестку дня большое число новых проблем в области переноса теплоты. В качестве примеров можно привести перенос теплоты при фазовых переходах и без них, тепло- и массообмен в процессах разделения, теплообмен в трубчатых реакторах, используемых для проведения реакций катализа, тепло- и массообмен в пористых средах и при сушке и т. д.

Перенос теплоты может интересоваться также специалистов, работающих вне сферы инженерного труда. Примерами таких областей могут служить геология, метеорология, астрофизика, медицина и биология. То же самое можно сказать и по поводу массообмена и переноса импульса.

В ч. 2 Справочника изложены основные законы, определяющие интенсивность переноса энергии, массы и импульса. Эти законы затем можно использовать вместе с законами термодинамики в процессе проектирования теплообменников. В используемой в данной книге терминологии под теплообменниками понимаются все типы оборудования, в котором перенос теплоты является фактором, существенным для процесса или даже контролирующим его скорость. Поэтому такие устройства, как сушилки, трубчатые реакторы и т. д., также обсуждаются детально.

Кроме законов тепло- и массообмена существенную роль при проектировании теплообменников играют законы переноса импульса. Вторая часть построена таким образом, что в первых разделах рассматриваются законы переноса импульса при тении жидкостных сред. В следующих за ними разделах рассматриваются конвективный и кондуктивный перенос теплоты, перенос теплоты в многофазных течениях, совместный тепло- и массообмен и теплообмен излучением. В результате такого изложения материала оказываются неизбежными некоторые повторения, особенно в разделах, касающихся совместного тепло- и массообмена (например, при конденсации смесей). В таких случаях даются ссылки на соответствующие параграфы. Подобное построение Справочника следует классическому подходу, принятому в других книгах и справочниках по тепло- и массообмену, предназначенных для проектирования теплообменников.

Здесь, вероятно, будет уместным следующее общее замечание, касающееся различных видов переноса теплоты, таких, например, как конвекция и излучение. Нуссельт отмечал в 1915 г. [2], что в литературе часто можно найти утверждение, что передача теплоты от твердого тела к окружающей среде осуществляется в общем случае тремя различными способами: излучением, теплопроводностью и конвекцией. Говорят, что подъемные силы или силы, определяющие вынужденное течение воздуха, приводят к соприкосновению холодных воздушных вихрей с поверхностью нагретого тела, в результате чего теплота уносится от поверхности. Различая теплообмен теплопровод-

ностью и конвекцией, подразумевают, что это два независимых механизма. Следовательно, можно было бы заключить, что теплота может быть передана только с помощью конвекции без участия теплопроводности. Это, однако, неверно. Основное уравнение Фурье $dQ = -\lambda (dT/dn) dAdt$ применяется в случае как конвекции, так и теплопроводности. Если коэффициент теплопроводности окружающей среды λ будет равен нулю, то, естественно, не будет передачи теплоты ни конвекцией, ни теплопроводностью. Если же коэффициент теплопроводности окружающей среды отличен от нуля, то вся теплота, за исключением переносимой излучением, будет передаваться теплопроводностью. Однако количество отдаваемой теплоты может изменяться в результате того, что окружающая среда имеет определенную скорость течения и эта скорость влияет на величину dT/dn на поверхности тела.

Нет сомнений в том, что Нуссельт был полностью прав и что только два механизма теплопереноса различимы физически: теплопроводностью и излучением. В первом случае проводником теплоты служит материальная среда, во втором — теплота переносится электромагнитными волнами. Тем не менее термины «теплопроводность», «конвекция» и «излучение» используются настолько широко, что все они будут применяться и в данном Справочнике. Мы уверены в том, что читатель распознает точный физический смысл этих терминов.

2.1.2. Физические механизмы явлений переносов

Е. У. Шлюндер

Необходимо сделать ряд предварительных замечаний по поводу физических механизмов переноса энергии, массы и импульса. Эти замечания помогут читателю более отчетливо уяснить концепцию теплопроводности, диффузии, конвекции и излучения.

В неподвижной среде процессы переноса могут трактоваться как макроскопические, являющиеся результатом статистического усреднения большого числа непрерывно происходящих микроскопических событий, в которых участвуют определенные элементы среды. Такими элементами могут быть молекулы, ионы, атомы, электроны, фононы или фотоны. Событиями обычно являются столкновения элементов, обусловленные их непрерывным хаотическим движением, происходящим в соответствии с принципом микроскопической обратимости. Феноменологические законы переноса теплоты, массы и импульса были установлены Фурье (теплопроводность), Фиком (диффузия) и Ньютоном (вязкое трение). Эти законы справедливы в том случае, когда выполняются следующие два условия:

1) число соударений между элементами в выделенном объеме велико по сравнению с числом соударений элементов с ограничивающей объем поверхностью;

2) среда внутри выделенного объема или покоится, или ее движение обратимо.

Первое условие может нарушаться, если число элементов внутри выделенного объема становится меньше некоторого критического. Это происходит в случае, когда данный объем достаточно мал или если давление в среде низкое. Второе условие может нарушаться при возникновении турбулентности¹. Оба эти ограничения обсуждаются ниже.

А. Пределы применимости феноменологических законов, определяемые дискретностью среды. Наиболее детально изучены явления переноса в разреженных газах.

¹ Потенциальные и ламинарные течения являются гидродинамически обратимыми, т. е. уравнения Эйлера и Навье — Стокса не изменяются при замене знака у временной координаты на обратный.

Перенос в разреженных газах обусловлен соударениями хаотически движущихся молекул. Элементарное рассмотрение приводит к следующим выражениям для потока теплоты $\dot{q}$, диффузионного потока $\dot{n}_j$ и напряжения вязкого трения τ , обусловленного потоком импульса (см. также [3]),

$$\dot{q} = -\frac{1}{3} \tilde{\rho} \tilde{c}_v \omega_m \sigma \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (1)$$

$$\dot{n}_j = -\frac{1}{3} \tilde{\rho} \omega_m \sigma \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial z}; \quad (2)$$

$$\tau = -\frac{1}{3} \tilde{\rho} \tilde{M} \omega_m \sigma \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3)$$

где $\tilde{\rho}$ — молярная плотность; ω_m — средняя скорость молекул газа; σ — средняя длина свободного пробега молекул; $\tilde{M}$ — масса одного моля, $\partial T/\partial z$ — градиент температуры; $\partial \tilde{x}_j/\partial z$ — градиент молярной доли компонента j ; $\partial u/\partial z$ — градиент скорости. Соответствующие феноменологические законы имеют вид

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{Фурье, 1821}); \quad (4)$$

$$\dot{n}_j = -\tilde{\rho} \tilde{D} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial z} \quad (\text{Фик, 1855}); \quad (5)$$

$$\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{Ньютон, 1687}). \quad (6)$$

Сопоставляя эти уравнения, выразим свойства переноса λ , $\tilde{D}$ и η через молекулярные $\tilde{\rho}$, ω_m , σ , $\tilde{M}$ и $\tilde{c}_v$. Полученные таким образом соотношения, как будет показано в ч. 5 данного Справочника, не описывают точно переносные свойства, однако они позволяют установить пределы применимости самих феноменологических законов.

Рассмотрим перенос теплоты теплопроводностью через слой газа толщиной s . Интегрируя уравнение (4), получаем

$$\dot{q} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{s}. \quad (7)$$

Чем меньше ширина слоя, тем больше тепловой поток при условии, что $s \gg \sigma$, т. е. что газ в слое можно рассматривать как сплошную среду. Однако, когда ширина слоя становится малой по сравнению с σ , столкновения между молекулами газа становятся редкими, а тепловой поток перестает зависеть от s и стремится к предельному максимальному значению $\dot{q}_{\max}$

$$\dot{q}_{\max} = -\frac{1}{6} \tilde{\rho} \tilde{c}_v \omega_m (T_1 - T_2). \quad (8)$$

Для газа при нормальном давлении σ около 0,1 мкм. Обычно $s \gg \sigma$, поэтому уравнение Фурье (7), как правило применимо в стационарных условиях. Однако если рассмотреть мелкодисперсные порошки в вакууме, то ситуация может стать совершенно другой.

Крайне низкая кажущаяся теплопроводность порошка обусловлена тем, что в вакууме скорость теплопереноса описывается уравнением (8). Это явление хорошо известно как эффект Смолуховского (см. разд. 2.8, а также § 2.1.8). При нормальном давлении для частиц диаметром примерно 1 мм скорость передачи тепла может контролироваться уравнением (8) в том случае, если теплообмен происходит в нестационарных условиях и время соприкосновения частиц достаточно мало (несколько секунд или меньше). Такая ситуация имеет место в псевдооживленных слоях, где частицы соударяются с нагревающим или охлаждающим элементом, а также в других контактных теплообменных устройствах, таких как вращающиеся печи для обжига и барабанные сушилки.

Подобные же выражения можно получить для максимального потока массы и максимального напряжения вязкого трения, причем опять если s становится малой по сравнению с σ из уравнений (2) и (3),

$$\dot{n}_{j, \max} = -\frac{1}{6} \tilde{\rho} \omega_m (\tilde{x}_{j,1} - \tilde{x}_{j,2}); \quad (9)$$

$$\tau_{\max} = -\frac{1}{6} \tilde{\rho} \tilde{M} \omega_m u. \quad (10)$$

Рассмотрим испарение чистого вещества в вакуум. В этом случае $\tilde{x}_{j,1} = 1$; $\tilde{x}_{j,2} = 0$. Максимальная скорость испарения

$$\dot{n}_{\max, \text{evap}} = -\frac{1}{6} \tilde{\rho} \omega_m. \quad (11)$$

Обычно эта скорость испарения намного больше [3,5 кмоль/(м²·с) при нормальных давлении и температуре] скорости, реализуемой в технических устройствах. Именно поэтому при описании испарения и конденсации обычно используется предположение о фазовом равновесии вблизи границы раздела газ — жидкость. Однако при испарении в вакуум или в случае интенсивного нестационарного испарения, например при вскипании, это допущение может оказаться и неверным.

Напряжение вязкого трения на стенке круглой трубы при ламинарном течении газа согласно закону Хагена—Пуазейля, следующему из уравнения (6), можно представить в виде

$$\tau/u = 8\eta/d, \quad (12)$$

где d — диаметр трубы. При атмосферном давлении и комнатной температуре отношение τ/u примерно 10⁻² кг/(м²·с), если диаметр трубы около 1 см. Максимальное значение τ/u при тех же условиях в соответствии с уравнением (10) оказывается примерно 200 кг/(м²·с). Поэтому напряжение вязкого трения обычно описывается уравнением (12). Однако если газ течет в вакуумированной трубе или сквозь пористую среду, то доминирующим механизмом становится молекулярный перенос, описываемый уравнением (10).

Теплопроводность в твердых телах обусловлена переносом или фононов (в неметаллических твердых телах), или электронов (в металлах). В случае фононного механизма переноса скорость распространения теплоты совпадает со скоростью звука. Поэтому максимальный тепловой поток определяется выражением

$$\dot{q}_{\max} = -\frac{1}{6} \tilde{\rho} \tilde{c}_v \omega_s (T_1 - T_2), \quad (13)$$

где ω_s — скорость звука.

В случае электронного механизма теплопереноса можно получить

$$\dot{q}_{\max} = -\frac{1}{6} \tilde{\rho} \tilde{c}_v \omega_e (T_1 - T_2), \quad (14)$$

где ω_e — средняя тепловая скорость электронов. Сравнивая максимальные значения тепловых потоков в газах и металлических и неметаллических твердых телах, нетрудно получить следующие числа, Вт/м²:

газ (1·10⁵ Па, 300 К)¹

$$\dot{q}_{\max} = 0,10 \cdot 10^6 (T_1 - T_2);$$

твердый неметаллический материал²

$$\dot{q}_{\max} = 1,25 \cdot 10^9 (T_1 - T_2);$$

¹ Рассчитано при $\omega_m = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{\tilde{R} T}{\tilde{M}}}$.

² Рассчитано для стекла; $\omega_s = 4000$ м/с.

твердый металл[‡]

$$\dot{q}_{\max} = 0,50 \cdot 10^{11} (T_1 - T_2).$$

Максимальный тепловой поток в неметаллических жидкостях имеет тот же порядок величины, что и в неметаллических твердых телах. В любом случае значения максимальных тепловых потоков в твердых телах и жидкостях значительно выше тех, которые реализуются в реальных устройствах, поэтому их практическая ценность невелика.

Максимальный тепловой поток при радиационном теплообмене реализуется в том случае, если участвующие в энергообмене тела имеют термически черные поверхности. Если теплообмен излучением осуществляется без потерь в окружающее пространство, то плотность теплового потока определяется законом Стефана—Больцмана

$$\dot{q}_{\max} = C_s (T_1^4 - T_2^4), \quad (15)$$

где температура выражена в кельвинах.

Радиационная константа C_s называется постоянной Стефана—Больцмана. Ее численное значение [4]

$$C_s = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4). \quad (16)$$

При умеренной разности температур ($T_1^4 - T_2^4$) уравнение (15) можно приближенно представить в виде

$$\dot{q}_{\max} = 4C_s T_m^3 (T_1 - T_2), \quad (17)$$

где $T_m = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$. При комнатной температуре получаем следующее численное значение (Вт/м^2):

$$\dot{q}_{\max} = 5,8 (T_1 - T_2).$$

Хотя эта величина сравнительно невелика, теплообмен излучением может оказаться доминирующим при малой разности температур в системах со свободной конвекцией.

В. Пределы применимости феноменологических законов, определяемые турбулентностью. Другое ограничение применимости уравнений для потоков (4)—(6), содержащих молекулярные коэффициенты переноса λ , δ и η , обусловлено явлением турбулентности. Турбулентность в газах и жидкостях является результатом хаотического движения так называемых турбулентных вихрей, размер которых около нескольких процентов размера всей системы. Этот размер может быть порядка миллиметров в трубах теплообменника, сантиметров — в больших градириях или даже метров — в атмосфере. В жидкостях и газах вихри возникают при больших скоростях течения, в трубах большого диаметра, позади препятствий и т. д. Критерием возникновения турбулентности служит критическое число Рейнольдса

$$Re_{cr} = \left(\frac{\rho u L}{\eta} \right)_{cr}, \quad (18)$$

где L — характерный размер. При течении в трубе критическое число Рейнольдса равно 2300, если под L понимать диаметр трубы. Уравнения молекулярного переноса (4)—(6) применимы до тех пор, пока число Рейнольдса меньше 2300. При более высоких значениях возникающие турбулентные вихри вносят дополнительный вклад в перенос теплоты, массы и импульса.

Для описания явлений турбулентного переноса предложено большое число моделей. Однако ни одна из них не позволяет выразить турбулентные потоки только через физические свойства среды. Наиболее широко используемые модели вводят коэффициенты турбулентного переноса λ_t , δ_t и η_t . Феноменологические уравнения для потоков

(4)—(6) обобщаются при этом следующим образом:

$$\dot{q}_t = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (19)$$

$$\dot{n}_{j,t} = -\rho (\delta + \delta_t) \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial z}; \quad (20)$$

$$\tau_t = -(\eta + \eta_t) \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (21)$$

Свойства турбулентного переноса, однако, не являются физическими свойствами среды. Они зависят от скорости течения, расстояния от твердых стенок, геометрической формы трубы, помещенной в поток тела, скорости свободной струи и т. д. Коэффициенты турбулентного переноса в каждом конкретном случае должны определяться на основе экспериментальных данных. Однако в любом случае турбулентные потоки превосходят молекулярные ($\Delta z \gg \sigma$), но оказываются меньше максимальных молекулярных потоков ($\Delta z \ll \sigma$)

$$\dot{q} < \dot{q}_t < \dot{q}_{\max}; \quad (22)$$

$$\dot{n}_j < \dot{n}_{j,t} < \dot{n}_{\max}; \quad (23)$$

$$\tau < \tau_t < \tau_{\max}. \quad (24)$$

Для грубой оценки можно считать, что турбулентные потоки в 10—100 раз превосходят молекулярные.

В заключение необходимо отметить, что напряжение вязкого трения, обусловленное молекулярным переносом импульса, не всегда описывается законом Ньютона [уравнение (6)]. В некоторых случаях коэффициент вязкости η зависит от самого напряжения трения. В движущихся жидкостях наблюдаются также эффекты упругости. Теория молекулярного переноса импульса в так называемых неньютоновских и вязкоупругих жидкостях изложена в [5, 6], а также обсуждается в § 2.2.8.

2.1.3. Применение методов расчета тепло- и массообмена в инженерной практике

Е. У. Ш л ю н д е р

Рассмотрим основные процессы переноса теплоты с точки зрения их использования при проектировании теплообменников. Приведенные в предыдущем параграфе уравнения позволяют находить мгновенные локальные значения потоков. Для расчета полного потока через поверхность теплообменника необходимо выполнить интегрирование по временной и пространственным координатам. Такое интегрирование, если проводить его строго, требует совместного решения взаимосвязанных дифференциальных уравнений. Это можно сделать только с помощью ЭВМ. В настоящее время для решения подобных задач разработано несколько программ. Наряду с численным подходом в конструкторской практике используются также и приближенные аналитические методы, позволяющие получать разумное первое приближение, во многих случаях обеспечивающие достаточно точные результаты.

Ниже приведено краткое описание этих приближенных методов. Сначала изложены наиболее простые из них, затем более сложные и точные.

А. $\bar{U}$ -метод. Следующее уравнение является исходным для описания теплопередачи от среды 1 к среде 2 через разделяющую их твердую стенку (рис. 1):

$$\dot{q} = \bar{U} (T_{1,av} - T_{2,av}). \quad (1)$$

Здесь $\bar{U}$ — средний коэффициент теплоотдачи. Предполагается, что он не зависит от средних температур $T_{1,av}$ и $T_{2,av}$, времени t и координат x, y . Предполагается также, что занимающие объемы V_1 и V_2 среды неподвижны и об-

[‡] Рассчитано при $\omega_e = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 100\,000 \text{ м/с}$.

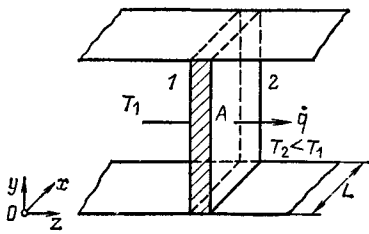


Рис. 1. Теплопередача от среды 1 к среде 2 через твердую стенку

меняются теплотой, связанной с теплоемкостью, причем их удельные теплоемкости c_1 и c_2 постоянны. В начальный момент времени ($t=0$) температуры сред равны $T_{1,0}$ и $T_{2,0}$. Рассмотрим, как изменяются со временем температуры $T_{1,av}$ и $T_{2,av}$ и каков усредненный по времени тепловой поток $\dot{q}_{av}$. Для ответа на эти вопросы кроме уравнения (25) нужно воспользоваться также уравнениями баланса энергии для каждой из сред

$$-\frac{dH_1}{dt} = \dot{q}A; \quad (2)$$

$$+\frac{dH_2}{dt} = \dot{q}A, \quad (3)$$

где A — площадь поверхности теплообмена; $H_j = (\rho c V T_{av})_j$ — энтальпия среды j ; t — время. Совместное решение уравнений (1)–(3) для среды 1 имеет вид

$$\frac{T_{1,av} - T_{1,0}}{T_{2,0} - T_{1,0}} = \frac{W_2}{W_1 + W_2} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) \bar{U} A t \right] \right\}, \quad (4)$$

$$\text{где } W_j = (\rho c V)_j. \text{ Комплекс } \frac{\bar{U} A}{W_1} t \text{ и } \frac{\bar{U} A}{W_2} t \quad (5)$$

— так называемые числа единицы перелоса теплоты NTU_j теплообменника по отношению к средам 1 и 2 соответственно. NTU представляет собой безразмерное время контакта, причем размерный комплекс $W_j/(\bar{U} A)$ называется релаксационным временем среды j . Количество теплоты Q , передаваемое за время t ,

$$Q = \bar{U} A t \frac{(T_{1,0} - T_{2,0}) - (T_{1,av} - T_{2,av})}{\ln [(T_{1,0} - T_{2,0}) / (T_{1,av} - T_{2,av})]}, \quad (6)$$

где последний множитель называется средней логарифмической разностью температур ΔT_{LM} ,

$$Q = \bar{U} A t \Delta T_{LM}. \quad (5a)$$

Усредненный по времени тепловой поток

$$\dot{q}_{av} = \frac{Q}{A t} = \bar{U} \Delta T_{LM}. \quad (7)$$

Точно такой же анализ справедлив и для сред, движущихся в направлении оси x параллельно поверхности A , если рассматривать квазистационарные условия и пренебрегать потоком энергии вдоль оси x . Пусть $\dot{V}_j$ — объемный расход сред, $\dot{H}_j = (\rho c \dot{V} T_{av})_j$, $\dot{W}_j = (\rho c \dot{V})_j$. Уравнения баланса энергии в этом случае имеют вид

$$-dH_1/dt = \dot{q}; \quad (8)$$

$$dH_2/dt = \dot{q}, \quad (9)$$

а их решение совместно с уравнением (1) для среды 1

$$\frac{T_1 - T_{1,0}}{T_2 - T_{1,0}} = \frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1 + \dot{W}_2} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{1}{\dot{W}_1} + \frac{1}{\dot{W}_2} \right) \bar{U} A \right] \right\}. \quad (10)$$

Аналогичное выражение можно получить и для среды 2. В данном случае нуль в нижнем индексе относится к условиям на входе. Величины без нулевого нижнего индекса соответствуют условиям на выходе при $x=L$ (см. рис. 1). Средний тепловой поток в промежутке от $x=0$ до $x=L$ можно представить в виде, полностью аналогичном выражению, полученному выше для покоящихся сред [см. (7)],

$$\dot{q}_{av} = \frac{\dot{Q}_{av}}{A} = \bar{U} \Delta T_{LM}. \quad (11)$$

Это и не удивительно, так как случай движущихся сред можно свести к случаю неподвижных сред, если ввести время пребывания среды в теплообменнике t , определяемое как отношение объема теплообменника V к объемному расходу $\dot{V}$,

$$t_1 = V_1/\dot{V}_1 \text{ (для среды 1);} \quad (12)$$

$$t_2 = V_2/\dot{V}_2 \text{ (для среды 2).}$$

Теперь нетрудно получить, что

$$\frac{\bar{U} A}{\dot{W}_1} = \frac{\bar{U} A}{W_1} t_1 = NTU_1; \quad (13)$$

$$\frac{\bar{U} A}{\dot{W}_2} = \frac{\bar{U} A}{W_2} t_2 = NTU_2. \quad (14)$$

Эти соотношения показывают эквивалентность уравнений (10) и (4) для движущихся и покоящихся сред.

В заключение отметим достоинства и пределы применимости $\bar{U}$ -метода. В случае справедливости сделанных допущений о независимости коэффициента $\bar{U}$ от температуры, времени или координат этот метод позволяет получить решение задачи для различных перепадов температур.

Как только определен коэффициент теплопередачи $\bar{U}$, например на основе экспериментальных данных, полученных на натурном теплообменнике, появляется возможность рассчитать для тех же жидкостей работу теплообменника с большим или меньшим температурным перепадом в пределах некоторого интервала его изменения. Ориентировочные значения суммарного коэффициента теплоотдачи для различных типов теплообменников приведены в табл. 1 (минимальные значения соответствуют малым скоростям течения и средам с низкой теплопроводностью).

$\bar{U}$ -метод является однопараметрическим и может использоваться для получения предварительных оценок. Он также позволяет установить связь между эффективностью процесса теплопереноса и числом единиц переноса теплоты NTU для различных типов течений. Для прямоточных потоков теплоносителей эта связь определяется уравнением (10). Эффективность E определяется как отношение изменения температуры к максимальной разности температур

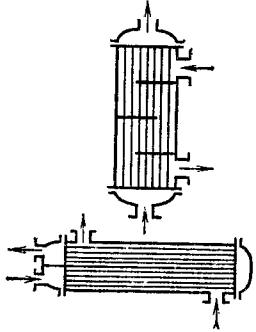
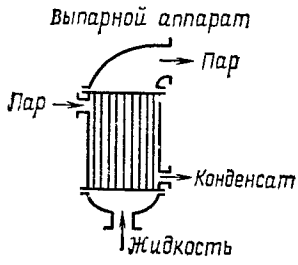
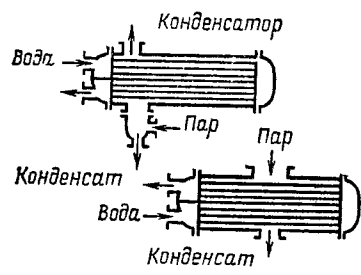
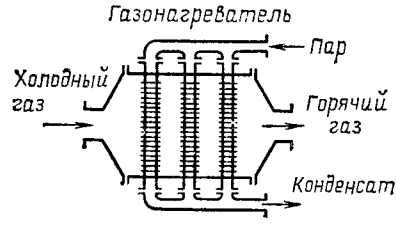
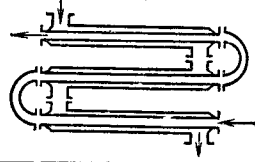
$$E_1 = \frac{T_1 - T_{1,0}}{T_{2,0} - T_{1,0}}. \quad (15)$$

Используя обозначение $\dot{W}_1/\dot{W}_2 = \dot{R}$, выражение для E_1 можно представить в виде

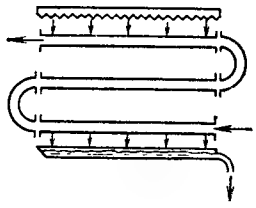
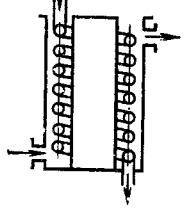
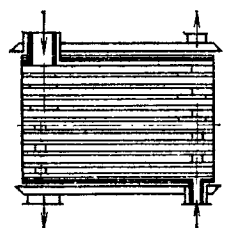
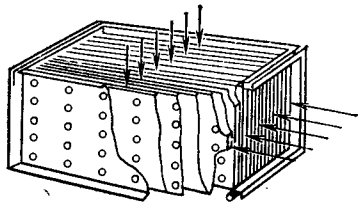
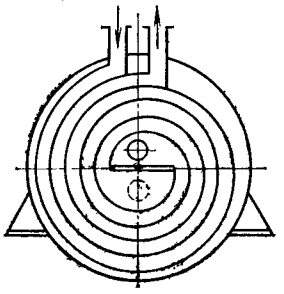
$$E_1 = \frac{1}{1 + \dot{R}} \{ 1 - \exp [- (1 + \dot{R}) NTU_1] \}. \quad (16)$$

Подобные же соотношения для противоточных течений, перекрестных течений, течений со смешением жид-

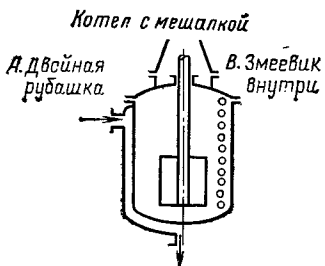
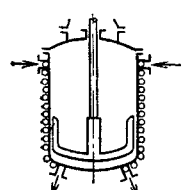
Таблица 1. Примерные значения средних коэффициентов теплопередачи в различных теплообменниках

Тип теплообменника	Характеристики	$\bar{U}$, Вт/(м ² ·К)
Кожухотрубный теплообменник 	Газ (10^5 Па) — газ (10^5 Па) Газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) — газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) Жидкость — газ (10^5 Па) Жидкость — газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) Жидкость — жидкость Жидкость — конденсирующийся пар	5—35 150—500 15—70 200—400 150—1200 300—1200
Выпарной аппарат 	Естественная рециркуляция а) Вязкие жидкости б) Вода Вынужденная рециркуляция Испаритель — NH₃ с соляным раствором	300—900 600—1700 900—3000 200—800
	Пар NH₃ Конденсатор пара на электростанциях, латунные трубы Неконденсирующийся газ снижает $\bar{U}$	300—1200 1500—4000
Газонагреватель 	Вынужденная конвекция	15—50
Теплообменник «труба в трубе» 	Газ (10^5 Па) — газ (10^5 Па) Газ (10^5 Па) — газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) Газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) — газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) Газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) — жидкость Жидкость — жидкость	10—35 20—60 150—500 200—600 300—1400

Продолжение табл. 1

Тип теплообменника	Характеристики	$\bar{U}$, Вт/(м ² ·К)
Холодильник с пленочным охлаждением охлаждающая вода 	Вода — газ (10^5 Па) Вода — газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) Вода — жидкость Вода — охлажденный конденсатор	20—60 150—350 300—900 300—1200
Холодильник со спиральным змеевиком 	Вода — газ (10^5 Па) Вода — газ ($2,5 \cdot 10^7$ Па) Вода — жидкость Вода — конденсирующийся водяной пар	20—60 150—500 200—700 350—900
Пластинчатый теплообменник 	Вода — газ (10^5 Па) Вода — жидкость	20—60 350—1200
Матричный теплообменник 	Газ (10^5 Па) — газ (10^5 Па) Газ (10^5 Па) — жидкость	10—35 20—60
Спиральный теплообменник 	Жидкость — жидкость Конденсирующийся водяной пар — жидкость	700—2500 900—3500

Продолжение табл. 1

Тип теплообменника	Характеристики	$\bar{U}$, Вт/(м ² ·К)
 Котел с мешалкой Д. Двойная рубашка В. Змеевик внутри	Двойная рубашка Конденсирующийся водяной пар — жидкость Конденсирующийся водяной пар — кипящая жидкость Охлаждающаяся вода — жидкость	500—1500 700—1700 150—350
	Змеевик внутри Конденсирующийся водяной пар — жидкость Охлаждающаяся вода — жидкость	700—2500 500—1200
 З. Змеевик снаружи	Приваренный снаружи змеевик Конденсирующийся водяной пар — жидкость Конденсирующийся водяной пар — кипящая жидкость Охлаждающаяся вода — жидкость	500—1700 700—2300 350—900

костей на выходе и их различных комбинаций представлены в графическом виде на рис. 2 и обсуждаются в разд. 1.3 Справочника.

Из рис. 2 видно, что существуют два различных режима работы теплообменников. При малых значениях NTU_1 , например, меньших 0,2, эффективность E_1 определяется только процессом теплопереноса; тип течения на величину E_1 практически не влияет. При высоких значениях NTU_1 , однако, эффективность главным образом зависит от типа течения и только очень слабо — от коэффициента теплопередачи $\bar{U}$ и площади поверхности теплообмена A . Это довольно важное обстоятельство необходимо учитывать при выборе типа теплообменника, предназначенного для тех или иных целей.

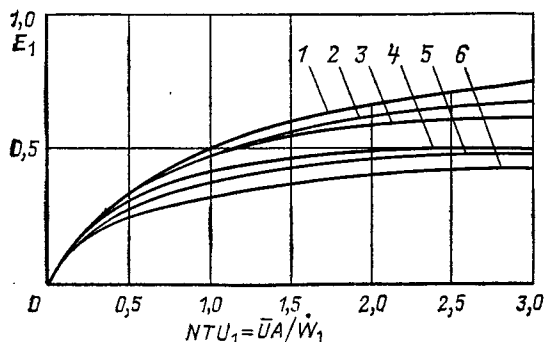


Рис. 2. Эффективность теплопередачи для различных способов организации течения сред в теплообменнике:

1 — противоток; 2 — идеальные поперечные течения; 3 — поперечные течения с частичным перемешиванием второй среды; 4 — течения жидкостей в одном направлении; 5 — поперечные течения с полным перемешиванием второй среды; 6 — обе среды идеально перемешиваются; кривые построены при $R = (\rho \dot{V})_1 / (\rho \dot{V})_2 = 1$.

Ограничения $\bar{U}$ -метода, используемого для оценок влияния температурного перепада, связаны с тем, что получаемые в его рамках результаты относятся к конкретному типу теплообменника, конкретным средам и скоростям их течения. Более детальные подходы, в которых используется коэффициент теплопередачи $\bar{U}$, сводятся к установлению его связи с коэффициентами теплоотдачи α_j , учитывающими свойства сред и зависящими от скоростей течения.

В. $\bar{U}$ — α -метод. Коэффициент теплопередачи $\bar{U}$ выражается через индивидуальные средние коэффициенты теплоотдачи α_j в соответствии со следующими уравнениями для потоков¹:

$$\dot{q} = \bar{\alpha}_1 (T_1 - T_{1,w}); \quad (17)$$

$$\dot{q} = \bar{\alpha}_w (T_{1,w} - T_{2,w}); \quad (18)$$

$$\dot{q} = \bar{\alpha}_2 (T_{2,w} - T_2); \quad (19)$$

(рис. 3). Коэффициент теплопередачи $\bar{U}$ определяется следующим образом:

$$\dot{q} = \bar{U} (T_1 - T_2). \quad (20)$$

Исключая промежуточную температуру стенки $T_{1,w}$ и $T_{2,w}$, получаем

$$1/\bar{U} = 1/\bar{\alpha}_1 + 1/\bar{\alpha}_w + 1/\bar{\alpha}_2. \quad (21)$$

Это выражение показывает, что полное термическое сопротивление $1/\bar{U}$ равно сумме индивидуальных термических сопротивлений $1/\bar{\alpha}_j$. Обычно стенка изготавливается из металла, обладающего очень высокой теплопроводностью.

¹ Эти уравнения применимы для плоской стенки. Случай цилиндрических стенок рассмотрен в ч. 1.

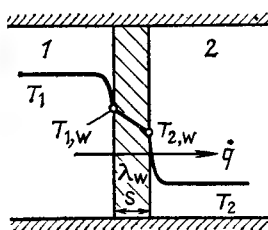


Рис. 3. Индивидуальные термические сопротивления и соответствующие профили температуры

Так как

$$\bar{\alpha}_w = \lambda_w / s \text{ или } 1/\bar{\alpha}_w = s/\lambda_w, \quad (22)$$

то термическое сопротивление стенки часто пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлениями жидкостных сред $1/\bar{\alpha}_1$ и $1/\bar{\alpha}_2$. Однако металлическая стенка может быть покрыта слоем материала с низкой теплопроводностью, образующимся при работе установки. Такой процесс называется загрязнением. Полное термическое сопротивление может в значительной степени определяться теплопроводностью этого слоя

$$\frac{1}{\bar{U}} = \frac{1}{\bar{\alpha}_1} + \frac{1}{\bar{\alpha}_{\text{foul}, 1}} + \frac{1}{\bar{\alpha}_w} + \frac{1}{\bar{\alpha}_{\text{foul}, 2}} + \frac{1}{\bar{\alpha}_2}. \quad (23)$$

Пусть медная стенка толщиной 2 мм с $\lambda_w = 200$ Вт/(м·К) покрыта слоем карбоната кальция толщиной 0,1 мм с $\lambda_{\text{foul}} = 1$ Вт/(м·К). Тогда $1/\bar{\alpha}_{\text{foul}}$ в 10 раз превышает $1/\bar{\alpha}_w$.

Коэффициенты теплоотдачи жидкостей зависят от их свойств и скоростей течений. На величину $\bar{\alpha}_j$ оказывают также влияние фазовые переходы, такие как испарение или конденсация. Важнейшими физическими свойствами жидкостей, определяющими теплоперенос, являются теплопроводность λ , плотность ρ и вязкость η . Это наглядно видно из табл. 2. Хотя коэффициенты вязкости η и теплопроводности λ воздуха почти не зависят от давления, $\bar{\alpha}$ значительно выше при течении воздуха в условиях высокого давления (при той же скорости течения) вследствие большего массового расхода ρu . Для всех жидкостей, однако, ρ практически постоянно, поэтому массовый расход ρu определяется вязкостью η . За исключением очень вязких жидкостей, важнейшим свойством в этом случае является теплопроводность λ . Коэффициент теплопроводности воды

Таблица 2. Диапазон изменения средних коэффициентов теплоотдачи

Среда	$\bar{\alpha}$, Вт/(м ² ·К)
Воздух (10^5 Па), естественная конвекция	2—20
Воздух (10^5 Па), вынужденная конвекция	10—200
Воздух ($2,5 \cdot 10^7$ Па), вынужденная конвекция	200—1000
Вода	500—5000
Органические жидкости	100—1000
Конденсация (вода)	2000—50 000
Конденсация (органический пар)	500—10 000
Испарение (вода)	2000—100 000
Испарение (органические жидкости)	500—50 000
Частица — газ — стенка	5—500
Излучение при комнатной температуре, черные поверхности	5
Излучение при 2000 К, черные поверхности	1500

λ примерно в 5 раз превышает λ любых органических жидкостей, поэтому, как видно из табл. 2, в 5 раз больше и коэффициент теплоотдачи воды $\bar{\alpha}$.

В случае испарения и конденсации коэффициент теплоотдачи сильно зависит от теплопроводности и вязкости жидкой фазы. Наименьшие значения $\bar{\alpha}$ относятся к плохо проводящим теплоту и очень вязким жидкостям.

Коэффициенты теплоотдачи в системе контактирующих друг с другом частиц, как, например, в псевдооживленных слоях, существенно зависят от размеров частиц и давления газа. Наименьшие значения (см. табл. 2) соответствуют условиям вакуума (0,1 Па), наибольшие — нормальному давлению и частицам диаметром в несколько миллиметров.

Коэффициент теплообмена в случае радиационного теплообмена соответствует условиям малого температурного перепада. Его можно получить из уравнения (17) в § 2.1.2

$$\bar{\alpha}_{\text{rad}} = 4\epsilon C_s T_m^3. \quad (24)$$

Этот коэффициент зависит от излучательной способности ($0,001 < \epsilon < 1$) и средней температуры T_m .

Знание индивидуальных коэффициентов теплоотдачи $\bar{\alpha}$ позволяет рассчитать суммарный коэффициент $\bar{U}$ для различных комбинаций индивидуальных процессов теплопередачи. В этом заключается важное преимущество $\bar{U}$ — $\bar{\alpha}$ -метода по сравнению с $\bar{U}$ -методом. Однако $\bar{U}$ — $\bar{\alpha}$ -метод может быть также использован только в том случае, когда индивидуальные коэффициенты теплоотдачи не зависят от температуры, температурного перепада и площади поверхности теплообмена.

Во многих практических случаях это условие не выполняется. Если, тем не менее, изменения $\bar{\alpha}$ относительно невелики или $\bar{\alpha}$ быстро становится некоторой постоянной величиной, вполне можно использовать среднее значение $\bar{\alpha}$, считая его постоянным.

В нестационарном случае $\bar{\alpha}$ является функцией времени t . При ламинарном стационарном течении $\bar{\alpha}$ зависит от координаты x , отсчитываемой вниз по потоку. Усредненные величины $\bar{\alpha}$, которые следует использовать в $\bar{U}$ — $\bar{\alpha}$ -методе, определяются следующим образом:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(t') dt' \text{ или } \bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx. \quad (25)$$

При естественной конвекции, конденсации и испарении индивидуальные коэффициенты теплоотдачи зависят от разности температур жидкости и стенки ΔT_w . Наиболее употребительный способ усреднения в таких случаях заключается в вычислении среднеарифметического

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} [\alpha(T_{w,1}) + \alpha(T_{w,2})]. \quad (26)$$

Если свойства среды зависят от температуры, индивидуальные коэффициенты теплоотдачи также зависят от температуры T_1 и (или) температуры T_2 соответственно. В этом случае переносные свойства вычисляются при некоторой характерной температуре, в качестве которой обычно выбирается среднеарифметическое

$$T_{\text{ref}} = \frac{1}{2} (T_{\text{in}} + T_{\text{out}}). \quad (27)$$

Средние индивидуальные коэффициенты теплоотдачи зависят также от тепловых граничных условий, т. е. от того, задана ли постоянная температура поверхности или постоянный тепловой поток на ней и т. д. в $\bar{U}$ — $\bar{\alpha}$ -методе этот эффект не учитывается. Поэтому более строгий анализ

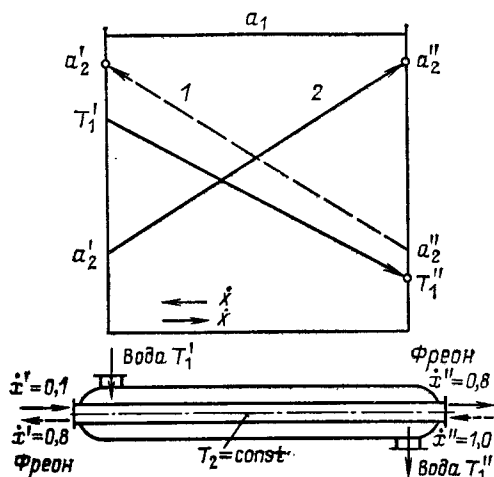


Рис. 4. Линейная зависимость индивидуального коэффициента теплоотдачи от локального перепада температур; штриховая линия — противоток; сплошная — течения жидкостей в одном направлении

процесса теплопереноса, в котором учитывается влияние всех перечисленных выше факторов на коэффициенты теплоотдачи, должен базироваться на использовании локальных или мгновенных значений индивидуальных коэффициентов теплоотдачи и локального или мгновенного значения коэффициента теплопередачи $\bar{U}$.

С. U - α -метод. Мгновенное или локальное значение коэффициента теплопередачи U выражается через мгновенные или локальные значения индивидуальных коэффициентов теплоотдачи таким же образом, как и в рассмотренном выше $\bar{U}$ - α -методе,

$$\frac{1}{U} = \sum_i \frac{1}{\alpha_i}. \quad (28)$$

Поскольку α_i является функцией t , x , T_w и ΔT , то U также есть функция этих величин. Комбинируя уравнения для мгновенных или локальных значений тепловых потоков, получаем

$$\dot{q} = U (T_1 - T_2). \quad (29)$$

Это уравнение вместе с уравнениями баланса энергии (2) и (3) составляет исходную систему уравнений для расчета изменения температур T_1 и T_2 . Подобный расчет демонстрируется ниже на конкретном примере. На рис. 4 изображено двухтрубное устройство для охлаждения воды с находящимся во внутренней трубе испаряющимся фреоном. В режиме кипения при вынужденной конвекции индивидуальный коэффициент теплоотдачи α_2 растет с ростом паросодержания x . В качестве грубого приближения можно принять линейную связь между α_2 и x . Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\dot{M}_2 \Delta h_v (x' - x) = -\dot{M}_1 c_{p1} [(T_1' - T_2) - (T_1'' - T_2)]. \quad (30)$$

Здесь x линейно зависит от разности $T_1 - T_2$ поэтому и α_2 — линейная функция $T_1 - T_2$. Подобный класс задач, в которых коэффициент теплоотдачи линейно зависит от устанавливающейся разности температур, рассмотрен в [7], где получено следующее выражение для полного потока теплоты $\dot{Q}$,

$$\frac{A (T_1' - T_2)}{\dot{Q}} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\ln \theta}{\theta - 1} + \frac{\ln (\alpha_2' / \alpha_2) \theta}{\alpha_2 \theta - 1}, \quad (31)$$

где

$$\theta = (T_1'' - T_2) / (T_1' - T_2).$$

При малом изменении температуры ($T_1' \approx T_1''$) $\theta \rightarrow 1$ и уравнение (31) принимает вид

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{A (T_1' - T_2)}{\dot{Q}} = \frac{\ln \theta}{\theta - 1} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right), \quad (32)$$

где

$$\bar{\alpha}_2 = (\alpha_2' - \alpha_2'') / \ln (\alpha_2' / \alpha_2'').$$

Нетрудно видеть, что только в этом предельном случае $\bar{U}$ - α -метод, описанный в предыдущем разделе, позволяет получить хорошее приближенное решение. В общем же случае для рассмотренного примера значение $\bar{U}$ определить нельзя. Наиболее важный вывод, однако, заключается в том, что полный тепловой поток $\dot{Q}$ зависит от направления течения фреона: для потоков, направленных в одну сторону, $\dot{Q}$ больше, чем для противоположно направленных. Это можно показать, рассматривая отношение

$$\frac{\dot{Q}}{\lim_{\theta \rightarrow 1} \dot{Q}} = \frac{(1 + Bi) \ln \theta / (\theta - 1)}{[(\ln \theta) / (\theta - 1)] + Bi \{ (\mu - 1) / \ln \mu \} [(\ln \mu \theta) / (\mu \theta - 1)]}, \quad (33)$$

где число Био $Bi = \alpha_1' / \bar{\alpha}_2$ и $\mu = \alpha_2' / \alpha_2''$. На рис. 5 это отношение показано как функция θ при различных Bi и μ . Сравнение с расчетами в рамках $\bar{U}$ - α -метода показывает, что погрешность метода может быть примерно 30%.

U - α -метод можно обобщить на случай нелинейной и даже произвольной зависимости α от локальной разности температур. Подобные зависимости характерны для случаев пузырькового кипения, конденсации, теплообмена при свободной конвекции и имеют вид

$$\dot{q} = \alpha_1^* (T_1 - T_w)^{n_1}; \quad (34)$$

$$\dot{q} = \alpha_2^* (T_w - T_2)^{n_2}. \quad (35)$$

После преобразования этих уравнений и их совместного решения с уравнением для локального баланса энергии

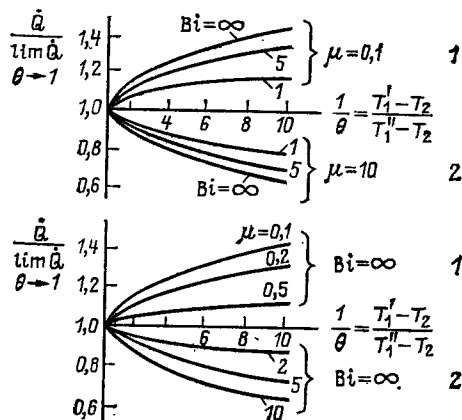


Рис. 5. Влияние способов организации течения при линейной зависимости индивидуального коэффициента теплоотдачи от локального перепада температур:

1 — течения в одном направлении; 2 — противоточные течения

можно получить выражение для полного теплового потока. Из (34) и (35) имеем

$$T_1 - T_2 = \left(\frac{\dot{q}}{\alpha_1} \right)^{1/n_1} + \left(\frac{\dot{q}}{\alpha_2} \right)^{1/n_2} = f(\dot{q}). \quad (36)$$

Отсюда с учетом уравнения баланса находим в случае однонаправленных течений

$$\dot{Q} = A \frac{(T_{1,0} - T_{2,0}) - (T_1 - T_2)}{\Phi(\dot{q}_0, \dot{q})}, \quad (37)$$

где

$$\Phi = \int_{\dot{q}_0}^{\dot{q}} \frac{f(\dot{q})}{\dot{q}} d\dot{q}; \quad (38)$$

$$\dot{q}_0 = U_0(T_{1,0} - T_{2,0}); \quad \dot{q} = U(T_1 - T_2).$$

Если уравнения для потоков линейны, т. е. $n_1 = n_2 = 1$, то функция Φ имеет вид

$$\Phi_{n_1=1, n_2=1} = \frac{1}{U} \ln \frac{T_{1,0} - T_{2,0}}{T_1 - T_2}, \quad (39)$$

откуда следует, что полный тепловой поток может быть рассчитан также и на основе $\bar{U}$ - α -метода.

Результаты, полученные с помощью U - α -метода для рассмотренного примера, показывают, что если α зависит от ΔT_w , то всегда необходимо попытаться скомбинировать малые локальные значения α с большими локальными значениями ΔT_w и наоборот, получая, таким образом, всякий раз, когда это возможно, постоянный поток теплоты в теплообменнике. Такой прием позволяет найти максимальную величину теплового потока или минимально необходимую площадь поверхности. В рассмотренном выше примере тепловой поток более близок к постоянному в случае однонаправленных течений теплоносителей. Отсюда следует, что такое течение обеспечивает более высокие характеристики теплообменника. Подобный результат было бы невозможно получить в рамках $\bar{U}$ - α -метода, что ясно показывает преимущества более детального U - α -метода.

Может, однако, случиться так, что характеристики теплообменника не удастся рассчитать точно, так как локальный коэффициент теплопередачи U вообще нельзя определить. Причина этого заключается в том, что любой локальный коэффициент теплоотдачи зависит от тепловых граничных условий, особенно в ламинарном течении. Стандартным граничным условием при расчете локального коэффициента теплоотдачи является постоянная температура стенки. В реальных случаях температура стенки может претерпевать значительные изменения в зависимости от коэффициента теплопроводности материала стенки и от значений коэффициентов теплоотдачи α_1 и α_2 по обеим сторонам от нее. Поэтому среда 1, среда 2 и стенка образуют термически взаимосвязанную систему, в которой локальный тепловой поток должен рассчитываться в каждой точ-

ке и затем интегрироваться. Такая ситуация, как показано в [8], характерна, в частности, для ламинарного течения.

Подобная же ситуация может возникать при теплообмене двухфазной среды. Рассмотрим для примера испарение в горизонтальной трубе. Пусть в трубе сформировался разделенный поток, причем 50% периметра трубы покрыто жидкостью (рис. 6). Коэффициент теплоотдачи жидкой фазы обычно намного больше, чем паровой. Поэтому вдоль периметра трубы тепловой поток изменяется от верхней ее части к нижней, если существует приток теплоты $\dot{q}$. Естественно, что при этом температура стенки изменяется вдоль периметра. Существуют два предельных случая: изменение плотности теплового потока вдоль периметра трубы пренебрежимо мало, вдоль трубы величина $\dot{q}$ постоянна;

тепловой поток в стенке трубы может быть очень большим, так что температура стенки во всех точках одинакова.

Усредненный по периметру коэффициент теплоотдачи для испаряющейся жидкости можно определить следующим образом:

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{T_{w,av} - T_2}, \quad (40)$$

где $T_{w,av}$ — средняя температура стенки,

$$T_{w,av} = \frac{1}{2} (T_{w,top} + T_{w,bottom}). \quad (41)$$

Отсюда получаются выражения для α :
в первом случае (постоянный тепловой поток)

$$\frac{1}{\alpha_{\dot{q}=\text{const}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_g} + \frac{1}{\alpha_l} \right); \quad (42)$$

во втором случае (постоянная температура стенки)

$$\alpha_{T_w=\text{const}} = \frac{1}{2} (\alpha_g + \alpha_l). \quad (43)$$

Реальные значения α заключены между этими предельными и определяются коэффициентом теплопроводности материала стенки, ее толщиной, а также распределением внешнего теплового потока или граничными условиями. Вычисляя отношение $\alpha_{T_w=\text{const}}/\alpha_{\dot{q}=\text{const}}$, получаем

$$\frac{\alpha_{T_w=\text{const}}}{\alpha_{\dot{q}=\text{const}}} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\alpha_l}{\alpha_g} \right) \left(1 + \frac{\alpha_g}{\alpha_l} \right). \quad (44)$$

Пусть $\alpha_l/\alpha_g = 10$. Тогда в соответствии с (44) это отношение примерно равно трем. Таким образом, усредненный по периметру внутренний коэффициент теплоотдачи может изменяться на сотни процентов в зависимости, например, от толщины стенки и коэффициента теплопроводности. В этом случае для расчета характеристик теплообменника необходимо знать локальные коэффициенты теплоотдачи α_g и α_l , а также зависимость доли смоченной поверхности стенки трубы от всех внешних переменных.

Резюме. В $\bar{U}$ - и $\bar{U}$ - α -методах используются коэффициенты теплоотдачи, усредненные как в направлении, параллельном течению, так и в перпендикулярных направлениях. Соответствующие уравнения для плотностей потоков теплоты решаются легко, применяемый математический аппарат наиболее прост. Этих методов вполне достаточно для решения многих стандартных задач теплообмена, они также позволяют получать предварительные оценки в более сложных случаях. Проведение расчетов в рамках этих методов не требует использования ЭВМ. В U - α -методе используются локальные значения коэффициентов теплоотдачи в направлении вдоль потока (или во времени), хотя

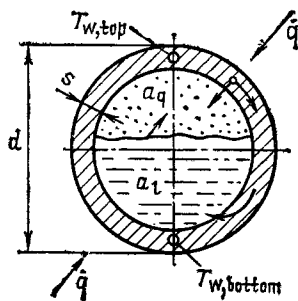


Рис. 6. Испарение в горизонтальной трубе; расслоенный поток. Влияние на теплообмен теплопроводности стенки трубы

и проводится их усреднение по периметру в сечении, перпендикулярном потоку. Этот метод должен использоваться в том случае, если локальные значения коэффициентов теплоотдачи сильно зависят от температуры, разности температур, времени и координаты. Он требует более глубокого понимания механизма переноса и большего объема экспериментальной информации, зато, в свою очередь и область его применимости шире. В большинстве случаев $U-\alpha$ -метод можно реализовать только с помощью ЭВМ. При этом в связи с бурным развитием производства настольных компьютеров потребность в данных о локальных коэффициентах теплоотдачи быстро растет.

Следующий шаг в направлении уточнения может стать необходимым в том случае, когда локальные коэффициенты теплообмена изменяются также и в перпендикулярном потоку направлении, например по периметру трубы. В такой ситуации требуется знание локальных значений коэффициентов теплоотдачи, так называемых точечных коэффициентов. При этом объем необходимой экспериментальной информации возрастает еще больше и увеличиваются математические трудности.

В настоящее время наиболее широко используются $\bar{U}-\bar{\alpha}$ - и $U-\alpha$ -методы. Поэтому в Справочнике представлены данные по средним $\bar{\alpha}$ или локальным α коэффициентам теплоотдачи.

2.1.4. Способы представления данных по тепло- и массообмену

Е. У. Шлюндер

Коэффициенты тепло- и массоотдачи выражаются обычно, если это возможно, в виде безразмерных чисел (см. § 1.2.3, ч. 1). Такой способ представления не только уменьшает число параметров, но подсказывает также пути решения задач. В данном разделе обсуждаются важнейшие безразмерные числа, возникающие при решении задач тепло- и массообмена. Для более отчетливого выяснения их физического смысла рассматриваются конкретные примеры, возможно, с несколько необычной для многих специалистов в области теплообмена точки зрения. Первым таким примером является охлаждение плоского слоя твердого материала, коэффициент теплопроводности которого равен λ . Предполагается, что в момент времени $t=0$ температура всюду внутри слоя одинакова и равна T_0 (рис. 1). Затем температура на границах скачком изменяется до значения T_w , которое далее во времени не изменяется. В рамках α -метода тепловой поток представляется следующим образом:

$$\dot{q} = \bar{\alpha} (T_{av} - T_w), \quad (1)$$

где T_{av} — средняя температура (рис. 1).

Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\dot{q}A = -\rho cV \frac{dT_{av}}{dt}, \quad (2)$$

где V — объем слоя. Комбинация уравнений (1) и (2) позволяет получить основное уравнение, описывающее изменение температуры во времени,

$$\frac{\rho c d}{dt} (T_{av} - T_w) + \frac{\bar{\alpha} A}{\rho cV} (T_{av} - T_w) = 0. \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (3), получаем

$$\ln \frac{T_{av} - T_w}{(T_{av} - T_w)_0} = -\frac{A}{\rho cV} \int_0^t \alpha dt. \quad (4)$$

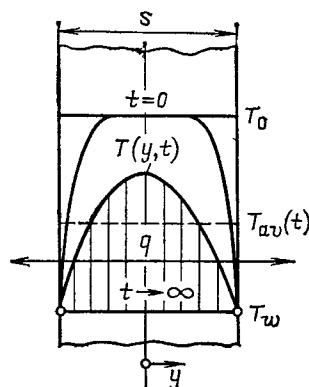


Рис. 1. Распределение температуры в твердом слое при постоянной температуре на его границах

Правая часть этого выражения

$$\frac{A}{\rho cV} \int_0^t \alpha dt = \frac{A\bar{\alpha}t}{\rho cV} \quad (5)$$

идентична числу единиц переноса теплоты

$$\frac{A\bar{\alpha}t}{\rho cV} = NTU. \quad (6)$$

С учетом этого решение можно записать в виде

$$\frac{T_{av} - T_w}{(T_{av} - T_w)_0} = \exp(-NTU). \quad (7)$$

Параметр NTU можно представить в виде произведения двух других безразмерных параметров. С учетом соотношения

$$A/V = 2/s \quad (8)$$

уравнение (6) запишем в следующем виде:

$$2 \frac{\bar{\alpha}s}{\lambda} \frac{kt}{s^2} = 2\bar{Nu}Fo, \quad (9)$$

где $\bar{\alpha}s/\lambda$ — среднее число Нуссельта $\bar{Nu}$, а kt/s^2 — число Фурье Fo . Итак, в данном случае по определению

$$NTU = 2\bar{Nu}Fo. \quad (10)$$

Число Фурье представляет собой отношение характерного времени остывания слоя к тепловому релаксационному времени s^2/k . Число Нуссельта можно интерпретировать как отношение толщины слоя s к средней эффективной глубине проникновения теплоты в слой $\bar{\alpha} = \lambda/s_{ef}$.

Сопоставляя уравнения (7) и (3), нетрудно убедиться в том, что введение безразмерного числа NTU позволяет уменьшить число параметров с пяти до одного. Более того, если численное значение $NTU = 2\bar{Nu}Fo$ велико (например больше пяти), то температура T_{av} очень близка к равновесной температуре T_w . Поэтому при больших значениях NTU система в целом находится в состоянии, близком к равновесному.

Усредненный по времени коэффициент теплоотдачи можно найти в результате точного решения уравнения баланса энергии для элемента объема и уравнения Фурье. Для практических приложений в случае плоского слоя можно рекомендовать следующее корреляционное соотношение:

$$\bar{Nu} = \sqrt{\frac{\pi^4}{4} + \frac{4}{\pi} \frac{1}{Fo}}. \quad (11)$$

Это же соотношение применимо и для движущегося твердого материала, например гибкой ленты, протягивае-

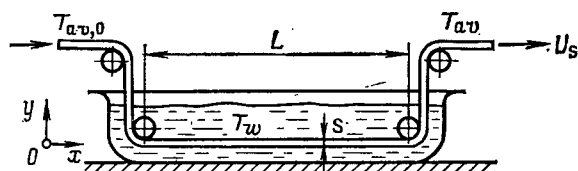


Рис. 2. Теплоотдача от движущейся гибкой ленты или проволоки к водяной ванне с постоянной температурой

мой после вытяжки через ванну с холодной водой (рис. 2). Такая задача становится идентичной задаче, изображенной на рис. 1, в том случае, когда можно пренебречь теплопроводностью в направлении оси x , а под временем охлаждения t понимать время пребывания полосы в ванне,

$$t = L/u_s. \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (11) также применимо и для движущейся ленты. Для удобства его можно переписать, используя число Гретца Gz , которое получается, если вместо времени подставить в выражение для числа Fo время пребывания, определенное уравнением (12),

$$Fo = \frac{kL}{u_s s^2} = \frac{1}{Gz}. \quad (13)$$

Число Гретца равно обратному числу Фурье и, очевидно, имеет подобный физический смысл: оно равно отношению теплового релаксационного времени s^2/k к времени остывания t . Итак, уравнение (11) можно переписать в виде

$$Nu = \sqrt{\frac{\pi^4}{4} + \frac{4}{\pi} Gz}. \quad (14)$$

Предположим теперь, что полоса состоит из ряда отдельных более тонких слоев, образующих, как показано на рис. 3, слоистую структуру; рассмотрим случай, когда скорости движения каждого слоя толщиной Δs различны. Теперь время пребывания материала всей полосы, имеющей толщину s , в водяной ванне уже не является постоянной величиной. Возникает вопрос: как изменятся температура каждого отдельного слоя вдоль координаты z и какое количество теплоты передается в водяную ванну от всей полосы?

На рис. 3 изображена полоса, состоящая из шести слоев. Вследствие симметрии показано только три слоя. Градиент температуры на центральной линии равен нулю, поэтому и тепловой поток через центральную плоскость $\dot{q}_0$ также равен нулю. Температура T_3 равна температуре поверхности всей полосы T_w . Уравнения энергетического

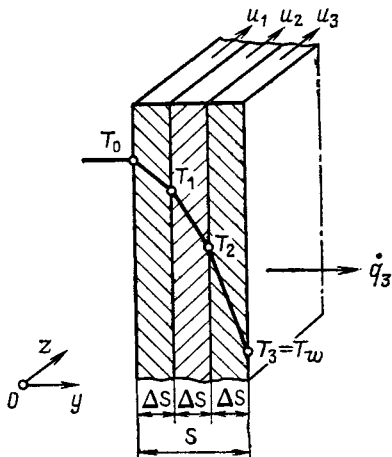


Рис. 3. Теплоотдача от слоистой полосы к водяной ванне при различных скоростях движения слоев

баланса вместе с законом теплопроводности Фурье позволяют получить следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_0 - \dot{q}_1 &= \Delta s \rho c u_1 \frac{\Delta T_1}{\Delta z} = \lambda \left(0 - \frac{T_0 - T_1}{\Delta s} \right); \\ \dot{q}_1 - \dot{q}_2 &= \Delta s \rho c u_2 \frac{\Delta T_2}{\Delta z} = \lambda \left(\frac{T_0 - T_1}{\Delta s} - \frac{T_1 - T_2}{\Delta s} \right); \\ \dot{q}_2 - \dot{q}_3 &= \Delta s \rho c u_3 \frac{\Delta T_3}{\Delta z} = \lambda \left(\frac{T_1 - T_2}{\Delta s} - \frac{T_2 - T_3}{\Delta s} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Суммируя их левые части, находим

$$-\dot{q}_3 = \rho c \sum_1^3 \Delta s u_j \frac{\partial T_j}{\partial z}. \quad (16)$$

С учетом соотношений

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^3 \Delta s &= s; \\ \rho \sum_1^3 \Delta s u_j &= \rho s u_{av}, \\ \rho c \sum_1^3 \Delta s u_j T_j &= \rho c s u_{av} T_{av} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

уравнение (16) принимает вид

$$0 - \dot{q}_3 = s \rho c u_{av} \frac{\partial T_{av}}{\partial z}, \quad (18)$$

где T_{av} — средняя калориметрическая температура всей полосы в произвольной точке z ; $\dot{q}_3 = \dot{q}_w$ — тепловой поток через внешнюю поверхность полосы к водяной ванне.

Правые части уравнений (15) можно записать в виде

$$\lambda \left(\frac{T_{j-1} - T_j}{\Delta s} - \frac{T_j - T_{j+1}}{\Delta s} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Delta s. \quad (19)$$

Таким образом, получается основное дифференциальное уравнение, описывающее распределение температуры в плоскости $y-z$,

$$\rho c u(y) \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (20)$$

которое применимо в случае большого числа слоев. Время пребывания в ванне каждого слоя равно $z/u(y)$. Локальная скорость $u(y) = u_{av} f(y/s)$, поэтому уравнение (20) можно переписать в следующем безразмерном виде:

$$Gz \frac{\partial T}{\partial (z/L)} = \frac{1}{f(y/s)} \frac{\partial^2 T}{\partial^2 (y/s)}, \quad (21)$$

где

$$Gz = \frac{u_{av} s^2}{kL}. \quad (22)$$

Уравнение (21) показывает, что поле температур и тепловой поток в водяную ванну в случае слоистой полосы с различными скоростями движения отдельных слоев определяются только числом Гретца. Этот же результат был получен выше и для сплошной полосы. Очевидно, что вид функции распределения скорости $u(y)$ не влияет на то, что единственным определяющим параметром является число Гретца.

Пусть теперь слоистая полоса заменена стационарным каналом, в котором течет воздух, причем его температура на входе в канал $T_{av,0}$, а на выходе T_{av} . Такая ситуация полностью аналогична изображенной на рис. 3, если воз-

душный поток является ламинарным и полностью развитым, т. е. скорость течения зависит только от координаты y . Вблизи входного сечения канала течение, однако, не является развитым и скорость зависит от обеих координат y и z . В этой области появляется новая переменная — вязкость воздуха, влияние которой учитывается с помощью безразмерного отношения ν/k , называемого числом Прандтля Pr . Число Прандтля представляет собой отношение молекулярных потоков импульса и энергии. В области развивающегося ламинарного течения в трубе число Нуссельта является функцией чисел Гретца и Прандтля.

При более высоких скоростях движения воздуха в трубе течение становится турбулентным. В этом случае коэффициент теплоотдачи зависит не только от времени нахождения газа в трубе t , т. е. числа Гретца, но также и от скорости u , т. е. от числа Рейнольдса $Re = u\nu/\nu$. Физический смысл числа Рейнольдса можно пояснить на макроскопическом и микроскопическом уровнях. При макроскопическом описании число Рейнольдса нужно представить в виде

$$Re = \frac{\rho u^2}{\eta(u/s)} = \frac{\rho}{\tau}. \quad (23)$$

Отсюда видно, что число Рейнольдса можно рассматривать как отношение импульса ρ , связанного с движением среды как целого, к напряжению вязкого трения на стенке канала τ .

На микроскопическом уровне необходимо обратиться к теории столкновений, дающей выражение для коэффициента вязкости [ср. (3) и (6) § 2.1.2, где ω_m — средняя скорость микроскопических частиц; σ — средняя длина пробега между двумя соударениями частиц]. Число Рейнольдса можно представить в виде

$$Re = 3 \frac{us}{\omega_m \sigma} = 3 \frac{t_{rad}}{t_{ax}}, \quad (24)$$

где $t_{rad} = s/\omega_m$ — время движения частицы от стенки к стенке в радиальном направлении; $t_{ax} = \sigma/u$ — время прохождения частицей пути σ в аксиальном направлении. Пусть s примерно равно 0,1 м. Для газов частицами являются молекулы, имеющие среднюю скорость 500 м/с и длину свободного пробега при нормальных давлении и температуре $\sigma = 0,1$ мкм. Обычно скорости газовых потоков в теплообменниках около 10 м/с. При таких значениях параметров $t_{rad} = 2 \cdot 10^{-4}$ с, $t_{ax} = 10^{-8}$ с, поэтому число Рейнольдса равно 60 000. В случае жидкости частицами являются фононы, имеющие среднюю скорость около 5000 м/с (скорость звука), а среднюю длину пробега около 10^{-9} м (близкую к размерам кристаллической решетки твердого тела). Обычные скорости течения жидкости в теплообменниках близки к 1 м/с. Это дает $t_{rad} = 2 \cdot 10^{-5}$ с, $t_{ax} = 10^{-9}$ с, а число Рейнольдса равно 60 000. Эти оценки показывают, что число Рейнольдса, характерное для практических устройств, имеет порядок величины 10^4 — 10^5 .

Суммируя результаты рассмотрения различных механизмов переноса теплоты от жидкостной среды к стенкам плоского канала, приходим к следующим соотношениям: стержневое и полностью развитое ламинарное течение

$$\overline{Nu} = f_p(Gz); \quad (25)$$

развивающееся ламинарное течение

$$\overline{Nu} = f_l(Gz, Pr); \quad (26)$$

турбулентное течение

$$\overline{Nu} = f_t(Gz, Pr, Re). \quad (27)$$

Наиболее общая функциональная зависимость для числа Нуссельта должна, как показывает уравнение (27), содержать три независимых переменных. Однако какие имен-

но переменные выбрать в качестве независимых — это вопрос удобства. Набор Gz , Pr , Re является довольно необычным по той причине, что средняя скорость течения входит в оба числа Gz и Re . Комбинация чисел Gz , Pr и Re позволяет получить новую независимую переменную

$$\frac{Gz}{Re Pr} = \frac{s}{L}, \quad (28)$$

представляющую собой просто геометрическую величину. Теперь выражение для числа Нуссельта в случае турбулентного течения можно записать в виде

$$\overline{Nu} = f_t \left(Gz, Pr, \frac{s}{L} \right). \quad (29)$$

При численных расчетах наиболее широко используется набор Re , Pr , s/L . В американской литературе часто встречается модифицированное число Нуссельта — число Колбурна j , определяемое следующим образом:

$$j = \overline{Nu} / (Re Pr^{1/3}), \quad (30)$$

и выражающееся в виде функции переменных Re , Pr и s/L . Если вместо плоского канала рассматривается цилиндрическая труба, то отношение s/L заменяется на d/L . Вспомним, что в турбулентных течениях число $\overline{Nu}$ пропорционально $Re^{0,8}$; поэтому фактор j пропорционален $Re^{-0,2}$. Отсюда просматривается аналогия с коэффициентом трения, который при турбулентных течениях в гладких трубах также пропорционален $Re^{-0,2}$. Поскольку при конструировании теплообменников наряду с расчетом теплообмена весьма важным является и расчет перепада давления, то использование фактора j облегчает одновременное рассмотрение обоих явлений.

Характерное значение числа Pr для газов — 0,7; для таких жидкостей как вода — около 7; для очень вязких жидкостей — до 1000. Для быстрой ориентировки могут оказаться весьма полезными графические представления зависимостей $\overline{Nu} = \overline{Nu}(Gz, d/L)_{Pr=const}$ или $Nu = Nu(Re, d/L)_{Pr=const}$. На рис. 4 показана зависимость числа Нуссельта от числа Гретца, построенная в соответствии с приведенными выше уравнениями. Здесь используются преимущества того обстоятельства, что число единиц переноса теплоты, по определению, связано с числами Nu и Gz . Для течений в трубах имеем

$$\overline{Nu} = \overline{NTU} \frac{Gz}{4}. \quad (31)$$

Поэтому на рис. 4 показаны также линии постоянного уровня параметра $\overline{NTU}$. Эта полезная дополнительная информация позволяет судить о том, насколько близок процесс теплообмена к равновесному.

Число Нуссельта характеризует интенсивность процесса теплообмена, а число единиц переноса теплоты — его эффективность. В ламинарных течениях высокая эффективность процесса теплообмена может быть реализована только в условиях его низкой интенсивности и, наоборот, высокоинтенсивный теплообмен всегда является малоэффективным. Только в турбулентных потоках интенсивный теплообмен может быть одновременно и эффективным.

Возможны следующие полезные интерпретации графиков, приведенных на рис. 4.

1. В области перехода от ламинарного к полностью развитому турбулентному течению число Nu изменяется почти линейно с изменением числа Гретца. Поскольку число Гретца прямо пропорционально объемному расходу в трубе $\dot{V}$, $Gz = u d^2 / (4L) = 4 \dot{V} / (\pi k L)$, то изменение объемного расхода не влияет на температуру среды в выходном сечении ($\overline{NTU} = const$).

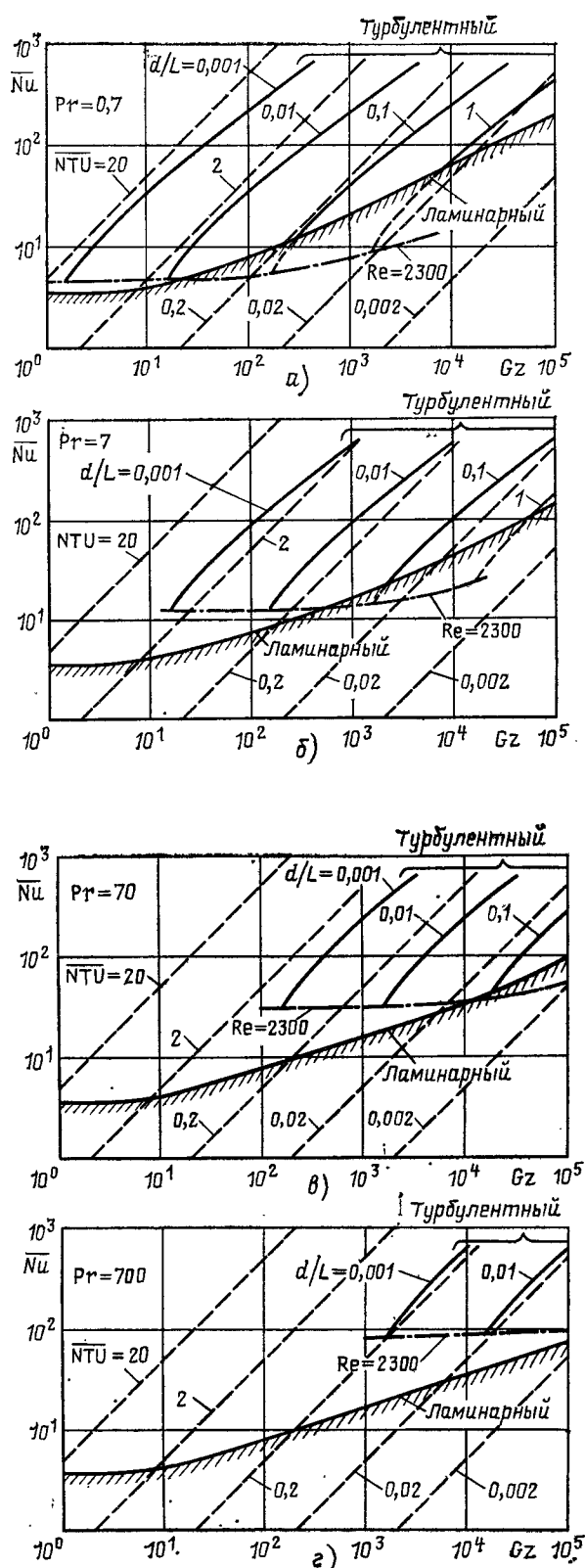


Рис. 4. Теплоотдача при ламинарном и турбулентном течениях в трубе при постоянной температуре стенки

2. В этой же области изменение длины трубы, например в 10 раз, не сопровождается заметным изменением параметра NTU . Постоянство отношения d/L означает, что при изменении L в 10 раз d также изменяется в 10 раз. При этом площадь поверхности теплообмена изменяется в 100 раз, а параметр NTU и температура на выходе остаются практически постоянными. Естественно, что для поддержания той же скорости течения при таких вариациях геометрических параметров необходимо обеспечить изменение перепада давления в 10^4 раз. Этот пример показывает, что в процессе конструирования теплообменников на первый план могут выдвигаться вопросы гидравлики, а отнюдь не теплообмена.

3. Параметр NTU имеет двойной смысл, что можно видеть из следующего уравнения:

$$\frac{T_{in} - T_{out}}{\Delta T_{LM}} = NTU = \frac{\bar{\alpha} A}{\rho c \dot{V}}. \quad (32)$$

Левая часть представляет собой отношение изменения температуры к средней логарифмической разности температур. Это отношение содержит тепловые характеристики, которые должны обеспечиваться конструкцией теплообменника. Правая часть является отношением теплопереносной способности к теплоаккумулирующей, выражающим собой комбинационное свойство теплообменника, соответствующее этим тепловым характеристикам.

Пусть левая часть уравнения (32) задана. Например, в противоточном теплообменнике установки для сжижения воздуха поступающий поток должен охлаждаться до -180°C , а отработанный воздух одновременно нагреваться от -178 до $+20^\circ\text{C}$. При температурной разности, например 2°C параметр NTU оказывается равным 100.

Из рис. 4, а ($Pr = 0,7$) можно легко видеть, что такой теплообменник должен быть устроен из ряда очень тонких и длинных труб ($L > 1000 d$). И это действительно так: теплообменники установок для сжижения воздуха состоят из труб диаметром 6—10 мм и длиной до 100 м ($L \sim 10^4 d$).

4. Всегда существует такое число Гретца, при котором любое наперед заданное значение параметра NTU реализуется в области ламинарного течения. При любых заданных одновременно скорости течения u и объемном расходе $\dot{V}$ существует произвол в выборе числа труб и их диаметра: для того чтобы построить теплообменник, обеспечивающий достижение заданного значения NTU , можно использовать небольшое число параллельных труб большого диаметра или много труб маленького диаметра. Возникает вопрос: а существует ли оптимальная комбинация? Ответ может быть следующим.

Пусть n — число параллельных труб. Число Гретца

$$Gz = \frac{4}{\pi} \frac{\dot{V}}{nd^2} \frac{d^2}{kL} = f(NTU) = \text{const}. \quad (33)$$

Отсюда следует, что

$$nL = \text{const}.$$

Но потери давления в ламинарном течении определяют законом Хагена—Пуазейля

$$\Delta p = 32\eta \frac{4}{\pi} \frac{\dot{V}}{nd^2} \frac{L}{d^3}.$$

Будем считать, что Δp задано. Отсюда следует второе соотношение

$$nd^2 = \text{const}.$$

Комбинация этих двух соотношений дает $d^2/L = \text{const}$. До тех пор, пока это результирующее условие удовлетворяется, выбор числа параллельных труб n ничем не ограничен, так как параметр NTU , так же как и Δp , при этом

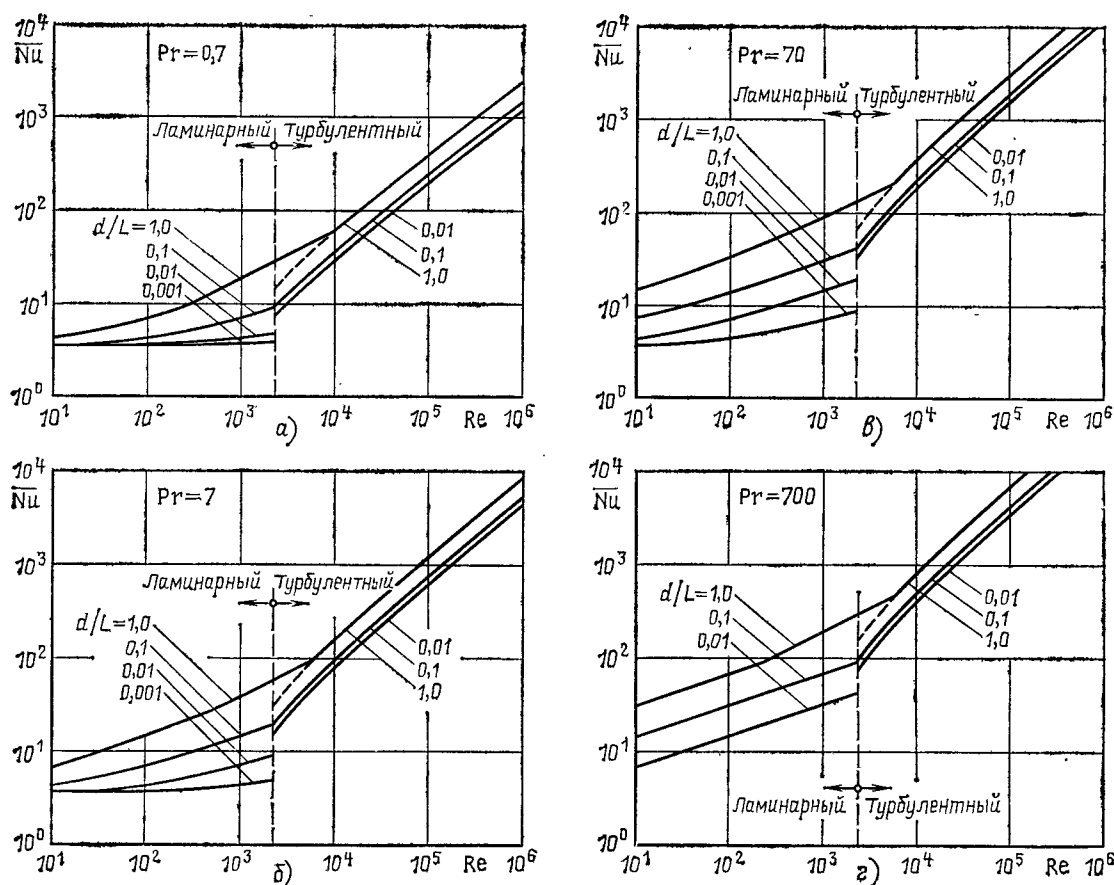


Рис. 5. Теплоотдача при ламинарном и турбулентном течении в трубе при постоянной температуре стенки

остается неизменным. В пределе n может стремиться к бесконечности с одновременным стремлением L и d к нулю. Это означает, что конечное количество теплоты может быть передано в условиях конечного перепада давления в теплообменнике конечного поперечного сечения, но нулевой длины и, следовательно, с нулевой площадью поверхности теплообмена. Проблема, однако, заключается в том, каким образом распределить вторую среду внутри теплообменника, состоящего из большого числа очень маленьких и коротких трубок. Очевидно, что возникающие здесь трудности связаны с конструированием подходящего коллектора и вентиля.

На рис. 5 в графическом виде представлены те же самые корреляционные зависимости, что и приведенные выше, но в форме

$$Nu = Nu(Re, Pr, d/L).$$

Аналогичные соотношения можно также изобразить с помощью числа j , рис. 6 на с. 85. Все эти трехпараметрические зависимости $Nu(Gz, Pr, d/L)$, $Nu(Re, Pr, d/L)$, $j(Re, Pr, d/L)$ полностью эквивалентны.

2.1.5. Тепло- и массообмен в однородных и неоднородных системах

Е. У. Шлюндер

Стандартные формулы для средних и локальных коэффициентов теплоотдачи получены не только применительно к стандартным граничным условиям, таким, как постоянная температура стенки, но также и для стандартных

геометрических конфигураций. Для расчета теплообмена при течении в каналах используются данные, полученные для круглых труб, в качестве прототипа внешних течений рассматриваются обтекания плоской пластины, цилиндра и сферы. В общем случае все типы теплообменников и подобных им устройств (трубчатых реакторов, сушилок и т. д.) представляют собой конструкции, в которых стандартные элементы, такие, как пакеты и пучки труб, двойные трубы и т. д., скомпонованы в более или менее регулярном порядке.

Если стандартные элементы в теплообменнике расположены симметрично, можно ожидать, что тепло- и массообмен в каждом из элементов всей системы будет таким же или по крайней мере пропорциональным тепло- и массообмену в изолированном элементе. Это можно показать на следующем примере. Рассмотрим кожухотрубный теплообменник, в котором температура кожуха поддерживается постоянной в результате испарения жидкости (рис. 1). Если коэффициент теплоотдачи в трубах определяется только скоростью, то можно воспользоваться $\bar{U}-\bar{\alpha}$ -методом. Коэффициент теплоотдачи при ламинарном или турбулентном течении можно рассчитать при известной скорости течения. Если размеры всех труб одинаковы, а скорость течения определяется гидравлическим сопротивлением, то коэффициенты теплоотдачи α_1 всех труб также одинаковы. Температура жидкостной среды в трубе изменяется от $T_{1,0}$ во входном сечении до T_1 на выходе в соответствии с уравнением

$$\frac{T_1 - T_2}{T_{1,0} - T_2} = \exp\left(-\frac{\bar{\alpha}_1 A}{\rho_1 c_1 \dot{V}_1}\right), \quad (4)$$

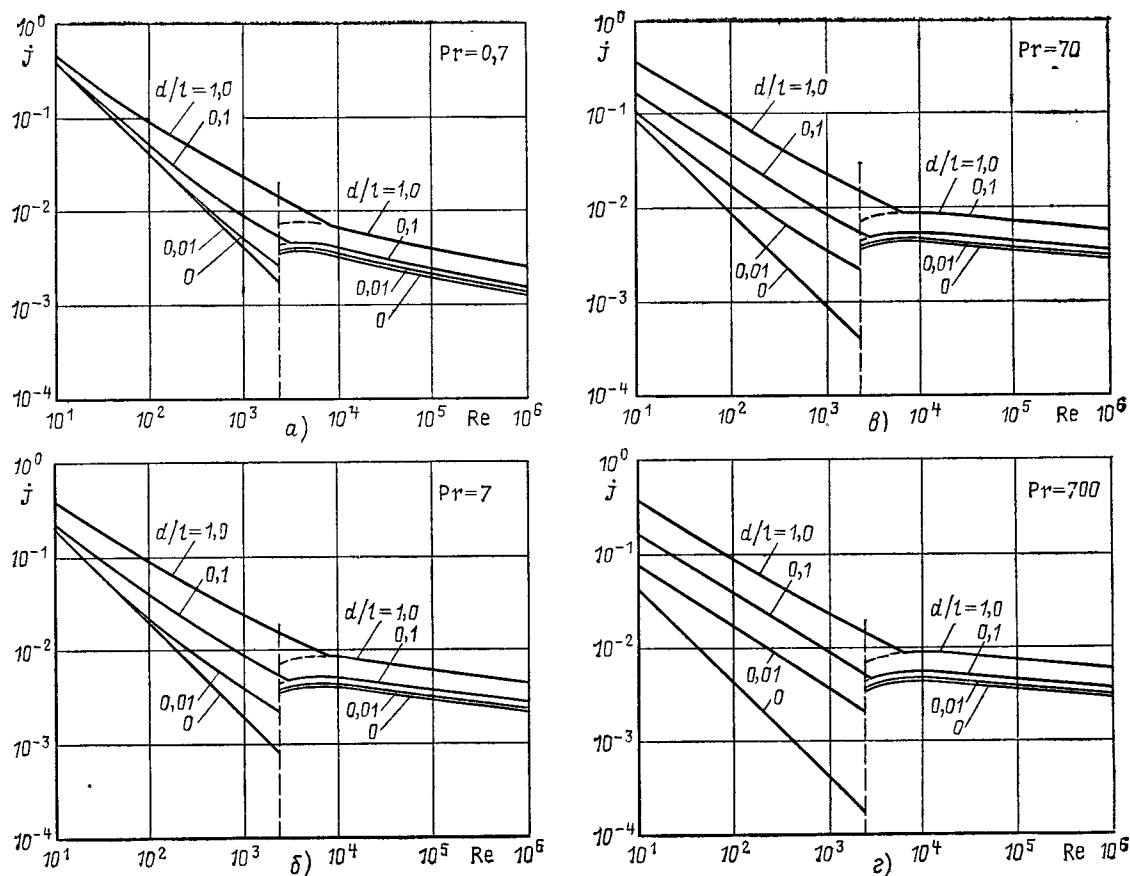


Рис. 6. Теплоотдача при ламинарном и турбулентном течении в трубе при постоянной температуре стенки

которое легко можно получить из уравнения для теплового потока $\dot{q} = \bar{\alpha}_1 (T_1 - T_2)$ и уравнения баланса энергии $(\rho c \dot{V})_1 dT_1 = -q dA$. Комбинация параметров

$$\frac{\bar{\alpha}_1 A}{(\rho c \dot{V})_1} = \overline{NTU}_1 \quad (2)$$

представляет собой число единиц переноса теплоты для изолированной трубы, которое остается в точности таким же и для всего пучка труб. Температура T_1 стремится к температуре стенки T_2 при возрастании $\overline{NTU}_1$, т. е. по мере роста произведения $\bar{\alpha}_1 A$ или убывания $(\rho c \dot{V})_1$. Такое поведение является типичным для однородных трубчатых систем.

Рассмотрим теперь пучок, состоящий из n меньших труб одинакового диаметра d_s и одной большой трубы диаметром d_l . Такая схема является прототипом неоднородных систем. Поскольку перепад давления в каждой из труб одинаков, то объемный расход в большой трубе будет больше.

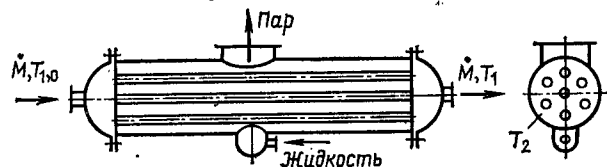


Рис. 1. Кожухотрубный теплообменник с охлаждением испарением на кожухе как пример однородной системы (все трубы одинакового диаметра) и неоднородной (диаметр одной из труб значительно больше диаметров всех остальных)

Соотношение объемных расходов определяется следующим образом:

$$\frac{\dot{V}_l}{\dot{V}_s} = \left(\frac{d_l}{d_s} \right)^m, \quad (3)$$

где $m=4$ для ламинарных течений и $m=2,5$ для турбулентных. Следовательно, в соответствии с уравнением (2) параметр $\overline{NTU}$ для большой трубы будет меньше, чем для маленькой. Изменение температуры жидкостной среды T_1 в большой трубе будет меньше, так как

$$\left(\frac{T_1 - T_2}{T_{1,0} - T_2} \right)_l = \exp(-\overline{NTU}_l) \quad (4)$$

для большой трубы и

$$\left(\frac{T_1 - T_2}{T_{1,0} - T_2} \right)_s = \exp(-\overline{NTU}_s) \quad (5)$$

для маленькой трубы. Средняя температура жидкости на выходе определяется как температура смеси жидкостей с различными температурами, определенными выше, и ее можно найти из следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{T_{1,av} - T_2}{T_{1,0} - T_2} &= \frac{\dot{V}_l}{\dot{V}_l + n\dot{V}_s} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_{1,0} - T_2} \right)_l + \\ &+ \frac{n\dot{V}_s}{\dot{V}_l + n\dot{V}_s} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_{1,0} - T_2} \right)_s. \end{aligned} \quad (6)$$

Средний параметр $\overline{NTU}$ для неоднородной системы можно определить в соответствии со средней температурой в выходном сечении

$$\overline{NTU}_{av} = -\ln \left(\frac{T_{i,av} - T_2}{T_{i,0} - T_2} \right). \quad (7)$$

Из уравнений (7), (6), (5) и (4) следует

$$\overline{NTU}_{av} = -\ln \left[\frac{\dot{V}_l}{\dot{V}_l + n\dot{V}_s} \exp(-\overline{NTU}_l) + \frac{n\dot{V}_s}{\dot{V}_l + n\dot{V}_s} \exp(-\overline{NTU}_s) \right]. \quad (8)$$

Определяя среднее число Гретца, например, по среднему гидравлическому диаметру, получаем в соответствии с определением среднего числа Нуссельта

$$\overline{Nu}_{av} = \overline{NTU}_{av} \frac{1}{4} Gz_{av}. \quad (9)$$

Аналогично

$$\overline{Nu}_l = \overline{NTU}_l \frac{1}{4} Gz_l; \quad (10)$$

$$\overline{Nu}_s = \overline{NTU}_s \frac{1}{4} Gz_s. \quad (11)$$

Таким образом, комбинируя уравнения (8) и (9)–(11) и общую корреляционную зависимость Nu (Gz , Pr , d/L) для изолированной трубы, приведенную в § 2.1.4, можно рассчитать средние значения $\overline{NTU}_{av}$ и $\overline{Nu}_{av}$ по индивидуальным значениям $\overline{Nu}_l$, s и $\overline{NTU}_{l,s}$.

Более детальное рассмотрение уравнения (8) приводит к следующим заключениям:

1. Если малы оба индивидуальных параметра $\overline{NTU}$, т. е. если система в целом далека от равновесия, то, разлагая уравнение (8) в ряд Тейлора, находим

$$\overline{NTU}_{av} = \frac{\dot{V}_l}{\dot{V}_l + n\dot{V}_s} \overline{NTU}_l + \frac{n\dot{V}_s}{\dot{V}_l + n\dot{V}_s} \overline{NTU}_s \quad (12)$$

и

$$\overline{Nu}_{av} = \frac{A_l}{A_l + nA_s} \overline{Nu}_l + \frac{nA_s}{A_l + nA_s} \overline{Nu}_s. \quad (13)$$

Это означает, что средние значения параметра $\overline{NTU}$ и числа $\overline{Nu}$ являются средневзвешенными арифметическими соответственно индивидуальных значений $\overline{NTU}_{l,s}$ и $\overline{Nu}_{l,s}$, причем веса пропорциональны доле объемного расхода для параметра $\overline{NTU}$ и доле поверхности теплообмена — для числа $\overline{Nu}$.

Процессы переноса в таком режиме, когда малы индивидуальные параметры $\overline{NTU}$, называются кинетически контролируемыми.

2. Если оба индивидуальных параметра $\overline{NTU}_{l,s}$ велики, т. е. состояние системы в целом близко к равновесию, то из уравнения (8) имеем

$$\overline{NTU}_{av} = k \frac{\overline{Nu}_{\infty}}{\frac{1}{4} Gz_{av}} \quad (14),$$

и

$$\overline{Nu}_{av} = k \overline{Nu}_{\infty}, \quad (15)$$

где $k = [1 + n(d_s/d_l)^4] / (1 + n)$ и $\overline{Nu}_{\infty} = 3,65$ для ламинарного течения ($\overline{Nu}_{\infty}$ является предельным значением числа Нуссельта для изолированной трубы).

Среднее число Нуссельта может быть намного меньше этого предельного значения, так как в зависимости от n и d_l/d_s число k может быть меньше единицы на несколько порядков величины. Процессы переноса в таком режиме, когда все индивидуальные параметры $\overline{NTU}$ велики, называются равновесно контролируемыми процессами.

3. Если параметр $\overline{NTU}_l$ мал, а $\overline{NTU}_s$ — велик, то из уравнения (8) имеем

$$\overline{NTU}_{av} = -\ln \frac{\dot{V}_l}{\dot{V}_l + n\dot{V}_s}; \quad (16)$$

$$\overline{Nu}_{av} = \frac{Gz_{av}}{4} \left(-\ln \frac{\dot{V}_l}{\dot{V}_l + n\dot{V}_s} \right). \quad (17)$$

Это означает, что среднее число единиц переноса теплоты $\overline{NTU}_{av}$ не зависит от коэффициента теплоотдачи α , площади поверхности A , суммарного объемного расхода $\dot{V}$ и термических свойств жидкостной среды, а определяется только отношением $\dot{V}_l / (\dot{V}_l + n\dot{V}_s)$. Это отношение в свою очередь зависит от соотношения диаметров d_l/d_s и коэффициентов трения s_l и f_s . Поскольку эти свойства являются чисто гидравлическими, то среднее число единиц переноса теплоты $\overline{NTU}_{av}$, так же как и среднее число Нуссельта $\overline{Nu}_{av}$, в данном случае является чисто гидравлическим свойством неоднородных систем.

Процессы переноса в таком режиме, когда один индивидуальный параметр $\overline{NTU}$ велик, а другой мал, называются гидравлически контролируемыми процессами.

Физическая сущность явлений, протекающих в теплообменнике в этом режиме, заключается в том, что в трубах малого диаметра устанавливается почти полное тепловое равновесие, в то время как температура текучей среды в большой трубе остается практически неизменной. Поэтому можно сказать, что если в неоднородной системе диаметры труб различаются достаточно сильно, то на выходе такой системы образуется смесь полностью равновесной и полностью неравновесной текучих сред. Поэтому становится понятным и тот факт, что средний параметр $\overline{NTU}$ неоднородной системы не зависит от переносных свойств среды, площади поверхности и т. д. Более детальный анализ этого вопроса содержится в [9, 10].

На рис. 2 и 3 в графическом виде представлены результаты решения уравнения (8) для различных значений параметров n и d_l/d_s . Хорошо видна область параметров, где

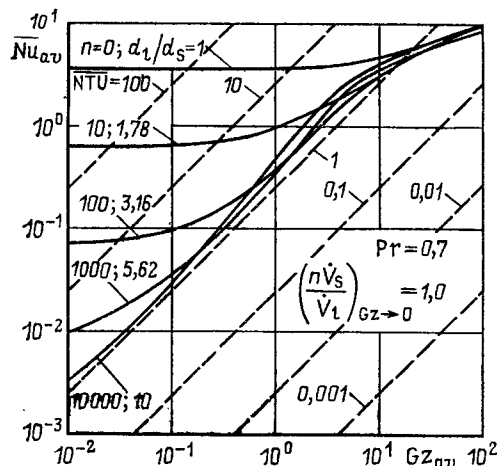


Рис. 2. Теплоотдача в трубном пучке, состоящем из n труб меньшего диаметра d_s и одной большой трубы диаметром d_l (неоднородная система). При стремлении полного объемного расхода к нулю объемный расход через большую трубу составляет 50%

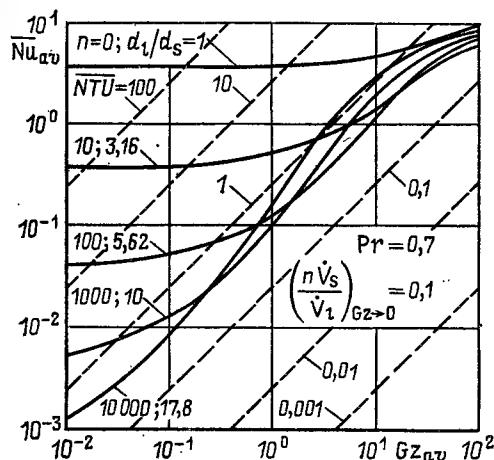


Рис. 3. Теплоотдача в трубном пучке (см. рис. 2). При стремлении полного объемного расхода к нулю объемный расход через большую трубу составляет 91%

реализуется гидравлически контролируемый режим и параметр $\overline{NTU}_{av}$ практически не меняется. Более того, видно, что возможно даже некоторое уменьшение параметра $\overline{NTU}_{av}$ по мере уменьшения числа Gz , т. е. уменьшения пропускной способности. Такой характер изменения полностью противоположен ожидаемому для однородной системы. Причиной этого опять-таки является чисто гидравлический эффект. Поскольку коэффициент трения для маленьких труб возрастает с уменьшением пропускной способности (а значит, и чисел Рейнольдса и Гретца) быстрее, чем для большой трубы, отношение объемных расходов $\dot{V}_l / (\dot{V}_l + n\dot{V}_s)$ будет возрастать, приводя к снижению эффективности всей системы в целом. По этой же причине в гидравлически контролируемом режиме $\overline{Nu}_{av} \sim Gz^{(1+x)}$, где x может достигать значения 0,5.

Наиболее важным, однако, является вывод о том, что в гидравлическом контролируемом режиме число Нуссельта $\overline{Nu}_{av}$ нельзя рассматривать как коэффициент теплоотдачи. Было бы полностью неправильным рассматривать такой средний «коэффициент теплоотдачи», как например, константа скорости химической реакции для выяснения, контролируется ли эта реакция процессами переноса или кинетикой. В подобных случаях необходимо отдельно рассматривать процессы, происходящие в каждом из каналов.

Большинство промышленных установок, таких, как теплообменники, сушилки, трубчатые реакторы, насадочные колонны, устройства с псевдооживленными слоями, брызгательные и барботажные колонны, представляют

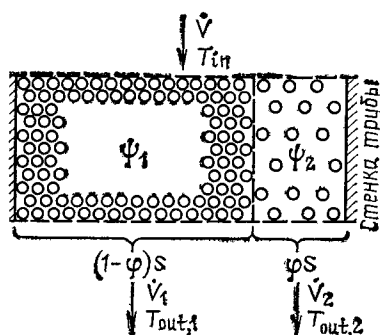


Рис. 4. Модель слоя засыпки как пример неоднородной системы

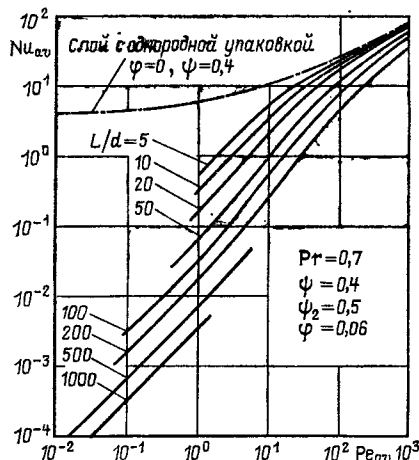


Рис. 5. Теплоотдача в ограниченном твердыми стенками слое засыпки, состоящей из сферических частиц, аналогичном слою в трубчатом реакторе (L — высота слоя, d — диаметр частиц)

собой в большей или меньшей степени неоднородные системы. Хорошо известно, например, что в трубчатых реакторах доля пустот вблизи стенки трубы больше, чем в середине. Если эту ситуацию моделировать так, как показано на рис. 4, и принять, что доля пустот в слое размещений хаотически сферических частиц вблизи стенки равна 0,5, а в центральной части 0,4, то расчеты предсказывают очень резкое уменьшение среднего числа Нуссельта в области малых чисел Рейнольдса (рис. 5). Этот результат очень хорошо согласуется со многими экспериментальными данными [11] (см. также § 2.5.4).

Это довольно интересный результат, так как в рассмотренном примере очень слабая неоднородность (только 6% площади полного поперечного сечения имеет долю пустот выше на 25%) приводит к тому, что слой зернистого материала может функционировать в гидравлически контролируемом режиме, когда среднее число Нуссельта не может более рассматриваться в качестве коэффициента теплоотдачи. Подобный результат будет получен также и для псевдооживленного слоя (см. § 2.5.5). На теплообмен в пучках труб, так же как и в кожухотрубных теплообменниках, существенное влияние может оказывать неоднородность распределения скорости потока.

Можно показать, что характеристики тепло- и массообмена в неоднородных и однородных системах различаются не только количественно, но и по своей физической сущности. Описание неоднородных систем как квазиоднородных с помощью усредненных величин, таких, как средний гидравлический диаметр, средняя скорость течения или средний коэффициент теплоотдачи, может оказаться ошибочным. В подобных случаях только так называемый микропоточковый анализ приводит к физически разумным результатам, которые являются более надежной основой для установления подобия.

2.1.6. Аналогия между процессами переноса теплоты и массы и границы ее применимости

Е. У. Ш л ю н д е р

В § 2.1.2—2.1.5 рассматривался теплообмен в системах без фазовых переходов. Фазовые превращения имеют место во многих практических случаях, таких, как конденсация, испарение, сушка и химические реакции. Во всех этих случаях, и особенно если рассматриваются смеси, процессы тепло- и массопереноса протекают одновременно и взаимно влияют друг на друга. Поэтому представляется

уместным сказать несколько слов по поводу основ теории массопереноса и о совместном тепло- и массообмене. Возможно, это будет способствовать лучшему пониманию некоторых технически реализуемых процессов переноса с участием массообмена.

Основным законом, описывающим все типы контактного теплообмена, является закон теплопроводности Фурье [см. уравнение (4) из § 2.1.2]. Основным законом в теории массопереноса является закон диффузии Фика, описываемый уравнением (5) § 2.1.2. Это уравнение, однако, применимо только в том случае, когда коэффициенты диффузии всех компонентов равны, а полный поток массы

$$\dot{n} = \sum \dot{n}_j \quad (1)$$

отсутствует. В общем же случае ситуация не столь проста. Если $n \neq 0$ и бинарные коэффициенты диффузии различны, то для описания процесса диффузии необходимо использовать уравнения Стефана — Максвелла, которые получены для разреженных газов [12],

$$A \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial z} = \sum_{i=1} \frac{1}{\bar{\rho} \delta_{ij}} (\tilde{x}_j \dot{N}_i - \tilde{x}_i \dot{N}_j), \quad (2)$$

где A — площадь поверхности, перпендикулярной потокам $\dot{N}_i$; $\dot{N}$ — мольный поток; $\bar{\rho}$ — мольная плотность; $\tilde{x}$ — мольная доля; z — направление потока; δ_{ij} — бинарные коэффициенты диффузии.

Если все бинарные коэффициенты диффузии равны, т. е. $\delta_{ji} = \delta$, то уравнение (2) можно разрешить относительно потока

$$\dot{N}_j = -A \bar{\rho} \delta \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial z} + \tilde{N}_j \tilde{x}_j, \quad (3)$$

где $\dot{N}$ — полный поток, вычисляемый в соответствии с (1).

Но определяя квазибинарный многокомпонентный коэффициент диффузии δ_{jm} уравнением

$$\dot{N}_j = -A \bar{\rho} \delta_{jm} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial z} + \tilde{N}_j \tilde{x}_j, \quad (4)$$

получаем, используя (2),

$$\frac{1}{\delta_{jm}} = \frac{\sum_i (1/\bar{\rho} \delta_{ji}) (\tilde{x}_i \dot{N}_j - \tilde{x}_j \dot{N}_i)}{\dot{N}_j - \tilde{x}_j \dot{N}}. \quad (5)$$

Уравнение (5) особенно удобно, если, например, концентрация одной из компонентов намного превосходит концентрации остальных. Тогда

$$\delta_{jm} = \delta_{ji}. \quad (6)$$

В бинарных смесях всегда, по определению, $\delta_{ji} = \delta_{ij}$. Основные уравнения (2) и (4) записаны для мольных величин. Во многих случаях такая форма является удобной, и она всегда используется, если перенос импульса в процессе диффузии пренебрежимо мал. Если же перенос импульса нужно учитывать, как, например, в пограничном слое, то уравнения (2) и (4) должны быть записаны относительно массовых величин. Может случиться так, что хотя в мольной системе полный поток равен нулю, в массовой системе он отличен от нуля из-за различия мольных масс разных компонентов.

Аналогия между тепло- и массопереносом является полной в том случае, когда суммарный поток массы равен нулю и все бинарные коэффициенты диффузии равны. Кроме того, граничные условия для каждой компоненты j должны быть такими же, как и в аналогичной задаче теплопередачи. Если одно из этих условий нарушается, то аналогия

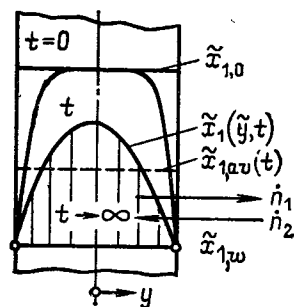


Рис. 1. Профили концентрации при выщелачивании слоя — аналог профилей температуры в охлаждаемом слое, показанных на рис. 1, § 2.1.3

между переносом теплоты и массы становится в большей или меньшей степени неполной. При полной аналогии для массообмена остаются справедливыми те же корреляционные соотношения, что и для теплообмена.

Рассмотрим процесс выщелачивания для плоского слоя, изображенный на рис. 1. Пусть начальная мольная доля компонента 1 равна $\tilde{x}_{1,0}$, ее мольная доля на границе слоя поддерживается равной $\tilde{x}_{1,w}$, например, в результате непрерывного вымывания. Компонента 1 диффундирует по направлению к границе, в то время как компонента 2 (вода) диффундирует по направлению к центру слоя, причем диффузионные потоки равны, т. е. $\dot{n}_1 = -\dot{n}_2$; поэтому суммарный мольный поток равен нулю. Если определить коэффициент массообмена (зависящий от времени) в соответствии с уравнениями

$$\dot{n}_1 = \bar{\rho} \beta (\tilde{x}_{1,av} - \tilde{x}_{1,w}); \quad (7)$$

$$\dot{n}_2 = \bar{\rho} \beta (\tilde{x}_{2,w} - \tilde{x}_{2,av}), \quad (8)$$

то эта задача массообмена физически и формально становится аналогичной задаче теплообмена, изображенной на рис. 1 из § 2.1.4, — охлаждению слоя. Поэтому те же самые соотношения, которые были получены для коэффициента теплоотдачи α (рис. 4, α , § 2.1.4), применимы также и для расчета времени выщелачивания, если, конечно, тепловые свойства в этих соотношениях заменить соответствующими диффузионными. Таким образом, получается ряд эквивалентных безразмерных чисел, используемых для описания тепло- и массообмена, который приведен ниже.

Теплообмен	Массообмен
Число Нуссельта $Nu = \frac{\alpha s}{\lambda}$	$Sh = \frac{\beta s}{\delta}$ — число Шервуда
Число Прандтля $Pr = \frac{v}{k}$	$Sc = \frac{v}{\delta}$ — число Шмидта
Число Фурье $Fo = \frac{kt}{s^2}$	$Fo = \frac{\delta t}{s^2}$
Число Пекле $Pe = \frac{us}{k}$	$Pe = \frac{us}{\delta}$
Число Гретца $Gz = \frac{us^2}{kL}$	$Gz = \frac{us^2}{\delta L}$

Уравнение (4) § 2.1.4 можно переписать в таком виде, чтобы оно описывало решение эквивалентной задачи массообмена,

$$Sh = \sqrt{\frac{\pi^4}{4} + \frac{4}{\pi} \frac{1}{Fo}}. \quad (9)$$

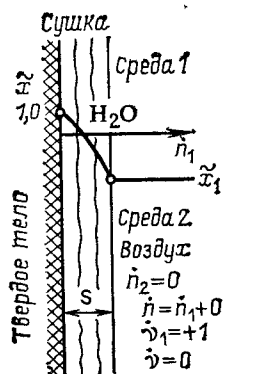


Рис. 2. Профили концентрации пара $x_1(s)$ в вязком подслое воздуха, движущегося около влажного твердого тела

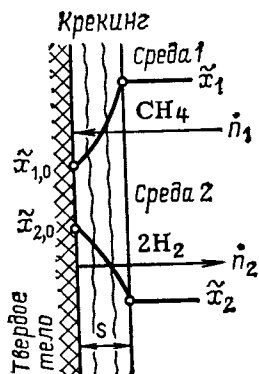


Рис. 3. Профили концентрации метана и водорода в вязком подслое реагирующего газа, движущегося около каталитической твердой поверхности ($\dot{n} = \dot{n}_1 + \dot{n}_2 = -\dot{n}_1; \dot{v}_1 = -1; \dot{v}_2 = 2$)

Ситуация становится иной, если полным потоком $\dot{n}$ пренебречь нельзя. Именно такой случай характерен для многих технических процессов (сушка, катализ, абсорбция и горение). Для бинарной смеси, такой, как смесь пара и воздуха, образующаяся в процессе сушки, применимо уравнение (3), так как $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta$. В процессе реакции $\text{CH}_4 \rightarrow 2\text{H}_2 + \text{C}$, протекающей на поверхности углерода, образуется бинарная смесь, для которой также применимо уравнение (3) (рис. 2 и 3).

Интегрирование этого уравнения для случая стационарной диффузии через неподвижную пленку жидкости позволяет получить следующее выражение для диффузионного потока компоненты j :

$$\dot{n}_j = \tilde{\rho} \frac{\delta}{s} \dot{v}_j \ln \frac{\dot{v}_j - \tilde{x}_j}{\dot{v}_j - \tilde{x}_{j,0}}, \quad (10)$$

где коэффициенты

$$\dot{v}_j = \dot{n}_j / \sum \dot{n}_i \quad (11)$$

называются стехиометрическими коэффициентами; $\tilde{x}_{j,0}$ — мольная доля компонента j на поверхности твердого тела; $\tilde{x}_j$ — концентрация компонента j внутри твердого тела вдали от границы.

Нестационарное решение уравнения (3) приводит к следующему приближенному выражению для усредненного по времени потока при условии постоянной мольной доли на границе:

$$\dot{n}_j \approx \tilde{\rho} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\delta}{t}} \dot{v}_j \ln \frac{\dot{v}_j - \tilde{x}_{j,0}}{\dot{v}_j - \tilde{x}_j}. \quad (12)$$

Вводя коэффициент массоотдачи в стационарном случае

$$\bar{\beta} = \delta/s \quad (13)$$

и в нестационарном случае

$$\bar{\beta}_{t \rightarrow 0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\delta}{t}}, \quad (14)$$

можно, используя $\bar{\beta}$ -концепцию, записать основное уравнение для потока в виде

$$\dot{n}_j = \bar{\beta} \dot{v}_j \ln \frac{\dot{v}_j - \tilde{x}_{j,0}}{\dot{v}_j - \tilde{x}_j}. \quad (15)$$

Величину $\bar{\beta}$ определим из (9), а уравнение для потока позволяет рассчитать диффузионные потоки каждой из компонентов бинарной смеси способом, полностью аналогичным использованному для расчета теплового потока. Единственное различие заключается в том, что движущая сила описывается логарифмической зависимостью в отличие от линейной в уравнениях (7) и (8). Однако если мольные доли $\tilde{x}_j$ малы по сравнению со стехиометрическими коэффициентами $\dot{v}_j$, то уравнение (15) становится линейным

$$\lim_{\tilde{x}_j/\dot{v}_j \rightarrow 0} \dot{n}_j = \bar{\beta} \dot{v}_j (\tilde{x}_{j,0} - \tilde{x}_j). \quad (16)$$

Обычно отношение

$$\frac{\dot{n}_j}{\lim_{\tilde{x}_j/\dot{v}_j \rightarrow 0} \dot{n}_j} = \frac{\dot{v}_j \ln (\dot{v}_j - \tilde{x}_{j,0}) / (\dot{v}_j - \tilde{x}_j)}{\tilde{x}_{j,0} - \tilde{x}_j} = \varphi \quad (17)$$

называется коэффициентом усиления. Это же отношение иногда называют корректирующим множителем Аккермана или корректирующим множителем стефановского потока. Множитель φ появляется в основном уравнении для потока следующим образом:

$$\dot{n}_j = \bar{\beta}^0 \varphi (\tilde{x}_{j,0} - \tilde{x}_j), \quad (18)$$

где (см. [12])

$$\bar{\beta}^0 = \bar{\beta} \varphi. \quad (19)$$

Аналогия между тепло- и массопереносом используется также для получения первого приближения решения задач массопереноса в бинарных смесях с отличным от нуля полным потоком.

В случае многокомпонентного массопереноса ситуация становится более сложной, однако и здесь аналогия сохраняется при условии, что в смеси преобладает один компонент. Используя уравнения (4) и (5), получаем k уравнений для потоков (k — число компонентов) типа

$$\dot{n}_j = \bar{\beta} \dot{v}_j \ln \frac{\dot{v}_j - \tilde{x}_{j,0}}{\dot{v}_j - \tilde{x}_j}, \quad (20)$$

которые обычно можно линеаризовать, так как все $\tilde{x}_j < \dot{v}_j$, за исключением значения $\tilde{x}_j$ преобладающего компонента.

Другой специальный случай многокомпонентного массопереноса получается при равенстве всех бинарных коэффициентов диффузии, когда уравнение (4) и аналогия остаются справедливыми. Необходимо, однако, отметить, что в этом случае перенос компонентов может приводить к появлению отрицательной линейной разности концентраций, поэтому для получения корректного результата необходимо всегда использовать логарифмический движущий потенциал.

Специальный случай многокомпонентного массопереноса реализуется если один из компонентов диффундирует намного быстрее остальных. Это происходит, например, когда в состав смеси входит водород, диффундирующий примерно в 10 раз быстрее, чем бензол. В подобных случаях концентрация быстро диффундирующих компонентов остается практически постоянной в пограничном слое и равной концентрации вдали от границы, что позволяет существенно упростить исходную систему уравнений диффузии. Для примера можно рассмотреть процесс каталитической гидрогенизации бензола (рис. 4). Хотя концентрации $\tilde{C}_{\text{H}_2}$ и $\tilde{C}_{\text{C}_6\text{H}_6}$ вдали от каталитической поверхности являются стехиометрическими, концентрация водорода на поверхности практически такая же, как и вдали от нее. Если бы коэффициент диффузии водорода был таким же, как и у других компонентов, то концентрация водорода была бы равна нулю. Следовательно, тройную смесь H_2 ,

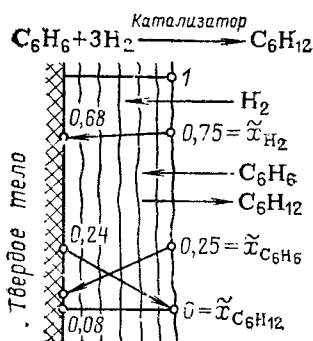


Рис. 4. Профили концентраций водорода, бензола и циклогексана в вязком подслое реагирующего газа, движущегося около каталитической твердой поверхности

C_6H_6 , C_6H_{12} можно рассматривать как бинарную, считая водород инертным газом.

Подводя итог, можно сказать, что в большинстве практических случаев аналогия между тепло- и массопереносом действительно существует при условии, что в уравнении для потока используется корректный движущий потенциал, имеющий в общем случае логарифмический вид, как в уравнениях (15) и (20). Хотя такое выражение для потенциала получено не строго, его использование не приводит к заметным погрешностям. Аналогия нарушается в наиболее общем случае, когда все бинарные коэффициенты диффузии различаются, но не слишком сильно, а все молярные доли являются величинами одного порядка.

Основные уравнения для потоков в случае многокомпонентной диффузии [(2) и (4)] получены для разреженных газов. Их также можно использовать и для описания многокомпонентной диффузии в жидкостях, если равны все бинарные коэффициенты диффузии. Если же это не так, то в уравнениях для диффузионных потоков должны учитываться эффекты более высокого порядка, и в этом случае рассмотренная аналогия уже неприменима.

2.1.7. Совместный тепло- и массообмен

Е. У. Шлюндер

Совместный тепло- и массообмен реализуется в процессах сушки, абсорбции, катализа, горения и т. д. В этих случаях на перенос теплоты влияет обусловленный диффузией суммарный поток массы $\dot{n} = \sum \dot{n}_j$. Для иллюстраций этого явления рассматриваются два примера, включающие сушку и конденсацию смесей.

А. Сушка. Если влажное твердое тело помещено в поток горячего газа, то к его поверхности поступает теплота, а пары диффундируют от поверхности в газовый поток, приводя к сушке образца (рис. 1). Поскольку в этом случае поток пара $\dot{n}_1$ совпадает с полным потоком $\dot{n}$, то выражение для теплового потока к поверхности в условиях ста-

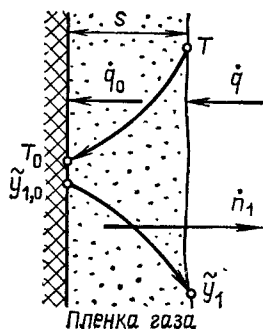


Рис. 1. Совместный тепло- и массоперенос при конвективной сушке. Профили температуры и концентрации в вязком подслое

ционарности процессов переноса сквозь газовый слой имеет вид

$$\dot{q}_0 = \frac{\dot{n}_1 c_{p1} (T - T_0)}{\exp(\dot{n}_1 c_{p1} / \bar{\alpha}) - 1} \quad (1)$$

При $\dot{n}_1 \rightarrow 0$ уравнение (1) сводится к следующему:

$$\dot{q}_0 = \bar{\alpha} (T - T_0) \quad (2)$$

Отсюда видно, что при малых плотностях потока массы его влияние пренебрежимо мало. Уравнение баланса энергии в газовом потоке имеет вид

$$\dot{q} - \dot{q}_0 = \dot{n}_1 c_{p1} (T - T_0) \quad (3)$$

Оно означает, что разность тепловых потоков, протекающих через границы газового слоя, затрачивается на подогрев потока пара $\dot{n}_1$ от температуры T_0 до T . Уравнение (1) можно также записать в форме

$$\dot{q}_0 = \bar{\alpha} (T - T_0) \varphi, \quad (4)$$

где

$$\varphi = \frac{\dot{n}_1 c_{p1} / \bar{\alpha}}{\exp(\dot{n}_1 c_{p1} / \bar{\alpha}) - 1} \quad (5)$$

При сушке поток массы $\dot{n}_1$ можно выразить через тепловой поток $\dot{q}$, так как условие энергетического баланса в стационарных условиях сводится к следующему:

$$\dot{q}_0 = \dot{n}_1 \Delta h_{g1}, \quad (6)$$

где Δh_{g1} — скрытая теплота испарения. С учетом этого уравнение (1) перепишем в виде

$$\dot{q}_0 = \bar{\alpha} \frac{\Delta h_{g1}}{c_{p1}} \ln \left[1 + \frac{c_{p1} (T - T_0)}{\Delta h_{g1}} \right], \quad (7)$$

или

$$\dot{q}_0 = \bar{\alpha} (T - T_0) \varphi,$$

где

$$\varphi = \frac{\Delta h_{g1}}{c_{p1} (T - T_0)} \ln \left[1 + \frac{c_{p1} (T - T_0)}{\Delta h_{g1}} \right]. \quad (8)$$

Во многих практических случаях φ близко к единице, однако при большом значении разности $T - T_0$ и малом Δh_{g1} , как, например, для органических жидкостей, множитель φ может стать заметно меньше единицы. Даже и в этом случае $\bar{\alpha}$ -метод остается пригодным, если используется правильный движущий потенциал или эквивалентный ему корректирующий множитель. Можно также применять для расчетов модифицированную форму $\bar{U}$ -метода, используя соотношение

$$\frac{1}{\bar{U}} = \sum \frac{1}{\bar{\alpha}_{fj}}, \quad (9)$$

хотя значения φ_j иногда приходится находить в процессе итераций, так как диффузионный поток $\dot{n}$ нельзя выразить в явном виде.

В. Конденсация смесей. Пар в присутствии неконденсирующегося компонента. Термическое сопротивление при конденсации чистого пара обусловлено формированием жидкой пленки на охлаждаемых стенках конденсатора. На границе жидкость — пар предполагается наличие термодинамического равновесия.

В присутствии инертного газа (например, воздуха) возникает дополнительное термическое сопротивление,

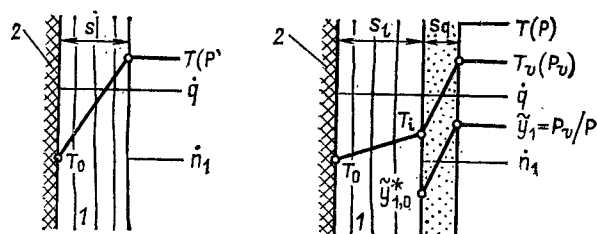


Рис. 2. Конденсация в отсутствие неконденсирующихся газов (слева) и при их наличии (справа):

1 — пленка жидкости; 2 — охлаждаемая стенка

обусловленное скоплением инертного газа вблизи межфазной границы. Оба эти случая показаны на рис. 2 для условий ламинарного течения как в жидкой пленке, так и в газе. Для чистого пара уравнение потока теплоты имеет простой вид

$$q = \frac{\lambda_l}{s_l} [T(p) - T_0], \quad (10)$$

где $\lambda_l/s_l = \alpha$ — эквивалентный коэффициент теплоотдачи, связанный с наличием жидкой пленки. Толщину пленки s_l можно рассчитать из условия баланса вязких и гравитационных сил [13]. Здесь $T(p)$ — температура насыщения, соответствующая давлению пара p .

Если пар находится в смеси с неконденсирующимся газом, то перепад температуры в пленке жидкости уменьшается в результате двух факторов. Во-первых, температура насыщения в объеме равна T_v и соответствует парциальному давлению пара p_v вместо температуры $T(p)$, соответствующей полному давлению p . Во-вторых, по мере приближения к межфазной границе должно наблюдаться уменьшение парциального давления пара, так как пар диффундирует сквозь инертный газ к жидкой пленке. Условие же равновесия на границе раздела жидкость — пар обуславливает и уменьшение температуры по мере приближения к межфазной границе.

Следовательно, движущий перепад температуры на границе раздела жидкость — пар может быть значительно меньше разности $T(p) - T_0$, которая была бы в случае конденсации чистого пара. Определение коэффициента теплоотдачи α с помощью уравнения для теплового потока

$$\dot{q} = \alpha [T_v(p, \tilde{y}_1) - T_0], \quad (11)$$

где $\tilde{y}_1 = p_v/p$ — мольная доля пара, учитывает присутствие в объеме неконденсирующегося компонента. Относя этот коэффициент к коэффициенту теплоотдачи жидкой пленки,

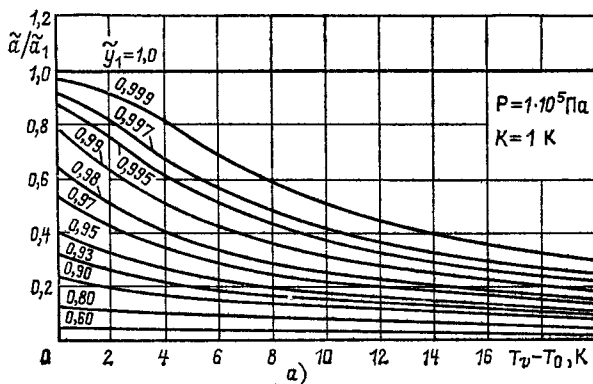


Рис. 3. Уменьшение интенсивности переноса теплоты сквозь слой неконденсирующихся газов при конденсации при постоянном K и различных $\tilde{y}_1$ (а) и при постоянном $\tilde{y}_1$ и различных K (б)

находим

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_1} = \frac{T_i - T_0}{T_v(p, \tilde{y}_1) - T_0}. \quad (12)$$

Это уравнение определяет относительное уменьшение коэффициента теплоотдачи из-за влияния инертного газа. Если $\tilde{y}_1 = 1$, то $\tilde{\alpha}/\alpha_1 = 1$. Температуру на межфазной границе T_i можно найти из уравнения баланса энергии в пренебрежении переносом энтальпии, что допустимо при малой концентрации инертного газа,

$$\tilde{\alpha}_l (T_i - T_0) = \dot{n}_1 \Delta \tilde{h}_{gl}, \quad (13)$$

где

$$\dot{n}_1 = \tilde{\rho}_g \tilde{\beta}_g \ln \frac{1 - \tilde{y}_{1,i}(p_i, T_i)}{1 - \tilde{y}_1}. \quad (14)$$

Замена коэффициента массопереноса паровой фазы в соответствии с законом Льюиса

$$\tilde{\rho}_g \tilde{\beta}_g = \frac{\tilde{\alpha}_g}{c_{pg}} \quad (15)$$

приводит к следующему уравнению:

$$T_i - T_0 = \frac{\tilde{\alpha}_g}{\tilde{\alpha}_l} \frac{\Delta \tilde{h}_{gl}}{c_{p1}} \ln \frac{1 - \tilde{y}_{1,i}(p_i, T_i)}{1 - \tilde{y}_1}. \quad (16)$$

На рис. 3 отношение $\tilde{\alpha}/\alpha_1$ показано в виде функции разности температуры смеси в объеме T_v и температуры стенки T_0 при постоянном параметре $K = (\tilde{\alpha}_g/\tilde{\alpha}_l)(\Delta \tilde{h}_{gl}/c_{p1})$ и разной концентрации пара $\tilde{y}_1$ и наоборот. Уменьшение коэффициента теплоотдачи становится более заметным при увеличении разности $T_v - T_0$, концентрации инертного газа $1 - \tilde{y}_1$ и уменьшении параметра K . При любых заданных значениях разности температур и концентрации инертного газа параметр K должен быть по возможности большим, чтобы избежать значительного снижения коэффициента теплоотдачи. Увеличению K способствует большая скорость течения пара, так как коэффициент теплоотдачи паровой фазы $\tilde{\alpha}_g$ растет с ростом скорости пара.

Пар, образующий конденсат двух смешивающихся жидкостей. Если охладить бинарную смесь паров, в которой мольная доля более летучего компонента равна $\tilde{y}_1$, до точки росы T_d , то образуется конденсат с составом $\tilde{x}_1 < \tilde{y}_1$. Этот процесс изображен на фазовой диаграмме (рис. 4), где показаны температуры кипения жидкости и конденсации пара соответственно как функции концентраций жид-

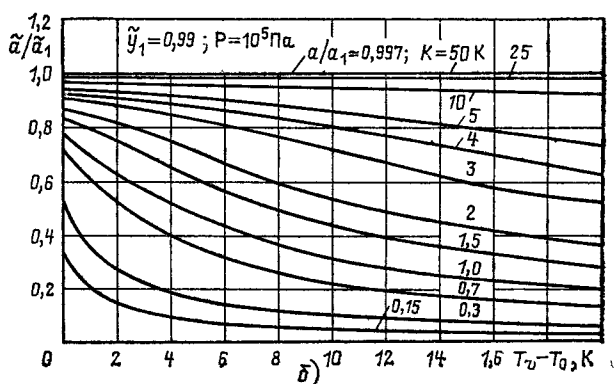


Рис. 3. Уменьшение интенсивности переноса теплоты сквозь слой неконденсирующихся газов при конденсации при постоянном K и различных $\tilde{y}_1$ (а) и при постоянном $\tilde{y}_1$ и различных K (б)

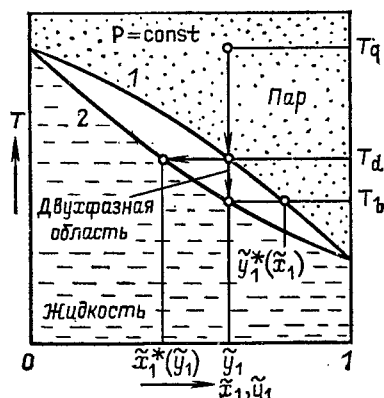


Рис. 4. Фазовая диаграмма бинарной смеси:

1 — конденсация; 2 — кипение

кости $\tilde{x}_1$ и пара $\tilde{y}_1$ при постоянном полном давлении p . Существуют два предельных случая. Если температура охлаждающей стенки T_w очень близка к температуре росы, что означает малую скорость конденсации, то процесс конденсации является почти изотермическим и мольная доля жидкости находится в изотермическом равновесии с мольной долей пара $[x_1 = \tilde{x}_1^*(\tilde{y}_1)]$. Если же температура стенки T_w намного меньше температуры росы T_d , что означает большую скорость конденсации, то температура конденсата может быть близка к температуре кипения T_b . При этом мольная доля жидкости практически равна мольной доле пара: $\tilde{x}_1 = \tilde{y}_1$. В предположении о ламинарном характере течения в жидкой и паровой пленках на рис. 5 показаны профили температуры и концентрации для каждого из этих предельных случаев. Уравнения для потоков в паровой фазе для бинарной смеси имеют вид

$$\dot{n}_1 = -\tilde{\rho} \delta \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial z} + \dot{n}_1 \tilde{y}_1; \quad (17)$$

$$\dot{n}_2 = -\tilde{\rho} \delta \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial z} + \dot{n}_2 \tilde{y}_2, \quad (18)$$

где

$$\dot{n} = \dot{n}_1 + \dot{n}_2. \quad (19)$$

Их интегрирование позволяет найти профили концентраций при стационарной диффузии

$$\frac{\dot{v}_1 - \tilde{y}_1}{\dot{v}_1 - \tilde{y}_1^*} = \frac{\dot{v}_2 - \tilde{y}_2}{\dot{v}_2 - \tilde{y}_2^*} = \exp \left(-\frac{\dot{n} s_g}{\tilde{\rho} \delta g} \right), \quad (20)$$

где

$$\dot{v}_1 = \dot{n}_1 / \dot{n} \text{ и } \dot{v}_2 = \dot{n}_2 / \dot{n} \text{ — относительные потоки. Решение (20)}$$

объясняет оба предельных случая, изображенных на рис. 5. Если скорость конденсации $\dot{n}$, т. е. суммарная плотность потока массы стремится к нулю, то $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_1^*$. Если скорость конденсации велика, то $\tilde{y}_1 = \dot{v}_1$, а это и означает, что состав жидкой пленки становится таким же, как и пара. Для оценки диапазона условий, в которых реализуются рассмотренные предельные случаи, удобно преобразовать комплекс $\dot{n} s_g / \tilde{\rho} \delta g = Nf$ (безразмерный полный поток), используя уравнение баланса энергии $\dot{n} \Delta h_{gi} = \dot{q}$, где $\dot{q} = \alpha_i (T_i - T_w)$, и заменяя коэффициент массообмена в паровой фазе $\tilde{\rho} \delta g =$

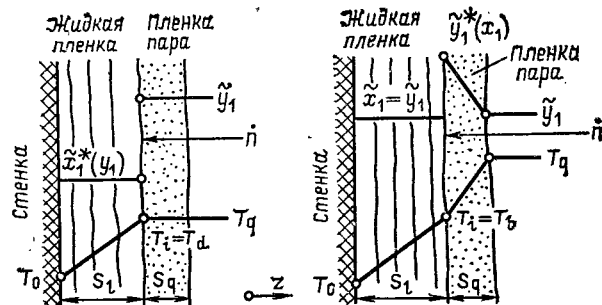


Рис. 5. Распределения температуры и концентрации при малых тепловых потоках, малом перепаде температур и малой скорости конденсации (слева) и больших тепловых потоках, большом перепаде температур и большой скорости конденсации (справа)

$= \delta g / s_g$ с помощью корреляционного соотношения Льюиса,

$$\tilde{\rho} \delta g = \tilde{\alpha}_g / c_{pg}. \quad (21)$$

Таким образом, получаем

$$Nf = \frac{\tilde{\alpha}_i \tilde{c}_{pg} (T_i - T_w)}{\tilde{\alpha}_g \Delta h_{gi}}. \quad (22)$$

Если принять, что отношение $\tilde{\alpha}_i / \tilde{\alpha}_g \approx 500$, в то время как отношение $\tilde{c}_{pg} (T_i - T_w) / \Delta h_{gi} \approx 0,01$, то $Nf \approx 5$. Это означает, что часто фракционирование не происходит, а идет простая конденсация с образованием конденсата того же состава, что и состав пара.

2.1.8. Современное состояние исследований тепло- и массообмена

Е. У. Шлюндер

А. Тепло- и массоперенос к твердым телам и жидким средам при внешнем обтекании тел и течения в каналах, при вынужденной и естественной конвекции. Перенос теплоты к твердым телам и жидким средам при ламинарном течении с заданными граничными условиями или условиями сопряжения полностью описывается законом теплопроводности Фурье, если только тепловые потоки не превышают своих физических пределов (фононный, молекулярный, электронный перенос и т. д.). Возможность решения сложных задач в большей или меньшей степени зависит только от наличия необходимой вычислительной техники. Для расчета ламинарных течений, включая и стационарный режим, к настоящему времени разработано достаточно много стандартных программ, и их число продолжает непрерывно увеличиваться. Случай движущихся тел включает в себя также и покоящиеся тела, так как координатную систему можно связать с телом и, таким образом, исключить относительное движение. Поэтому методы расчета теплопередачи к твердым телам и жидким средам при их ламинарном течении полностью аналогичны. Единственным фактором, влияющим на тепловой поток как при нестационарном нагреве твердого тела, так и при квазистационарном ламинарном течении, является время контакта. Хотя часто коэффициент теплоотдачи при ламинарном течении представляется как функция скорости, необходимо обязательно помнить, что скорость течения есть только мера времени контакта или времени пребывания среды в теплообменнике. Эта концепция обсуждалась в § 2.1.4, где было показано, каким образом $U = \alpha$ -метод, используемый обычно для описания ламинарного теплообмена, можно применить и для расчета нестационарного теплопереноса в твердом теле. В разд. 2.4 эта концепция получает даль-

нейшее развитие. Здесь она упоминается постольку, поскольку в других широко известных книгах по теплообмену ей уделяется мало внимания.

В настоящее время отсутствует удовлетворительное теоретическое описание теплопереноса при турбулентном течении. Этот вопрос интенсивно исследуется экспериментально, однако непосредственной экспериментальной информации пока еще недостаточно. Имеющиеся данные по теплообмену при внутренней и внешней вынужденной турбулентной конвекции приведены в разд. 2.5. Там же проведено их сопоставление с рекомендуемыми корреляционными зависимостями типа Нуссельта ($Nu = C Re^m Pr^n$) или Прандтля ($Nu = [C(Re^m - B)Pr]/[1 + Re^p f(Pr)]$). Второй тип зависимости используется для описания данных в более широком диапазоне изменения числа Прандтля.

Между зонами ламинарного и турбулентного течений всегда существует более или менее протяженная переходная область. Относящиеся к этой области данные характеризуются большим разбросом, что обусловлено часто неизвестной степенью турбулентности внешнего потока, а отчасти возмущениями, вносимыми передней кромкой, шероховатостью поверхности и т. д. Рекомендуемые корреляционные зависимости соответствуют усредненным значениям для теплообменников и аналогичных технических устройств. Необходимо учитывать большую степень неопределенности этих данных.

Тепловые граничные условия практически не влияют на коэффициент теплоотдачи в турбулентном течении; кроме того, и влияние гидравлических условий на входе в этом случае не столь существенно, как при ламинарном течении. Тем не менее для очень коротких труб средний коэффициент теплоотдачи может быть в 2 раза больше, чем для длинных.

Шероховатость поверхности в ламинарном течении проявляется слабо. В турбулентном же течении она может приводить к значительному увеличению коэффициента теплоотдачи при больших числах Рейнольдса.

В общем случае число Нуссельта растет с ростом числа Рейнольдса, причем асимптотическое поведение описывается степенным законом

$$Nu \sim C Re^m.$$

Показатель степени m , однако, может изменяться от $m=0$ для полностью развитого ламинарного течения до $m=0,9$ для полностью развитого турбулентного течения. Коэффициент C также изменяется. В ранних работах данные в различных диапазонах значений чисел Рейнольдса (и Прандтля) описывались с помощью нескольких подобных уравнений. В настоящее время более предпочтительными, в особенности для численных приложений, считаются интерполяционные формулы, охватывающие сразу весь диапазон изменения чисел Рейнольдса и Прандтля. Как при внешних, так и при внутренних течениях реальная форма канала или обтекаемого тела может отличаться от формы канала или тела — прототипа (труба, сфера, цилиндр, пластина). В случае внутренних течений в качестве эквивалентного диаметра трубы используется гидравлический диаметр $d_h = 4S/P$ (S — площадь поперечного сечения; P — периметр). Такой подход, однако, применим только для турбулентного течения и, как показано в § 2.1.6, если число единиц переноса теплоты мало. При больших значениях параметра NTU необходимо учитывать эффект перераспределения жидкости.

Обтекаемые тела (параметр $NTU=0$ по определению) очень хорошо моделируются сферой с эквивалентным диаметром $L=A/p'$, где A — площадь поверхности тела; p' — периметр максимального поперечного сечения, перпендикулярного потоку.

Теплообмен между частицей и жидкостью в псевдоожженных и насадочных слоях описывается с помощью корреляционных данных, относящихся к одиночной частице. Такой подход применим, однако, только в том случае,

когда число единиц переноса теплоты мало. В противном случае эффекты перераспределения жидкости могут приводить к тому, что более подходящими становятся корреляционные соотношения, описывающие теплообмен при течи в канале.

При естественной конвекции скорость движения среды определяется перепадом плотности $\Delta\rho$. Предполагая, что обусловленная этим перепадом потенциальная энергия $E_{pot} = gL\Delta\rho$ (g — ускорение силы тяжести; L — высота тела) преобразуется в кинетическую энергию $E_{kin} = \frac{1}{2}\rho u^2$, нетрудно получить следующее выражение для эквивалентного числа Рейнольдса:

$$\left. \begin{aligned} E_{pot} &\geq E_{kin}; \\ gL\Delta\rho &\geq \frac{1}{2}\rho u^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Домножая обе части на L^2/ν^2 , где ν — кинематическая вязкость, находим

$$\frac{gL^3}{\nu^2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \geq \left(\frac{uL}{\nu}\right)^2. \quad (2)$$

Комбинация величин в левой части неравенства (2) называется числом Грасгофа Gr . Видно, что это число пропорционально квадрату числа Рейнольдса в правой части неравенства (2). Для не очень больших чисел Прандтля ($Pr < 10$) корреляция данных приводит к соотношению

$$Gr = 2,5 Re_{eq}^2, \quad (3)$$

которое полезно для расчета теплообмена при совместной естественной и вынужденной конвекциях. Для комбинированного числа Рейнольдса в этом случае можно рекомендовать следующее выражение:

$$Re_{comb}^2 = [Re_{for}^2 + Re_{eq}^2]^{1/2}. \quad (4)$$

Соотношение (4) позволяет использовать уравнения, описывающие теплообмен при вынужденной конвекции, также и для случая естественной или смешанной конвекции, по крайней мере для нахождения хорошего первого приближения. Уравнение (4) показывает, что относительное направление вынужденной и естественной конвекций (однаковое или противоположное направление скоростей) не влияет на общий коэффициент теплоотдачи. Этот вывод согласуется с экспериментальными данными, за исключением узкой области неустойчивости в случае противоположного направления скоростей, в которой Re_{for} в Gr одного порядка величины.

Представляется, что теплообмен при внутренних и внешних течениях ньютоновских жидкостей изучен достаточно хорошо. Большинство данных, однако, получено только для среднего коэффициента теплоотдачи и для стандартных конфигураций. Необходимо больше данных о локальных значениях и для нестандартных конфигураций. Кроме того, еще не во всех случаях ясно влияние эффекта перераспределения жидкости на общие характеристики теплообменников. Иногда, как, например, в кожухотрубных теплообменниках, этот эффект учитывается соответствующим уменьшением коэффициента теплоотдачи, хотя в действительности он влияет и на перепад температуры. Необходимо также иметь больше данных, относящихся к ньютоновским жидкостям, смазкам, пастам и т. д. Рекомендуемые для расчета корреляционные соотношения получены в результате статистического усреднения экспериментальных данных, содержащих зачастую систематическую погрешность. Эта погрешность в свою очередь обусловлена часто неизвестными эффектами, и поэтому ее можно рассматривать как разброс данных.

В. Тепло- в массоперевос в насадочных, псевдооживых и перемешиваемых слоях. Необходимо четко раз-

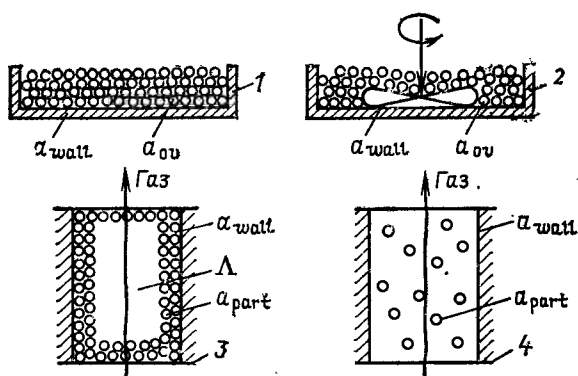


Рис. 1. Различные случаи теплоотдачи от частицы к жидкости и от частицы к стенке:

1 — насадочный слой; 2 — перемешиваемый слой; 3 — насадочная колонка; 4 — псевдоожженный слой

личать четыре различных, хотя и внутренне взаимосвязанных случая, показанных на рис. 1. Общим для всех них параметром является коэффициент теплоотдачи стенки α_{wp} . Кроме того, для насадочных слоев и слоев с перемешиванием вводится коэффициент теплопередачи α_{ov} , в то время как для насадочных колонн и псевдоожженных слоев используются коэффициенты теплоотдачи отдельных частиц. Для расчета же трубчатых реакторов используется еще и эффективный коэффициент теплопроводности Λ .

Основными механизмами теплообмена между стенкой и частицей являются теплопроводность сквозь газовый промежуток и излучение. На рис. 2 показаны локальный и средний коэффициенты конвективной теплоотдачи для находящейся в контакте с плоской поверхностью сферической частицы. Локальный коэффициент выражается следующим образом:

$$\alpha_{wp} = \lambda / (s + \delta), \quad (5)$$

где s — толщина газового промежутка; δ — модифицированная средняя длина свободного пробега молекул газа; λ — теплопроводность газа. Тот факт, что распределение α крайне неоднородно и имеет очень резкий максимум в точке касания [$\alpha_{wp, \max} (r=0) = \lambda / \delta$], в то время как среднее значение может быть сравнительно невелико, важен с практической точки зрения. Из-за того что δ обратно пропорционально давлению газа, величина α_{wp} также очень сильно зависит от давления и при переходе к условиям вакуума быстро убывает. Так как ширина газового промежутка s уменьшается с уменьшением размера частицы, то для маленьких частиц α_{wp} при нормальном давлении становится довольно большим. Применимость уравнения (5) и его интегральной формы для определения α_{wp} подтверждается экспериментами в насадочных слоях, псевдоожженных и слоях с перемешиванием. Однако экспериментальные

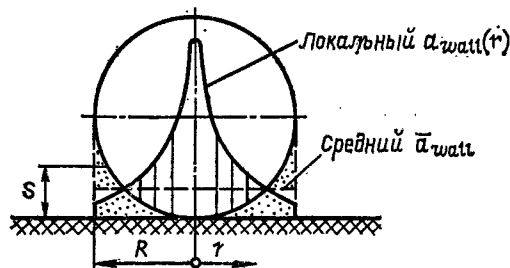


Рис. 2. Локальный и средний коэффициенты теплообмена между плоской поверхностью и находящейся на ней сферической частицей при наличии газовой атмосферы [см. (5)]

данные для насадочных колонн указывают на сильное уменьшение коэффициента теплоотдачи стенки по сравнению с α_{wp} , определяемым с помощью интегрирования (5). Кроме того, этот коэффициент зависит от скорости течения газа в насадочной колонне и отношения диаметра частиц к высоте колонны. Этот факт еще не объяснен, хотя наиболее вероятной причиной такого необычного поведения являются эффекты перераспределения жидкости. Здесь необходимы дальнейшие исследования.

Коэффициенты теплоотдачи от частицы к жидкости α_{pf} в насадочных колоннах и псевдоожженных слоях имеют важную общую особенность. Их можно выразить через коэффициент тепло- и массообмена одиночной частицы с помощью некоторых корректирующих множителей, если только число Пекле для частиц велико (например, больше 1000) или, что то же самое, мало число единиц переноса для насадочной колонны или псевдоожженного слоя. Если же число Пекле для частиц мало, т. е. велико число единиц переноса теплоты, то средние коэффициенты теплоотдачи могут оказаться иррационально малыми. По-видимому, этот эффект в соответствии с изложением в § 2.1.5 можно объяснить неоднородностью распределения скорости газового потока. Необходимо отметить, что в таком случае в расчетах уже нельзя использовать средний коэффициент теплоотдачи; необходим так называемый микропотоковый анализ, основанный на детальном учете локальных скоростей течения и локальных коэффициентов теплоотдачи. Локальные коэффициенты теплоотдачи при малых числах Пекле теоретически рассчитывались, но экспериментальные данные до настоящего времени отсутствуют. По-видимому, в этом направлении необходимы дальнейшие исследования.

Эффективную теплопроводность Λ в насадочных колоннах удается рассчитать с достаточно высокой степенью точности. Существуют два основных механизма радиального переноса теплоты в насадочных колоннах: молекулярный перенос от частицы к частице и турбулентный перенос теплоты от одной газовой полости к другой в результате процесса хаотического перемешивания. Так как молекулярный тепловой поток от частицы к частице сконцентрирован, как показано на рис. 2, почти полностью вблизи точки их контакта, то эти два механизма можно считать независимыми. Поэтому эффективная теплопроводность Λ определяется просто как сумма молекулярного и турбулентного коэффициентов теплопроводностей

$$\Lambda = \lambda_{s,0} + K(\rho c_p u)g x, \quad (6)$$

где $\lambda_{s,0}$ — вклад молекулярного, а $K(\rho c_p u)g x$ — турбулентного переноса; u — скорость протекающего газа; x — длина турбулентного смешения, пропорциональная размеру частиц. Для грубых оценок можно считать, что для труб коэффициент $K=1/8$, хотя он и зависит от отношения диаметров частиц и колонны. Обе величины $\lambda_{s,0}$ и x можно рассчитать для частиц почти произвольной формы, состоящих из хорошо или плохо проводящих материалов, для смеси частиц различного размера, малых и больших температур и давлений и даже с учетом вклада излучения. Все эти данные представлены в разд. 2.8.

Коэффициент теплопередачи для насадочного слоя α_{ov} (см. рис. 1) можно выразить через значения α_{wp} и $\lambda_{s,0}$, каждое из которых хорошо известно для различных типов насадочных слоев. Полный коэффициент теплоотдачи для перемешиваемого слоя зависит от эффективности перемешивающего устройства. В любом случае $\alpha_{ov} < \alpha_{wp}$. При нормальном давлении α_{ov} может составлять 30—50% α_{wp} . В условиях же вакуума движение частиц совершенно несущественно и коэффициент теплопередачи приближается к коэффициенту теплоотдачи стенки. Если перемешивающее устройство представляет собой не обычную мешалку, а, например, вибрирующую пластину, то слой может стать псевдоожженным. При этом коэффициент теплоотдачи

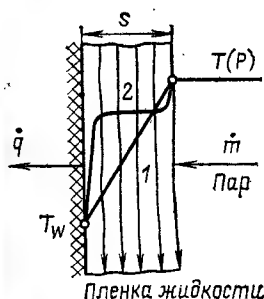


Рис. 3. Профиль температуры в пленке конденсата (линейный профиль при ламинарном / течении и S-образный при турбулентном 2)

может оказаться меньше коэффициента теплоотдачи насадочного слоя.

В том случае, когда с частицами связан интенсивный тепловой сток, как, например, при сушке вымораживанием или других процессах обезвоживания, перемешиваемый слой становится в большей или меньшей степени изотермическим. В этих условиях скорость процесса контролируется коэффициентом α_{wp} .

С. Конденсация. Конденсация происходит при соприкосновении пара с холодной поверхностью, температура которой меньше температуры насыщенного пара. Конденсат может или осаждаться в виде капель, или образовывать жидкую пленку. Поскольку пленочная конденсация является более распространенной в технических приложениях, она и рассматривается в первую очередь.

Пленочная конденсация. Механизм передачи теплоты при пленочной конденсации заключается в том, что теплота конденсации передается к поверхности сквозь жидкую пленку, в то время как гравитационные силы обуславливают расход конденсата. Скорость конденсации намного меньше максимального значения, которое определяется максвелловской скоростью молекул. Поэтому можно считать, что температура на поверхности раздела пар — жидкость равна температуре насыщенного пара. Это допущение применимо в большинстве практически важных случаев, однако для жидких металлов (ртуть) его справедливость обязательно должна проверяться.

Если течение жидкой пленки ламинарное и не возмущается поверхностными волнами, то перенос теплоты в ней происходит в результате теплопроводности. Пренебрегая силами ускорения и теплоемкостью пленки, можно показать, что квазистационарный профиль температуры будет линейным (рис. 3). Поэтому коэффициент теплообмена, определяемый как

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{T(p) - T_w}, \quad (7)$$

равен просто

$$\alpha = \lambda_l / s, \quad (8)$$

где s — толщина пленки; λ_l — теплопроводность конденсата. В этом и является классический подход, предложенный Нуссельтом [13].

В свою очередь толщина s определяется балансом вязких, гравитационных и внешних сил трения. В ламинарном течении касательное напряжение на стенке

$$\tau_w \sim \eta_l u / s, \quad (9)$$

где η_l — вязкость жидкости; u — средняя скорость течения в пленке. Полагая, что при отсутствии внешних сил

$$\tau_w = g \rho_l s, \quad (10)$$

получаем

$$s^3 = \frac{\nu_l^3}{g} \frac{\dot{m}}{\eta_l}, \quad (11)$$

где g — ускорение силы тяжести; ρ_l , ν_l — плотность и кинематическая вязкость жидкости; $\dot{m}$ — массовый расход на единицу длины смоченного периметра. Так как

$$\frac{\dot{m}}{\eta_l} = Re_l \quad (12)$$

— число Рейнольдса для пленки, то отношение ν_l^3/g представляет собой характерную толщину пленки в степени $1/3$

$$z = \sqrt[3]{\frac{\nu_l^3}{g}}. \quad (13)$$

Число Нуссельта удобно выразить через этот характерный размер

$$Nu = \alpha z / \lambda_l. \quad (14)$$

Как видно из (11), в ламинарном пленочном течении $Nu \sim Re_l^{-1/3}$. Чисто ламинарное течение пленки реализуется только при малых числах Рейнольдса. Возмущения, обусловленные внутренними и поверхностными неустойчивостями, влияют на картину течения при больших числах Рейнольдса и Капицы Ka ,

$$Ka = \left(\frac{g \rho_l z^2}{\sigma} \right)^3, \quad (15)$$

где σ — поверхностное натяжение. Число Ka запишем в виде

$$Ka = g \eta_l^4 / (\rho_l \sigma^3). \quad (16)$$

Оно позволяет учесть совместное влияние сил поверхностного натяжения и гравитационных и вязких сил на устойчивость течения жидкости вблизи межфазной границы. В области вблизи стенки устойчивость течения зависит только от числа Рейнольдса.

Как только течение становится неустойчивым, перенос теплоты через жидкую пленку увеличивается и число Нуссельта становится больше, чем при невозмущенном ламинарном течении,

$$Nu > Nu \sim Re_l^{-1/3}. \quad (17)$$

Число Прандтля, конечно, также влияет на число Нуссельта, поэтому в общем случае число Nu является функцией Re_l , Pr_l , Ka .

Для расчета этой функции необходимо сделать некоторые допущения о механизмах турбулентной и поверхностной неустойчивостей. Хотя эти допущения в большей или меньшей степени произвольны, они тем не менее позволяют установить, что простое степенное представление зависимости $Nu(Re_l, Pr_l, Ka)$ уже несправедливо. С другой стороны, в большинстве практических случаев для различных веществ числа Прандтля и Капицы примерно пропорциональны. Поэтому понятно, что некоторые авторы представляют свои результаты как функцию одного только числа Прандтля. Возможно стоит упомянуть, что при большом значении числа Прандтля (примерно равном 20) свойства турбулентному течению характеристики теплообмена наблюдаются уже при малых числах Рейнольдса (около 10), тогда как при меньших числах Прандтля переход к турбулентному режиму теплопереноса наступает при числах Рейнольдса, примерно равных 300. На рис. 4 изображены зависимости $Nu(Re_l, Pr_l, Ka)$ для различных веществ, характеризующихся малыми и большими значениями чисел Прандтля и Капицы. Эти зависимости построены на основе экспериментальных данных, относящихся к таким условиям, в которых внешнее поверхностное трение отсутствует, т. е. параллельный пленке компонент скорости пара равен нулю. Если же конденсация происходит внутри вертикальной трубы, причем преимущественно в ее верхней части, то

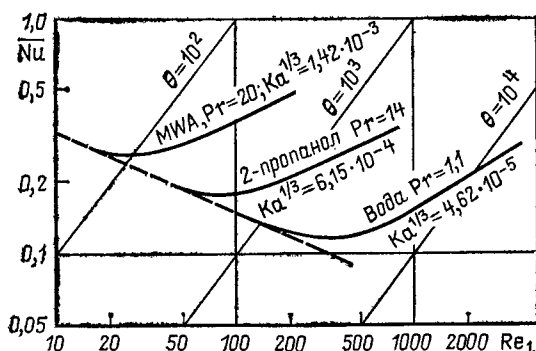


Рис. 4. Теплоотдача при конденсации (сплошные кривые) при различных значениях чисел Прандтля и Каппи [14] (MWA — водный азеотропный раствор 1-метаксен-2-пропанола); штриховая кривая — нижний предел для ламинарного течения

скорость течения пара может быть велика, что приводит к дополнительному внешнему трению, действующему на жидкую пленку. Если скорость пара направлена вниз, это приводит к уменьшению толщины пленки и увеличению теплового потока к стенке. Такое увеличение, особенно в переходном режиме, может достигать 100%.

Обычно в реализующихся на практике ситуациях известными величинами являются разность температур пара и стенки ΔT и высота стенки L , а не число Рейнольдса Re_l . Связь между независимыми переменными ΔT и L и числами Re_l и Nu получим с помощью баланса энергии

$$\alpha L \Delta T = \dot{m} \Delta h_{lg}; \quad (18)$$

$$\frac{\alpha z}{\lambda_l} = \frac{\dot{m}}{\eta_l} \frac{\eta_l}{\lambda_l} \frac{\Delta h_{lg} z}{L \Delta T} \quad (19)$$

или

$$\overline{Nu} = Re_l \frac{1}{\theta}, \quad (20)$$

где

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\eta_l \Delta h_{lg} z}{\lambda_l L \Delta T} = \frac{c_p \eta_l}{\lambda_l} \frac{\Delta h_{lg}}{c_p \Delta T} \times \left(\frac{\eta_l}{g L^3} \right)^{1/3} = \frac{Pr_l Ph}{Ga^{1/3}}.$$

Здесь $1/\theta$ можно рассматривать как обратную разность безразмерных температур. Линии постоянного уровня θ также изображены на рис. 4. Отметим, что во многих практических случаях конденсаторы функционируют только в переходном режиме, где коэффициент теплоотдачи очень слабо зависит от Re_l , или ΔT , или L .

Выше рассматривалась конденсация на вертикальных стенках. Такие же корреляционные соотношения применимы и для описания теплоотдачи в других конфигурациях, если только использовать соответствующие корректирующие множители.

В том случае, когда конденсации происходит на кожухе горизонтального кожухотрубного теплообменника, конденсат естественно стекает вниз с одной трубы на другую. Хотя падающие капли генерируют турбулентное движение пленки конденсата, этот эффект не компенсирует эффект увеличения толщины пленки, поэтому в целом теплообмен ухудшается. Как правило, необходимо стремиться к возможно более быстрому удалению конденсата с поверхности, что достигается, например, применением рифленых или гофрированных поверхностей. Эксперименты показывают, что использование вертикальных труб с желобками на их поверхности вместо гладких вертикальных позволяет увеличить коэффициент теплоотдачи до 5 раз.

Наличие инертного газа приводит к значительному снижению теплоотдачи. Одним из возможных способов

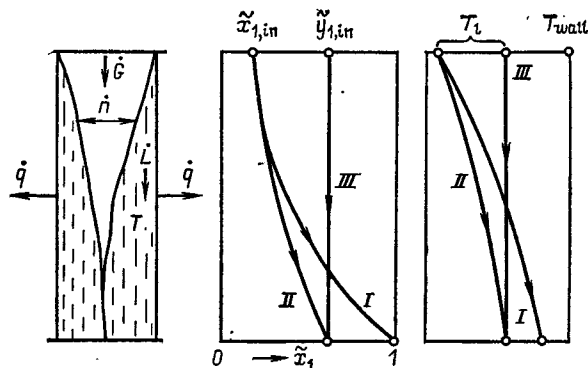


Рис. 5. Различные типы конденсации в вертикальной трубе: I — слабый массообмен в жидкой фазе и сильный — в паровой; II — интенсивный массообмен в жидкой и в паровой фазах; III — слабый массообмен в паровой фазе

подавления этого эффекта является повышение скорости потока пара для вытеснения инертного газа из области вблизи поверхности конденсации.

При рассмотрении конденсации смеси паров, приводящей к образованию смешивающихся жидкостей, возникает вопрос о температуре пленки конденсата, которая зависит от фазового равновесия, скорости конденсации и процессов массообмена в паровой и жидкой фазах. Как показано в § 2.1.8, в этом случае основными безразмерными параметрами являются

$$\varphi_g = \dot{n} / (\tilde{\rho}_g \beta_g) \quad (21)$$

и

$$\varphi_l = \dot{n} / (\tilde{\rho}_l \beta_l) \quad (22)$$

для паровой и жидкой фаз соответственно, где $\dot{n}$ — скорость конденсации, кмоль/(м²·с); $\tilde{\rho}_{g,l}$ — плотности; $\beta_{g,l}$ — коэффициенты массоотдачи паровой и жидкой фаз соответственно. На рис. 5 показано, каким образом может изменяться температура пленки конденсата T_l и ее состав x_1 вдоль вертикальной трубы конденсатора в различных специальных случаях. Случай I соответствует значениям $\varphi_l > 5$, $\varphi_g < 0,1$, когда эффекты разделения проявляются наиболее сильно, а температура пленки в нижнем конце трубы минимальна. В случае II ($\varphi_l < 0,1$; $\varphi_g < 0,1$) эффекты разделения еще заметны. В случае III происходит полная конденсация, что бывает всегда при $\varphi_g > 5$. При этом смесь конденсируется в условиях постоянного состава. Во всех этих случаях средняя разность температур пленки и стенки различна. На практике чаще всего реализуются промежуточные ситуации. Обычно коэффициент теплоотдачи определяется на основе экспериментальных данных в предположении, что реализуется случай I или II.

Капельная конденсация. Если холодная поверхность конденсатора обладает гидрофобными свойствами, конденсация может приводить к образованию на ней отдельных капель, а не сплошной жидкой пленки. В этом случае коэффициент теплоотдачи значительно больше, чем при пленочной конденсации. Наблюдались значения коэффициента теплоотдачи вплоть до 100 000 Вт/(м²·К). Такие значения близки к максимально возможному значению коэффициента теплоотдачи от твердой стенки к газу, по порядку величины равному $\alpha_{\max} \approx 1/6 (\rho_c \bar{w})_g$, где $\bar{w}$ — средняя тепловая скорость молекул пара и газа. Но капельная конденсация может происходить только на предварительно обработанных поверхностях, покрытых специальными гидрофобными активаторами. С течением времени, однако, это покрытие постепенно смывается и капельная конденсация переходит в пленочную. Вследствие этого область техни-

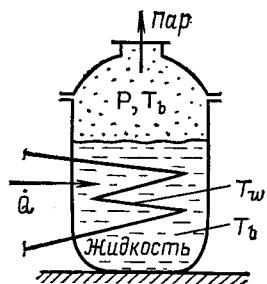


Рис. 6. Кипение в большом объеме

ческих применений капельной конденсации довольно ограничена.

Д. Испарение и кипение. Если нагреть в автоклаве жидкость до температуры, равной температуре кипения T_b , то начнется ее испарение. При малом перепаде температур $T_w - T_b$ испарение происходит только с поверхности раздела пар — жидкость. При этом теплота от спирали к слегка перегретой жидкости передается путем естественной конвекции (рис. 6). Поэтому коэффициент теплоотдачи в этом режиме можно определить с помощью корреляционных соотношений для естественной конвекции, приведенных в § 2.5.7. Коэффициент теплоотдачи зависит от числа Грасгофа $Gr = \beta g \Delta p / (\rho \nu^2) = \beta g \gamma \Delta T / \nu^2$, где γ — коэффициент теплового расширения. В большинстве практических случаев число Грасгофа имеет порядок величины $10^8 - 10^{10}$. В этом случае можно считать, что $Nu \approx \sqrt[3]{Gr Pr}$, где $Nu = \alpha_l / \lambda_l$, l — характерная длина горячей поверхности. Нетрудно убедиться, что в таком режиме l в число определяющих параметров не входит. Определяя число Нуссельта так же, как и в случае конденсации, $Nu = \alpha z / \lambda_l$, где $z = \sqrt[3]{\nu_l^2 / g}$, нетрудно получить для испарительного режима естественной конвекции

$$Nu = C \sqrt[3]{Pr} \sqrt[3]{\gamma \Delta T}, \quad (23)$$

где постоянная $C \approx 0,1 \div 0,2$.

Как только достигается некоторая критическая разность температур $T_w - T_b$, в определенных активных точках греющей поверхности начинают формироваться пузырьки. Отрываясь от поверхности и всплывая вверх, они в значительной степени интенсифицируют естественную конвекцию и теплообмен. Значение коэффициента теплоотдачи в режиме естественной конвекции при критическом температурном перепаде ΔT_{ce} , соответствующем началу пузырькового кипения, можно использовать для корреляции данных по коэффициенту теплоотдачи в режиме пузырькового кипения, где $\Delta T > \Delta T_{ce}$ и $\alpha > \alpha_{ce}$. Широко применяются соотношения типа

$$\alpha = \alpha_{ce} \left(\frac{\Delta T}{\Delta T_{ce}} \right)^m, \quad (24)$$

где показатель степени m в зависимости от давления и физических свойств жидкости и поверхности может изменяться примерно от 1 до 4. Неплохую аппроксимацию можно получить, если использовать среднее значение $m = 2,5$. Критическая разность температур ΔT_{ce} зависит от тех же параметров, что и m . В общем случае обе эти величины определяются экспериментально.

По мере дальнейшего повышения температуры достигается второе критическое значение $\Delta T = \Delta T_{cv}$ и наступает так называемый кризис кипения. При этом происходит полное слияние пузырьков и образование сплошной паровой пленки между поверхностью нагрева и жидкостью. В результате коэффициент теплоотдачи уменьшается на порядки величины. На рис. 7 показана полученная в экспериментах зависимость коэффициента теплоотдачи α от перепада температур для воды при давлении $1 \cdot 10^6$ Па во

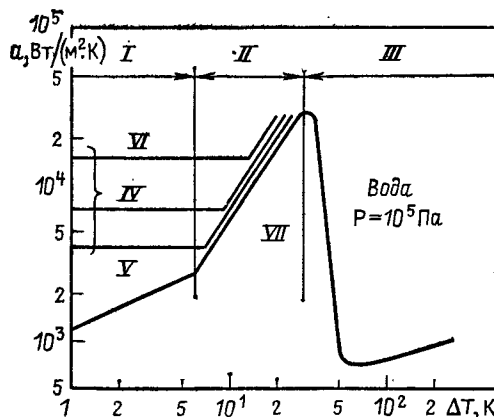


Рис. 7. Теплоотдача при кипении в большом объеме: I — испарение при естественной конвекции; II — пузырьковое кипение; III — пленочное кипение; IV — испарение при вынужденной конвекции; V — малые скорости движения жидкости; VI — большие скорости движения жидкости; VII — точка кризиса кипения

всех трех режимах, описанных выше. Возможен также четвертый режим, соответствующий вынужденной конвекции жидкости при ее принудительном перемешивании, например, с помощью мешалки. В этом режиме образование пузырьков вообще не происходит и коэффициент теплоотдачи зависит главным образом от скорости жидкости, а не от разности температур. В режиме пузырькового кипения вынужденная конвекция также приводит к увеличению коэффициента теплоотдачи до 2 раз. Режимы IV и II обычно реализуются при испарении жидкости внутри горизонтальных и вертикальных труб. Если объемное паросодержание ϵ мало, то превалирует режим II. По мере возрастания ϵ доминирующим становится режим IV, так как скорость пара значительно увеличивается вместе с ϵ . Для расчета коэффициента теплоотдачи в трубе α_{2Ph} в режиме IV можно воспользоваться эмпирической корреляцией между α_{2Ph} и перепадом давления при течении в трубе вязкого двухфазного потока ΔP_{2Ph}

$$\frac{\alpha_{2Ph}}{\alpha_{1Ph,1}} = C (Pr_l) \left(\frac{\Delta P_{2Ph}}{\Delta P_{1Ph,1}} \right)^n. \quad (25)$$

Нижний индекс 1Ph, 1 означает однофазное течение жидкости. Показатель степени $n \approx 0,4 \div 0,5$, коэффициент C зависит от числа Прандтля жидкости. Падение давления описывается эмпирической корреляционной зависимостью, приведенной в § 2.3.2.

Нужно, однако, помнить, что как экспериментальные данные по α_{2Ph} и ΔP , так и эти корреляционные зависимости характеризуются большой степенью неопределенности (разброс данных составляет $\pm 100\%$, а иногда и больше). Причиной этого является гораздо меньшая устойчивость двухфазного течения по сравнению с однофазным. В однофазном течении имеется единственная ограничительная переходная область, в то время как в двухфазном течении таких областей из-за большого числа возможных различных структур течения может быть несколько.

Точка кризиса кипения, или значение второй критической разности температур, представляет большой практический интерес в том случае, когда задан тепловой поток $q = \alpha \Delta T$. Как только тепловой поток превышает второе критическое значение, температура поверхности быстро увеличивается на сотни градусов, что может привести к ее разрушению. Для расчета критического теплового потока при кипении в большом объеме используются эмпирические корреляционные соотношения, содержащие зависимость от основных физических свойств. В горизонтальных трубах, из-за того что внутренняя поверхность смочена не

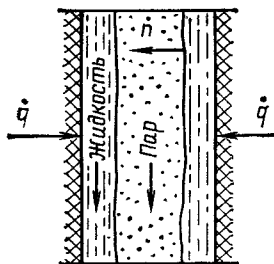


Рис. 8. Испаритель со стекающей жидкой пленкой

полностью, критический тепловой поток может быть значительно меньше (до 10 раз). Для вертикальных труб критический тепловой поток более близок к реализующемуся при кипении в большом объеме.

При рассмотрении испарения смесей жидкостей возникает тот же вопрос, что и при конденсации смеси паров, а именно о расчете температуры жидкости. Как и раньше, следует различать предельные случаи, которые реализуются при некоторых значениях безразмерных комплексов, $\Phi_g = \dot{n} / \rho_g \beta_g = -\ln(\dot{v}_1 - \dot{y}_1^*) / (\dot{v}_1 - \dot{y}_1)$ и $\Phi_l = \dot{n} / \rho_l \beta_l = -\ln(\dot{v}_1 - \dot{x}_1) / (\dot{v}_1 - \dot{x}_1)$. Если $\Phi_g > 5$ и $\Phi_l < 0,1$, то максимальный эффект разделения получается при поверхностном испарении. Такие условия обычно реализуются в автоклавах, как показано на рис. 6, так как в обоих режимах — естественной конвекции и пузырькового кипения — фазовый переход происходит на границе газ—жидкость. В этом случае Φ_g можно оценить следующим образом. Поток пара со стороны жидкости определяется уравнением

$$\dot{n} = \frac{\alpha_{\text{boil}} \Delta T}{\Delta h_{gl}} \frac{A_{\text{coil}}}{A_{\text{liq, inter}}} \quad (26)$$

Полагая $\alpha_{\text{boil}} = 5000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, $\Delta T = 10 \text{ К}$, $\Delta h_{gl} = 2260 \text{ КДж/кг}$, $A_{\text{coil}}/A_{\text{liq, inter}} = 10$, находим, что $\dot{n} = 0,22 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$. Коэффициент массоотдачи со стороны пара $\rho_g \beta_g$ можно оценить с помощью закона Льюиса: $\rho_g \beta_g =$

$= \alpha_g / c_{pg} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$ при $\alpha_g = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ и $c_{pg} = 2 \text{ КДж/(кг} \cdot \text{К)}$. Отсюда получаем, что $\Phi_g = 44 > 5$. Можно также оценить и Φ_l . Температура поверхности кипящей воды при давлении $1 \cdot 10^6 \text{ Па}$ равна 100°С , внутри объема вода слегка перегрета и ее температура достигает $100,4^\circ \text{С}$. Используя эти данные, нетрудно оценить коэффициент теплоотдачи с поверхности жидкости: $\alpha_{\text{inter}} = \alpha_{\text{boil}} \times (A_{\text{coil}}/A_{\text{inter}})(\Delta T/\Delta T_{\text{inter}})$, откуда следует, что $\alpha_{\text{inter}} = 1,25 \cdot 10^6 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Число Льюиса для жидкости (воды) равно $Le = k_l/\delta_l = 140$ при $k_l = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$ и $\delta_l = 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$. Применяя закон Льюиса, находим $\rho_l \beta_l = Le^{-0,6} \alpha_{\text{inter}}/c_{pl} = 15 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$. Отсюда получаем, что $\Phi_l = 0,22/15 = 0,015 < 0,1$.

Полученные выше значения параметров позволяют заключить, что состав жидкости вблизи межфазной поверхности $\dot{x}_1^*$ практически такой же, что и внутри объема $\dot{x}_1$, а мгновенное значение плотности, потока пара всегда находится в равновесии с жидкостью, т. е. $\dot{v}_1 = \dot{y}_1^*(\dot{x}_1)$. Такой тип испарения называется также открытым дистилляционным процессом. Ему соответствует случай I процесса конденсации, изображенный на рис. 5.

Несколько другая ситуация реализуется при испарении текущей вниз жидкой пленки (рис. 8). Поток пара в этом случае имеет следующий порядок величины: $\dot{n} = \alpha_{\text{film}} \Delta T / \Delta h_{lg} = 0,0088 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$, где $\alpha_{\text{film}} = 2000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К})$; $\Delta T = 10 \text{ К}$; $\Delta h_{lg} = 2260 \text{ КДж/кг}$. Полагая $\rho_l \beta_l = 15 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$, находим, что $\Phi_l = 5,8 \cdot 10^{-4} < 0,1$, как и в случае кипения в большом объеме. Однако в паровой фазе в соответствии с законом Льюиса $\rho_g \beta_g = 5 \cdot 10^{-2} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$ при $\alpha_g = 100 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ и $c_{pg} = 2 \text{ КДж/(кг} \cdot \text{К)}$. Отсюда получаем, что $\Phi_g = 0,17$. Эти цифры указывают на то, что в обеих фазах составы в объеме и вблизи межфазной границы одинаковы и находятся в равновесии друг с другом, т. е. $\dot{y}_1 = \dot{y}_1(\dot{x}_1)$ и $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(\dot{y}_1)$. Такой процесс называется также закрытым дистилляционным процессом. Ему соответствует случай II при конденсации. Эффект разделения при испарении текущей вниз пленки меньше, чем в автоклаве, из-за большего значения коэффициента массообмена в паровой фазе.

Раздел 2.2

ТЕЧЕНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ¹

2.2.1. Введение и основные положения

К. Герстен

А. Уравнения движения жидкости. Основные концепции и определения. Жидкая среда рассматривается как сплошная изотропная субстанция, каждый элемент которой может непрерывно деформироваться под действием приложенных к его поверхности касательных напряжений. Под жидкой средой понимаются как жидкости, так и газы.

Хотя жидкая среда, неважно жидкость это или газ, на микроскопическом, т. е. молекулярном, уровне дискретна, удобно считать, что каждый ее малый элемент содержит много молекул, и описывать его с помощью усредненных статистических свойств. В дальнейшем всюду используется именно этот подход, согласно которому детальная молекулярная структура не рассматривается, а реальная среда заменяется некоторой непрерывной субстанцией. При этом считается, что наименьший характерный размер в рассматриваемом течении велик по сравнению

со средним межмолекулярным расстоянием (модель сплошной среды²).

Физическое поведение жидкости можно описывать с помощью ее термодинамических и переносных свойств. Таким макроскопическим свойством является плотность жидкости, определяемая с помощью следующего типичного для механики сплошных сред предельного перехода:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (1)$$

В соответствии с этим определением плотность есть отношение массы к объему при его стремлении к весьма малому значению при условии, что этот объем еще достаточно велик на микроскопическом уровне, т. е. содержит большое число молекул.

Поведение жидкости описывается следующими локальными макроскопическими свойствами, которые могут зависеть от температуры T и давления p .

² Для газов модель сплошной среды применима в том случае, когда мало число Кнудсена, т. е. $Kn = l_0/l < 0,1$, где l_0 — средняя длина свободного пробега молекул; l — характерный масштаб поля течения [6, 7]. В дальнейшем для краткости жидкую среду будем называть просто жидкостью. — Прим. пер.

¹ Пер с англ. М. В. Брыкина.

Термодинамические свойства

Переносные свойства

Плотность ρ
Скорость звука $u_{\text{sound}} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

$$\text{Удельная теплоемкость } c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p; \quad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$$

$$\text{Коэффициент расширения } \beta = \left(-\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p / \rho$$

Кроме того, должно быть известно уравнение состояния $\rho = \rho(p, T)$ (2)

или калорическое уравнение состояния

$$h = h(p, T). \quad (3)$$

Предполагается, что жидкость находится в состоянии локального термодинамического равновесия, т. е. каждой точке ее объема можно приписать единственную термодинамическую равновесную температуру.

В механике жидкости для описания движения обычно используется так называемый эйлеровский подход, в рамках которого вместо того, чтобы следить за каждым элементом жидкости, рассматривается временное изменение характеристик в каждой фиксированной точке пространства. Все величины рассматриваются как функции положения (радиуса-вектора $\mathbf{r}$) и времени t .

Для вектора скорости имеем

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{r}, t). \quad (4)$$

Если $\mathbf{w}$ не зависит от времени t , течение называется стационарным, в противном случае — нестационарным. Линии, касательные к которым в каждой точке параллельны вектору скорости, называются линиями тока.

В рамках эйлеровского описания движения жидкости необходимо уметь находить скорость изменения во времени любой характеристики отдельного жидкостного объема. Для произвольной скалярной величины f (например, плотности, температуры, компонент скорости) такую субстанциональную, или материальную, производную можно записать в виде

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } f, \quad (5)$$

где первое и второе слагаемые в правой части называются локальной и конвективной производными соответственно. Если f представляет собой какой-нибудь компонент вектора скорости, то Df/Dt является соответствующей субстанциональной компонентой ускорения, складывающейся из локальной и конвективной составляющих.

Тензор напряжений $\mathbf{S}$ можно записать в виде симметричной матрицы (имеющей шесть компонент). Сумма ее диагональных элементов равна нулю. Пусть теперь в момент времени t жидкость ограничена плоской поверхностью, проходящей через точку с радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Обозначим $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали к поверхности в этой точке. Результирующую силу, действующую на единицу площади поверхности (имеющую нормальную и касательную составляющие), представим в виде

$$\mathbf{s} = \mathbf{S} \mathbf{n} - \rho \mathbf{n}. \quad (6)$$

Для ньютоновских жидкостей тензор напряжений $\mathbf{S}$ связан с тензором скоростей деформаций $\mathbf{W}$ простым линейным соотношением

$$\mathbf{S} = \eta \mathbf{W}, \quad (7)$$

где η — динамическая, или сдвиговая, вязкость.

Вообще говоря, в уравнении (7) должен фигурировать и другой коэффициент вязкости, называемый объемной вязкостью (или вторым коэффициентом вязкости). Объемная вязкость вызывает появление напряжений при изменениях объема элемента жидкости. Этот эффект исчезает у несжимаемых жидкостей ($\rho = \text{const}$). Однако и в случае сжимаемых жидкостей объемная вязкость обычно столь мала, что ею в большинстве случаев можно пренебречь (см. [1]).

Матрицы тензоров $\mathbf{S}$ и $\mathbf{W}$ зависят от выбора системы координат. В декартовой системе они имеют вид

$$\mathbf{w} = (u, v, w);$$

$$\text{div } \mathbf{w} = \nabla \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (8)$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right); \quad (9)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \mathbf{w} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div } \mathbf{w} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \text{div } \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Выражения для тензоров $\mathbf{S}$ и $\mathbf{W}$ в других координатных системах можно найти, например, в [2].

Основные уравнения течения в интегральной форме. В большинстве задач механики жидкостей удобно рассматривать фиксированный в пространстве контрольный объем, сквозь который течет жидкость. Это соответствует эйлеровскому способу описания сплошной среды. Границей контрольного объема V является замкнутая поверхность S поверхности. Элемент поверхности можно определить вектором $\mathbf{n} dS$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, dS — площадь этого элемента. Для содержащейся в контрольном объеме жидкости можно написать следующие законы сохранения, представляющие собой интегральную форму основных уравнений механики сплошных сред.

1. Уравнение неразрывности

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (12)$$

Масса внутри контрольного объема изменяется только в результате потока массы через поверхность. В стационарном случае первое слагаемое равно нулю.

2. Уравнение импульсов (уравнение движения)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{w} dV + \iint_S \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S. \quad (13)$$

Изменение импульса жидкости в контрольном объеме равно сумме приложенных к объему массовой $\mathbf{F}_B$ и поверхностной $\mathbf{F}_S$ сил, которая является результирующей всех напряжений, действующих на границе,

$$\mathbf{F}_B = \iiint_V \mathbf{k} dV, \quad (14)$$

где $\mathbf{k}$ — массовая сила, действующая на единицу объема. Для силы тяжести

$$\mathbf{k} = \rho \mathbf{g}, \quad (15)$$

где $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения;

$$\mathbf{F}_S = \iint_S \mathbf{s} dS, \quad (16)$$

причем напряжение $\mathbf{s}$ определяется уравнением (6).

3. Уравнение момента импульса

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{w}) dV + \iint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{w}) \rho \mathbf{w} \mathbf{n} dS = \mathbf{M}_B + \mathbf{M}_S. \quad (17)$$

Изменение момента импульса в контрольном объеме равно сумме моментов массовой $\mathbf{M}_B$ и поверхностной $\mathbf{M}_S$ сил. Положение элемента объема или элемента поверхности по отношению к точке, относительно которой вычисляется момент, определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$

$$\mathbf{M}_B = \iiint_V (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) dV; \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_S = \iint_S (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) dS. \quad (19)$$

4. Уравнение энергии (первый закон термодинамики)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \left(\frac{1}{2} w^2 + u \right) \rho dV + \iint_S \left(\frac{1}{2} w^2 + + h \right) \rho \mathbf{w} \mathbf{n} dS = P_B + P_M + P_H. \quad (20)$$

Изменение кинетической и внутренней энергии в контрольном объеме равно сумме потоков энергий, поступающих в объем извне. Выбрана такая система знаков, что приток энергии внутрь объема считается положительным. Входящие в уравнение (20) слагаемые мощности (энергия в единицу времени) имеют следующий вид:

$$P_B = \iiint_V \mathbf{w} \mathbf{k} dV \quad (21)$$

и представляют собой работу массовых сил (потенциальную энергию); P_M — механическая работа, производимая над жидкостью насосом, рабочим валом (отрицательная для турбин); P_H — приток теплоты в систему из окружающей среды за счет теплопроводности или излучения. Эта величина обозначается также $\dot{Q}$.

В уравнении (20) опущено слагаемое, описывающее работу поверхностных сил. В большинстве практических случаев при соответствующем выборе контрольного объема эта работа оказывается пренебрежимо малой.

5. Уравнение кинетической энергии (механической энергии)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} w^2 \rho dV + \iint_S \frac{1}{2} w^2 \rho \mathbf{w} \mathbf{n} dS = = P_S + P_B + P_M - P_D - P_P. \quad (22)$$

Три слагаемых в правой части, отсутствующих в уравнении (20), имеют следующий смысл: P_S — работа всех напряжений, приложенных к поверхности; если по-прежнему работа касательных сил пренебрежимо мала, то

$$P_S = - \iint_A p \mathbf{w} \mathbf{n} dS; \quad (23)$$

P_D — диссипация, т. е. потери механической энергии в результате трения и турбулентного перемешивания; из второго закона термодинамики следует, что P_D всегда положительна; P_P — работа, затрачиваемая на изменение плотности жидкости: для того чтобы повысить плотность в контрольном объеме, должна быть затрачена работа на сжатие. Это эффект сжимаемости

$$P_P = \iiint_V \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = - \iiint_V p \operatorname{div} \mathbf{w} dV. \quad (24)$$

6. Уравнение внутренней энергии

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u \rho dV + \iint_S u \rho \mathbf{w} \mathbf{n} dS = P_H + P_D + P_P. \quad (25)$$

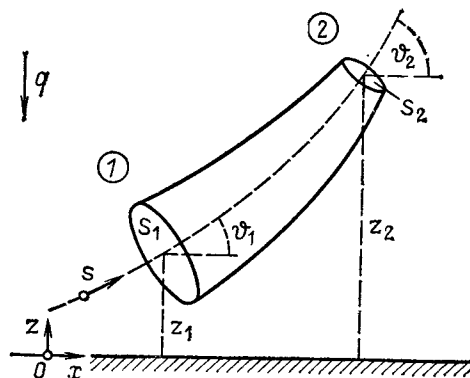


Рис. 1. Течение в трубке тока

Внутренняя энергия контрольного объема может изменяться только из-за притока теплоты P_H , диссипации P_D или в результате сжатия или расширения P_P .

Уравнения (12) — (25) универсальны. Они справедливы как для газов, так и для жидкостей, включая и невязкотонские. Эти уравнения не зависят от термодинамических и переносных свойств рассматриваемой среды. Течение может быть ламинарным или турбулентным. Этими же интегральными уравнениями баланса описываются и разрывы (скачки). Приведенные выше уравнения, записанные в интегральном виде, можно конкретизировать, например, для описания течения в канале (рис. 1). Предполагается, что течение стационарно, площади входного S_1 и выходного S_2 сечений малы по сравнению с перепадом высот $z_2 - z_1$. Ускорение силы тяжести $\mathbf{g}$ постоянно и направлено в сторону уменьшения координаты z . Касательные напряжения во входном и выходном сечениях пренебрежимо малы. Статическое давление p считается в каждом поперечном сечении постоянным, в то время как w , ρ , T , h , u могут изменяться в радиальном направлении. Используются следующие усредненные по сечению величины: средняя скорость

$$\bar{w} = \frac{1}{S} \iint_S w dS; \quad (26)$$

средняя плотность

$$\bar{\rho} = \frac{1}{wS} \iint_S \rho w dS; \quad (27)$$

средняя температура

$$\bar{T} = \frac{1}{\rho w S} \iint_S T \rho w dS; \quad (28)$$

корректирующий множитель для кинетической энергии

$$\alpha = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{w}^3 S} \iint_S \rho w^3 dS; \quad (29)$$

корректирующий множитель для импульса

$$\beta = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{w}^2 S} \iint_S \rho w^2 dS; \quad (30)$$

средняя удельная энтальпия

$$\bar{h} = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{w} S} \iint_S h \rho w dS.$$

Среднее значение $\bar{h}$ называется среднemasсовой энтальпией. Соответствующие ей значения плотности и температуры в общем случае отличны от средних значений $\bar{\rho}$ и $\bar{T}$. При постоянной плотности (несжимаемая жидкость)

уравнения (27) — (30) упрощаются, так как средние значения становятся зависящими только от распределения скорости в поперечном сечении. Контрольным объемом в данном случае является объем канала, ограниченный сечениями 1 (входным) и 2 (выходным). Используя определенные выше средние значения для описания течения в изображенном на рис. 1 канале, можно получить следующие уравнения:

уравнение сохранения массы

$$\bar{\rho}_2 \bar{\omega}_2 S_2 = \bar{\rho}_1 \bar{\omega}_1 S_1 = \dot{M}, \quad (31)$$

где $\dot{M}$ — массовый расход в канале;

уравнение импульсов в направлении оси x (горизонтальном)

$$(\rho_2 + \beta_2 \bar{\rho}_2 \bar{\omega}_2^2) S_2 \cos \theta_2 = (\rho_1 + \beta_1 \bar{\rho}_1 \bar{\omega}_1^2) S_1 \cos \theta_1 - F_x \quad (32)$$

и в направлении оси z (вертикальном)

$$(\rho_2 + \beta_2 \bar{\rho}_2 \bar{\omega}_2^2) S_2 \sin \theta_2 = (\rho_1 + \beta_1 \bar{\rho}_1 \bar{\omega}_1^2) S_1 \sin \theta_1 - gM - F_z, \quad (33)$$

где F_x и F_z — компоненты силы (нормальной и тангенциальной), с которой жидкость действует на стенки канала в направлениях осей x и z соответственно (полная масса жидкости в контрольном объеме равна M);

уравнение энергии

$$h_2 + \alpha_2 \cdot \frac{1}{2} \bar{\omega}_2^2 + gz_2 = h_1 + \alpha_1 \cdot \frac{1}{2} \bar{\omega}_1^2 + gz_1 + w_{t12} + q_{12}, \quad (34)$$

где

$$w_{t12} = \frac{P_M}{\dot{M}} \quad (35)$$

есть удельная работа, производимая внешним устройством (насосом или мешалкой) между сечениями 1 и 2. Слагаемое $q_{12} = P_H / \dot{M}$ (36)

представляет собой удельную теплоту (не следует путать ее с удельными теплоемкостями c_p и c_v), передаваемую жидкости между сечениями 1 и 2. В соответствии с уравнением энергии (34) сумма удельной энтальпии $\bar{h}$, кинетической энергии $\frac{1}{2} \alpha \bar{\omega}^2$ и потенциальной энергии gz может изменяться только из-за притока теплоты или совершенной внешними устройствами работы. Отметим, что это уравнение справедливо для любых течений, как вязких, так и невязких;

уравнение кинетической энергии

$$\frac{P_2}{\rho_2} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{2} \bar{\omega}_2^2 + gz_2 = \frac{P_1}{\rho_1} + \alpha_1 \cdot \frac{1}{2} \bar{\omega}_1^2 + gz_1 - \varphi_{12} - \frac{P_\rho}{\dot{M}}, \quad (37)$$

где

$$\varphi_{12} = \frac{P_D}{\dot{M}} \quad (38)$$

есть удельная диссипация. Наиболее сложная часть в уравнении (37) это работа сжатия P_ρ . В случае несжимаемой жидкости $P_\rho = 0$. Для сжимаемых жидкостей P_ρ зависит от процесса, в соответствии с которым меняются термодинамические свойства жидкости при ее движении от сечения 1 к сечению 2. В том случае, когда плотность в каждом поперечном сечении постоянна, имеем

$$\frac{P_\rho}{\dot{M}} = - \int_{s_1}^{s_2} p(s) d \frac{1}{\rho}. \quad (39)$$

Этот интеграл можно вычислить, если $P(\rho)$ есть функция только ρ . Комбинируя уравнение (39) и соотношение

$$\frac{P}{\rho_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n, \quad (40)$$

находим

$$\frac{P_\rho}{\dot{M}} = \frac{1}{n-1} \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{1}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1}, \quad n \neq 1. \quad (41)$$

При $n=1$ (течение изотермическое) аналогичное уравнение имеет вид

$$\frac{P_\rho}{\dot{M}} = \frac{p_2}{\rho_2} \ln p_2 - \frac{p_1}{\rho_1} \ln p_1 \quad (n=1). \quad (42)$$

Очевидно, что уравнение (37) особенно удобно использовать для описания несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), так как в этом случае работа сжатия P_ρ исчезает;

уравнение внутренней энергии

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_1 + q_{12} + \varphi_{12} + \frac{P_\rho}{\dot{M}}. \quad (43)$$

В потоках несжимаемой жидкости ($P_\rho = 0$) удельная внутренняя энергия $\bar{u}$ может возрасти в результате притока теплоты q_{12} или диссипации φ_{12} , массовые же силы роли не играют.

Уравнения (31) — (34), (37) и (39) полностью универсальны. Они справедливы независимо от конкретных термодинамических свойств жидкости. В случае одномерного течения, когда все переменные постоянны в поперечных сечениях (так называемое приближение трубки тока) эти уравнения можно упростить. В частности, корректирующие множители α и β становятся равными единице. При описании течений сжимаемых жидкостей следует использовать уравнение энергии (34), тогда как для несжимаемых — уравнение (37).

В частном случае канала с постоянной площадью поперечного сечения ($S_1 = S_2$) возможны дальнейшие упрощения. Если F_x и w_{t12} пренебрежимо малы, то уравнения (31) — (32) сводятся к хорошо известным соотношениям на прямом скачке, которые представляют собой условия непрерывности физических свойств при течении в канале.

Комбинация уравнений (32) и (37) в случае течения несжимаемой жидкости в горизонтальном канале постоянного сечения приводит к следующей связи между силой F_x , с которой жидкость действует на стенки канала, и удельной диссипацией:

$$\varphi_{12} = \left(\frac{F_x}{\rho \bar{\omega}^2 S} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \beta_2 - \beta_1 \right) \bar{\omega}^2. \quad (44)$$

Предполагая, что напряжение трения τ_w постоянно по периметру сечения P_r (не обязательно цилиндрического канала), запишем следующее выражение для силы F_x :

$$F_x = P_r \int_{s_1}^{s_2} \tau_w(s) ds, \quad (45)$$

где $L = s_2 - s_1$ — длина канала. Определяя гидравлический диаметр как

$$d_h = 4S/P_r, \quad (46)$$

удельную диссипацию представим в виде

$$\varphi_{12} = \left[\frac{4}{\rho \bar{\omega}^2 d_h} \int_{s_1}^{s_2} \tau_w(s) ds + \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_2 - \beta_1) \right] \bar{\omega}^2. \quad (47)$$

Диссипация может быть обусловлена или поверхностным трением, или деформацией профиля скорости в результате перемешивания, если течение не является полностью развитым. В случае развитого течения (τ_w , α и β не зависят от s) уравнение (47) сводится к следующему:

$$\Phi_{12} = \frac{8\tau_w}{\rho \bar{\omega}^2} \frac{L}{d_h} \frac{\bar{\omega}^2}{2} = \hat{\tau} \frac{L}{d_h} \frac{\bar{\omega}^2}{2}, \quad (48)$$

где безразмерная величина

$$\hat{\tau} = 8\tau_w / (\rho \bar{\omega}^2) \quad (49)$$

называется коэффициентом трения. В § 2.2.2 течения в каналах рассматриваются более детально.

Основные уравнения в дифференциальной форме. Будем считать контрольным объемом бесконечно малый элемент жидкости. В этом случае уравнения сохранения становятся дифференциальными. В векторной форме они имеют следующий вид (безотносительно к выбору системы координат):

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0; \quad (50)$$

уравнение импульса (уравнение Навье — Стокса)

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \mathbf{k} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbf{S}, \quad (51)$$

Сила инерции Мас-сова сила Сила давления Вязкая сила

где

$$\frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\omega^2}{2} - \mathbf{w} \times \operatorname{curl} \mathbf{w}. \quad (52)$$

Здесь $\operatorname{curl} \mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{w}$.

Следовательно, сила инерции уравновешивается суммой массовой силы, силы давления и вязкой силы;

уравнение кинетической энергии

$$\rho \frac{D(\omega^2/2)}{Dt} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{w} \operatorname{grad} p + \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{S}; \quad (53)$$

уравнение внутренней энергии

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \eta \Phi. \quad (54)$$

Диссипативная функция Φ в уравнении (54) всегда положительна¹, β — коэффициент расширения.

Сумма уравнений (53) и (54) приводит к уравнению для полной энергии. В случае трехмерного течения уравнения (50), (51) и (54) определяют пять скалярных переменных $\mathbf{w}$, p и T , зависящих от координат $\mathbf{r}$ и времени t . Знание термодинамических и переносных свойств позволяет замкнуть эту систему уравнений. В частности, должны быть известны зависимости $\rho(T, p)$, $c_p(T, p)$, $\beta(T, p)$, $\eta(T, p)$ и $\lambda(T, p)$, описывающие свойства жидкости. Таким обра-

зом, получается замкнутая система 10 уравнений относительно 10 неизвестных.

Граничные условия для этих неизвестных зависят от рассматриваемой задачи. Так, на поверхности твердой стенки часто используются условия прилипания¹

$$(\mathbf{w})_w = 0. \quad (55)$$

В случае проницаемой стенки обычно задается скорость вдува или отсоса v_n

$$v_n(\mathbf{r}_w, t) = (\mathbf{w}\mathbf{n})_w \quad (56)$$

(v_n положительна при вдуве и отрицательна при отсосе).

Аналогичным образом ставится и граничное условие для температуры $T(\mathbf{r}, t)$. Обычно задаются температура стенки $T_w(\mathbf{r}_w, t)$, или плотность теплового потока на ней

$$q_w = -(\lambda \operatorname{grad} T)_w, \quad (57)$$

или их комбинация.

До сих пор использовалась векторная форма записи основных уравнений, справедливая в любой координатной системе. Ниже приводится запись этих же уравнений в двух наиболее часто используемых системах координат. Декартова система (x, y, z ; u, v, w);

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (58)$$

Уравнения импульсов

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \mathbf{w} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]; \end{aligned} \quad (59a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = k_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \mathbf{w} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]; \end{aligned} \quad (59b)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \mathbf{w} \right) \right], \end{aligned} \quad (59b)$$

где

$$\nabla \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (59г)$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ + \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \eta \Phi, \end{aligned} \quad (60)$$

¹ В более строгой записи уравнение внутренней энергии имеет вид

$$\rho Du/Dt = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - p \operatorname{div} \mathbf{w} + \eta \Phi,$$

Изменение внутренней энергии (обратимое) Теплопроводность Сжатие (обратимое) Диссипация (необратимая)

аналогичный вид: уравнения (54). Другая эквивалентная форма этого уравнения $\rho \frac{Dh}{Dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{Dp}{Dt} + \eta \Phi$. Здесь опущены возможные дополнительные слагаемые, описывающие источники энергии, обусловленные, например, диссоциацией и ионизацией [3, 4] или излучением [5].

¹ Уравнения сплошной среды можно использовать также и для описания так называемого режима со скольжением в диапазоне чисел Кнудсена $0,1 < Kn < 10$. В этом случае, однако, следует модифицировать граничные условия на стенке для учета эффектов скольжения [6, 7].

где

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} (\nabla w)^2. \quad (61)$$

Цилиндрические координаты $(r, \theta, z; v_r, v_\theta, v_z)$.

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (62)$$

Уравнения импульса

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\ = k_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta r \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla w \right) \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\eta \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \right] - \\ - \frac{\eta}{r} \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla w \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right]; \end{aligned} \quad (63a)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ = k_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \eta \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\eta \left\{ 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla w \right\} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right); \end{aligned} \quad (63b)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla w \right) \right], \end{aligned} \quad (63b)$$

где

$$\nabla w = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (63r)$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ + \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) \eta \Phi, \end{aligned} \quad (64)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \\ + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{3} (\nabla w)^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Уравнения движения в более общих координатных системах можно найти в [2, 8].

Модели жидкостей. Уравнения, приведенные выше, включают в себя переносные и термодинамические свойства жидкостей, которые, вообще говоря, являются функциями температуры и давления. В каждом конкретном случае эти функции представляются обычно в наиболее удобном виде, соответствующем выбранной модели жидкости.

Для описания термодинамических свойств жидкости ρ, β, c_p, γ и u_{sound} обычно используются следующие модели.

Идеальный газ

$$\rho/p = RT, \quad (66)$$

где

$$R = c_p(T) - c_v(T) = \frac{\gamma(T) - 1}{\gamma(T)} c_p(T); \quad (67)$$

$$\beta = 1/T; \quad (68)$$

$$u_{\text{sound}}^2 = \gamma(T) RT = \gamma(T) \frac{p}{\rho}. \quad (69)$$

Следовательно, $c_p(T)$, $c_v(T)$, $\beta(T)$ и $u_{\text{sound}}(T)$ зависят только от температуры.

Калорически идеальный газ — это идеальный газ с постоянными теплоемкостями. Скорость звука в таком газе пропорциональна квадратному корню из температуры.

Малые изменения плотности. Плотность $\rho(p, T)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности некоторого характерного состояния, обозначаемого ниже индексом ∞ ,

$$\begin{aligned} \rho(T, p) = \rho_\infty + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_\infty} (T - T_\infty) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T_\infty} (p - p_\infty) + \\ + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_{p_\infty} (T - T_\infty)^2 + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right)_{T_\infty} (p - p_\infty)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_{p_\infty} (T - T_\infty)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right)_{T_\infty} (p - p_\infty)^2. \end{aligned} \quad (70)$$

Все производные вычисляются при характерных значениях p_∞ и T_∞ .

Обычно удерживают только линейные члены такого разложения. Вводя коэффициент расширения

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (71)$$

и используя общее соотношение

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{\gamma}{u_{\text{sound}}^2}, \quad (72)$$

из уравнения (70) получаем

$$\rho = \rho_\infty - \rho_\infty \beta_\infty (T - T_\infty) + \frac{\gamma_\infty}{u_{\text{sound}, \infty}^2} (p - p_\infty). \quad (73)$$

Это уравнение обычно используется при исследовании неизоэнтальпического движения жидкости, индуцированного подъемной силой.

Другие термодинамические свойства $\beta(T, p)$ и $c_p(T, p)$, а также переносные свойства $\eta(T, p)$ и $\lambda(T, p)$ можно аналогичным образом разложить в ряд Тейлора. Линейные члены этих рядов для воды и воздуха при $T_\infty = 293$ К (20°C) и $p_\infty = 1 \cdot 10^5$ Па представлены в табл. 1. Можно видеть, по крайней мере для этих двух сред, какие из зависимостей для данного термодинамического состояния следует учитывать, а какими можно пренебречь: для воздуха — зависимость плотности от температуры и давления $\rho(T, p)$ и зависимости только от температуры $\beta(T)$, $\eta(T)$, $\lambda(T)$; постоянные c_p и Pr ; для воды — зависимость только от температуры $\eta(T)$, $\lambda(T)$, $\beta(T)$, $\text{Pr}(T)$; постоянные ρ , c_p . В большинстве практических случаев приближение постоянного c_p является хорошим.

Таблица 1. Изменение теплофизических свойств воздуха и воды с температурой и давлением ($T_\infty = 293 \text{ К}$; $p_\infty = 10^5 \text{ Па}$)

	Воздух	Вода
$\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\beta T$	-1.01	-0.06
$\frac{T}{\beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial T} \right)_p$	-1.01	15.8
$\frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial c_p}{\partial T} \right)_p$	0.01	-0.05
$\frac{T}{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_p$	0.70	-7.37
$\frac{T}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \right)_p$	0.83	0.75
$\frac{T}{Pr} \left(\frac{\partial Pr}{\partial T} \right)_p$	-0.12	-8.17
$\frac{T}{\rho \eta} \left(\frac{\partial (\rho \eta)}{\partial T} \right)_p$	-0.31	-7.43
$\frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$	1	5.4×10^{-5}
$\frac{\rho}{\beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial p} \right)_T$	-2×10^{-3}	5.7×10^{-4}
$\frac{\rho}{c_p} \left(\frac{\partial c_p}{\partial p} \right)_T$	1.8×10^{-3}	-4.4×10^{-5}
$\frac{\rho}{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_T$	8.5×10^{-3}	10^{-6}
$\frac{\rho}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p} \right)_T$	1.3×10^{-3}	1.5×10^{-4}
$\frac{\rho}{Pr} \left(\frac{\partial Pr}{\partial p} \right)_T$	1.3×10^{-3}	-1.9×10^{-4}
$\frac{\rho}{\rho \eta} \left(\frac{\partial (\rho \eta)}{\partial p} \right)_T$	1	5.4×10^{-5}

Жидкость с постоянной плотностью. Во многих случаях жидкости, а также и газы можно рассматривать как среды с постоянной плотностью, если только малы изменения температуры. Это означает в соответствии с уравнением (73), что $\beta=0$ или $T=T_\infty$ и $u_{\text{sound}} \rightarrow \infty$.

Переносные свойства η , λ и число Прандтля $Pr = \eta c_p / \lambda$ жидкостей описываются следующими моделями.

Независимость от давления. В большинстве случаев принимается, что $\eta(T)$, $\lambda(T)$ и $Pr(T)$ являются функциями только температуры (см. табл. 1).

Постоянное число Прандтля. Вместе с предположением о постоянстве числа Прандтля Pr обычно используется и предположение о постоянстве c_p . В этом случае λ пропорционально η .

Формула Сатерленда. Для газов можно пользоваться следующей формулой:

$$\frac{\eta}{\eta_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2} \frac{T_\infty + S}{T + S}, \quad (74)$$

где постоянная S зависит от рода газа.

Степенной закон. Для газов очень часто используется следующая формула:

$$\eta/\eta_\infty = (T/T_\infty)^\omega, \quad 0.5 < \omega < 1. \quad (75)$$

При $\omega=1$ вязкость пропорциональна температуре. В этом случае удается существенно упростить уравнения движения.

Постоянство произведения плотности на вязкость. Произведение плотности на коэффициент вязкости

$$\xi = \rho \eta / (\rho_\infty \eta_\infty) \quad (76)$$

для многих газов примерно постоянно, если изменения давления невелики. При постоянном давлении получаем, что $\xi=1$ (точно) для совершенных газов и при $\omega=1$.

Формула Чепмена — Рубезина. Соотношение

$$\eta/\eta_\infty = CT/T_\infty \quad (77)$$

означает пропорциональность температуры и коэффициента вязкости. Параметр Чепмена — Рубезина C можно выбирать, учитывая, что при некоторой температуре T_r , отличной от T_∞ , вязкость имеет значение η_r . Следовательно, $C = \eta_r T_\infty / (\eta_\infty T_r)$, или

$$\eta/\eta_r = T/T_r. \quad (78)$$

Часто бывает удобно использовать для расчета η опорное состояние (индекс r), отличное от состояния, используемого для расчета других свойств (индекс ∞).

Малые изменения вязкости. Предполагая изменения температуры малыми, можно разложить коэффициент вязкости в ряд Тейлора

$$\eta(T) = \eta_\infty + \left(\frac{d\eta}{dT} \right)_\infty (T - T_\infty) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\eta}{dT^2} \right)_\infty (T - T_\infty)^2 + \dots \quad (79)$$

Величина $\left(\frac{d\eta}{dT} \right)_\infty$ для газов положительна, а для жидкостей отрицательна (см. табл. 1).

Постоянная вязкость. В изотермических течениях жидкости с постоянной плотностью обычно используется также и допущение о постоянной вязкости. В этом случае поля скоростей и давления не зависят от поля температуры.

Течения, вызванные подъемными силами. Массовая сила в уравнении Навье — Стокса (51) — это обычно гравитационная сила

$$k = \rho g. \quad (80)$$

Если гравитационная сила существенно влияет на течение, то чаще всего для учета этого эффекта используется приближение Бусинеска.

Уравнение импульса (51) описывает также и жидкость, находящуюся в состоянии покоя ($w=0$). Предполагая стационарность и изотермичность статического состояния ($T_{st} = \text{const}$), нетрудно получить следующую связь между статическим давлением и плотностью:

$$\text{grad } p_{st} = \rho_{st} g \quad (81)$$

или, после умножения обеих частей на w ,

$$\frac{Dp_{st}}{Dt} = w \operatorname{grad} p_{st} = p_{st} w g. \quad (82)$$

В условиях малого изменения температуры и давления можно использовать уравнение состояния (73). Следовательно, плотность в статическом изотермическом состоянии

$$p_{st} = p_{\infty} + \frac{\gamma_{\infty}}{u_{\text{sound}, \infty}^2} (p_{st} - p_{\infty}). \quad (83)$$

Отсюда, используя уравнение (73), получаем уравнение для плотности

$$p = p_{st} - p_{\infty} \beta_{\infty} (T - T_{\infty}) + \frac{\gamma_{\infty}}{u_{\text{sound}, \infty}^2} (p - p_{st}). \quad (84)$$

Представляя теперь давление в виде суммы статической и динамической составляющих

$$p_{dyn} = p - p_{st}, \quad (85)$$

уравнения (51) и (54) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw}{Dt} = & -\rho_{\infty} \beta_{\infty} (T - T_{\infty}) g + \\ & + \frac{\gamma_{\infty}}{u_{\text{sound}, \infty}^2} p_{dyn} g - \operatorname{grad} p_{dyn} + \operatorname{div} S \end{aligned} \quad (86)$$

и

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{DT}{Dt} = & \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + \eta \Phi + \\ & + \beta T \frac{Dp_{dyn}}{Dt} + \beta T p_{st} w g. \end{aligned} \quad (87)$$

В этих уравнениях давление как термодинамическое свойство не участвует. Остается только динамическая часть давления p_{dyn} , связанная с движением жидкости. Плотность ρ связана с p_{dyn} и T уравнением (84).

Если учитываются гравитационные силы, величину p_{dyn} обычно можно считать малой по сравнению с квадратом скорости звука, что дает возможность пренебречь в уравнениях (84), (86) и (87) подчеркнутыми слагаемыми.

Течение, вызванное одними только подъемными силами, называется свободной (или естественной) конвекцией. В этом случае искомые переменные w , p_{dyn} , $T - T_{\infty}$ [в частности, $\eta(T)$ определяется уравнением (79), $c_p = \text{const}$, $\operatorname{Pr} = \text{const}$] пропорциональны некоторому известному характерному перепаду температур, например $T_w - T_{\infty}$. А так как этот перепад предполагается малым [что позволяет использовать разложение в ряд Тейлора в уравнении (70)], то плотность ρ в уравнениях (86) и (87) можно заменить известной функцией ρ_{st} (приближение Буссинеска).

В. Анализ размерностей и теория подобия. Безразмерные параметры. Уравнения движения (50), (51) и (54) представляют собой систему пяти трехмерных скалярных дифференциальных уравнений относительно пяти неизвестных p , w и T . Присутствующие в этих уравнениях параметры, характеризующие свойства жидкости, ρ , c_p , β , η и λ считаются известными функциями давления и температуры.

Большое число исходных независимых переменных можно значительно уменьшить, если ввести безразмерные переменные и записать исходные уравнения в безразмерном виде.

Определим безразмерные переменные следующим образом:

$$\begin{aligned} r^* &= r/l; \quad t^* = U_{\infty} t/l; \quad w^* = w/U_{\infty}; \quad p^* = (p - p_{\infty})/\rho_{\infty} U_{\infty}^2; \\ T^* &= T/T_{\infty}; \quad \rho^* = \rho/\rho_{\infty}; \quad c_p^* = c_p/c_{p\infty}; \quad \beta^* = \beta/\beta_{\infty}; \\ \eta^* &= \eta/\eta_{\infty}; \quad \lambda^* = \lambda/\lambda_{\infty}, \end{aligned} \quad (88)$$

Таблица 2. Безразмерные числа

№ п/п	Название	Символ и определение	Примечания
1	Число Рейнольдса	$Re = \rho U l / \eta = U l / \nu$	—
2	Число Прандтля	$\operatorname{Pr} = \eta c_p / \lambda$	—
3	Число Фруда	$Fr = U^2 / g l$	—
4	Число Эккерта	$Ec = U^2 / c_p T$	—
5	Число Грасгофа	$Gr = g l^3 \beta T / \nu^2$	—
6	Число Галилея	$Ga = \rho^2 l^3 g / \eta^2 = l^3 g / \nu^2$	$Ga = Re^2 / Fr$
7	Число Пекле	$Pe = \rho U l c_p / \lambda$	$Pe = Re \operatorname{Pr}$
8	Число Фурье	$Fo = \lambda t / (\rho c_p l^2)$	$Fo = t^* / Pe$, $t^* = U t / l$
9	Число Гретца	$Gz = U l^2 \rho c_p / (\lambda x)$	$Gz = Pe / x^*$, $x^* = x / l$
10	Число Релея	$Ra = \rho^2 l^3 g \beta T c_p / (\eta \lambda)$	$Ra = Gr / \operatorname{Pr}$
11	Число Архимеда	$Ar = g l \beta T / U^2$	$Ar = Gr / Re^2 = \beta T / Fr$
12	Число Эйлера	$Eu = 2 \Delta p / (\rho U^2)$	Δp — перепад давления q — см. (36)
13	Число Дамкелера	$Da = \dot{q}_w / (c_p T)$	—
14	Число Нуссельта	$Nu = \dot{q}_w l / (\lambda T)$	—
15	Число Стентона	$St = \dot{q}_w / (\rho U c_p T)$	$St = Nu / Re \operatorname{Pr} = Nu / Pe$
16	Число Маха	$Ma = U / U_{\text{sound}}$	$Ma^2 = \frac{Ec}{\gamma - 1}$ (идеальные газы) f — частота
17	Число Струхала	$Sr = f l / U$	—
18	Число Кнудсена	$Kn = l_0 / l$	l_0 — средняя длина пробега молекул
19	Число Росби	$Ro = U l / \omega$	ω — угловая скорость
20	Число Ричардсона	$Ri = -g \rho \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{-2} \times \left(\frac{dp}{dy} \right)$	$\frac{dp}{dy}$ — градиент плотности $\frac{dU}{dy}$ — градиент скорости

где l — некоторый характерный размер поля течения. Нижний индекс ∞ обозначает опорное состояние. В безразмерных уравнениях движения возникают определенные характерные комбинации опорных значений всех величин. Такие безразмерные комплексы представлены в табл. 2 под номерами 1—5. Ниже приведено общее решение уравнений движения в безразмерном виде:

$$w^* = w^*(r^*, t^*, Re, \operatorname{Pr}, Ec, Fr, \beta_{\infty} T_{\infty}). \quad (89)$$

Аналогичным образом можно записать уравнения для семи остальных неизвестных.

Комбинация степеней безразмерных параметров является также безразмерным параметром. Зависимости от полученных таким образом новых безразмерных комбинаций полностью эквивалентны исходным. Например, соотношение

$$w^* = w^*(r^*, t^*, Re, Pe, Ec, Ga, \beta_{\infty} T_{\infty}) \quad (90)$$

эквивалентно уравнению (89). В табл. 2 под номерами 6—11 выписаны безразмерные комплексы, полученные путем комбинаций комплексов 1—5. Дополнительные безразмерные числа могут появиться на основе граничных условий. Примерами могут служить число Эйлера Eu , представляющее собой безразмерный перепад давления, и число Дамкелера Da — безразмерная плотность теплового потока.

В задачах теплообмена важную роль играет число Нуссельта, которое представляет собой безразмерный тепловой поток на стенке. В случае совершенных газов число Эккерта является комбинацией числа Маха Ma и отношения удельных теплоемкостей γ .

Периодические явления, происходящие в потоках, характеризуются числом Струхала, представляющим собой безразмерную частоту.

Описание течений путем установления соотношений между безразмерными величинами позволяет уменьшить число переменных и, таким образом, упростить понимание проблемы.

π -теорема. С математической точки зрения решение каждой задачи можно представить в виде некоторого соотношения между безразмерными переменными. Когда известны описывающие рассматриваемое течение дифференциальные, интегральные или алгебраические уравнения, то, как показано выше, нетрудно установить, каковы именно эти переменные.

Однако определить соответствующие безразмерные переменные удается и тогда, когда отсутствует математическое описание проблемы. Это можно сделать с помощью так называемой π -теоремы, которая формулируется следующим образом.

Общую функциональную связь

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0 \quad (91)$$

между n геометрическими или физическими переменными a_n , единицы измерения которых представляют собой комбинацию m независимых базисных единиц (k базисным единицам относятся метры, секунды, килограммы, кельвины и т. д.), можно всегда представить в виде

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}) = 0, \quad (92)$$

где $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}$ — безразмерные комбинации исходных переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Эта теорема утверждает, что число переменных можно уменьшить от n до $n-m$, где m — число независимых базисных единиц измерения. Например, для рассматривавшихся выше течений $m=4$.

Процедуру построения безразмерных комбинаций $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}$ можно продемонстрировать на конкретном примере.

Рассмотрим стационарное обтекание плоской пластины длиной l под нулевым углом атаки. Поставим задачу определения среднего значения теплового потока $\bar{q}_w$ на поверхности пластины в том случае, когда ее температура T_w незначительно отличается от температуры набегающего потока T_∞ . Общее решение этой задачи представим в виде

$$f(\bar{q}_w, l, U_\infty, T_w - T_\infty, \rho_\infty, c_{p\infty}, \eta_\infty, \lambda_\infty) = 0. \quad (93)$$

Так как число независимых единиц измерения равно четырем, то эту функциональную связь между восемью переменными можно представить в виде соотношения между четырьмя независимыми переменными.

Подлежащие определению безразмерные переменные представляют собой степенную комбинацию исходных размерных, т. е. имеют вид

$$\bar{q}_w^{\alpha_1} l^{\alpha_2} U_\infty^{\alpha_3} (T_w - T_\infty)^{\alpha_4} \rho_\infty^{\alpha_5} c_{p\infty}^{\alpha_6} \eta_\infty^{\alpha_7} \lambda_\infty^{\alpha_8} = 0. \quad (94)$$

Так как эта комбинация должна быть размерными, то

единицы измерения должны удовлетворять соотношению

$$\left(\frac{H}{M \cdot C}\right)^{\alpha_1} \cdot M^{\alpha_2} \left(\frac{M}{C}\right)^{\alpha_3} K^{\alpha_4} \left(\frac{H \cdot C^2}{M^4}\right)^{\alpha_5} \left(\frac{M^2}{C^2 \cdot K}\right)^{\alpha_6} \times \\ \times \left(\frac{H \cdot C}{M^2}\right)^{\alpha_7} \left(\frac{H}{C \cdot K}\right)^{\alpha_8} = H^0 \cdot C^0 \cdot M^0 \cdot K^0. \quad (95)$$

Поскольку участвующие в (95) четыре единицы измерения независимы, то отсюда получаются следующие четыре уравнения для коэффициентов:

$$\text{единица } K: \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_8 = 0;$$

$$\text{единица } H: \alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_8 = 0;$$

$$\text{единица } C: -\alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8 = 0;$$

$$\text{единица } M: -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 4\alpha_5 + 2\alpha_6 - 2\alpha_7 = 0. \quad (96)$$

Эта система однородных линейных алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ имеет ровно четыре независимых решения, если только ранг матрицы ее коэффициентов равен m (здесь $m=4$). Практически именно так всегда и бывает. Эти четыре решения соответствуют четырем безразмерным комплексам:

$$1. \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = -1, \\ \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = 0, \alpha_8 = -1,$$

$$Nu = \frac{\bar{q}_w l}{(T_w - T_\infty) \lambda_\infty} \text{ — число Нуссельта};$$

$$2. \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0, \\ \alpha_5 = 1, \alpha_6 = 0, \alpha_7 = -1, \alpha_8 = 0,$$

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty l}{\eta_\infty} \text{ — число Рейнольдса};$$

$$3. \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \\ \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 1, \alpha_7 = 1, \alpha_8 = -1,$$

$$Pr = \frac{c_{p\infty} \eta_\infty}{\lambda_\infty} \text{ — число Прандтля};$$

$$4. \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = -1, \\ \alpha_5 = 0, \alpha_6 = -1, \alpha_7 = 0, \alpha_8 = 0,$$

$$Ec = \frac{U_\infty^2}{c_{p\infty} (T_w - T_\infty)} \text{ — число Эккерта}.$$

Новая функциональная связь имеет вид

$$F(Nu, Re, Pr, Ec) = 0. \quad (97)$$

Более детальное изложение связанных с π -теоремой вопросов можно найти в посвященных анализу размерностей работах, например [9—22].

Теория моделирования. Выше с помощью анализа размерностей было показано, что каждая задача характеризуется определенными безразмерными числами. Все явления, для которых значения характеризующих их безразмерных чисел одинаковы и которые поэтому совершенно идентичны с точки зрения их описания с помощью некоторых соотношений между безразмерными параметрами, называются подобными.

Безразмерные числа, содержащие длину l , такие как число Рейнольдса, могут быть одинаковы при различных l . Так, течение жидкости будет характеризоваться тем же самым числом Рейнольдса, если в 2 раза увеличить длину и в 2 раза уменьшить скорость.

Именно этот принцип лежит в основе моделирования. Вместо того чтобы изучать какие-либо свойства течений на полномасштабной модели, можно использовать модели меньшего масштаба при условии, что все характеризующие данный процесс безразмерные числа (например, число Рейнольдса) будут иметь те же самые значения. Такое моделирование позволяет в точности воспроизвести явление в лаборатории. Условия подобия лабораторной модели и

натурного явления включают как геометрическое подобие (линейное масштабирование), так и динамическое (одни и те же значения безразмерных переменных в соответствующих точках).

Не всегда легко добиться того, чтобы для малой модели число Рейнольдса оставалось таким же, как и в реальных условиях. Возможные способы достижения более высоких значений числа Рейнольдса заключаются в замене рабочей среды (например, воздуха водой) или понижении температуры потока при течении газов (криогенные аэродинамические трубы [23]).

На практике, однако, часто не удается обеспечить полное подобие между моделью и натурой. Такая ситуация возникает, например, в том случае, когда нужно обеспечить одновременное совпадение чисел Рейнольдса и Фруда. В соответствии с условием подобия по числу Рейнольдса модель должна иметь большую скорость, тогда как совпадение чисел Фруда обеспечивается, наоборот, меньшей скоростью модели. Поэтому во многих случаях подобие бывает только частичным. При этом для пересчета полученных в модельных исследованиях результатов на реальные условия необходимо использовать соответствующие корректирующие формулы.

В некоторых случаях число безразмерных параметров можно уменьшить, следствием этого является более полное моделирование. Возможность такого уменьшения следует обычно из анализа асимптотического поведения физического процесса при больших или малых значениях безразмерных чисел. В результате такого подхода удается установить новые функциональные связи между безразмерными числами, являющимися комбинациями исходных.

Ниже приводится уравнение (97) для ряда конкретных течений.

1. Ламинарное течение при больших числах Рейнольдса (теория пограничного слоя)

$$F\left(\frac{Nu}{\sqrt{Re}}, Pr, Ec\right) = 0. \quad (98)$$

2. Ламинарное течение при больших числах Рейнольдса и Эккерта

$$F\left(\frac{Nu}{\sqrt{Re} Ec}, Pr\right) = 0. \quad (99)$$

3. Ламинарное течение при больших числах Рейнольдса, Эккерта и Прандтля

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re} Ec Pr^{2/3}} = \text{const.} \quad (100)$$

4. Ламинарное течение при больших числах Рейнольдса и Прандтля для $Ec = 0$

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re} Pr^{1/3}} = \text{const.} \quad (101)$$

Течения, для описания которых возможно уменьшение числа координат (включая и время), называются автомодельными. Вопросам подобия и анализу размерностей посвящены многие книги (см., например, [9—21]).

С. Основы описания турбулентного течения. Уравнения сохранения для турбулентных течений. Большинство реализующихся на практике течений являются турбулентными. Главная отличительная особенность таких течений заключается в том, что все характеристики потока пульсируют случайным образом на фоне своих средних значений. Поэтому их мгновенные значения удобно представлять в виде суммы некоторой средней и пульсационной составляющих. Если $f(r, t)$ — какая-либо характеристика потока, то

$$f(r, t) = \bar{f}(r) + f'(r, t) = \bar{f}(r) + f''(r, t). \quad (102)$$

Существуют два различных способа осреднения: осреднение во времени

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(r, t) dt \quad (103)$$

и осреднение во времени параметров, осредненных по массе,

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{\rho \Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \rho(r, t) f(r, t) dt. \quad (104)$$

В случае жидкостей с постоянной плотностью оба способа осреднения эквивалентны.

Осредненные значения не должны зависеть от периода осреднения Δt . На практике Δt — примерно несколько секунд. В течение этого времени средние значения должны оставаться постоянными. Течения, в которых средние значения вовсе не зависят от времени, как это и предполагалось в уравнениях (102) — (104), называются статистически стационарными. Подобный же способ осреднения применим и в том случае, когда средние значения изменяются во времени достаточно медленно, например так, что заметные изменения происходят только за время, много большее периода осреднения Δt . Такие течения называются нестационарными турбулентными течениями, причем термин «нестационарный» относится к осредненным значениям. В более сложном случае быстрого изменения во времени средних значений нужно проводить осреднение по ансамблю [24, 25].

Из уравнений (102) — (104) следует, что

$$\bar{f}' = -\frac{\bar{\rho} f''}{\bar{\rho}} \neq 0; \quad \bar{\rho} f' = 0; \quad (105a)$$

$$\bar{f}'' = 0, \quad \bar{\rho} f'' = \bar{\rho} (\bar{f} - \bar{f}); \quad (105b)$$

$$\bar{f} - \bar{f} = \frac{\bar{\rho} f''}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{\rho} f'}{\bar{\rho}} = -\bar{f}'. \quad (105в)$$

Флуктуационная составляющая движения в турбулентных потоках слишком сложна, чтобы описывать ее временную зависимость детально. На практике, однако, часто бывает достаточно знать лишь характеристики осредненного течения. Для того чтобы вывести уравнения, описывающие такое усредненное течение, предположим, что турбулентное течение складывается из средней и пульсационной составляющих. В соответствии с этим физические переменные представляются в виде следующих сумм:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho''; & \mathbf{w} &= \bar{\mathbf{w}} + \mathbf{w}'; \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho''; & \eta &= \bar{\eta} + \eta''; & T &= \bar{T} + T'. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Другие переменные записываются аналогичным образом. Подставляя эти суммы в уравнения движения (50), (51), (53) и (54) и проводя соответствующее временное осреднение, получаем следующие уравнения для средних величин:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{w}}) = 0; \quad (107)$$

уравнение импульса

$$\bar{\rho} \frac{D \bar{\mathbf{w}}}{Dt} = \bar{\rho} \mathbf{g} - \text{grad} \bar{p} + \text{div}(\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}_t); \quad (108)$$

уравнение кинетической энергии осредненного движения

$$\bar{\rho} \frac{D(\bar{w}^2/2)}{Dt} = \bar{\rho} \bar{w} g - \bar{w} \text{grad } \bar{p} + \bar{w} \text{div} (\bar{S} + \bar{S}_t) - \bar{w}' \text{grad } \bar{p}'' + \bar{w}' \text{div} \bar{S}''; \quad (109)$$

уравнение внутренней энергии

$$\bar{\rho} c_p \frac{D\bar{T}}{Dt} = \text{div} (\lambda \text{grad } \bar{T}) - c_p \bar{\rho} \bar{T}' \bar{w}' + \beta T \frac{D\bar{p}}{Dt} + \bar{w}' \text{grad } \bar{p}'' + \bar{\eta} \Phi. \quad (110)$$

При выводе последнего уравнения предполагалось, что βT и c_p не флуктуируют¹.

Уравнения, описывающие осредненное движение турбулентного потока, аналогичны уравнениям для ламинарного течения, но вместо тензора вязких напряжений в уравнении импульса появляется сумма осредненного во времени тензора вязких напряжений $\bar{S}$ и тензора дополнительных напряжений $\bar{S}_t$. Аналогично в уравнении для внутренней энергии появляются дополнительные слагаемые $c_p \bar{\rho} T' \bar{w}'$ и $\bar{w}' \text{grad } \bar{p}''$. Эти дополнительные слагаемые обусловлены флуктуационной составляющей турбулентного течения. Другими словами, влияние турбулентных флуктуаций на среднее течение приводит как бы к увеличению вязкости и теплопроводности.

Тензор дополнительных турбулентных сдвиговых напряжений $\bar{S}_t$, обусловленных турбулентными флуктуациями, называется рейнольдсовым тензором турбулентных напряжений (или тензором кажущихся, или виртуальных, напряжений). В декартовой системе координат он имеет следующий вид:

$$\bar{S}_t = \begin{pmatrix} -\bar{\rho} \bar{u}'^2 & -\bar{\rho} \bar{u}' \bar{v}' & -\bar{\rho} \bar{u}' \bar{w}' \\ -\bar{\rho} \bar{u}' \bar{v}' & -\bar{\rho} \bar{v}'^2 & -\bar{\rho} \bar{v}' \bar{w}' \\ -\bar{\rho} \bar{u}' \bar{w}' & -\bar{\rho} \bar{v}' \bar{w}' & -\bar{\rho} \bar{w}'^2 \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Главная проблема, возникающая при описании турбулентных течений, — это так называемая проблема замыкания. Она заключается в установлении связи между рейнольдсовым тензором напряжений и другими флуктуационными и осредненными характеристиками (моделирование турбулентности).

Для моделирования турбулентности иногда используется уравнение средней кинетической энергии турбулентных пульсаций скорости. Это уравнение, называемое обычно уравнением турбулентной энергии, можно записать в следующем виде:

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{P}_{\text{Пронзвод- Адвек- ция}} + \underbrace{D}_{\text{Диф- фузия}} - \underbrace{\epsilon}_{\text{Дисси- пация}}, \quad (112)$$

где

$$k = \frac{1}{2} \bar{\rho} (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2) \quad (113)$$

есть осредненная во времени кинетическая энергия турбулентности. Конвективное слагаемое в левой части, обозначенное как адвекция, равно сумме произведения P , диффузии D и диссипации ϵ . Более детальное описание этого уравнения и дополнительные уравнения для других компонентов рейнольдсова тензора напряжений [см. (111)] можно найти в [25, 26, 28, 29].

Моделирование турбулентности. В уравнениях для осредненных величин (107) — (110) присутствуют слагаемые, обусловленные турбулентными флуктуациями. Они представляют собой корреляции между флуктуирующими величинами, например корреляции между флуктуациями компонент вектора скорости, давления, температуры или вязкости и флуктуациями компонент вектора скорости.

Основная цель моделирования турбулентности заключается в определении математического описания связи этих корреляционных слагаемых со средними характеристиками. Рассматривая только уравнения (107) — (109), нетрудно заметить, что они имеют в точности такой же вид, как и уравнения для несжимаемых течений, за тем исключением, что вязкие и рейнольдсовы напряжения включают флуктуации коэффициента вязкости и плотности соответственно.

В случае течений с не слишком большими скоростями (число Маха меньше пяти [27]) обычно используются следующие предположения об этих слагаемых [128]:

1. Флуктуации давления в уравнениях (109), (110), обусловленные флуктуациями скорости, пренебрежимо малы

$$|\bar{w}' \text{grad } \bar{p}''| \ll |\bar{w} \text{grad } \bar{p}|. \quad (114)$$

2. Следующие предположения, подтвержденные наблюдениями

$$\bar{\eta}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} \ll \bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \quad \bar{\eta}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} \ll \bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \text{ и т. д.}, \quad (115)$$

позволяют пренебречь корреляциями скорости и ее градиента.

3. Предположения

$$\bar{\rho}' \bar{u}' \bar{v}' \ll \bar{\rho} \bar{u}' \bar{v}'; \quad \bar{\rho}' \bar{u}'^2 \ll \bar{\rho} \bar{u}'^2 \text{ и т. д.} \quad (116)$$

позволяют пренебречь тройными корреляциями, включающими флуктуацию плотности.

Если принять эти допущения, то в уравнениях (107) — (109), (112) исчезает явная зависимость от флуктуаций температуры (или плотности).

В случае неявной зависимости средней скорости от флуктуаций температуры диссипация турбулентной энергии, т. е. слагаемое ϵ в уравнении (112), может привести к следующему взаимодействию. Диссипация, увеличивающаяся при наличии турбулентности, изменяет распределение средней температуры, а потому и плотности. Это в свою очередь приводит к изменению распределения средней скорости течения. Таким механизмом обратной связи в рассматриваемых течениях скорее всего можно пренебречь, т. е. считать флуктуации температуры, вызванные флуктуациями скорости, пассивными и не возмущающими поле средних скоростей.

Ниже приведены тензоры напряжений с учетом предположений (114) и (115) в различных системах координат. В декартовой системе координат

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{\eta} \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{3}{2} \text{div } \bar{w} \right) & \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \\ \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) & \bar{\eta} \left(2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div } \bar{w} \right) & \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \\ \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) & \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) & \bar{\eta} \left(2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \frac{2}{3} \text{div } \bar{w} \right) \end{pmatrix}; \quad (117)$$

¹ Если c_p и βT флуктуируют, то используется уравнение баланса удельной энтальпии [26].

$$\bar{S}_t = \begin{pmatrix} -\bar{\rho} \overline{u'^2} & -\bar{\rho} \overline{u'v'} & -\bar{\rho} \overline{u'w'} \\ -\bar{\rho} \overline{v'u'} & -\bar{\rho} \overline{v'^2} & -\bar{\rho} \overline{v'w'} \\ -\bar{\rho} \overline{w'u'} & -\bar{\rho} \overline{w'v'} & -\bar{\rho} \overline{w'^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right) & \varepsilon_{xy} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \varepsilon_{xz} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yx} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) & \varepsilon_{yy} \left(2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right) & \varepsilon_{yz} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{zx} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) & \varepsilon_{zy} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) & \varepsilon_{zz} \left(2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right) \end{pmatrix}. \quad (118)$$

В цилиндрической системе координат

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{\eta} \left(2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right) & \bar{\eta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) \right] & \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) \\ \bar{\eta} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} \right] & \bar{\eta} \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r}{r} \right) - \right. & \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) \\ \left. - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right] & & \\ \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) & \bar{\eta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} \right) & \bar{\eta} \left(2 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right) \end{pmatrix}, \quad (119)$$

$$\bar{S}_t = \begin{pmatrix} -\bar{\rho} \overline{v_r'^2} & -\bar{\rho} \overline{v_r'v_\theta'} & -\bar{\rho} \overline{v_r'v_z'} \\ -\bar{\rho} \overline{v_\theta'v_r'} & -\bar{\rho} \overline{v_\theta'^2} & -\bar{\rho} \overline{v_\theta'v_z'} \\ -\bar{\rho} \overline{v_z'v_r'} & -\bar{\rho} \overline{v_z'v_\theta'} & -\bar{\rho} \overline{v_z'^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \left(2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right) & \varepsilon_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) \right) & \varepsilon_{rz} \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{\theta r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} \right) & \varepsilon_{\theta\theta} \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r}{r} \right) - \right. & \varepsilon_{\theta z} \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} \right) \\ \left. - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right] & & \\ \varepsilon_{zr} \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) & \varepsilon_{z\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} \right) & \varepsilon_{zz} \left(2 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{\mathbf{w}} \right) \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Коэффициенты ε_{xx} ... называются коэффициентами турбулентной или кажущейся вязкости. Обычно они являются функциями координат. Моделирование турбулентности и заключается в установлении связи коэффициентов ε_{xx} , ε_{xy} ... с осредненными характеристиками течения.

Некоторые упрощения возможны в случае так называемой свободной турбулентности, когда поле течения не ограничено стенками. Примерами могут служить свободные турбулентные струи и течения в следах. В этих случаях молекулярная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной. Более детально эти вопросы обсуждаются в [30—32].

Если же область турбулентного течения ограничена стенками, то вблизи них турбулентная вязкость исчезает. Очевидно, что в этом случае коэффициенты турбулентной вязкости являются более сложными функциями координат и времени. Теория турбулентной вязкости для пристенных течений до настоящего времени еще не разработана в полной мере. Дополнительную информацию по этому вопросу можно найти, например, в [33]. Наиболее достоверные модели турбулентности предложены для турбулентных пограничных слоев.

В случае простой геометрии поля течения (каналы и т. д.) или при наличии упрощающих условий (осевая симметрия или полностью развитое течение, когда исчезает

зависимость от одной или более независимых переменных) моделирование турбулентности становится более простым. В § 2.2.3 этот вопрос рассматривается подробнее.

Турбулентное течение, вообще говоря, является нестационарным. Вблизи границ турбулентного поля течения может сформироваться режим перемежающейся турбулентности, когда в некоторой точке поток в течение определенного отрезка времени является турбулентным, затем становится ламинарным, потом опять турбулентным и т. д. Доля времени, в течение которого поток в данном месте турбулентный, называется коэффициентом перемежаемости γ . Понятно, что моделировать такой прерывистый характер турбулентности весьма сложно. Для детального ознакомления с вопросами моделирования турбулентности можно обратиться к [31—41].

В связи с постоянным ростом быстродействия и объема памяти компьютеров существует тенденция, хотя она пока еще и не коснулась инженерной практики, получать численные решения осредненных по времени уравнений Навье — Стокса без каких-либо упрощающих предположений. Вопросы численных расчетов динамики жидкостей рассмотрены, например, в [42—46].

Возникновение турбулентности. Течения становятся турбулентными при больших числах Рейнольдса. Причина этого заключается в том, что ламинарные течения при

достаточно больших числах Рейнольдса неустойчивы. Однако если течение стало неустойчивым, это еще не означает, что мгновенно реализуется режим развитой турбулентности. Всегда существует так называемый переходный режим. Переход от ламинарного течения к турбулентному осуществляется постепенно: сначала нарушается устойчивость, затем возникает переходный режим и только потом режим развитой турбулентности.

Условия, в которых пропадает устойчивость, можно найти с помощью теории устойчивости, в частности линейной (см. [47—49] и обзоры [50—55]).

В настоящее время теории, описывающей переходный режим, не существует. Для описания области перехода от ламинарного к турбулентному течению приходится использовать эмпирические и полуэмпирические методы. Более детально этот вопрос изложен в [50].

В некоторых случаях турбулентное течение может снова стать ламинарным. Это явление называется реламинизацией. Оно может наблюдаться в быстро ускоряющихся потоках или при действии стабилизирующих факторов, таких как отсос, охлаждение и т. д. Реламинизация может играть важную роль, особенно в пограничных слоях.

Д. Теория пограничного слоя. Концепция пограничного слоя. Выше было показано, что важным параметром, характеризующим течение жидкости, является число Рейнольдса, представляющее собой безразмерную комбинацию, содержащую вязкость.

Во многих практических случаях число Рейнольдса оказывается большим, т. е. примерно 1000 или больше. Поэтому представляет интерес асимптотическое поведение решений уравнений движения в пределе $Re \rightarrow \infty$.

В 1904 г. Прандтль разработал концепцию пограничного слоя применительно к описанию обтекания тел в условиях больших чисел Рейнольдса. В соответствии с этой концепцией все поле течения можно разбить на две области. В одной из этих областей, занимающих почти все поле течения, можно пренебречь вязкостью. Другими словами, в этой области течение невязкое. Вторая область представляет собой примыкающий к стенке очень узкий слой — пограничный слой, в котором эффекты вязкости играют существенную роль. Толщина пограничного слоя δ очень мала. Справедливы следующие оценки:

$$\delta \sim Re^{-1/n}, \quad (121)$$

причем $n=2$ (для ламинарного течения), $n>5$ (для турбулентного течения).

Эти две области течения: внешняя невязкая область и пограничный слой, примыкающий к стенке, должны непрерывно переходить друг в друга. Такой переход реализуется в узкой зоне на внешней границе пограничного слоя.

В обеих областях исходные уравнения можно упростить. При описании внешнего течения можно пренебречь вязкостью и теплопроводностью. Уравнения, описывающие пограничный слой, также являются более простыми, чем исходные. Используются следующие упрощения, справедливость которых обусловлена очень малой толщиной пограничного слоя: 1) поперек пограничного слоя давление постоянно; 2) перенос энергии теплопроводностью и импульса вязкостью в параллельном стенке направлении пренебрежимо мал по сравнению с переносом в перпендикулярном направлении; 3) для получения уравнений пограничного слоя можно использовать декартову систему координат, связанную с обтекаемой поверхностью.

Уравнения пограничного слоя (двухмерное осредненное течение). Течение в пограничном слое может быть ламинарным или турбулентным, причем первый случай можно рассматривать как частный второго. Поэтому ниже выводятся уравнения для осредненного турбулентного течения в пограничном слое. Рассматривается только двумер-

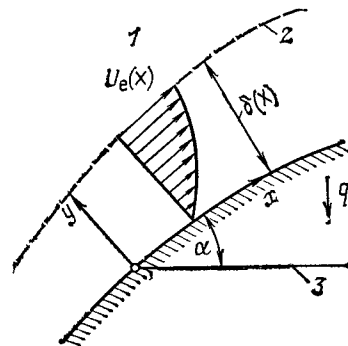


Рис. 2. Течение в пограничном слое: 1 — внешний поток; 2 — граница пограничного слоя; 3 — горизонтальная линия

ное осредненное течение. Трехмерный пограничный слой описан в [56—62].

Можно показать, что в пограничном слое

$$\bar{u} = \bar{u}; \quad \bar{T} = \bar{T}, \quad (122)$$

это в соответствии с уравнением (105) означает малость $\bar{p}''\bar{u}'$ и $\bar{p}''\bar{T}'$ по сравнению с $\bar{p}$ [26]. Используемая декартова система координат изображена на рис. 2. Уравнения, которые можно получить в рамках перечисленных выше допущений из приведенных в п. А и С, имеют следующий вид:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}\bar{v}) = 0; \quad (123)$$

уравнения импульса

$$\begin{aligned} \bar{p} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{p}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{p}\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \\ = -\bar{p}g \sin \alpha - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{p} \bar{u}'\bar{v}' \right); \end{aligned} \quad (124a)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}\bar{v}'). \quad (124b)$$

В ламинарном пограничном слое давление постоянно поперек слоя, в то время как в турбулентном — комбинация $\bar{p} + \bar{p}\bar{v}'^2$. Тем не менее при малой степени турбулентности внешнего течения давление на внешней границе пограничного слоя равно давлению на стенке;

уравнение средней кинетической энергии

$$\begin{aligned} \bar{p} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) + \bar{p}\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) + \\ + \bar{p}\bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \bar{u}^2 \right) = -\bar{p}ug \sin \alpha - \\ - \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{u} \left(\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{p} \bar{u}'\bar{v}' \right) \right] + \\ + \bar{p}\bar{u}'\bar{v}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (125)$$

Потенциальная энергия

Работа сжатия

Диффузия (импульс)

Производство турбулентной энергии

Диссипация

Уменьшение кинетической энергии осредненного течения в пограничном слое может быть обусловлено увеличением потенциальной энергии (невязкий эффект); увеличением давления (невязкий эффект); диффузией; производством турбулентной кинетической энергии, которая посредством турбулентных пульсаций переходит в теплоту; диссипацией, т. е. непосредственным переходом во внутреннюю энергию;

уравнение внутренней энергии¹

$$c_p \left(\rho \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\rho} u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = \beta T \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \right) +$$

Сжатие

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \bar{\rho} c_p \bar{T}' v' \right) + \left(\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} u' v' \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad (126)$$

Диффузия (энергии, теплоты) Диссипация

уравнение турбулентной кинетической энергии

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{q}^2}{2} \right) + \bar{\rho} u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{q}^2}{2} \right) + \bar{\rho} v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{q}^2}{2} \right) =$$

$$= - \bar{\rho} u' v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \left[\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \bar{q}^2 + \bar{v}^2 \right) \right] -$$

Производство турбулентной энергии Вязкая диффузия

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left[v' \left(\frac{1}{2} \rho \bar{q}^2 + \rho \right) \right] - \bar{\rho} \bar{\varphi},$$

Кинетическая диффузия Диффузия давления Диссипация турбулентной энергии

где

$$\bar{q}^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2.$$

Ниже перечислены условия, которым должны удовлетворять неизвестные в пограничном слое.

На стенке ($y=0$)

$$\bar{u}=0; \quad \bar{v}=\bar{v}_w(x); \quad \bar{T}=\bar{T}_w; \quad \bar{\rho}=\bar{\rho}_w; \quad \bar{\eta}=\bar{\eta}_w; \quad \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_w. \quad (128)$$

На внешней границе пограничного слоя ($y=\delta$)

$$\bar{u}=\bar{u}_e(x); \quad \bar{T}=\bar{T}_e(x); \quad \bar{\rho}=\rho_e(x); \quad p=p_e(x), \quad (129)$$

где индексом «e» обозначены величины на границе пограничного слоя или во внешнем потоке. Предполагается, что $u_e(x)$, $T_e(x)$ и т. д. известны из решения внешней задачи. На внешней границе пограничного слоя уравнения принимают следующий вид:

$$\rho_e \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p_e}{\partial x}; \quad (130)$$

$$\rho_e c_p \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) = \beta_e T_e \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial p_e}{\partial x} \right). \quad (131)$$

Основная проблема, возникающая при моделировании турбулентного пограничного слоя, заключается в установлении связи между корреляциями $u'v'$ и $T'v'$ и параметрами осредненного течения. Для ламинарных течений эти слагаемые пропадают.

Более детальное изложение теории пограничного слоя можно найти в [26, 63—68] и в обзорах [69—72].

Преобразование Леви — Лиза². В случае стационарного существенно дозвукового ($Ma \ll 1$) пограничного слоя при постоянном значении c_p и отсутствии подъемных сил

¹ Предполагается, что βT и c_p в пограничном слое не флуктуируют.

² Это преобразование называют также преобразованием Дориницини — Иллинговорса — Хоурта — Стюартсона [3].

уравнения (123), (124a), (125) можно привести к более удобному виду с помощью следующего преобразования координат:

$$d\xi = \rho_e \eta_e u_e dx; \quad (132a)$$

$$d\eta_s = \frac{\bar{\rho} u_e}{(2\xi)^{1/2}} dy. \quad (132b)$$

Если ввести функцию тока в соответствии с уравнениями

$$\bar{\rho} \bar{u} = \partial \psi / \partial y; \quad \bar{\rho} \bar{v} = \partial \psi / \partial x, \quad (133)$$

то уравнение неразрывности будет удовлетворяться автоматически. Вводя также новые переменные $f(\xi, \eta_s)$ и $g(\xi, \eta_s)$, определяемые уравнениями

$$\psi(x, y) = (2\xi)^{1/2} f(\xi, \eta_s); \quad (134)$$

$$\bar{u}(x, y) = u_e(\xi) f'(\xi, \eta_s); \quad (135a)$$

$$\bar{\rho} \bar{v}(x, y) = - \rho_e \eta_e u_e \cdot (2\xi)^{1/2} \left[\frac{f}{2\xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi} + f' \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial \xi} \right)_y \right]; \quad (135b)$$

$$\bar{T}(x, y) = T_e g(\xi, \eta_s). \quad (136)$$

можно привести уравнения пограничного слоя к виду

$$(bf'') + ff'' + \beta_s (c - f'^2) = 2\xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right); \quad (137a)$$

$$(ag')' + fg' = 2\xi \left(f' \frac{\partial g}{\partial \xi} - g' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right). \quad (137b)$$

Граничные условия для этих уравнений имеют вид: при $\eta_s=0$ $f=f_w$ ($f_w \neq 0$ при вдуве или отсосе), $f'=0$, $g=g_w$ или $g'=g_w$; при $\eta_s \rightarrow \infty$ $f'=1$, $g=1$.

Штрих обозначает здесь дифференцирование по координате η_s . В уравнениях (137a), (137b) использованы следующие обозначения:

$$b(\xi, \eta_s) = \frac{\bar{\rho} \eta}{\rho_e \eta_e} \left(1 + \varepsilon_m^+ \right); \quad (139a)$$

$$\beta_s(\xi) = \frac{2\xi}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi}; \quad (139b)$$

$$c(\xi, \eta_s) = \frac{\rho_e}{\rho}; \quad (139v)$$

$$a(\xi, \eta_s) = \frac{\bar{\rho} \eta}{\rho_e \eta_e} \text{Pr}^{-1} \left(1 + \frac{\varepsilon_m^+ \text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right). \quad (139g)$$

Эти уравнения справедливы как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев при условиях, что течение является стационарным, скорости малы по сравнению с локальными значениями скорости звука и влияние подъемных сил несущественно. Следствием этих допущений является отсутствие в уравнении (126) слагаемых, описывающих сжатие и диссипацию. Кроме того, предполагается постоянство c_p и Pr , что для газов можно рассматривать как очень хорошее приближение. Если же для рассматриваемой жидкости c_p сильно меняется с изменением температуры (или, что менее вероятно, давления), то вместо уравнения (126) следует использовать уравнение для удельной энтальпии, записанное, конечно, в приближении пограничного слоя. Случай течения с большими скоростями, когда становятся важными эффекты сжимаемости (трансзвуковой, сверхзвуковой и даже гиперзвуковой пограничные слои), рассмотрен в [3, 26].

Для ламинарного пограничного слоя черта над символами плотности ρ и вязкости η должна быть опущена. Кроме того, в уравнениях исчезают члены ε_m^+ и Pr_t , описывающие обусловленные турбулентностью дополнительные эффекты.

По аналогии с осредненной кинематической вязкостью $\bar{\nu} = \bar{\eta}/\rho$ в турбулентных течениях вводят так называемую турбулентную вязкость¹

$$\nu_t = -\frac{\overline{u'v'}}{\partial \bar{u}/\partial y}. \quad (140)$$

Величина ϵ_m^+ в уравнениях (139а) и (139б) представляет собой отношение турбулентной вязкости ν_t и осредненной молекулярной кинематической вязкости $\bar{\nu}$

$$\epsilon_m^+ = \frac{\nu_t}{\bar{\nu}} = -\frac{\bar{\rho} \overline{u'v'}}{\eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}. \quad (141)$$

Аналогичным образом можно ввести и турбулентную теплопроводность²

$$\lambda_t = -\bar{\rho} c_p \frac{\overline{T'v'}}{\partial \bar{T}/\partial y}. \quad (142)$$

Число Прандтля Pr_t в случае турбулентного течения, использованное в уравнении (139г),

$$Pr_t = \frac{\bar{\rho} c_p \nu_t}{\lambda_t} = \frac{\overline{u'v'}}{T'v'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{u}}. \quad (143)$$

После того как определены функции $f(\xi, \eta_s)$ и $g(\xi, \eta_s)$ и их производные, можно рассчитать все характеристики пограничного слоя, например локальный коэффициент поверхностного трения

$$c_f = \frac{\tau_w}{(1/2) \rho_e u_e^2} = \left(\frac{2}{\xi}\right)^{1/2} \eta_e \left(\frac{\bar{\rho} w \eta_w}{\rho_e \eta_e}\right) f_w''; \quad (144)$$

число Стентона

$$St = \frac{-\dot{q}_w}{\rho_e u_e c_p (T_e - T_w)} = \frac{\rho_w \eta_w}{\rho_e \eta_e} \frac{\eta_e}{Pr_t (2\xi)^{1/2}} \frac{g'_w}{1 - g_w}. \quad (145)$$

Из уравнений (137а) и (137б) следует, что при $\beta=0$ (плоская пластина) и $Pr_t = Pr_t = 1$ решение уравнения (139б) имеет вид

$$g = Af' + B, \quad (146)$$

где A и B — константы интегрирования. Эта формула называется интегралом Крокко.

Если величины b , β , c и a не зависят от ξ , то уравнения (137а) и (137б) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Их решение называется автомодельным. В таком случае профили скорости в различных точках x отличаются только масштабными множителями. Таким же образом ведут себя и профили температуры. Большое число автомодельных решений было рассчитано численно [72—75].

Наиболее важными случаями автомодельных решений являются течение около плоской пластины ($\beta=0$) и в критической точке ($\beta=1$).

Преимущества преобразования Леви — Лиза заключаются в следующем: 1) устраняется сингулярность вблизи передней кромки, характерная для течения около пластины и других, ему подобных; 2) координата $\eta_{se}(\xi)$, соответствующая внешней границе пограничного слоя, изменяется значительно медленнее аналогичной координаты $y_e(x) = \delta(x)$; 3) хорошо известные дифференциальные уравнения для автомодельных решений являются частными случаями общих уравнений.

Интегральные уравнения пограничного слоя. Интегрирование уравнений поперек пограничного слоя, т. е. интегрирование по y от 0 до δ , приводит к следующим интегральным уравнениям для стационарного пограничного слоя (в пренебрежении влиянием подъемных сил):

интегральное уравнение импульса

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx} \left(2 + H_{12} + \frac{u_e}{\rho_e} \frac{d\rho_e/dx}{du_e/dx}\right) = \frac{c_f}{2}; \quad (147)$$

интегральное уравнение кинетической энергии осредненного движения

$$\frac{d\delta_3}{dx} + \frac{\delta_3}{u_e} \frac{du_e}{dx} \left(3 + 2H_{43} + \frac{u_e}{\rho_e} \frac{d\rho_e/dx}{du_e/dx}\right) = D; \quad (148)$$

интегральное уравнение внутренней энергии

$$\frac{d\delta_5}{dx} + \frac{\delta_5}{u_e} \frac{du_e}{dx} \left(1 + \frac{u_e^2}{c_{pe} T_e} + \frac{u_e}{\rho_e c_{pe} T_e} \frac{d(\rho_e c_{pe} T_e)/dx}{du_e/dx}\right) = D \frac{u_e^2}{2c_{pe} T_e} + \frac{\dot{q}_w}{\rho_e c_{pe} T_e u_e}; \quad (149)$$

интегральное уравнение турбулентной энергии

$$\frac{d[(1/2) I Q^2]}{dx} = \bar{P} - d. \quad (150)$$

про-
извод-
ство

Выше использованы следующие обозначения:
толщина вытеснения

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\bar{u}}{\rho_e u_e}\right) dy; \quad (151)$$

толщина потери импульса

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy; \quad (152)$$

толщина потери энергии

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{\bar{u}^2}{u_e^2}\right) dy; \quad (153)$$

толщина потери плотности

$$\delta_4 = \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{\rho_e u_e} \left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1\right) dy; \quad (154)$$

толщина потери температуры

$$\delta_5 = \int_0^\delta \frac{\bar{u}}{\rho_e u_e} \left(\frac{\bar{T}}{T_e} - 1\right) dy; \quad (155)$$

формпараметры

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2}; \quad H_{43} = \frac{\delta_4}{\delta_3}; \quad (156)$$

интеграл диссипации

$$D = \frac{2}{\rho_e u_e^3} \int_0^\delta \left(\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'}\right) \frac{\bar{u}}{\partial y} dy; \quad (157)$$

¹ Для обозначения этой величины иногда используют символы ϵ или ϵ_m .

² Для обозначения этой величины используются также символы ϵ_h или Λ .

интегральный масштаб турбулентности

$$IQ^2 = 2 \int_0^{\delta} \overline{uk} dy; \quad (158)$$

производство турбулентной энергии

$$P = - \int_0^{\delta} \overline{\rho u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} dy; \quad (159)$$

диссипация турбулентной энергии

$$d = \int_0^{\delta} \overline{\rho \varepsilon} dy; \quad (160)$$

коэффициент поверхностного трения [см. также (144)]

$$c_f = 2\tau_w / (\rho_e u_e^2). \quad (161)$$

Эти интегральные уравнения справедливы для непроницаемых стенок. Случай проницаемых стенок рассматривался, например, в [26]. Нестационарный пограничный слой описан в [65].

Следует отметить, что интегральные уравнения явно от плотности не зависят, если только постоянна плотность во внешнем течении ($dp_e/dx=0$). Изменения плотности внутри пограничного слоя, обусловленные, например, переносом теплоты, используются только в определениях различных толщин, влияя поэтому на поле течения лишь косвенным образом.

Решения уравнений для ламинарных пограничных слоев. Развитие численных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и вычислительной техники достигли такого уровня, что практически численное решение полной системы уравнений (123) — (125) особых затруднений не вызывает. Разработаны различные способы решения, базирующиеся как на конечно-разностном методе, так и на предложенном сравнительно недавно методе конечных элементов. Многие авторы предпочитают решать уравнения (137а) и (137б), что несколько проще, чем решение уравнений в исходных переменных. Детальное описание различных численных методов содержится в [43—45, 76, 77]. В прошлом развивались методы приближенного решения интегральных уравнений пограничного слоя. В настоящее время такой подход применяется редко. Тем не менее, используя простые профили скорости и температуры, можно с помощью интегральных уравнений получить приближенное решение, которое вполне пригодно для предварительных оценок.

Метод Тейтса. Для несжимаемых жидкостей с постоянными свойствами можно использовать следующие простые формулы:

$$\frac{u_e(x) \delta_2^2(x)}{v} = 0,45 \frac{\int_0^x u_e^5(x) dx}{u_e^5(x)}; \quad (162)$$

$$\frac{\tau_w(x) \delta_2(x)}{\eta u_e(x)} = l(\lambda), \quad (163)$$

где

$$\lambda = \frac{\delta_2^2(x)}{v} \frac{du_e}{dx}. \quad (164)$$

Функции $l(\lambda)$ и $H_{12}(\lambda)$, где $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ — формфактор, приведены в табл. 3. Если $u_e(x)$ и, следовательно, du_e/dx известны, то можно из этих уравнений найти $\delta_2(x)$, $\tau_w(x)$ и $H(x)$. Отрыв пограничного слоя ($\tau_w=0$) происходит в точке $\lambda = -0,09$.

Т а б л и ц а 3. Значения функций $H_{12}(\lambda)$ и $l(\lambda)$ по Тейтсу в соответствии с (163)

λ	H_{12}	l
-0.090	3.55	0
-0.088	3.49	0.015
-0.086	3.44	0.027
-0.084	3.39	0.038
-0.080	3.30	0.056
-0.076	3.22	0.072
-0.072	3.15	0.085
-0.068	3.09	0.095
-0.064	3.04	0.104
-0.060	2.99	0.113
-0.056	2.94	0.122
-0.048	2.87	0.138
-0.032	2.75	0.168
-0.016	2.67	0.195
0	2.61	0.220
+0.016	2.55	0.244
+0.032	2.49	0.268
+0.048	2.44	0.291
+0.064	2.39	0.313
+0.075	2.36	0.327

Метод Стратфорда. Стратфорд предложил формулу для поверхностного трения, позволяющую находить и точку отрыва в более явной форме,

$$c_p(x-x_0) \frac{dc_p}{dx} = 0,0104 \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_B}\right)^3 \left(1 + 2,02 \frac{\tau_w}{\tau_B}\right), \quad (165)$$

где

$$\tau_B = 0,332 \eta u_{eB} \left(\frac{u_{eB}}{v(x_B-x_0)}\right)^{1/2}; \quad (166)$$

$$c_p = \frac{p-p(x=x_B)}{\frac{1}{2} \rho u_{eB}^2}. \quad (167)$$

С помощью этой формулы поверхностное трение можно найти непосредственно по распределению давления во внешнем течении. Формула получена для пограничного слоя с положительным градиентом давления. В ней предполагается известным поверхностное трение τ_B в точке минимума давления (индекс B). Уравнение (166) позволяет найти x_0 — фиктивное положение начальной точки. Отрыв наступает при

$$c_p(x-x_B) \frac{dc_p}{dx} = 0,0104. \quad (168)$$

Специальная литература. До сих пор рассматривался только двумерный пограничный слой. Некоторые специальные вопросы теории пограничного слоя излагаются в следующих книгах и обзорах: трехмерные пограничные слои [56—59]; нестационарные пограничные слои [78—80, 131]; пограничные слои со вдувом или отсосом [отсос используется для того, чтобы сделать пограничный слой более тонким, что позволяет избежать турбулентности (управление ламинарным течением) и увеличить поверхностное трение (затягивание отрыва)]; вдув, в частности, других жидкостей используется главным образом для охлаждения систем (испарительное охлаждение) [81].

Свободно-конвективное течение, которое полностью обусловлено перепадом плотности из-за существующего

в системе градиента температуры, очень часто имеет характер течения в пограничном слое. Наиболее отчетливо такая ситуация реализуется для жидкостей с малыми вязкостью и теплопроводностью. Типичным примером может служить течение около вертикальной горячей пластины [82, 83].

Свободные сдвиговые слои, возникающие в потоках в отсутствие стенок (для жидкостей с малой вязкостью такие течения также имеют характер пограничного слоя. Типичным примером являются зоны смещения на границе соприкасающихся струй, движущихся с различными скоростями; свободные струи; следы) [30, 84, 85].

Высокоскоростные течения (ламинарные пограничные слои в трансзвуковых, сверхзвуковых и даже гиперзвуковых потоках) представляют особый интерес в аэродинамике. Пограничные слои с протекающими внутри них химическими реакциями имеют также приложения в других областях [3, 132].

Эффекты высших порядков. Теория пограничного слоя Прандтля, представляющая собой асимптотическую теорию уравнений Навье — Стокса для больших чисел Рейнольдса, может быть обобщена и на случай малых чисел Рейнольдса, если использовать разложение по степеням Re^{-1} более высокого порядка [85, 87]. Возникающие в решениях высшего порядка сингулярности можно устранить, используя концепцию многоструктурного пограничного слоя [88], что особенно важно вблизи точки отрыва [89, 90] (см. также [91, 92]).

Ламинарное течение около плоской пластины. Уравнения пограничного слоя существенно упрощаются для течения около плоской пластины, когда исчезает градиент давления, т. е. $\beta=0$. Если предположить, что $b=\rho\eta/(\rho_e\eta_e)$ не зависит от $\xi=\rho_e\eta_e u_e x$, течение становится автомодельным. В этом случае уравнения (140) и (141) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(bf'')' + f'' = 0; \quad (169a)$$

$$\left(\frac{b}{Pr} g'\right)' + fg' = 0. \quad (169b)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \eta_s = 0 \\ f = f_w; \quad f' = 0; \quad g = g_w; \\ \text{при } \eta_s \rightarrow \infty \\ f' = 1; \quad g = 1. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Предполагается, что температура стенки $T_w = T_e g_w$ постоянна. Если имеется вдув или отсос, то для существования автомодельного решения необходимо, чтобы поток массы через поверхность был пропорционален $1/\sqrt{x}$,

$$\rho_w u_w = - \sqrt{\frac{\rho_e u_e \eta_e}{2x}} f_w. \quad (171)$$

Решения $f(\eta)$ и $g(\eta)$ и, следовательно, коэффициент поверхностного трения

$$c_f = \frac{\tau_w}{(1/2) \rho_e u_e^2} = \sqrt{\frac{2\eta_e}{x\rho_e u_e}} \frac{\rho_e \eta_e f_w'}{\rho_e \eta_e} \quad (172)$$

зависят от числа Прандтля Pr , отношения температур T_w/T_e , параметра вдува f_w и используемой для вычисления произведения $\rho\eta$ модели.

Решение этой системы было получено некоторыми авторами главным образом для случаев идеального газа и степенной зависимости вязкости от температуры или формулы Сатерленда [72—74], где приводятся подробные таблицы решений этой системы уравнений.

Ниже рассматриваются различные специальные случаи.

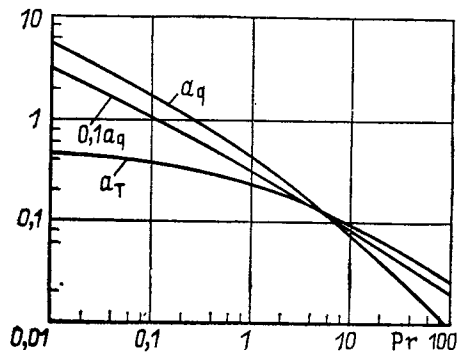


Рис. 3. Зависимость a_T , a_q и a_g в соответствии с (179), (182) и (183)

Влияние функции $\rho\eta$. В случае $b=C=\text{const}$ уравнения (169a) и (169b) становятся несвязанными, а коэффициент трения перестает зависеть от распределения температуры в пограничном слое.

В случае непроницаемой плоской пластины ($f_w=0$) имеем $f_w' = 0,4696/\sqrt{C}$ и, следовательно, коэффициент трения

$$c_f \sqrt{Re_x} = \frac{0,664 \rho_w \eta_w}{\sqrt{C} \rho_e \eta_e}, \quad (173)$$

где

$$Re_x = \frac{\rho_e u_e x}{\eta_e} \quad (174)$$

— число Рейнольдса, определенное в соответствии со значением текущей координаты x . Коэффициент C называется, в частности, параметром Чепмена — Рубезина [3]

$$C = \frac{\rho_w \eta_w}{\rho_e \eta_e}. \quad (175)$$

В этом случае коэффициент трения становится равным

$$c_f \sqrt{Re_x} = 0,664 \sqrt{\frac{\rho_w \eta_w}{\rho_e \eta_e}}. \quad (176)$$

Эта формула лучше описывает трение на плоской пластине при наличии теплообмена, чем полученная в предположении о постоянстве свойств ($C=1$). Уравнение (176) можно рассматривать как частный случай более общего уравнения

$$c_f \sqrt{Re_x} = 0,664 \left(\frac{\rho_w \eta_w}{\rho_e \eta_e} \right)^{a_T(Pr)} \quad (177)$$

(см. § 2.2.1). Формулу (177) можно получить в предположении о линейной зависимости плотности и вязкости от температуры при условии малости ее перепада $T_w - T_e$ в пограничном слое. Эти допущения приводят также к выражению

$$b = 1 \left[\frac{T}{\rho\eta} \frac{d\rho\eta}{dT} \right]_e (g-1) \quad (178)$$

(см. табл. 1), используя которое можно найти и коэффициент трения

$$c_f \sqrt{Re_x} = 0,664 \left\{ 1 + a_T(Pr) \left[\frac{T}{\rho\eta} \frac{d\rho\eta}{dT} \right]_e \frac{T_w - T_e}{T_e} \right\}. \quad (179)$$

Это выражение (конечно, в рамках сделанных допущений) эквивалентно (177). Функция $a_T(Pr)$ приведена на рис. 3. Можно видеть, что уравнение (176), в котором использован параметр Чепмена — Рубезина, является очень хорошим приближением в асимптотическом случае $Pr \rightarrow \infty$.

Влияние температуры стенки. При малом различии температуры стенки T_w и температуры внешнего потока T_e коэффициент трения, как следует из (179), зависит от T_w линейно. Так как величина $(T/\rho\eta) d(\rho\eta)/dT$ практически всегда отрицательна, то нагревание пластины уменьшает трение, а охлаждение — увеличивает. Для жидкостей этот эффект обычно выражен более отчетливо, чем для газов (см. табл. 1). В соответствии с формулой (179) при $\rho\eta = \text{const}$ влияние температуры на трение отсутствует. Это справедливо, например, для идеальных газов ($\beta_e = 1/T_e$) при линейной зависимости вязкости от температуры ($\eta \sim T$).

Определяющая температура. При исследованиях теплообмена часто используется понятие определяющей температуры. Под определяющей температурой понимают такую температуру, при которой формулы, полученные для изотермических условий, приводят к точным результатам в неизотермическом случае. Определим здесь характерную температуру T_r таким образом, чтобы результаты расчетов поверхностного трения по изотермической формуле (177) совпадали с расчетами по (179). Из уравнений (176), (178) нетрудно получить

$$T_r = T_e + 2a_T (T_w - T_e). \quad (180)$$

В случае $\text{Pr} \approx 1$ характерная температура T_r примерно равна среднеарифметическому температур стенки T_w и внешней T_e . Увеличение числа Прандтля приводит к сдвигу T_r в сторону T_e . При очень больших значениях числа Прандтля температура T_r близка к T_e .

Необходимо отметить, что определенная таким образом характерная температура не зависит от свойств жидкости, а является функцией одного только числа Прандтля. Дальнейшее обсуждение этого вопроса, в частности, применительно к случаям движения с большими скоростями и естественной конвекции можно найти в [93—96].

Влияние числа Прандтля. Для каждой конкретной жидкости при не слишком большой разности температур стенки и во внешнем потоке влияние числа Прандтля можно проследить с помощью формулы (179). Отличие коэффициента поверхностного трения от значения, полученного для несжимаемой жидкости, уменьшается с увеличением числа Прандтля, что отчетливо видно на рис. 3.

Влияние вдува или отсоса. Величина f_w в уравнении (171) описывает интенсивность вдува или отсоса. Решения уравнений (169), (170) при $f_w \neq 0$ представлены в [73—75]. Отсос увеличивает поверхностное трение; вдув уменьшает его. Оказывается, что при $f_w = -0,8757$ поверхностное трение становится равным нулю и наступает отрыв пограничного слоя. При $f_w < -0,8757$ решений не существует. Функция $a_T(\text{Pr})$ в уравнении (179) зависит также от параметра f_w , поэтому и характерная температура является функцией параметра массообмена f_w .

Рассматривавшиеся всюду выше течения около плоской пластины представляют собой специальный случай. В более общих случаях могут возникнуть новые эффекты, которые не описываются уравнениями (169), (170). Ниже рассмотрены некоторые из этих эффектов.

Влияние числа Маха. При очень высоких скоростях течения, сравнимых со скоростью звука, в уравнении внутренней энергии (126) уже нельзя пренебрегать слагаемыми, описывающими эффекты сжимаемости и диссипацию. В этом случае даже при равенстве внешней температуры и температуры стенки будет существовать теплообмен, обусловленный выделением теплоты при вязком трении (диссипация). Коэффициент поверхностного трения при $T_w = T_e$

$$c_f \sqrt{\text{Re}_x} = 0,664 (1 + A(\omega) \text{Ma}_e^2), \quad (181)$$

где число Маха Ma_e равно отношению скорости течения на внешней границе пограничного слоя к скорости звука во внешнем потоке. Для совершенных газов коэффициент

$A(\omega)$ зависит только от показателя степени ω в формуле, описывающей температурную зависимость вязкости [при $\omega = 1$ $A(\omega) = 0$] [75].

Влияние распределения температуры стенки. До сих пор рассматривалась только плоская пластина с постоянной температурой поверхности. Вообще говоря, температурная поверхность $T_w(x)$ может быть произвольной функцией x . В том случае, когда $T_w(x)$ есть степенная функция x , существует автомодельное решение [74]. В частности, при $T_w \sim \sqrt{x}$ тепловой поток на поверхности оказывается постоянным. Поэтому для коэффициента трения можно в этом случае получить формулу, аналогичную (179),

$$c_f \sqrt{\text{Re}_x} = 0,664 \left[1 + a_q(\text{Pr}) \left(\frac{T}{\eta\rho} \frac{d\eta\rho}{dT} \right)_e \frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \right], \quad (182)$$

где $\text{Nu}_x = (q_w x)/(\lambda_\infty T_\infty)$. Параметр $a_q(\text{Pr})$ приведен на рис. 3. Охлаждение пластины ($\text{Nu}_x < 0$) приводит к увеличению трения, нагрев — к его уменьшению.

Влияние подъемных сил. В рамках теории пограничного слоя силами, действующими в направлении, перпендикулярном вектору скорости внешнего течения, можно пренебречь. Поэтому в горизонтальном пограничном слое подъемные силы роли не играют. Однако в высших порядках теории пограничного слоя этот эффект приходится учитывать [97]. При малой разности температур стенки T_w и во внешнем потоке T_e коэффициент трения можно аппроксимировать следующей формулой:

$$c_f \sqrt{\text{Re}_x} = 0,664 \left(1 \pm a_g(\text{Pr}) \frac{\text{Ar}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \right), \quad (183)$$

где Ar_x — число Архимеда, рассчитанное в соответствии с разностью температур $T_w - T_e$ и текущим значением координаты x . Верхний знак соответствует верхней поверхности пластины. Следовательно, поверхностное трение больше на верхней стороне нагретой пластины, чем на нижней. Кроме того, в данном случае оказывается различным давление на обеих сторонах пластины, так что на нее в целом действует подъемная сила [98].

Эффекты более высокого порядка. Теория пограничного слоя Прандтля позволяет получить асимптотическое решение, справедливое в пределе $\text{Re}_x \rightarrow \infty$. Практически формула (177) и аналогичные ей применимы для значений $\text{Re}_x > 10^3$. Для получения решения в области меньших чисел Рейнольдса необходимо использовать теорию пограничного слоя более высокого порядка [86]. При обтекании плоской пластины наиболее существенные поправки теории Прандтля относятся к области течения вблизи передней кромки. В теории Прандтля бесконечная и конечная плоские пластины никак не различаются. Теория же высшего порядка позволяет получить следующее выражение для коэффициента трения пластины конечной длины [88]:

$$c_f = \frac{D}{(\rho_e/2) u_e^2 l} = \frac{1,328}{\text{Re}_e^{1/2}} + \frac{2,668}{\text{Re}_e^{7/8}}. \quad (184)$$

На рис. 4 [99] показано, что результаты расчетов $\bar{c}_f$ по формуле (184) очень хорошо согласуются с результатами решения полных уравнений Навье — Стокса и с экспериментальными данными вплоть до значений $\text{Re} = 10$.

Переход от ламинарного течения к турбулентному. Теории, описывающей переход от ламинарного течения к турбулентному, не существует. При двумерном течении несжимаемой жидкости для расчета положения переходной зоны предложено несколько эмпирических подходов [26] (см. § 2.2.3). Один из таких подходов изложен в [102]. В нем используется предположение о том, что в переходной области зависимость числа Рейнольдса, построенного на основе толщин потерь импульса, $\text{Re}_{\delta_2} = u_e(x) \delta_2(x)/\nu$ от обычного числа Рейнольдса $\text{Re}_x = x u_e(x)/\nu$ является

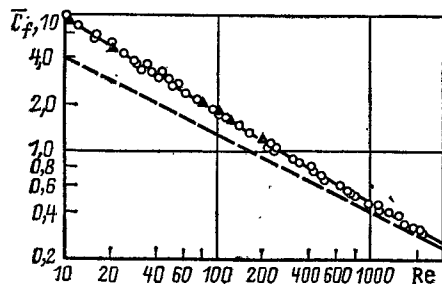


Рис. 4. Коэффициент трения для плоской пластины конечной длины, в соответствии с (184). Штриховая кривая — решение уравнений Навье — Стокса в первом приближении, $C_f = 1,328 \text{ Re}^{-1/2}$; Δ — решение полных уравнений Навье — Стокса [100]; $\circ$ — экспериментальные данные [101]

универсальной функцией, которая имеет вид [26]

$$\text{Re}_{\delta_2} = 1,174 \left[1 + \frac{22\,400}{\text{Re}_x} \right] \text{Re}_x^{0,46}, \quad 10^5 \leq \text{Re}_x \leq 4 \cdot 10^7. \quad (185)$$

В том случае, когда Re_{δ_2} , найденная в соответствии с расчетами ламинарного двумерного несжимаемого течения, превышает значение Re_{δ_2} , полученное по формуле (185), течение становится турбулентным. Эта универсальная зависимость справедлива только при очень малой степени турбулентности внешнего потока.

На положение переходной зоны могут влиять следующие факторы.

Градиент давления. Положительный градиент давления или замедление течения дестабилизирует пограничный слой и, следовательно, способствует переходу. Отрицательный градиент давления или ускорение внешнего течения повышает устойчивость пограничного слоя.

Турбулентность внешнего потока. Обычно более раннему переходу способствует турбулентность внешнего потока. В лабораторных экспериментах для турбулизации пограничного слоя и моделирования, таким образом, течений с большими числами Рейнольдса иногда искусственно увеличивают степень внешней турбулентности с помощью специальных решеток. При этом существенными являются размер ячеек решетки и ее расположение по отношению к модели, так как в некоторых случаях решетки могут, наоборот, уменьшать турбулентность и, следовательно, затягивать образование переходной области [103].

Шероховатость поверхности. Собственная шероховатость поверхности, обусловленная ее механической обработкой, или отдельные выступающие элементы (типа скрепляющей проволоки) также способствуют переходу от ламинарного к турбулентному режиму течения. В лабораторных экспериментах для управления положением переходной области часто на поверхности модели создают искусственную шероховатость [105].

Вдув или отсос. Непрерывно или дискретно (щелевой) распределенный отсос стабилизирует, а вдув — дестабилизирует пограничный слой. Ламинаризация потока посредством распределенного отсоса (управление ламинарным течением) используется в аэрокосмической технике для снижения сопротивления [105].

Теплообмен. Влияние теплообмена на поверхности тела на устойчивость течения и положение переходной зоны проявляется через температурную зависимость вязкости. Для газов охлаждение стабилизирует пограничный слой, для жидкостей — дестабилизирует.

Влияние других факторов, таких, как кривизна поверхности, сжимаемость, стратификация плотности и т. д., обсуждается в § 2.2.3.

Одним из простейших способов определения точки начала перехода является измерение профиля скорости и расчет с его помощью параметра H_{12} , определенного урав-

нением (156). Если найденное таким образом значение лежит в диапазоне $2,5 < H_{12} < 3,5$, то течение должно быть ламинарным, а при $1,2 < H_{12} < 2,4$ — турбулентным.

Смена режимов течения происходит не скачкообразно, а обязательно на некотором конечном отрезке. Расчет такого переходного пограничного слоя представляет собой одну из еще не решенных задач теории. Вполне возможен и обратный процесс — переход от турбулентного течения к ламинарному, называемый реламинаризацией. В частности, турбулентный пограничный слой с очень большим отрицательным градиентом давления (сильное ускорение) может стать ламинарным в тот момент, когда Re_{δ_2} становится меньше некоторого критического значения, например $\text{Re}_{\delta_2 \text{ cr}} \approx 370$ [107].

Универсальные законы распределения скорости, температуры и касательных напряжений в турбулентном пограничном слое. Основная задача теории турбулентного пограничного слоя заключается в установлении связи между турбулентной вязкостью ν_t , определенной уравнением (140), и параметрами осредненного течения в пограничном слое (моделирование турбулентности). Решение этой задачи облегчается эмпирически установленным фактом локальности связи между ν_t и осредненными значениями параметров в большинстве турбулентных пограничных слоев. Это приближение является довольно хорошим независимо от конкретных особенностей развития пограничного слоя в области, расположенной вверх по потоку. Другими словами, во многих случаях предисторий течения в первом приближении можно пренебречь. Следствием этого является возможность формулировки универсальных законов распределения осредненных значений скорости, температуры и касательных напряжений.

В турбулентных пограничных слоях в отличие от ламинарных существуют два характерных масштаба длины: толщина пограничного слоя δ и толщина приповерхностного слоя $\delta_w = \nu_w / u_\tau$, где

$$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho_w} \quad (186)$$

называется динамической скоростью.

Итак, в пограничном слое следует различать две области: приповерхностный внутренний слой ($0 < y < 300 \delta_w \approx 0,1 \delta$) и внешний слой ($0,1 \delta < y < \delta$) (рис. 5). В этих слоях различны как физические процессы, так и распределения параметров. В табл. 4 приведены формулы, описывающие распределения в двумерном дозвуковом турбулентном пограничном слое.

Очень важную роль играет логарифмическая подобласть внутреннего слоя, в которой скорость и температура являются логарифмическими функциями расстояния до

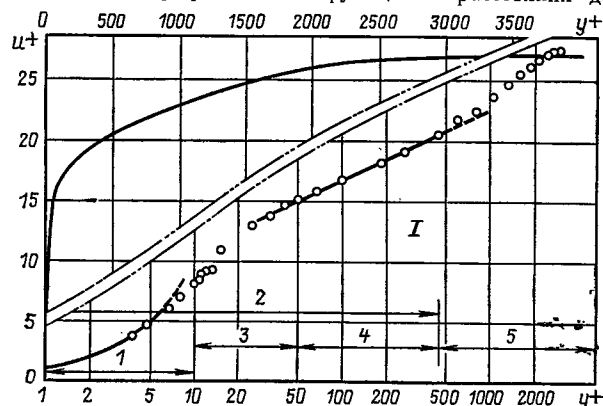


Рис. 5. Распределение осредненной скорости в турбулентном пограничном слое с нулевым градиентом давления. Точки — результат эксперимента [126]; 1 — вязкий подслой; 2 — внутренняя область; 3 — переходная область; 4 — полностью турбулентная область; 5 — внешняя область

Таблица 4. Универсальные распределения скорости, касательного напряжения и температуры в турбулентных пограничных слоях

Параметры пограничного слоя	Внутренний пристенный слой		Область логарифмического закона (закона стенки)	Внешний слой Закон следа
	Вязкий подслой	Переходный слой		
Область внутри пограничного слоя (приближенно)	$0 < y^+ < 5$ $0 < \frac{y}{\delta} < 0,002$	$5 < y^+ < 60$ $0,002 < \frac{y}{\delta} < 0,02$	$60 < y^+ < 300$ $0,02 < \frac{y}{\delta} < 0,1$	$300 < y^+ < 3000$ $0,1 < \frac{y}{\delta} < 1$
Распределение скорости	$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = y^+$	$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 11 \arctg \frac{y^+}{11}$ ($B_q = 0$; $k^+ = 0$)	$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln y^+ + C(B_q, k)^+$	$\frac{u_e - u}{u_\tau} = 2,5 \ln \left(\frac{y}{\delta} \right) + \frac{\Pi(B_q)}{k} \left[2 - w \left(\frac{y}{\delta} \right) \right]$
Турбулентная вязкость ν_t	$\nu_t = k u_\tau y$			$\nu_t = \alpha_1 u_\tau \delta$ $0,06 \leq \alpha_1 \leq 0,075$
Длина пути перемешивания l	$l = k y D$			$l \approx 0,09 \delta$
Турбулентное число Прандтля Pr_t ($Pr > 0,6$)	$0,90 < Pr_t < 1,02$			$Pr_t = 0,95 - 0,45 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2$
Распределение температуры $\bar{T}$	$\bar{T} = T_w (1 - B_q Pr_t y^+)$		$\bar{T} = T_w - \frac{k q_w}{k \theta c_p u_\tau} - \frac{k u^2}{2 k \theta c_p}$	
Примечания	Зависит от скорости; не зависит от градиента давления		Градиент скорости не зависит от ν	Зависит от градиента давления через параметр Π

Примечание. $a_k = 0,41$ (константа Кармана); $k_\theta = 0,45$; $B_q = \text{см. (187)}$; $k^+ = \text{см. (188)}$; $D = \text{см. (204)}$; $w(y/\delta) = 2 \sin^2 [\pi y / (2\delta)]$; $C(B_q, k^+) = 5,2 + 30,7 B_q + 226 B_q^2$, $0 < k^+ < 5$ — гидравлически гладкая шероховатость; $C(0, k^+) = 8,5 - 2,5 \ln k^+$, $60 < k^+ < \infty$ — полностью выраженная шероховатость.

стенки (закон стенки). Длина смещения здесь примерно пропорциональна расстоянию до стенки, а турбулентное число Прандтля примерно постоянно. Константы, входящие в логарифмические профили, обычно зависят от параметра теплообмена

$$B_q = \frac{q_w}{\rho u c_p u_\tau T_w} \quad (187)$$

и параметра шероховатости

$$k^+ = \frac{k_r u_\tau}{\nu_w}, \quad (188)$$

где k_r — высота шероховатости. В полулогарифмическом масштабе распределение скорости изображается прямой линией. Влияние теплообмена или шероховатости стенки сводится только к параллельному сдвигу этой прямой.

Логарифмический закон для профиля скорости используется часто для нахождения поверхностного трения в тур-

булентных пограничных слоях. Преобразуя формулу для u в области его применимости, находим

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \frac{1}{k} \frac{u_\tau}{u_e} \ln \frac{y u_e}{\nu} + \frac{u_\tau}{u_e} \left(C + \frac{1}{k} \ln \frac{u_\tau}{u_e} \right). \quad (189)$$

График зависимости u/u_e от $\ln(y u_e/\nu)$ есть прямая линия. Тангенс угла ее наклона равен $u_\tau/(k u_e)$, зная его нетрудно определить и τ_w .

Для того чтобы с помощью датчиков скорости определять поверхностное трение (например, с помощью трубки Престона), необходимо быть уверенным, что в точке измерения справедлив именно логарифмический закон [108].

Распределение скорости во внешнем слое, занимающем около 90% толщины всего пограничного слоя, описывается законом дефекта скорости Кармана и законом следа Коулса.

Закон дефекта не зависит от вязкости, шероховатости и теплопереноса. На параметр следа Π влияет один только градиент давления.

Комбинация законов следа и стенки позволяет получить универсальный закон распределения скорости в турбулентном пограничном слое

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln y^+ + C(k^+, B_q) + \frac{2\Pi}{k} \sin^2\left(\frac{\Pi}{2} \frac{y}{\delta}\right), \quad (190)$$

где

$$y^+ = \frac{y}{\delta_w} = \frac{y u_\tau}{\nu_w}. \quad (191)$$

Этот закон справедлив во всем пограничном слое, за исключением очень узкого слоя вблизи самой стенки ($y < 0,02\delta$).

Используя универсальный профиль скорости во всем пограничном слое, можно рассчитать такие его интегральные характеристики, как δ_1 , δ_2 , H_{12} и т. д., функции u_τ , δ , k^+ и B_q . Для гладкой теплоизолированной поверхности ($k^+ = 0$; $B_q = 0$) можно получить универсальную связь между коэффициентом поверхностного трения [см. (166)] и числом Рейнольдса, вычисленным по длине δ_2 . Это соотношение описывается хорошо известной формулой Людвига — Тиллмана

$$c_f = 0,246 \operatorname{Re}_{\delta_2}^{-0,268} \cdot 10^{-0,878 H_{12}}, \quad (192)$$

где параметр $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ определен уравнением (156). Если измерить профиль скорости и рассчитать затем δ_1 , δ_2 , а следовательно, и $\operatorname{Re}_{\delta_2}$ и H_{12} , то формулу (192) можно использовать для расчета коэффициента трения.

Толщину пограничного слоя обычно определяют как такое расстояние от стенки, на котором скорость течения составляет определенную долю (например, 99,5%) скорости внешнего потока. При $y < \delta$ течение вовсе не обязательно всюду турбулентное. В области $0,4 < y/\delta < 1,2$ происходит непрерывное чередование ламинарного и турбулентного режимов. При $y = 0,8\delta$ фактор перемежаемости γ (см. п. С) примерно равен 0,5. В том случае, когда безразмерный соответствующим образом профиль скорости не зависит от продольной координаты (автомодельность), турбулентный пограничный слой называется также равновесным (см. п. D). Турбулентный пограничный слой около пластины является равновесным только в том случае, когда поверхность шероховатая, причем высота шероховатости пропорциональна расстоянию x [114].

Методы расчета турбулентных пограничных слоев. Методы расчета турбулентных пограничных слоев можно в зависимости от используемого вида исходных уравнений разделить на две основные группы: дифференциальные и интегральные.

Хотя в инженерной практике большее предпочтение на сегодняшний день отдается интегральным методам, развитие вычислительной техники и измерительной аппаратуры, позволяющей, совершенствуя методику, получать детальную информацию о турбулентных течениях (методики измерения в реальном масштабе времени, лазерная доплеровская методика), приводит к тому, что на первый план выдвигаются дифференциальные методы [115].

Интегральные методы. Интегральные методы основаны на использовании интегрального уравнения импульса [см. (147)] и некоторых других интегральных уравнений. Часто в качестве второго исходного уравнения используется уравнение осредненной кинетической энергии (148). При этом для расчета диссипативной функции D , определяемой уравнением (157), приходится использовать некоторые предположения о турбулентных напряжениях. Если, например, воспользоваться универсальным законом распределения турбулентных напряжений, приведенным в табл. 4, то интегральные уравнения импульса и осредненной кинетической энергии совместно с формулой Людвига — Тиллмана позволяют найти три неизвестные характеристики пограничного слоя — $\operatorname{Re}_{\delta_2}$, H_{12} и c_f . В случае несжимаемого двумерного турбулентного пограничного

слоя эти интегральные уравнения сводятся к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H_{12}) \frac{\delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{c_f}{2} = \frac{1}{2} \alpha H_{32} \operatorname{Re}_{\delta_2}^{-0,268}, \quad (193)$$

$$\frac{d\delta_3}{dx} + 3 \frac{\delta_3}{u_e} \frac{du_e}{dx} = 2C_D = 2\beta H_{32} \operatorname{Re}_{\delta_2}^{-0,168}, \quad (194)$$

где

$$H_{12}(H_{32}) = 1 + 1,48(2 - H_{32}) + 104(2 - H_{32})^{0,7}, \quad (195)$$

$$\alpha(H_{32}) = 0,0566 H_{32} - 0,0842; \quad (196)$$

$$\beta(H_{32}) = 0,00481 + 0,0822(H_{32} - 1,5)^{4,81}. \quad (197)$$

В случае известного распределения скорости на внешней границе пограничного слоя $u_e(x)$ — это два уравнения для двух неизвестных δ_2 и $\delta_3 = H_{32}\delta_2$. Их решение следует начинать от точки перехода, определяемой уравнением (185). В этой точке $\delta_2 = \delta_{2, \text{lam}}$ и $H_{32} = H_{32, \text{lam}}$. Отрыв пограничного слоя происходит при

$$H_{32, \text{sep}} = 1,53 \div 1,57. \quad (198)$$

По аналогии с уравнением (168) точку отрыва турбулентного пограничного слоя можно определить непосредственно, используя известное распределение давления. Стредфорд получил следующий критерий отрыва [109]:

$$c_p \left(x \frac{dc_p}{dx} \right)^{1/2} (10^{-6} \operatorname{Re}_x)^{-1/10} = 0,3 \div 0,5, \quad (199)$$

где

$$c_p = 1 - (u_e/u_0)^2; \quad (200)$$

u_0 — скорость внешнего течения в той точке, где градиент давления становится положительным. При выводе этой формулы предполагалось, что пограничный слой всюду турбулентный, а положительный градиент давления реализуется уже на передней кромке пластины. Если же существует область ламинарного течения или область турбулентного течения с отрицательным градиентом давления, то, прежде чем использовать уравнение (199), необходимо в соответствии с (109) определить фиктивное положение точки отсчета координаты x (см. п. D).

Интегральные методы расчета турбулентного пограничного слоя позволяют учесть также влияние предстории течения, сжимаемости, теплообмена. Более детально все эти вопросы рассматриваются в [68] и обзорах [110—114].

Дифференциальные методы. Компоненты скорости или функции тока описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. В зависимости от способа моделирования турбулентности следует различать следующие уровни моделей [111, 119].

Модели, не использующие дифференциальных уравнений. В этих моделях дифференциальные уравнения в частных производных используются только для описания поля осредненных скоростей, касательное же напряжение представляется в виде простого алгебраического соотношения. В большинстве случаев используется концепция турбулентной вязкости, т. е. уравнение (140) или формула Прандтля для длины пути перемешивания

$$\frac{\tau_t}{\rho} = -\overline{u'v'} = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (201)$$

Уравнение (201) представляет собой определение длины пути перемешивания l . В случае простых течений эту величину определить гораздо легче, чем корреляцию $\overline{u'v'}$. Между v_t и l существует следующая связь:

$$v_t = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \quad (202)$$

При моделировании турбулентной вязкости ν_t или длины перемешивания l в большинстве случаев используется концепция разделения турбулентного пограничного слоя на внутреннюю и внешнюю области. В каждой из этих областей распределение ν_t или l описывается своими эмпирическими соотношениями. Например, в методе, описанном в [116], используются следующие выражения:

$$l = kyD \quad \text{при} \quad 0 \leq \frac{y}{\delta} \leq \frac{\lambda}{k}; \quad (203a)$$

$$l = \lambda\delta \quad \text{при} \quad \frac{\lambda}{k} \leq \frac{y}{\delta} \leq 1, \quad (203b)$$

где

$$D = 1 - \exp \left[\frac{y (\tau_w \rho_w)^{1/2}}{A + \eta_w} \right] \quad (204)$$

— так называемый демпфирующий множитель ван-Дриста. Константы, входящие в эти формулы, имеют следующие численные значения: $k=0,435$; $\lambda=0,09$ или $\lambda/k=0,2$; $A+=25,3$. Другие формулы для ν_t или l можно найти в [26, 110, 111].

Модели с одним уравнением. В этих моделях касательное напряжение описывается с помощью дополнительного уравнения в частных производных. В качестве основы для построения такого модельного уравнения используется обычно уравнение турбулентной кинетической энергии (127). При этом требуется установить взаимосвязь между касательным напряжением и турбулентной кинетической энергией. Подобные модели изложены в [115, 117, 121].

Брэдшоу, используя уравнение турбулентной кинетической энергии, получил следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2a_{1\rho}} \right)}_{\text{Адвекция}} + \underbrace{\bar{V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{2a_{1\rho}} \right)}_{\text{Производство}} - \underbrace{\frac{\tau}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{Диссипация}} + \frac{(\tau/\rho)^{3/2}}{L} + \underbrace{\left(\frac{\tau_{\max}}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\tau_{\max}}{\rho u_e^2} \right)^{1/2} \Phi \frac{\tau}{\rho} \right]}_{\text{Диффузия}} = 0, \quad (205)$$

где L/δ и Φ — универсальные функции расстояния до стенки y/δ .

Следует отметить, что если пренебречь слагаемыми, описывающими перенос в результате адвекции и диффузии, то это уравнение существенно упрощается (сводится просто к равенству производства и диссипации). Такое уравнение полностью идентично формуле для длины пути перемешивания (201).

Модели с двумя уравнениями. В этих моделях для описания $\tau(x, y)$ и линейного масштаба турбулентности $l(x, y)$ используются два уравнения в частных производных. Уравнение для $\tau(x, y)$ получается по-прежнему из уравнения турбулентной кинетической энергии (k -уравнение), $l(x, y)$ определяется на основе уравнения для изотропной диссипации ϵ . Это уравнение можно получить из уравнений Навье — Стокса, дифференцируя, перемножая и осредняя их соответствующим образом. Такие модели называются иногда моделями $k-\epsilon$ -уравнений. Их детальное описание можно найти в [115, 121].

Модели, в которых используется уравнение для напряжений. В этих моделях уравнения в частных производных используются для описания всех компонентов тензора турбулентных напряжений. Примером может служить модель, разработанная в [118], которая включает уравнения в частных производных для компонентов осредненной скорости $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$, касательного напряжения $\tau(x, y)$, турбулентной кинетической энергии $k(x, y)$ и линейного масштаба турбулентности $L(x, y)$.

Моделирование крупномасштабной турбулентности. В рамках данных моделей рассчитываются крупномасштаб-

ные трехмерные нестационарные структуры, причем для описания мелкомасштабной турбулентности используются модели более низкого уровня. Подобные подходы в настоящее время еще только разрабатываются, поскольку их реализация требует использования мощных ЭВМ [129].

Класс моделей, не использующих дифференциальных уравнений, называется также моделями замыкания на уровне осредненных характеристик, остальные — моделями замыкания на уровне уравнений переноса. Альтернативная классификация основана на порядках корреляций компонентов скорости, для которых используются соответствующие уравнения переноса.

Турбулентный пограничный слой на плоской пластине. Соотношения, приведенные выше, можно конкретизировать для описания течения около плоской пластины, в котором градиент давления равен нулю. Формпараметры для гладкой пластины в отсутствие теплообмена примерно постоянны

$$H_{12}=1,3; H_{32}=1,75;$$

$$\Pi=0,55 \quad (Re_{\delta_2} > 5000).$$

Для меньших значений чисел Рейнольдса Π является функцией Re_{δ_2} [26]. Формула Людвиг — Тиллмана (192) принимает простой вид

$$c_f = 0,0374 Re_{\delta_2}^{-0,268}. \quad (206)$$

Так как интегральное уравнение (147) сводится к соотношению

$$c_f = 2 \frac{d\delta_2}{dx}, \quad (207)$$

то для локального коэффициента трения получаем

$$c_f = 0,0592 Re_x^{-1/5} \quad (5 \cdot 10^5 \leq Re_x \leq 10^7). \quad (208)$$

В области значений Re_x вплоть до 10^7 результаты расчетов по этой формуле хорошо согласуются с экспериментальными данными

$$c_f = 0,27 (\lg Re_x)^{-2,584}; \quad c_f = 2 (\lg Re_x - 0,65)^{-2/3}. \quad (209)$$

Интегрирование поверхностного трения по длине пластины позволяет получить выражение для коэффициента сопротивления, обусловленного вязким трением,

$$\bar{c}_f = \frac{D}{(\rho_e/2) u_e^2 l} = \frac{\int_0^l \tau_w dx}{(\rho_e/2) u_e^2 l} = 2 \frac{\delta_2(l)}{l}. \quad (210)$$

На рис. 6 показана зависимость c_f от числа Рейнольдса $Re = u_e l / \nu$ и относительной высоты шероховатости k_r/l . Пунктирная линия на этой диаграмме отделяет область полностью выраженной шероховатости, в которой коэффициент трения не зависит от числа Рейнольдса. Из рис. 6 видно, что шероховатость заданного размера приводит к увеличению коэффициента поверхностного трения только в том случае, если число Рейнольдса достаточно велико. Высота шероховатости $k_{r, adm}$, при которой увеличения трения по сравнению с трением на гладкой стенке не происходит, называется допустимой. На основании приведенных на рис. 6 данных напишем следующую простую формулу:

$$\frac{u_e k_{r, adm}}{\nu_e} \leq 100. \quad (211)$$

В табл. 5 приведены типичные значения эквивалентной высоты песочной шероховатости некоторых обработанных и необработанных поверхностей.

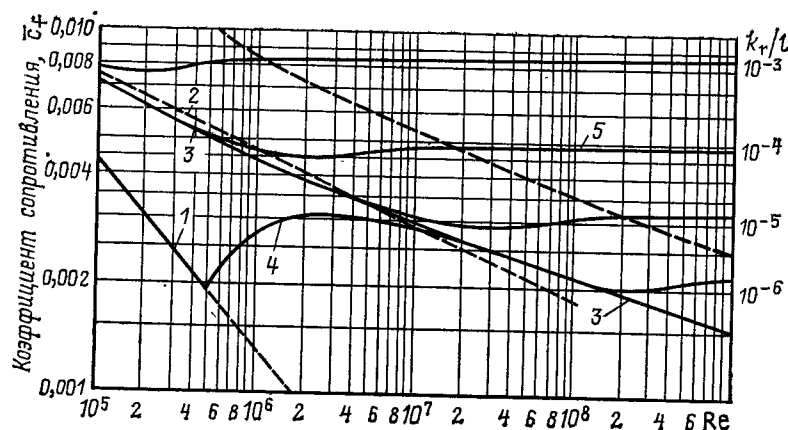


Рис. 6. Коэффициент сопротивления плоской пластины: 1 — ламинарный режим, Блазиус, $c_f = 1,328 \text{ Re}^{-1/2}$; 2 — турбулентный режим, гидравлически гладкая поверхность, Прандтль; 3 — турбулентный режим, гидравлически гладкая поверхность, Прандтль — Шлихтинг, $c_f = 0,455 (\lg \text{Re})^{-2,58}$; 4 — турбулентный режим, гидравлически гладкая поверхность, $c_f = 0,455 (\lg \text{Re})^{-2,58} - 1700 \text{ Re}^{-1}$; 5 — полностью развитая шероховатость, $c_f = [1,89 + 1,62 \lg(l/k_s)]^{-2,5}$

Таблица 5. Эквивалентная песочная шероховатость для нескольких типов поверхностей

Тип поверхности	k_p , мм
Полированный металл или дерево	$0,5 - 2 \cdot 10^{-3}$
Обычный листовой металл	$4 \cdot 10^{-3}$
Тщательно нанесенная гладкая матовая краска	$6 \cdot 10^{-3}$
Обычная защитная краска, среднее качество покрытия	10^{-2}
Защитная краска, нанесенная краскораспылителем	$3 \cdot 10^{-2}$
Поверхность металлов с гальваническим покрытием	0,15
Поверхность чугуновых отливок	0,25

На турбулентное течение около плоской пластины могут влиять следующие факторы.

Теплообмен. Простейший способ определения коэффициента трения при наличии теплопереноса заключается в использовании некоторого определяющего значения температуры, заключенного между максимальной и минимальной температурой в пограничном слое,

$$T_r = T_e + j(T_w - T_e), \quad 0 \leq j \leq 1. \quad (212)$$

При $j = 0,5$ температура T_r называется пленочной температурой [119]. Формулы, полученные для изотермических течений, можно использовать и при наличии теплообмена, только значения ρ и η нужно вычислять при температуре T_r .

При степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры ($\eta \sim T^\omega$) в [120] для неизотермического течения получена следующая формула:

$$\frac{2}{(T_w/T_e)^{1/2} + 1} \frac{1}{\sqrt{c_f}} = 0,41 + \lg(\text{Re}_x \bar{c}_f - 0) \lg \frac{T_w}{T_e}. \quad (213)$$

В изотермическом случае ($T_e = T_w$) эта формула сводится к соотношению, аналогичному одному из указанных на рис. 6 [121].

Относительная шероховатость. Так же, как и при ламинарном течении, отсос увеличивает поверхностное трение, а дув — уменьшает, приводя в конце концов к отрыву потока. Более детально эти вопросы рассмотрены в [121—123].

Влияние числа Маха. Влияние числа Маха особенно детально исследовалось применительно к течениям воздуха [124, 125].

2.2.2. Каналы

К. Герстен

А. Полностью развитое течение в круглой трубе. Коэффициент трения (диаграмма Моуди). Течение в прямой круглой трубе постоянного диаметра $d = 2R$ называется полностью развитым в том случае, когда распределение скорости $u(r)$ и, следовательно, касательное напряжение на стенке τ_w не зависят от продольной координаты x .

Перепад давления между отстоящими друг от друга на расстоянии L сечениями

$$\Delta p = f \frac{L}{d} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2. \quad (1)$$

Безразмерная величина $\hat{f}$ называется коэффициентом трения или коэффициентом сопротивления трения. С касательным напряжением на стенке коэффициент $\hat{f}$ связан соотношением

$$\hat{f} = 8\tau_w / (\rho \bar{u}^2), \quad (2)$$

где средняя скорость

$$\bar{u} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr = \frac{Q}{\pi R^2}. \quad (3)$$

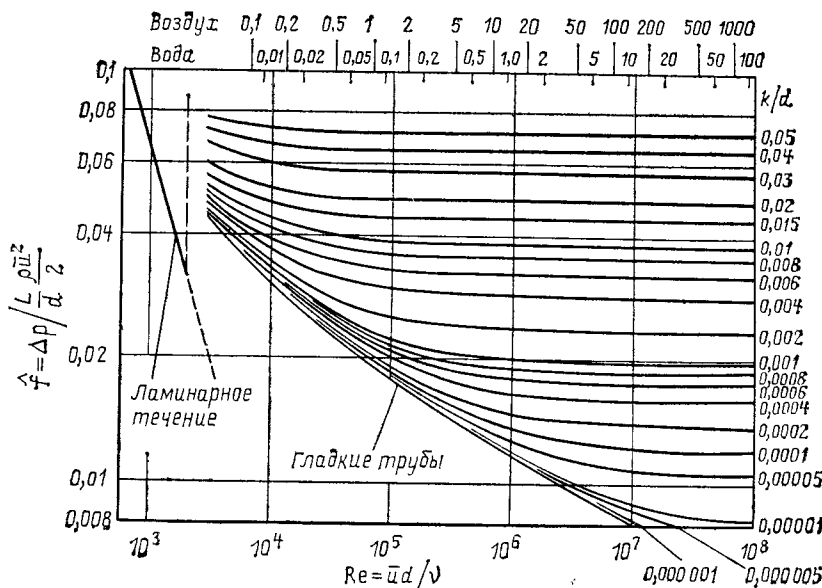
В соответствии с уравнением (48) из § 2.2.1 перепад давления пропорционален диссипации в трубе, т. е. превращению механической энергии во внутреннюю. Ниже η и ρ предполагаются постоянными, т. е. рассматривается изотермическое течение. Коэффициент сопротивления $\hat{f}$ зависит от числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \rho \bar{u} d / \eta \quad (4)$$

и относительной шероховатости k/d . Эта зависимость изображена на представленной на рис. 1 диаграмме Моуди [1]. Формулы, описывающие профили скорости и другие характеристики потока в различных режимах течения, приведены в табл. 1. Можно выделить пять основных режимов течения, описание которых приведено ниже.

1. Ламинарное течение ($\text{Re} < 2400$). Если число Рейнольдса меньше, чем примерно 2400, то течение является ламинарным, причем любые возмущения в нем затухают. В этом режиме уравнения Навье — Стокса (62) — (65) из § 2.2.1 можно существенно упростить; их решение приводит к закону Хагена — Пуазейля.

Рис. 1. Диаграмма Моуди для коэффициента трения при полностью развитом течении в круглой трубе [1]



2. Турбулентное течение; гладкая поверхность ($2400 < Re < 3 \cdot 10^6$). Эмпирически установлено, что в этом режиме профиль скорости описывается степенным законом, причем показатель степени, как видно из табл. 2, уменьшается с увеличением числа Рейнольдса.

3. Турбулентное течение; гидравлически гладкая поверхность ($2400 < Re; k^+ < 5$). Такое течение очень напоминает течение в турбулентном пограничном слое при больших числах Рейнольдса (см. в частности табл. 4 и рис. 5 из § 2.2.1). Всю область течения в этом режиме можно разделить на три подобласти: вязкий подслой ($y < 5\delta_w$), буферный слой ($5\delta_w < y < 60\delta_w$), область логарифмического закона ($y > 60\delta_w$), где

$$\delta_w = \nu / u_\tau$$

(5)

— характерный масштаб длины в пристеночной области. В принципе, здесь существует четвертый слой вблизи центра трубы, в котором справедлив закон следа (см. табл. 4 § 2.2.1). Однако при течении в трубах влияние этого слоя почти всегда пренебрежимо мало [2].

Течение называется гидравлически гладким, если шероховатость не оказывает влияния на коэффициент сопротивления. Это возможно в том случае, когда шероховатость настолько мала, что высота всех выступающих элементов не превышает толщины вязкого подслоя, т. е. при $k < 5\delta_w$ или $k^+ = k/\delta_w < 5$.

4. Турбулентное течение; шероховатая поверхность ($2400 < Re; 5 < k^+ < 60$). Неровности поверхности частично выступают за пределы вязкого подслоя. Дополнительное по сравнению с гладкой трубой сопротивление обусловлено в данном случае теми элементами шероховатости, которые выступают в буферный слой. В этом режиме течения коэффициент сопротивления зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости k^+ .

5. Турбулентное течение; полное проявление шероховатости поверхности ($2400 < Re; 60 < k^+$). В этом режиме все элементы шероховатости выступают из вязкого подслоя. Преобладающая часть сопротивления обусловлена элементами шероховатости. По этой причине вязкость не играет практически никакой роли, и коэффициент сопротивления становится функцией только относительной шероховатости. Перепад давления в этом случае является точной квадратичной функцией средней скорости.

Величина k не обязательно равна высоте элементов шероховатости технических поверхностей, а является характеристикой эквивалентной песочной шероховатости, которая для каждой поверхности должна определяться экспериментально. Приведенные на диаграмме Моуди кривые соответствуют так называемым коммерчески шероховатым трубам, применяющимся на практике [1].

Довольно подробные измерения в шероховатых трубах были проведены в [3]. В этих экспериментах внутренняя поверхность круглых труб покрывалась максимально плотно зёрнами песка определенного размера. На диаграмме Моуди k представляет собой высоту элементов эквивалентной песочной шероховатости.

В табл. 3 приведены характеристики эквивалентной относительной песочной шероховатости для различных коммерческих труб.

Характеристики турбулентности. Универсальный закон распределения, представленный в табл. 2, при $Re > 10^5$

не зависит от числа Рейнольдса. На рис. 2 приведено сопоставление данных измерений профиля скорости [3] с расчетами по формуле

$$\frac{u_c - u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{R}. \quad (6)$$

В соответствии с балансом сил давления и трения касательное напряжение пропорционально радиусу

$$\tau = \tau_e + \tau_t = \rho (\nu + \nu_t) \frac{du}{dy} = \frac{\tau_w}{R} r, \quad (7)$$

где y — расстояние до стенки, а турбулентная вязкость ν_t (см. уравнение (140) § 2.2.1)

$$\nu_t = - \frac{u'v'}{du/dy}. \quad (8)$$

Скорость v положительна, если направлена в сторону увеличения y . Турбулентную вязкость ν_t , используя гипотезу о длине пути перемешивания l [уравнение (101) § 2.2.1], можно представить также в виде

$$\nu_t = l^2 \frac{du}{dy}. \quad (9)$$

Безразмерные турбулентная вязкость $\nu_t/(u_\tau R)$ и длина перемешивания l/R также изображены на рис. 2. Приведенная в табл. 1 формула для l/R справедлива при $Re > 10^5$.

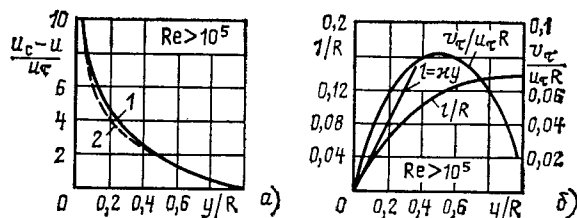
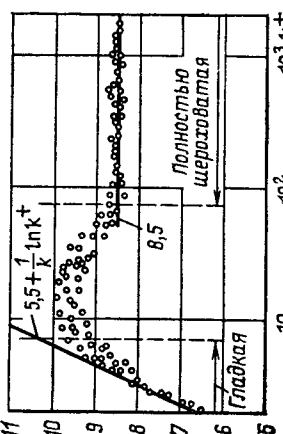


Рис. 2. Полностью развитое турбулентное течение в круглой трубе с гладкими и шероховатыми стенками:

а — универсальный закон дефекта скорости (кривая 1 соответствует уравнению (6), кривая 2 — измерения Никурадзе [3]); б — длина пути перемешивания l и турбулентная вязкость ν_t по данным измерений Никурадзе [3]

Т а б л и ц а 1. Характеристики полностью развитого течения в круглой трубе

Режим течения	Число Рей-нольдса Re	Шероховатость k^+	Коэффициент трения $\hat{f}$	Распределение скорости $u(r)$	Характеристики турбулентности для гладких и шероховатых труб ($Re > 10^5$)
Ламинарное течение	$0 < Re < 2400$		Хаген — Пуазейль $\hat{f} = \frac{64}{Re}$	$u(r) = 2\bar{u} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$	—
Турбулентное течение	$2400 < Re < 10^5$ $< 3 \cdot 10^6$	$k^+ < 5$	Блазус $\hat{f} = \frac{0,316}{Re^{1/4}} \quad (Re < 10^5)$ $\hat{f} = \frac{0,184}{Re^{1/5}} \quad (Re > 10^5)$	$u(r) = u_c(n) \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n}$ $\frac{u(y)}{u_\tau} = C(n) (y^+)^{1/n}$ $u_c(n), C(n)$ в табл. 2	—
Гидравлически гладкая поверхность	$2400 < Re$	$k^+ < 5$	$\frac{1}{\sqrt{\hat{f}}} = 20 \lg (Re \sqrt{\hat{f}}) - 0,8$	$u^+ = \frac{u(y)}{u_\tau} \frac{1}{k} \ln y^+ + 5,5, y^+ > 60$ $u^+ = y^+, 0 < y^+ < 5$	Длина пути смещения $\frac{l}{R} = 0,14 - 0,08 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 0,06 \left(\frac{r}{R} \right)^4$
Турбулентное течение, шероховатая поверхность	$2400 < Re$	$5 < k^+ < 60$	Колебрук — Уайт $\frac{1}{\sqrt{\hat{f}}} = 1,74 - 2 \lg \left(\frac{2k}{d} + \frac{18,7}{Re \sqrt{\hat{f}}} \right)$ Миллер $4\hat{f} = [\lg (k/37d) + (5,74/Re^{0,9})]^{-2}$	 $u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C^+(k^+)$	$\frac{l}{R} = k \frac{y}{R} - 0,44 \left(\frac{y}{R} \right)^2$ $0 < y < 0,2R$ Не зависит от числа Re при $Re > 10^5$
Турбулентное течение, полное проявление шероховатости	$2400 < Re$	$60 < k^+$	Карман $\frac{1}{\sqrt{\hat{f}}} = 1,74 - 2 \lg \frac{2k}{d}$	$u^+ = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{k} + 8,5$	Универсальный закон дефекта скорости $\frac{u_c - u}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \frac{R}{y}$ $y^+ > 60, y^+ > k^+$ $\bar{u} = u_c - 4,07 u_\tau$ $\frac{\bar{u}}{ac} = (1 + 1,44 \sqrt{\hat{f}})^{-1}$

П р и м е ч а н и е. $\hat{f}$ — коэффициент трения, определенный уравнением (1); k^+ — высота элементов шероховатости; $k^+ = k u_\tau / \nu$ — безразмерная высота элементов шероховатости; l — длина пути перемешивания, определенная (9); n — показатель степени в степенном законе распределения скорости; r — радиальная координата; R — радиус трубы; $Re = u d / \nu$ — число Рейнольдса; u — аксиальная скорость; $Q = Q / \pi R^2$ — средняя скорость; Q — объемный расход; u_c — скорость на оси трубы; $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ — динамическая скорость; $y = R - r$ — расстояние до стенки; $k = 1,4$ — постоянная Кармана; ν — кинематическая вязкость; τ_w — касательное напряжение.

Таблица 2. Характеристики турбулентного течения в трубе при степенном законе распределения скорости

Re	4×10^3	1.1×10^5	4.7×10^5	1.3×10^6	3×10^6
n	6	7	8	9	10
$\frac{\bar{u}}{u_c}$	0.791	0.817	0.837	0.852	0.865
α	1.077	1.058	1.046	1.037	1.031
β	1.027	1.020	1.016	1.013	1.011
$C(n)$	7.76	8.74	9.71	10.6	11.5

Примечание. Определения $C(n)$, Re , $\bar{u}$, u_c см. в табл. 1; α — корректирующий множитель для кинетической энергии, определенный уравнением (29) (см. § 2.2.1); β — корректирующий множитель для импульса, определенный уравнением (30) (см. § 2.2.1).

При меньших значениях чисел Рейнольдса распределение длины пути перемешивания по радиусу зависит от Re .

На рис. 3 представлены результаты измерений касательных напряжений τ_t и турбулентной вязкости при турбулентном течении в трубе [5]. Области течения вблизи оси (область действия закона деффекта) и стенки изображены раздельно. В первой из этих областей масштабом скорости является u_c — максимальная скорость, реализующаяся на оси трубы, во второй — динамическая скорость u_c . Турбулентное касательное напряжение зависит от y линейно почти всюду, за исключением узкой области вблизи стенки. На внешней границе этой области $\tau_t = \tau_w$. На рис. 4 показано, каким образом изменяются усредненная скорость $\bar{u}$ и среднеквадратичные пульсации $\sqrt{u'^2}/\sqrt{v'^2}/\sqrt{w'^2}$ по радиусу трубы. Во всей области наиболее интенсивны осевые флуктуации $\sqrt{u'^2}$. Их максимальное значение $\sqrt{u'^2}/u_c = 0.08$ достигается внутри буферного слоя (при $y^+ = 15$). Из этого рисунка можно видеть, что внутри пристеночного слоя турбулентность не является ни однородной ($u'^2 = v'^2 = w'^2$), ни изотропной ($u'v' = v'w' = u'w' = 0$).

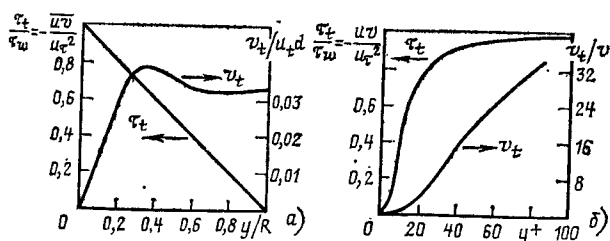
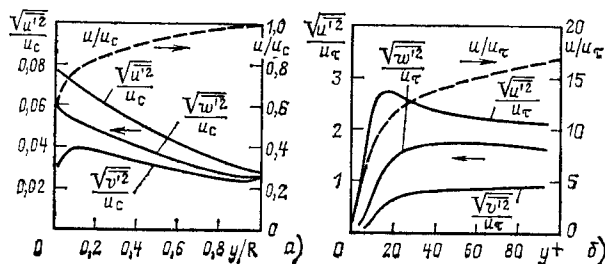


Рис. 3. Профили турбулентного касательного напряжения и турбулентной вязкости, определенные уравнением (7), по данным [5], для полностью развитого турбулентного течения в трубе ($Re = 5 \cdot 10^5$): а — полностью турбулентная область; б — пристеночный слой

Таблица 3. Значения параметра шероховатости k^*

Трубы **	k , мм
Гладкие	
Тянутая латунь, медь, алюминий и т. д.	0,0025
Стекло, пластик, плексиглас, стекловолокно	0,0025
Стальные	
Новые гладкие трубы	0,025
Эмалевое покрытие, нанесенное методом центробежного распыления	0,025
Незначительная ржавчина	0,25
Нанесенный кистью толстый слой битума, эмали или гудрона	0,5
Обычные водопроводные магистрали	1,2
Бетонные	
Новые особо гладкие бетонные трубы, тщательная заделка стыков	0,025
Отлитые в стальной опалубке, высокое качество изготовления, тщательная заделка стыков	0,025
Новый или сравнительно новый бетон, гладкие стыки	0,1
Отливка в стальной опалубке, среднее качество изготовления, гладкие стыки	0,1
Повреждения поверхности движущимися в трубах твердым материалом, заметные следы от деревянной опалубки	0,5
Сборный железобетон, хорошая отделка поверхности, среднее качество стыков	0,25
Другие трубы	
Каналы из листового металла с гладкими стыками	0,0025
Металлы с гальваническим покрытием, среднее качество обработки поверхности	0,15
Металлы с гальваническим покрытием, качественная обработка поверхности	0,025
Литой чугун с покрытием или без покрытия	0,15
Асбоцемент	0,025
Гибкие резиновые трубы с гладкой внутренней поверхностью	0,025
Гофрированные пластиковые трубы *** (кажущаяся шероховатость)	3,5
Канализационные трубы с отложениями на стенках	3,0

* По Миллеру [4].

** Трубы, изготовленные штамповкой с вытяжкой, сверлением или литые, могут иметь поверхностные дефекты, увеличивающие шероховатость до 10 раз.

*** У гофрированных пластиковых труб фабричного изготовления с диаметром 40–100 мм отношение расстояния между складками к их глубине примерно равно 1,5. При увеличении этого отношения от 1,5 до 5 коэффициент трения может возрасти в 2 раза.

Рис. 4. Профили скорости $u(y)$ и интенсивности турбулентных флуктуаций $\sqrt{u'^2}$, $\sqrt{v'^2}$, $\sqrt{w'^2}$ по данным [5], для полностью развитого турбулентного течения в трубе ($Re = 5 \cdot 10^5$): а — полностью турбулентная область; б — пристеночный слой

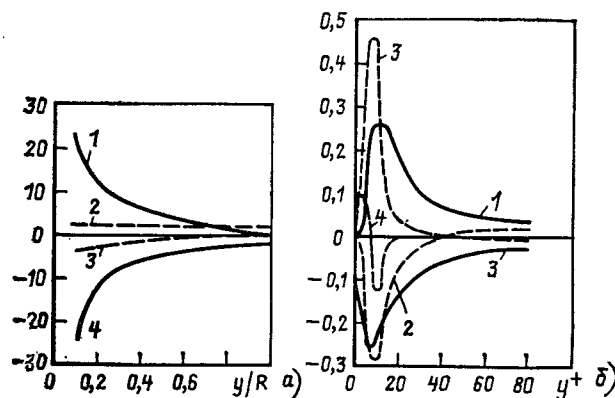


Рис. 5. Баланс энергии турбулентности согласно данным [5] для полностью развитого турбулентного течения в трубе ($Re=5 \cdot 10^4$). Полностью турбулентная область для обезразмеривания участвующих в (10) слагаемых в качестве характерного масштаба использовалась величина u_t^2/R (а) и пристеночный слой (б). Слагаемые в (10) обезразмерены по u_t^4/ν ; $y^+ = y u_t / \nu$:

1 — генерация; 2 — турбулентная диффузия кинетической энергии; 3 — диффузия в результате пульсаций давления; 4 — диссипация; 5 — вязкая диффузия энергии турбулентности; 6 — диссипация (только ϵ_t)

На рис. 5, построенном на основе данных измерений [5], показан баланс энергии турбулентности при течении в трубе ($Re=5 \cdot 10^5$). Положительные величины означают приток энергии турбулентности.

Уравнение турбулентной кинетической энергии, аналогичное приведенному для пограничного слоя [(127) из § 2.2.1] в случае развитого турбулентного течения в трубе имеет вид

$$\overline{u'v'} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\frac{q^2}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) v' \right] + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{q^2}{2} + \overline{v'^2} \right) \right] - \epsilon_t = 0. \quad (10)$$

Генерация Турбулентная диффузия энергии турбулентности Диффузия под влиянием пульсаций давления

Вязкая диффузия энергии турбулентности Диссипация

Это уравнение описывает баланс следующих пяти процессов: генерации энергии турбулентности, ее вязкой диффузии, турбулентной диффузии и диффузии под влиянием пульсаций давления и ее диссипации. В первом приближении можно считать, что производство уравновешивается диссипацией всюду, за исключением центральной области трубы, где турбулентность поддерживается диффузией энергии турбулентных пульсаций. По мере приближения к пристеночному слою начинается быстрое изменение всех слагаемых. Диффузионные слагаемые изменяют знак. В пристеночном слое оба турбулентных диффузионных слагаемых велики, но противоположны по знаку, поэтому в балансе энергии их суммарный вклад почти не проявляется.

Необходимо упомянуть здесь обзор [6], в котором рассматривается генерация турбулентностью акустических колебаний при течении в трубах.

Влияние естественной конвекции на течение в горизонтальных трубах. Выше рассматривались только изотермические течения в трубе. Если же в результате вязкой диссипации или теплообмена между стенками трубы и жидкостью формируется радиальный профиль температуры, то при малых числах Рейнольдса или больших перепадах температуры важную роль может играть естественная конвекция, развивающаяся на фоне основного тече-

ния. Особенно отчетливо влияние этого эффекта проявляется при ламинарном течении, что детально обсуждается в § 2.5.10.

При наличии теплообмена по мере продвижения жидкости в осевом направлении в ней формируется температурное поле и возникают подъемные силы. Однако в случае постоянного теплового потока радиальное распределение температуры асимптотически перестает зависеть от продольной координаты, хотя ее средний уровень и продолжает линейно падать. Если при этом использовать приближение Буссинеска, допуская постоянство всех свойств жидкости, за исключением зависящей от температуры плотности в выражении для подъемной силы, фигурирующей в уравнении вертикального компонента импульса, то в достаточно удаленной вниз по потоку области реализуется полностью развитое течение, соответствующее смешанной — вынужденной и естественной — конвекции. Влияние естественной конвекции описывается с помощью следующих двух безразмерных параметров:

числа Грасгофа

$$Gr = \frac{g \rho^2 \delta^3 \beta (T_w - T_b)}{\eta^2}, \quad (11)$$

числа Релея

$$Ra = Gr Pr = \frac{g \rho^2 \delta^3 \beta (T_w - T_b)}{\eta \lambda} c_p, \quad (12)$$

где свойства жидкости (плотность ρ , коэффициент расширения β , вязкость η и теплопроводность λ) вычисляются при среднемассовой температуре T_b [см. (28) из § 2.2.1].

Анализируя литературные данные, авторы [7] установили границы области параметров, в которой становятся важными эффекты естественной конвекции при течении в трубе. Полученные результаты для горизонтальной трубы приведены на рис. 6.

Граница между режимами вынужденной и смешанной конвекции определяется на основе следующего критерия: реальный тепловой поток отличается не более чем на 10% от теплового потока, который был бы при чисто вынужденной конвекции.

В принципе возможны два типа граничных условий: 1) постоянный тепловой поток в осевом и периферийном направлениях (нулевая теплопроводность стенки); 2) постоянный средний тепловой поток вдоль трубы и однородное распределение температуры по периметру в любом сечении (бесконечная теплопроводность стенки) (рис. 6).

При выполнении граничного условия 1, как показано в [8], возможны сильные перепады температуры стенки вдоль периметра трубы. При этом с увеличением числа

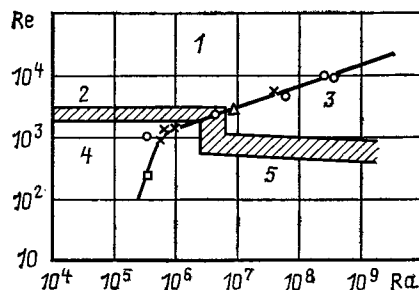


Рис. 6. Влияние естественной конвекции на полностью развитое течение в горизонтальной круглой трубе. Режимы свободной, вынужденной и смешанной конвекции по результатам [7]:

1 — вынужденная конвекция, турбулентное течение; 2 — переход от ламинарного течения к турбулентному; 3 — смешанная конвекция, турбулентное течение; 4 — вынужденная конвекция, ламинарное течение; 5 — смешанная конвекция, ламинарное течение

Релея растет и коэффициент сопротивления [8]

$$\frac{\bar{f}_f}{\bar{S}_{iso}} = [1 + (0,195 Ra_f^{0,16})^{15}]^{1/15}, \quad (13)$$

где индекс f означает, что соответствующая величина вычисляется при пленочной температуре, равной среднеарифметическому среднemasсовой и средней по периметру температур. Изотермический коэффициент сопротивления $f_{iso} = 64/Re$ вычисляется при этой же температуре.

Число Релея основано на разности температур стенки и среднemasсовой.

Пленочная температура

$$T_f \approx \frac{T_w + T_b}{2} = T_b + \frac{11}{48} \frac{\dot{q}_w d}{2}. \quad (14)$$

Эта формула является точной при полностью развитом течении в трубе жидкости с постоянными свойствами и малом значении теплового потока $\dot{q}_w$.

Теоретические результаты [9], относящиеся к случаю однородного распределения температуры по периметру (бесконечная теплопроводность), хорошо согласуются с экспериментальными данными. В [10] однако, получено, что корректирующий множитель в уравнении (13) зависит от другой комбинации чисел Pr , Gr и Re .

Возрастание сопротивления при течении в нагреваемых трубах обусловлено возникновением вторичного течения, при котором прилегающие к стенкам трубы нагретые слои жидкости поднимаются вверх, а вблизи вертикальной плоскости симметрии формируется нисходящий поток. Поэтому линии тока имеют форму спиралей в каждой из двух примыкающих друг к другу ячеек. Такое вторичное течение весьма напоминает течение в искривленных трубах (см. п. D). В действительности между эффектами кривизны и естественной конвекции существует более общая аналогия (см. [127] в § 2.2.1).

Очевидно, что при турбулентном течении в трубе естественная конвекция проявляется слабее, чем при ламинарном. Теоретическое исследование турбулентных течений в трубах с учетом естественной конвекции проведено в [11].

Эффекты естественной конвекции становятся особенно важными для большого теплового потока, приводящего к большому перепаду температур в жидкости. При этом, как правило, приходится учитывать переменность тепловых свойств (см. [12] и следующий раздел).

Влияние зависимости свойств жидкости от температуры. Одним из основных предположений, использовавшихся выше, было предположение о постоянстве свойств жидкости. Поскольку переносные свойства большинства жидкостей зависят от температуры (см. п. А из 2.2.1 и табл. 2 § 2.2.1), то это предположение справедливо только при небольших перепадах температур. Если же температура жидкости в трубе изменяется сильно, необходимо учитывать переменность свойств.

Уравнения движения, описывающие полностью развитое течение жидкости в осесимметричной трубе (см. (62)–(65) § 2.2.1), в цилиндрических координатах x , z сводятся к следующему:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \eta \left(1 + \frac{v_t}{v} \right) \frac{du}{dr} \right], \quad (15)$$

где u — осевая компонента скорости. Изменения сопротивления обусловлены главным образом температурной зависимостью вязкости $\eta(T)$.

На практике переменности свойств учитывается обычно с помощью дополнительных корректирующих множителей в формулах, полученных для случая постоянных свойств.

Как правило, применяется один из трех следующих методов коррекции:

1. *Метод отношения свойств.* В этом методе все свойства рассчитываются при среднemasсовой температуре жидкости, а затем все влияние переменности свойств описывается отношениями значений свойств при температурах стенки и среднemasсовой.

2. *Метод определяющей температуры.* В этом методе определяется некоторая характерная температура, при которой и вычисляются все свойства, описываемые безразмерными параметрами, а затем применяются формулы, полученные для постоянных свойств (см. § 2.1.5). Типичным является использование пленочной средней температуры T_f .

3. *Линейное приближение.* Используя для описания температурной зависимости свойств линейное приближение (первый член разложения в ряд Тейлора) и предполагая перепад температуры малым, можно получить линейные поправки к формулам для постоянных свойств (см. § 2.1.5). В табл. 2 § 2.2.1 приведены температурные зависимости свойств воды и воздуха.

Последний метод является наиболее универсальным, так как получаемые в его рамках формулы могут применяться для любых жидкостей. В первых же двух методах переменность свойств различных газов и жидкостей учитывается по-разному. Как отмечалось в [13], применительно к вихревым течениям в каналах метод отношения свойств несколько лучше метода характерной температуры. В табл. 4 даны некоторые широко распространенные корреляционные формулы.

Влияние добавок на трение жидкости. Экспериментально было установлено, что очень малые (несколько миллионных долей по массе) концентрации растворенного в жидкости высокомолекулярного соединения могут приводить к уменьшению вязкого сопротивления в турбулентных течениях в 4 раза по сравнению с сопротивлением при течении жидкости без добавок. В ламинарных же течениях подобные добавки практически никак не сказываются. Степень снижения сопротивления зависит от относительной молекулярной массы полимера и его концентрации. Как показано в [21], с ростом концентрации коэффициент трения асимптотически уменьшается до некоторого предельного значения, которое можно вычислить по формуле

$$\frac{1}{V \bar{f}} = 9,5 \lg (Re \sqrt{\bar{f}}) - 19. \quad (16)$$

Очевидно, что молекулы полимера стабилизируют турбулентные пульсации, по крайней мере в каком-то определенном спектральном диапазоне. Исчерпывающего объяснения этого явления в настоящее время не существует. Более детально эти вопросы освещены в обзорах [22–25].

В. Полностью развитое течение в трубах некруглого сечения. Ламинарное течение. В канале с произвольным поперечным сечением распределение продольной составляющей скорости $u(y, z)$ описывается следующим линейным дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{dp}{dy} = \text{const}, \quad (17)$$

где ось x параллельна оси канала. На стенках канала используется условие прилипания $u=0$. Для изотермических течений это уравнение превращается в уравнение Пуассона, в котором константа в правой части пропорциональна градиенту давления и, следовательно, коэффициенту трения.

При отличных от круглого поперечных сечениях в качестве характерной длины используется эквивалентный, или гидравлический, диаметр

$$d_h = 4S/P_r, \quad (18)$$

где P_r — смоченная часть периметра поперечного сечения,

Таблица 4. Влияние температурной зависимости свойств жидкости на коэффициент трения при полностью развитом течении

Течение	Формула	Примечания	Литература
Ламинарное течение, газы и жидкости	$\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{iso}} = 1 + \frac{6}{11} \left(\frac{d\eta}{dT} \frac{T}{\eta} \frac{T_w - T_b}{T_b} \right) - \frac{14}{33Pr} \left(\frac{d\rho}{dT} \frac{T}{\rho} \right)_b \frac{T_w - T_b}{T_b}$	$\eta = \eta_b + \left(\frac{d\eta}{dT} \frac{T}{\eta} \frac{T - T_b}{T_b} \right)$ $\hat{f}_{iso}$ при T_b $T_w - T_b$ мало	—
Ламинарное течение, газы и жидкости	$\hat{f} = \frac{64}{Re}$ для газов $j=0,58$ для нефти $j=0,25$ для жидких металлов $j=0,54$	η при температуре $T_r = T_b + j(T_a - T_b)$	[14]
Ламинарное течение, газы	$\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{iso}} = \left(\frac{T_w}{T_b} \right)^m$ $m=0,81$ $0,5 < T_w/T_b < 1$ $m=1$ $1 < T_w/T_b < 3$	$\hat{f}_{iso}$ при T_b	[13]
Ламинарное течение, жидкости	$\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{iso}} = \left(\frac{\eta_w}{\eta_b} \right)^m$ $m=0,50$ $T_w/T_b < 1$ $m=0,58$ $T_w/T_b < 3$	$\hat{f}_{iso}$ при T_b	[13]
Ламинарное течение (нагрев только в результате вязкой диссипации)	$\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{iso}} = 1 - 7,833 \left(\frac{d\eta}{dT} \frac{T}{\eta} \right) Pr Ec$	$Ec = \frac{\bar{u}^2}{c_p T_b}$ $T_w - T_b$ мало	[15]
Турбулентное течение, газы	$\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{iso}} \left(\frac{T_b}{T_w} \right)^m$ $m=0,5$ $m=0,6$	$\hat{f}_{iso}$ при T_w	[16] [17]
Турбулентное течение, жидкости	$\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{iso}} = \left(\frac{\eta_w}{\eta_b} \right)^m \left(\frac{\rho_w}{\rho_b} \right)^{0,5}$ для воды $m=10$ $\hat{f}_{iso}$ $T_w/T_b > 1$	$\hat{f}_{iso}$ при T_b	[18]
	$\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{iso}} = \left(\frac{\eta_w}{\eta_b} \right)^{0,14}$ для масла $T_w/T_b > 1$	$\hat{f}_{iso}$ при T_b	[19]
	$\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{iso}} = \left(\frac{\eta_w}{\eta_b} \right)^{0,24}$ $T_w/T_b < 1$	$\hat{f}_{iso}$ при T_b	[20]

Примечание. $Ec = \bar{u}^2 / c_p T_b$ — число Эккерта; $\bar{u}$ — средняя скорость; c_p — удельная теплоемкость; $\hat{f}$ — коэффициент трения с учетом температурной зависимости свойств; $\hat{f}_{iso}$ — коэффициент трения в изотермическом течении (свойства жидкости берутся при температуре T_b или T_w); Pr — число Прандтля, вычисленное при температуре T_b ; T_w — температура стенки; η — вязкость; ρ — плотность; индекс o вычислен при температуре T_b ; индекс w вычислен при температуре T_w ; $(d\eta/dT)(T/\eta)$ — безразмерная скорость изменения вязкости с температурой при температуре T_b (см. табл. 2 § 2.2.1).

Для круглого поперечного сечения гидравлический диаметр совпадает с обычным. Используя характерную длину d_h для определения числа Рейнольдса и коэффициента сопротивления, имеем

$$\hat{f} = K_f / Re, \quad (19)$$

где константа K_f зависит от геометрических характеристик поперечного сечения канала (для круглого канала $K_f = 64$).

В табл. 5 приведены значения этой константы и гидравлического диаметра для различных форм поперечных сечений.

Турбулентное течение. Определение коэффициента

Таблица 5. Характеристики ламинарного течения в некруглых трубах

Поперечное сечение	Геометрия	d_h	K_f	$K(\infty)$	$\frac{L_{hy}}{d_h Re}$
Круг	Диаметр d	d	64,0	1,25	0,057
Квадрат	Сторона a	$\frac{a}{2}$	56,9	1,43	0,033
Прямоугольник (стороны a, b)	$a/b=2$	$\frac{2}{3}a$	62,2	1,28	0,028
	$a/b=5$	$\frac{1}{3}a$	76,3	0,931	0,019
Двумерный канал	Высота h	$2h$	96,0	0,674	0,011
Равносторонний треугольник	Сторона a	$0,577a$	53,3	1,69	0,040
Концентрический кольцевой канал (внешний диаметр d_o , внутренний диаметр d_i)	$d_i/d_o=0,05$	$0,95d_o$	86,3	0,830	0,021
	$d_i/d_o=0,1$	$0,9d_o$	89,4	0,784	0,019
	$d_i/d_o=0,5$	$0,5d_o$	95,2	0,688	0,012
	$d_i/d_o=0,75$	$0,25d_o$	95,9	0,678	0,011
	$d_i/d_o=1$	d_o-d_i	96,0	0,674	0,011

Примечание. d_h — гидравлический диаметр, определенный уравнением (46) § 2.2.1; K_f — константа в (19), характеризующая коэффициент трения в полностью развитом течении; $K(\infty)$ — асимптотическое значение коэффициента увеличения потерь давления, определенного уравнением (21), для гидродинамически развивающегося течения; L_{hy} — длина начального участка для гидродинамически развивающегося течения, на котором максимум скорости достигает 99% своего асимптотического значения.

сопротивления при турбулентном течении в некруглом канале значительно сложнее, чем при ламинарном течении. Поскольку течение не является осесимметричным, асимметрия турбулентного поля скоростей приводит к возникновению вторичных течений, при которых жидкость перемещается из области малых касательных напряжений в область больших. Это приводит к выравниванию распределения касательных напряжений на периферии. На рис. 7 изображена структура вторичного течения в квадратном канале. Максимальная скорость вторичного течения составляет 1—2% скорости основного потока. Вторичные потоки постоянно переносят импульс из центральной зоны к угловым, в результате чего скорость там увеличивается. Прандтль назвал это явление вторичным течением второго типа в отличие от вторичных течений, обусловленных естественной конвекцией (см. § 2.2.1) или кривизной (см. § 2.2.5).

Вторичные течения, возникающие при турбулентном течении жидкости в трубах с некруглым поперечным сечением, приводят к тому, что распределение касательных напряжений по периметру становится близким к однородному. Если бы касательные напряжения были совершенно одинаковыми, то сопротивление было бы таким же, как и в круглой трубе равного периметра. Именно поэтому для многих различных поперечных сечений удовлетворительным оказывается способ расчета коэффициента сопротив-

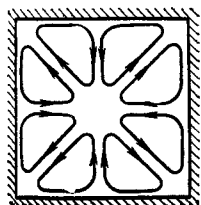


Рис. 7. Структура вторичного течения в квадратном поперечном сечении канала

ления, основанный на использовании гидравлического диаметра в качестве характерного размера в формулах для числа Рейнольдса и коэффициента сопротивления.

Концепция гидравлического диаметра является адекватной при условии, что отношение P_r/A^3 для каждого поперечного сечения ненамного превышает это же отношение для любого другого поперечного сечения, которое можно построить внутри данного. При расчетах потерь давления в трубе необходимо найти минимум отношения P_r/A^3 . Соответствующие этому минимуму периметр и площадь сечения и нужно использовать в расчетах числа Рейнольдса, средней скорости и перепада давления [4].

В том случае, когда поперечное сечение канала содержит узкую область, переход от ламинарного режима к турбулентному внутри нее может затянуться по сравнению с переходом в ядре потока. Например, внутри острого угла в канале с треугольным поперечным сечением течение остается ламинарным вплоть до очень больших чисел Рейнольдса, в то время как в остальной части канала переход происходит при гораздо меньших числах Рейнольдса [26].

Разными авторами были проведены исследования турбулентных течений в каналах со следующими поперечными сечениями:

- 1) плоские каналы. Профили скорости и коэффициент сопротивления в этом случае отличаются от соответствующих величин в круглой трубе незначительно [27—31];
- 2) кольцевые каналы. В концентрических кольцевых каналах вторичное течение второго типа не возникает [32—34];
- 3) прямоугольные каналы [35—39];
- 4) пучки стержней [33, 40—43];
- 5) различные поперечные сечения. Эксцентричные кольцевые каналы рассматривались в [33, 44], треугольные — в [45].

С. Развивающееся течение в канале. Гидродинамический начальный участок при изотермическом течении в канале. Во многих практических случаях течение в трубах не является полностью развитым, а находится в процессе развития. Таким образом, развитый режим течения формируется постепенно.

Типичным примером является течение в начальном участке трубы. Предполагается, что во всех точках начального сечения продольная скорость одинакова. По мере продвижения по трубе ее профиль под влиянием вязких сил постепенно деформируется, асимптотически приближаясь к профилю скорости в режиме полностью развитого течения, описанному выше.

Ниже рассматривается гидродинамический начальный участок при изотермическом течении в трубе постоянного сечения.

В соответствии с уравнениями (37) и (47) перепад давления между входным сечением (индекс 1 соответствует $x=0$) и сечением с координатой x равен

$$\frac{p_1 - p(x)}{(\rho/2) u^2} = \frac{4}{d_h} \int_0^x \frac{\tau_w(x)}{(\rho/2) u^2} + 2[\beta(x) - 1], \quad (20)$$

где $\beta(x)$ — корректирующий множитель импульса, зависящий от распределения скорости в сечении x . Перепад давления обусловлен поверхностным трением и изменением потока импульса в двух рассматриваемых сечениях канала. Касательные напряжения на начальном участке больше, чем на участке полностью развитого течения. Полный перепад давления можно представить в виде суммы двух слагаемых: перепада давления на заданной длине при полностью развитом течении и дополнительного перепада давления за счет изменения импульса и накапливающегося поверхностного трения в развивающемся течении по сравнению с полностью развитым. Второе слагаемое, представленное в безразмерном виде, называется коэф.

фициентом увеличения потерь давления $K(x)$ (или иногда дефектом давления) и определяется следующим образом:

$$\frac{p_1 - p(x)}{(\rho/2) u^2} = \hat{f}_{\text{app}} \frac{x}{d_h} + K(x). \quad (21)$$

Другой подход к описанию перепада давления на начальном участке течения основан на использовании кажущегося коэффициента трения $\hat{f}_{\text{app}}$

$$\frac{p_1 - p(x)}{(\rho/2) u^2} = \hat{f}_{\text{app}}(x) \frac{x}{d_h}. \quad (22)$$

В полностью развитом течении $K(x)$ монотонно возрастает от нуля при $x=0$ до $K(\infty)$. Длина гидродинамического начального участка L_{hy} определяется несколько условно как расстояние от входного сечения, в котором скорость распределена однородно, до сечения, в котором максимальная скорость составляет 99% соответствующего значения в полностью развитом течении. Такое определение используется наиболее широко, хотя в литературе можно встретить и другие определения.

В каналах, длина которых больше L_{hy} , для определения дополнительных потерь давления на начальном участке достаточно знать лишь величину $K(\infty)$. Для расчета $K(\infty)$ и детальных характеристик профилей скорости и давления на начальном участке используется обычно приближение пограничного слоя, т. е. предполагается, что касательные напряжения важны только в направлениях, перпендикулярных потоку, и поэтому производной $\partial^2 u / \partial x^2$ можно пренебречь. В связи с этим имеющиеся в литературе результаты справедливы только для течений с большими числами Рейнольдса. Результаты подобных расчетов можно найти в [46].

Для круглых труб можно использовать следующие результаты:

ламинарное течение в круглой трубе

$$K(\infty) = 1,25; \quad L_{hy}/d_h = 0,057 \text{ Re}; \quad (23)$$

турбулентное течение в круглой трубе

$$K(\infty) = 0,065; \quad L_{hy}/d_h = 45. \quad (24)$$

Как нетрудно видеть, длина начального участка при турбулентном течении гораздо меньше, чем при ламинарном.

При относительно малых числах Рейнольдса ($\text{Re} < 250$) приведенные выше результаты неточны, так как теория пограничного слоя, в рамках которой они и были получены, неприменима. Критическому анализу проблемы корректного математического описания течения в начальном участке посвящена работа [47], в которой получено решение для плоского канала.

В [46] также рассмотрен случай перехода от ламинарного течения к турбулентному в трубе внутри начального участка.

Величины $K(\infty)$ и L_{hy} для ламинарного течения в начальном участке каналов произвольного поперечного сечения приведены в табл. 5 (см. также [48]).

Для турбулентных течений в большинстве случаев аналогичных данных в литературе нет. Поскольку практически это и не очень важно, то для оценок вполне достаточно применять концепцию гидравлического диаметра, т. е. использовать данные, описывающие начальный участок круглой трубы.

Различные типы развивающихся течений в каналах. Течение в начальном участке представляет собой далеко не единственный, хотя и типичный пример развивающихся течений в каналах. Существует множество других практически важных ситуаций, в которых реализуются подбные течения. Ниже рассмотрены некоторые примеры.

1. *Гидродинамически развивающееся течение при наличии подъемных сил.* При теплообмене и, следовательно, перепаде температур в жидкости на развивающееся тече-

ние, рассмотренное выше, может оказывать влияние естественная конвекция. Новые эффекты возникают при течении как в горизонтальных, так и в вертикальных трубах. В первом приближении влияние естественной конвекции на кажущийся коэффициент трения $\hat{f}_{\text{app}}$ может быть оценено способом, аналогичным использованному выше для расчета обычного коэффициента трения.

2. *Гидродинамически развивающееся течение при наличии температурной зависимости свойств жидкости.* Как и в предыдущем случае, расчет кажущегося коэффициента трения с учетом переменности теплофизических свойств можно провести по формулам, применявшимся при полностью развитом течении.

Если интересоваться распределением температуры в жидкости, то возникает проблема описания течения в термическом начальном участке.

Подобные задачи можно разделить на две категории: в первой — профили скорости и температуры развиваются одновременно; во второй — профиль температуры начинает развиваться только с некоторого сечения, находящегося внутри гидродинамического начального участка.

3. *Течение в вертикальной трубе при наличии естественной конвекции.* В том случае, когда теплообмен происходит при течении в вертикальном канале, необходимо учитывать влияние подъемных сил. В случае нагрева ($T_w/T_b > 1$) при восходящем течении подъемные силы ускоряют основной поток, при нисходящем — стремятся заставить жидкость течь в противоположном направлении. Нагрев в восходящем течении аналогичен охлаждению в нисходящем, а охлаждение в восходящем — нагреву в нисходящем.

Из-за влияния этих дополнительных эффектов течение никогда не становится полностью развитым. Происходит его постоянная перестройка по длине канала.

Течения в вертикальных каналах с учетом естественной конвекции исследовались в работах [49—52]. В последней из них рассматривался канал с треугольным поперечным сечением. В большинстве случаев приходится учитывать переменность свойств жидкости. При быстром возрастании температуры газового потока локальное значение числа Рейнольдса может оказаться достаточно малым и окажется возможной реламинаризация течения [53].

4. *Продольное изменение геометрии или шероховатости стенок.* Течение является развивающимся также и в том случае, когда ему непрерывно приходится подстраиваться под новые граничные условия. В [54] исследовалось турбулентное течение в трубе, шероховатость стенок которой изменялась в продольном направлении. В [55] рассматривалось течение в канале с поперечной формой поперечного сечения, хотя его площадь могла оставаться и постоянной.

В подобных ситуациях выход различных параметров потока на свои асимптотические значения происходит на разной длине. Как показано в [56], при исследовании турбулентного течения в канале с изменяющейся шероховатостью стенок перестройка градиента давления происходит практически мгновенно, для перестройки профиля усредненной скорости требуется большое время, а турбулентные касательные напряжения и другие флуктуационные характеристики достигают своих новых равновесных значений очень медленно. При скачкообразном изменении граничных условий (например, изменение шероховатости) установление новой турбулентной структуры происходит на расстоянии вниз по потоку, примерно равном 40 диаметрам.

Возмущения распределения скорости во входном сечении. Если профиль скорости во входном сечении является сильно неоднородным (например, в результате вдува жидкости), формирование полностью развитого течения происходит на определенной длине канала. Подобный процесс турбулентного смешения исследован в [57]. Как следует из теоремы импульса (32), процесс смешения в канале с постоянной площадью поперечного сечения сопровожда-

ется увеличением давления, если, конечно, пренебречь поверхностным касательным напряжением.

В том случае, когда в начальном сечении поток является закрученным, диссипация этого вращательного движения также происходит на определенной длине. Основной характеристикой такого течения является радиальный градиент давления, обусловленный центробежными силами (давление на оси течения меньше, чем на периферии). Ламинарное закрученное течение исследовалось в [58], турбулентное — в [59].

Д. Течение сжимаемой жидкости в канале. Основные уравнения. Основной характеристикой сжимаемых течений в трубах является изменение усредненной плотности в направлении потока. Такое изменение может быть обусловлено теплообменом и (или) высокой скоростью течения. Эффекты сжимаемости нужно учитывать в том случае, когда средняя скорость течения в трубе составляет более 30% скорости звука.

Основные уравнения, описывающие течения в каналах, были приведены в § 2.2.1. Ниже для простоты будем считать, что:

- 1) площадь поперечного сечения постоянна ($S = \text{const}$);
- 2) влияние подъемных сил пренебрежимо мало;
- 3) плотность и скорость не зависят от поперечных координат, т. е. $\alpha = \beta = 1$;
- 4) газ является идеальным (см. § 2.2.1);
- 5) коэффициент трения $\hat{f}$ не зависит от продольной координаты x . В случае переменного $\hat{f}(x)$ под $\hat{f}$ будем понимать среднее на рассматриваемом участке течения значение;
- 6) поверхностное касательное напряжение τ_w и плотность теплового потока q_w (если она не равна нулю) распределены по периметру равномерно.

При этих условиях уравнения, описывающие течения в канале, имеют следующий вид:

$$\frac{d\rho u}{dx} = 0; \quad (25)$$

уравнение импульса

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = - \frac{4\tau_w}{d_h}; \quad (26)$$

уравнение энергии

$$\frac{d}{dx} \left(c_p T + \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{4q_w}{\rho u d_h}. \quad (27)$$

Как следует из уравнения импульса, статическое давление может меняться из-за наличия поверхностного трения и ускорения потока, обусловленного уменьшением плотности в направлении течения.

В качестве безразмерной скорости очень часто используется локальное число Маха

$$Ma = \frac{u}{u_{\text{sound}}} = \frac{u}{\sqrt{\gamma RT}}. \quad (28)$$

Постоянный тепловой поток. Пусть теплообмен, характеризующийся постоянной плотностью теплового потока q_w , начинается с сечения с координатой x_1 . Предположим, что скорость u_1 , температура T_1 и, следовательно, число Маха Ma_1 в этом сечении заданы.

Используя безразмерную координату

$$x = \hat{f} \frac{x - x_1}{d_h} \quad (29)$$

и модифицированное число Дамкелера

$$\bar{Da} = \frac{4q_w}{f_{\text{ис}} c_p T_1}, \quad (30)$$

можно показать, что локальное значение числа Маха Ma является функцией числа Маха в начальном сечении Ma_1 , модифицированного числа Дамкелера $\bar{Da}$ и безразмерной продольной координаты,

$$Ma = F(Ma_1, \bar{Da}, \bar{x}). \quad (31)$$

Продольный градиент числа Маха описывается следующим уравнением:

$$\frac{dMa}{dx} = \frac{Ma}{2} \frac{1 + \gamma Ma^2}{1 - Ma^2} \bar{Da} \frac{T_1}{T} + \gamma Ma^3 \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] Ma^2}{1 - Ma^2}, \quad (32)$$

где

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] Ma_1^2 + \bar{Da} \bar{x}}{1 + [(\gamma - 1)/2] Ma^2}. \quad (33)$$

Зная число Маха $Ma(x)$ и температуру $T(x)$, можно найти скорость $u(x)$ и плотность $\rho(x)$ из уравнений (28) и (25) соответственно.

Уравнение импульса позволяет найти модифицированный градиент давления

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{\rho u^2}{2} - \rho u \frac{du}{dx}.$$

Результаты расчетов для значения числа Маха в начальном сечении $Ma_1 = 0,5$ приведены на рис. 8.

Интересно отметить, что все кривые заканчиваются в критической точке, обозначенной через $Ma = 1$, где градиент dMa/dx становится бесконечным.

Изменение температуры обусловлено двумя эффектами: нагревом, приводящим к росту температуры, и уменьшением давления, вызывающим уменьшение температуры и, следовательно, плотности. Именно поэтому распределение температуры при $\bar{Da} > 0$ (нагрев) имеет максимум. На начальном участке трубы доминирует нагрев и температура растет, а затем определяющим становится уменьшение давления, что и приводит к спаду температуры.

На рис. 9 показаны распределения температуры при значении модифицированного числа Дамкелера $\bar{Da} = 0,4$ и различных значениях числа Маха в начальном сечении Ma_1 . При очень малых числах Маха (несжимаемое течение) температура растет линейно. Однако вследствие эффектов сжимаемости при увеличении Ma_1 рост температуры становится все более слабым и при некотором значении Ma_1

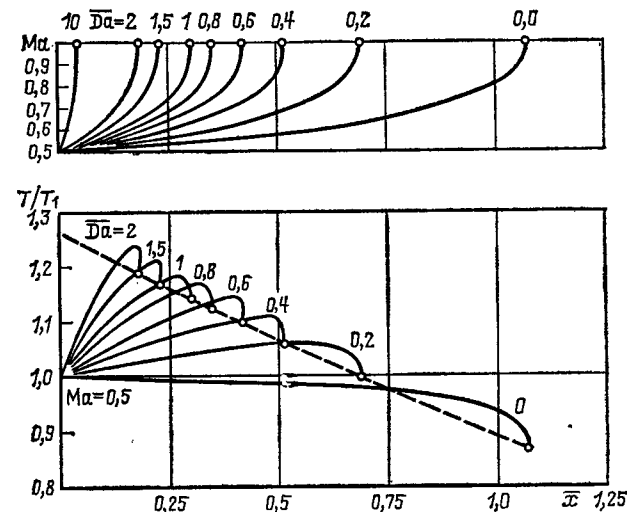


Рис. 8. Распределение вдоль оси трубы числа Ма и отношения температур T/T_1 при течениях сжимаемого газа в условиях заданного на стенке теплового потока постоянной плотности

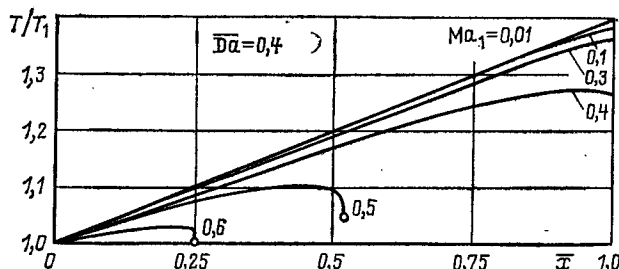


Рис. 9. Распределения температуры вдоль оси для различных значений числа Маха на входе при течении сжимаемого газа в трубе, на стенках которой задана постоянная плотность теплового потока

(в рассматриваемом примере примерно при $Ma_1=0,6$) практически совсем пропадает, хотя среда и продолжает получать теплоту от стенок.

Адиабатное течение (течение Фанно). Одним из предельных случаев течений, рассмотренных выше, является адиабатное течение, т. е. течение в отсутствие теплообмена ($\overline{Da}=0$), называемое течением Фанно. Как следует из уравнения (32), при $\overline{Da}=0$ градиент числа Маха не зависит от x . Уравнение (32) в этом случае удается проинтегрировать аналитически [60] и, таким образом, получить единую универсальную зависимость $Ma(x)$. Эта зависимость показана на рис. 10. Таблица значений $Ma(x)$ приводится в [61] (см. также обзор [62]).

Изотермическое течение. Для того чтобы поддерживать температуру жидкости постоянной ($T=T_1$), необходимо сообщать ей некоторое количество теплоты. Так как в этом случае отношение p/ρ остается постоянным, то, интегрируя уравнение импульса, нетрудно получить

$$\frac{1}{\gamma Ma_1^2} \left[1 - \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^2 \right] + \ln \left(\frac{u_1}{u_2} \right)^2 = f \frac{L}{d_h}, \quad (34a)$$

$$p_2/p_1 = \rho_2/\rho_1 = w_1/w_2. \quad (34b)$$

Течение заканчивается в той точке, где $Ma_2 = 1/\sqrt{\gamma}$, откуда находим

$$(u_2/u_1)_{lim} = 1/(\sqrt{\gamma} Ma_1). \quad (35)$$

Уравнение энергии позволяет определить количество теплоты, которое следует передавать жидкости для того, чтобы поддерживать ее температуру постоянной.

Эффекты разреженности среды. При значениях числа Рейнольдса $Re \leq 25$ становятся существенными эффекты разреженности среды. В частности, уже нельзя использовать условия отсутствия проскальзывания на стенках. Информацию о ламинарных течениях в трубах в так называемом режиме со скольжением можно найти в [14].

Невязкое течение с тепловыделением. Невязкое сжимаемое течение в каналах здесь рассматриваться не будет. Подобные течения представляют особый интерес в связи с исследованием процессов быстрого горения (дефлаграции) и горения, индуцированного ударной волной (детонация).

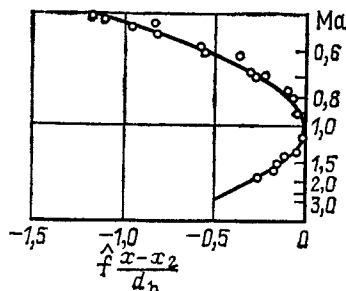


Рис. 10. Распределение числа Маха вдоль оси x/L при течении сжимаемого газа в трубе с адиабатными стенками: кривая соответствует уравнению (34); точки — результат эксперимента [60]

Детальную информацию по этим вопросам можно найти в [60, 62, 63].

Е. Нестационарное течение в канале. В том случае, когда движущий перепад давления зависит от времени, в канале реализуется нестационарное течение. Частным случаем является осциллирующее течение в трубе, вызванное периодическими изменениями перепада давления. Переходный характер течения может быть обусловлен динамическими процессами, такими, как, например, закрывание клапана или изменение мощности насоса. Расчет неустановившихся течений гораздо сложнее, чем стационарных, так как приходится проследивать всю историю течения, начиная от момента возникновения нестационарности вплоть до интересующего. Кроме того, оказывается, вообще говоря, непригодной концепция коэффициента трения, использовавшаяся для описания стационарных течений, так как изменения градиента давления и вызванные ими изменения поверхностного трения становятся разделенными во времени. Становится также нетривиальной процедура временного усреднения при описании турбулентных течений, так как осредненные величины (например, скорости) остаются функциями времени. В этом случае приходится проводить усреднение по ансамблю (см. § 2.2.1).

Обзор исследований нестационарных течений в трубах содержится в [64—67]. Осциллирующие ламинарные течения в трубах рассматривались в [68—70]. Неустановившиеся ламинарные течения в трубах изучались в [71], аналогичные турбулентные течения — в [72—74].

Г. Потери в компонентах труб. Коэффициент потерь. Коэффициент потерь системы K определяется как разность безразмерных перепадов давления между крайними концами двух длинных прямых труб или каналов, состыкованных друг с другом непосредственно и пристыкованных к входному и выходному отверстиям системы [4]. В качестве масштаба при безразмеривании перепада давления обычно принято использовать динамическое давление на входе в рассматриваемый элемент, за исключением случая, когда сам этот элемент находится на выходе из большого объема. В последнем случае масштабом служит динамическое давление на выходе из элемента. Длинная труба перед элементом необходима для того, чтобы сформировать на его входе развитые профили всех параметров; длинная труба за элементом обеспечивает формирование нового развитого течения. Возникающие при этом дополнительные потери давления включаются в общие потери, обусловленные элементом. Иллюстрация процедуры определения коэффициента потерь дана на рис. 11. Градиенты трения в развитом течении перед элементом и за ним экстраполируются до места положения элемента, таким образом определяют разность экстраполированных значений полного давления.

Коэффициент потерь задается формулой

$$K = \frac{\Delta p_t}{(\rho/2) u^2}, \quad (36)$$

где Δp_t — полный перепад давления. Очевидно, что многие элементы системы не содержат входных или выходных труб. Практически установлено, что если длина входной и выходной труб равна или превышает 30 ее диаметров, то коэффициент потерь отличается от своего асимптотического значения не более чем на 2%. Если же длины входной и выходной труб меньше этого значения, то в коэффициент потерь системы требуется вводить соответствующий поправочный множитель.

Если поперечные сечения входной и выходной труб одинаковы, перепад полного давления совпадает с перепадом статического давления. Однако знания разности ста-

¹ Этот коэффициент в отечественной литературе называют коэффициентом гидравлического сопротивления. — *Прим. ред.*

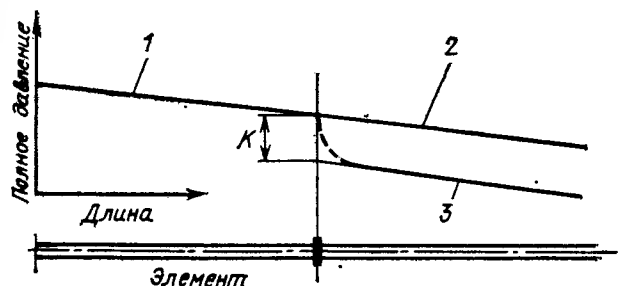


Рис. 11. Определение коэффициента потерь: 1 — градиент трения в развитом течении перед элементом, 2 — градиент трения в отсутствие элемента; 3 — градиент трения в развитом течении за элементом

тических давлений недостаточно для определения коэффициента потерь в диффузорах или соплах.

Криволинейные каналы. Поворот потока приводит к изменению распределений статического давления и скорости. Возникает компенсирующий центробежные силы градиент давления, перпендикулярный основному течению. Поэтому на внутренней стороне изогнутой трубы или колена давление становится меньше. Вследствие этого появляется опасность отрыва потока, так в двух местах формируется положительный градиент давления: на вогнутой (внешней) части стенки в начале изгиба и на выпуклой (внутренней) — в его конце.

Находящиеся вблизи стенок частицы жидкости медленно смещаются в поперечном сечении по направлению градиента давления, что приводит к формированию вторичного течения первого типа, изображенного на рис. 12. В середине трубы вторичное течение направлено наружу, к внешнему закруглению, а вблизи стенок — к внутреннему закруглению, т. е. к центру кривизны. Форма поперечного сечения оказывает сильное влияние на вторичное течение, что ясно видно на рис. 13, где показано поле скоростей.

Очевидно, что поворот потока влияет на его турбулентную структуру, так как при достаточно больших закруглениях появляются вторичные течения и локальные зоны отрыва. Искривления приводят к стабилизации течения и уменьшению турбулентных касательных напряжений на выпуклой поверхности и к дестабилизации и увеличению турбулентных касательных напряжений — на вогнутой (см. [127], § 2.1.1).

Распределения скорости и турбулентных характеристик на выходе из колена существенно отличаются от соответствующих распределений в развитом течении в трубе. В связи с формированием новых развитых профилей в трубе за коленом возникают дополнительные потери. На расстоянии, примерно равном 30 диаметрам, устанавливается развитый градиент давления. Однако слабые вторичные течения существуют и вполне наблюдаемы на расстояниях от колена, равных 50—100 диаметрам. В некоторых случаях потери давления почти целиком бывают обусловлены процессом формирования развитого течения в трубе за коленом.

При экспериментальном исследовании распределения потерь в 90-градусном колене с пристыкованной к нему на выходе круглой трубой получены следующие основные результаты [4].

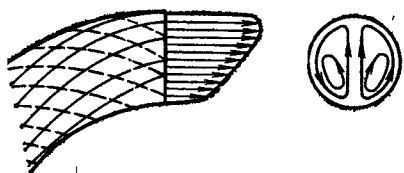


Рис. 12. Течение в искривленной трубе

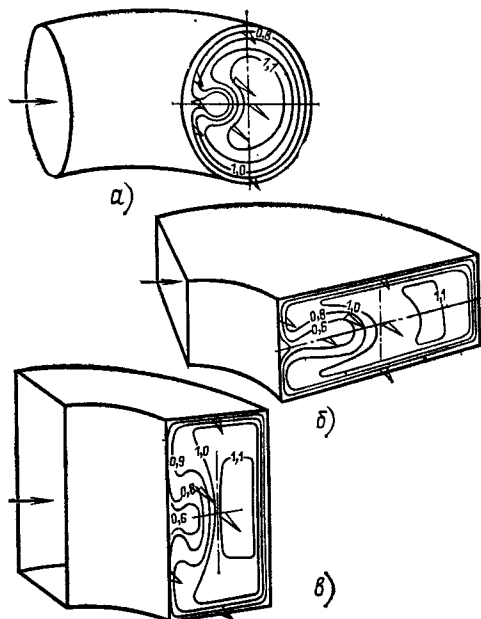


Рис. 13. Влияние формы поперечного сечения (а — круглое сечение; б — прямоугольное с соотношением сторон 0,5; в — прямоугольное с соотношением сторон 2) на распределение скорости (уровни постоянного значения отношения локальной скорости к средней)

1. В коленах с отношением $r/d < 0,8$ (r — радиус закругления) можно ожидать появления значительных отрывных зон. Большая часть потерь в этом случае связана с расширением зоны отрывного течения при выходе из колена. При этом генерируется интенсивная турбулентность, разрушающая вторичное течение.

2. В коленах с $0,8 < r/d < 1,5$ около 80% всех потерь происходят непосредственно внутри колена и за ним на расстоянии, примерно равном двум диаметрам.

3. При $1,5 < r/d < 3$ около 40% всех потерь обусловлены перестройкой течения в трубе за коленом.

4. При $r/d > 3$ возрастающая роль поверхностного трения приводит к уменьшению доли потерь, обусловленной течением вдали от колена. В змеевиковых трубах формируется полностью развитое течение, что позволяет использовать для его описания коэффициент трения.

Можно использовать при этом следующие формулы.

Ламинарное течение

$$\frac{\bar{f}_c}{\bar{f}_s} = 0,106 \text{ De}^{0,5}, \quad \text{De} > 300 \quad [75]; \quad (37)$$

$$\frac{\bar{f}_c}{\bar{f}_s} = 0,37 \text{ De}^{0,36}, \quad 80 < \text{De} < 2000 \quad [76]. \quad (38)$$

Основным безразмерным параметром, определяющим влияние кривизны при ламинарном течении, является число Дина

$$\text{De} = \frac{1}{2} \text{Re} \sqrt{\frac{R}{r}},$$

где R — радиус поперечного сечения; r — радиус кривизны центральной линии колена.

В уравнениях (37), (38) $\bar{f}_s$ обозначает коэффициент трения в прямом канале; индекс c относится к течению с искривлением.

Детальные исследования развитого ламинарного течения в искривленных трубах, включая и трубы с некруглым поперечным сечением, выполнены в [77—88].

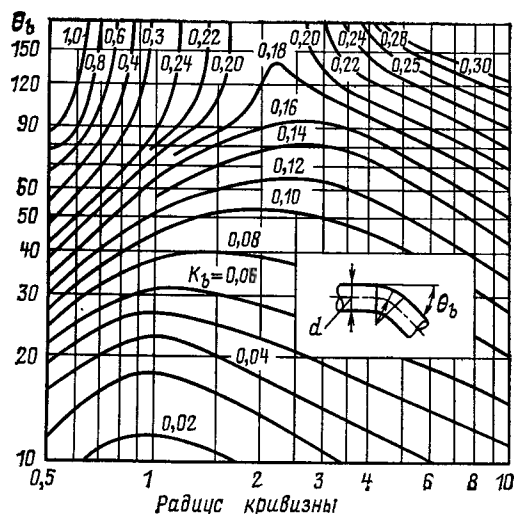


Рис. 14. Диаграмма для определения коэффициента потерь в колне с круглым поперечным сечением ($Re=10^6$) [4]

Критическое число Рейнольдса

$$Re_{cr} = 2400 \left[1 + 8,6 \left(\frac{R}{r} \right)^{0,45} \right]^{0,45}.$$

Турбулентное течение

$$\frac{\hat{f}_c}{\hat{f}_s} = 1 + 0,075 \left[Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]^{0,25} [89]; \quad (39)$$

$$\frac{\hat{f}_c}{\hat{f}_s} = \left[Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]^{0,05}, \quad Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 > 6 [90]; \quad (40)$$

$$\hat{f}_c = \left(\frac{R}{r} \right)^{0,5} \left\{ 0,029 + 0,304 \left[Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right]^{0,25} \right\}, \quad (41)$$

$$0,034 < Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 < 300.$$

В области значений $Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 < 0,034$ эффекты кривизны не проявляются.

На рис. 14, заимствованном из [4], приведен коэффициент потерь K_b для колена на круглой трубе при $Re=10^6$. Приведенные данные относятся к случаю, когда подводящая и отводящая трубы достаточно длинные и гидравлически гладкие. В [4] приводится также модификация этой формулы, позволяющая учесть зависимость K_b от числа Рейнольдса и длины отводящей трубы. Возможен также учет шероховатости в том случае, когда поправка к данным для гладких труб не превышает 40% [4].

Ниже приведены эмпирические формулы для коэффициента потерь при турбулентном течении (гладкие стенки), которые хорошо описывают весьма точные систематические экспериментальные данные [90, 91], а также согласуются со многими измерениями.

$$1) \quad Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 < 91$$

$$K = 0,00873 \alpha \theta \frac{r}{R} \hat{f}_c, \quad (42)$$

где θ — угол колена в градусах; $\hat{f}_c$ — коэффициент трения в полностью развитом течении с искривлением.

Для эмпирического коэффициента α справедливы следующие выражения:

$$\alpha_{\theta=45^\circ} = 1 + 14,2 \left(\frac{r}{R} \right)^{-1,47}; \quad (43)$$

$$\alpha_{\theta=90^\circ} = 0,95 + 17,2 \left(\frac{r}{R} \right)^{-1,96}. \quad (44)$$

В соответствии с формулой (42) зависимость коэффициента потерь от числа Рейнольдса такая же, как и зависимость коэффициента трения в полностью развитом течении с искривлением.

$$2) \quad Re \left(\frac{R}{r} \right)^2 > 91$$

$$K = 0,0024 \alpha \theta \left(\frac{r}{R} \right)^{0,84} Re^{-0,17}. \quad (45)$$

Коэффициент потерь колена с углом разворота θ можно определить, умножая коэффициент потерь колена с $\theta=90^\circ$ на корректирующий множитель C_θ ,

$$K_\theta = C_\theta K_{90^\circ}.$$

Значения коэффициента C_θ приведены ниже [92]:

θ	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
C_θ	0,29	0,56	0,77	0,93	1,06	1,16	1,25	1,32	1,38

Если колено расположено поблизости от какого-либо другого элемента, то для учета их взаимодействия необходимо в приведенные выше формулы вводить поправочные множители. Поправки для сочленений типа колена — колено и колено — диффузор даны в [4]; более детальную информацию, касающуюся колена со срезами и различными поперечными сечениями, можно найти в [4, 93, 94].

Используя направляющие лопатки, можно уменьшить коэффициент потерь в колене со срезом до минимального значения, характерного для колена с плавным скруглением. В принципе следует располагать лопатки как можно ближе друг к другу на внутренней стороне колена, однако толщина лопаток, обеспечивающая достаточную прочность, реально может оказаться настолько большой, что применение лопаток приведет к чрезмерной блокировке внутренней части канала.

Использование лопаток в коленах со скруглением оправдано только в том случае, когда отношение $r/d < 1$, а лопатки тонкие и занимают менее 5% площади поперечного сечения. При $r/d > 0,7$ достаточно использовать одну лопатку, расположенную в точке $r_m = \sqrt{r_i r_0}$, где r_i и r_0 — внутренний и внешний радиусы колена соответственно. Установленная в этом месте лопатка приводит к уменьшению коэффициента потерь в 2 раза; при $r/d=1$ уменьшение составляет 20% [4].

Более существенного уменьшения коэффициента потерь можно добиться, используя профилированные лопатки. В [96] проведен расчет оптимального профиля лопатки для колена с углом разворота 90° . Применение такой лопатки позволяет снизить коэффициент потерь примерно до значения $K=0,04$.

Расширения. Диффузоры представляют собой конусообразные расширения. Они служат для превращения динамического давления в статическое, а также для уменьшения скорости (при дозвуковом течении).

В случае несжимаемой жидкости диффузор характеризуется следующими параметрами: коэффициент потерь

$$K_d = \frac{\Delta p_t}{(\rho/2) u_1^2} = \frac{p_1 + \alpha_1 (\rho/2) \bar{u}_1^2 - p_2 - \alpha_2 (\rho/2) \bar{u}_2^2}{(\rho/2) \bar{u}_1^2} = \frac{\varphi_{12}}{(1/2) \bar{u}_1^2} \quad (46)$$

[см. (37) и (38) § 2.2.1]. Так как числа Рейнольдса во входном и выходном сечениях различны, коэффициенты α_1 и α_2 обычно также бывают разными;

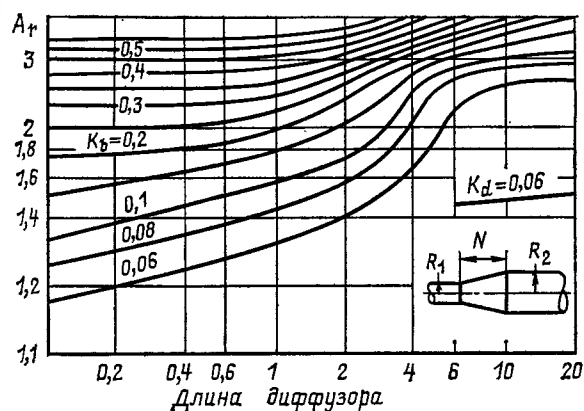


Рис. 15. Коэффициент потерь K_d в коническом диффузоре с выпускной трубой в случае полностью развитого течения на входе ($Re=10^6$) [4]

коэффициент восстановления давления

$$c_p = \frac{p_2 - p_1}{(\rho/2) u_1^2}; \quad (47)$$

коэффициент полезного действия диффузора

$$\eta_d = \frac{c_p}{c_{pi}} = \frac{p_2 - p_1}{[1 - (S_1/S_2)^2] (\rho/2) u_1^2}, \quad (48)$$

где

$$c_{pi} = 1 - (S_1/S_2)^2 \quad (49)$$

— идеальный коэффициент восстановления.

Между этими характеристиками диффузоров существуют следующие соотношения:

$$K_d = \alpha_i - \alpha_2 (S_1/S_2)^2 - c_p \quad (50)$$

и

$$K_d = (\alpha_i - \eta_d) - (\alpha_2 - \eta_d) \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2. \quad (51)$$

При $\alpha_i = \alpha_2$ последнее уравнение принимает вид

$$K_d = (\alpha - \eta_d) \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]. \quad (52)$$

Коэффициент $\alpha - \eta_d$ для применяемых на практике диффузоров меняется примерно от 0,05 до 0,2.

На рис. 15 показан коэффициент потерь K_d для конических диффузоров с выходной трубой при значении $Re=10^6$. Приведенные данные взяты из [4]. Коэффициент потерь является функцией двух геометрических параметров: отношения площадей

$$A_r = S_2/S_1 \quad (53)$$

и длины диффузора N , измеряемой в радиусах входного сечения R_1 . Полуугол раскрытия диффузора θ_d

$$\tg \theta_d = (\sqrt{S_2/S_1} - 1)/(N/R_1). \quad (54)$$

Приведенные выше коэффициенты потерь относятся к диффузорам, имеющим достаточно длинную входную (пять диаметров или больше) и выходную (четыре диаметра или больше) трубы.

Коэффициент потерь, вообще говоря, увеличивается с уменьшением числа Рейнольдса, однако для значений $Re > 10^5$ эта зависимость практически исчезает [4, 97]. В [4] приведены поправки для коэффициента потерь, позволяющие учесть его зависимость от числа Рейнольдса.

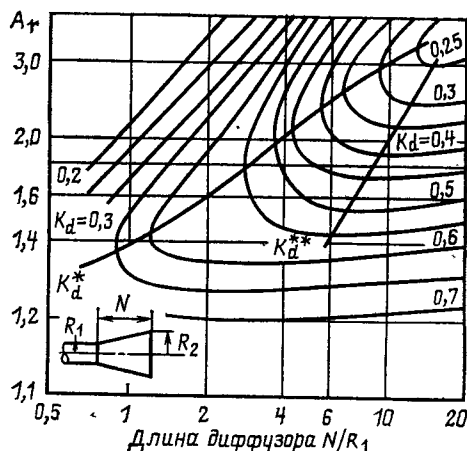


Рис. 16. Коэффициент потерь K_d в коническом диффузоре, открываемом в атмосферу, в случае полностью развитого течения на входе ($Re=10^6$) согласно [4]: K_d^* — линия, на которой коэффициент потерь минимален при заданной длине; K_d^{**} — линия, на которой коэффициент потерь минимален при заданном отношении площадей

На практике часто используются диффузоры, открываемые непосредственно в окружающую атмосферу. Для таких диффузоров динамическое давление на выходе следует включать в общие потери. Поэтому выражение для коэффициента потерь принимает вид

$$K_d = \frac{\Phi_{12} + (1/2) \alpha_2 u_2^2}{(1/2) u_1^2} = \alpha_i - \eta_d \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right] = \alpha_i - c_p \dots \quad (55)$$

На рис. 16, заимствованном из [4], представлены данные о коэффициенте потерь для открытого конического диффузора при $Re=10^6$.

Существует оптимальная геометрия диффузора при заданном отношении сечений (кривая А на рис. 17) и при заданном отношении его длины к радиусу входного сечения (кривая В); кривая $2\theta_b = 6^\circ$ лежит между этими оптимальными кривыми.

Оптимальные диффузоры имеют угол раскрытия $2\theta_b$, примерно равный 6° . При больших числах Рейнольдса

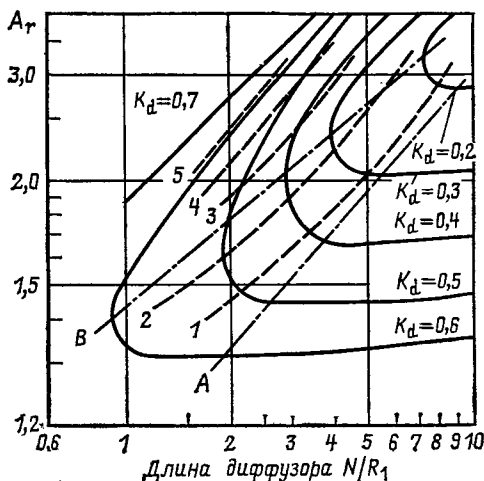


Рис. 17. Режимы течения для конического диффузора, открываемого в атмосферу, для тонкого пограничного слоя во входном сечении ($Re=10^6$) [4]: А — линия минимального значения коэффициента потерь при заданном отношении площадей; В — линия минимального значения коэффициента потерь при заданной длине

оптимальный угол становится меньше [98]. Для диффузоров с прямоугольным поперечным сечением в [99] предложена формула

$$(2\theta)_{\text{opt}} \approx 150 \text{Re}^{-0,25}. \quad (56)$$

Для круглых диффузоров оптимальный угол несколько меньше.

В диффузорах с большим углом раскрытия возможен отрыв потока, что приводит к сильной нестационарности его параметров. Для количественной характеристики частоты пульсаций давления можно использовать временной период Δt , за который поток проходит расстояние, равное диаметру входного сечения диффузора,

$$\Delta t = d_1 / u_1. \quad (57)$$

Как отмечалось в [4], линии на рис. 17 примерно разграничивают следующие режимы:

линия 1 — справа от этой линии течение является стационарным;

линия 2 — возникновение небольших зон отрывного течения; малые амплитуды флуктуаций с периодом около $20 \Delta t$;

линия 3 — течение весьма неустойчиво; области отрыва движутся вдоль периметра диффузора и могут проникать далеко в глубь потока; период флуктуаций давления около $100 \Delta t$;

линия 4 — течение крайне неустойчиво; большие вихри или отрывные зоны быстро перемещаются внутри диффузора. Период флуктуаций давления около $200 \Delta t$, их амплитуда превышает 10% динамического давления на входе;

линия 5 — течение крайне неустойчиво; наблюдаются низкочастотные пульсации всего потока с большой амплитудой. Период пульсаций примерно равен $2000 \Delta t$.

Аналогичное описание различных режимов течения в прямом двумерном диффузоре приведено в [97]. По вопросу о расчете течения в области параметров ниже линии 1 см., например, [100]. Весьма тщательное экспериментальное исследование характеристик турбулентного течения в коническом диффузоре ($2\theta_b = 6^\circ$) было проведено в [101]. Результаты систематического исследования двумерных диффузоров приведены в [120, 97, 102—108].

Характеристики диффузора сильно зависят от распределения скорости во входном сечении. На рис. 18, заимствованном из [109], показана зависимость коэффициента полезного действия диффузоров с круглым поперечным сечением от отношения $2\delta_{11}/d_1$. Символ δ_{11} означает толщину вытеснения на входе (см. уравнение (151) § 2.2.1); d_1 — диаметр входного сечения. Коэффициент полезного действия искривленных диффузоров с увеличением отношения $2\delta_{11}/d_1$ убывает быстрее, чем прямых.

В том случае, когда толщина пограничного слоя во входном сечении мала, коэффициент полезного действия

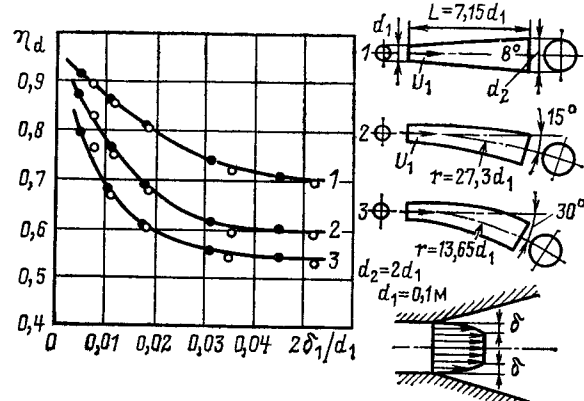


Рис. 18. Зависимость коэффициента полезного действия прямых и искривленных диффузоров с круглым поперечным сечением от толщины вытеснения [109]

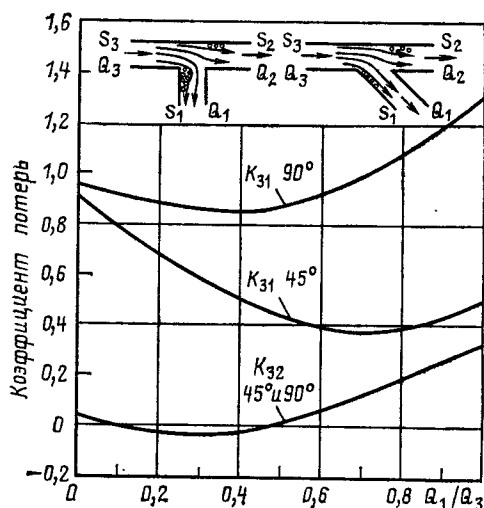


Рис. 19. Зависимость коэффициента потерь в разделяющемся потоке (трубы состыкованы под углами 45 и 90°, кромки острые) от отношения объемных расходов [4]

диффузоров можно найти, используя приближение пограничного слоя (см. § 2.2.1). Поле течения можно разделить на невязкое ядро и примыкающий к стенке пограничный слой. Между этими двумя областями существует сильное взаимодействие, поскольку течение в каждой из них зависит от течения в другой. Результаты подобных расчетов для осесимметричных диффузоров приведены в [98], для двумерных — в [101, 106—108, 111].

Стоит упомянуть, что в диффузорах с большими углами раскрытия давление в поперечном сечении не постоянно, а изменяется в радиальном направлении, что является следствием искривления линий тока. При расчете невязкого ядра радиальную зависимость давления нужно обязательно учитывать [112].

Более детальное обсуждение влияния условий на входе в диффузор можно найти в [113, 114, 4, 93]. Оптимальные диффузоры рассматривались в [107, 115, 116]. Диффузорам посвящены также обзоры [4, 93, 117, 119].

Характеристики диффузоров можно улучшить следующими способами.

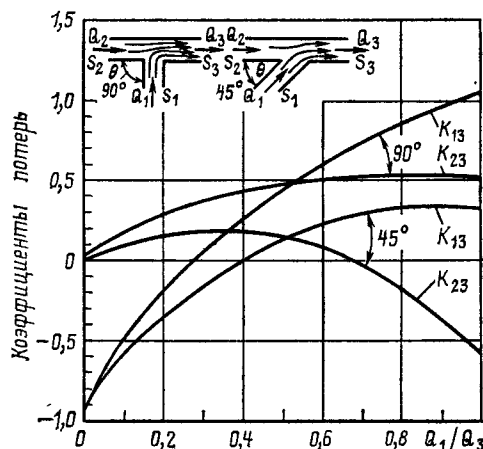


Рис. 20. Зависимость коэффициента потерь в сливающихся трубах (трубы состыкованы под углами 45 и 90°, кромки острые) от отношения объемных расходов согласно [4]

Таблица 6. Работы, в которых приводятся данные о коэффициентах потерь в различных элементах трубной арматуры

Элемент трубной арматуры	Литература
Внезапное расширение	[133—135]
Патрубки	[136—143]
Внезапное сужение (вводы)	[4, 92, 133]
Выводы	[137—140]
Перфорированные пластины	[144, 145]
Экраны	[92, 146—151]
Трубы с расширениями и сужениями	[149, 150]
Разветвления труб (Т-образные)	[152—154]
Колена	[4, 93, 125]
Клапаны	[124, 127, 129, 155]

Диффузоры с искривленными стенками. Основными формами диффузоров с искривленными стенками являются колоколообразная и раструб. В соответствии с приведенными в [98] теоретическими результатами в некоторых случаях диффузоры колоколообразной формы обладают лучшими характеристиками, чем конические (см. также [120]).

Как было показано в [121], для состыкованных на выходе с холодильником диффузоров форма с раструбом обеспечивает существенно лучшие характеристики, чем колоколообразная. В [121] приведены координаты колоколообразной поверхности диффузоров, соответствующей направлениям линий тока. Показано, что, например, при отношении площадей $A_2/A_1=2,5$ и длине $N/R_1=3$ в таком диффузоре реализуется безотрывное течение, хотя в обычном диффузоре с аналогичными параметрами заведомо должны бы были образоваться обширные зоны отрывного течения.

Применение вихревых генераторов. См. обзор [120].

Диффузоры с закруткой потока. Закрутка потока может привести к значительному улучшению характеристик диффузоров (см. [118, 122]).

Применение отсоса. Применение отсоса [123] или вдува может также улучшить характеристики диффузоров (см. § 2.2.1, [92], [120]).

Диффузоры с направляющими лопатками. См. [4], [93], [124].

Коэффициент потерь при течении в канале с внезапным расширением

$$K = C \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2. \quad (58)$$

Множитель C , ненамного превышающий единицу, учитывает небольшое уменьшение давления в отрывной зоне по сравнению с давлением на входе. При равенстве этих давлений ($C=1$) формула (58) переходит в формулу Карно. Так как такие потери довольно велики, на практике следует избегать использования подобных конфигураций.

Соединение труб. Существует множество работ, посвященных определению коэффициентов потерь во всевозможных типах соединений труб. Типичными примерами могут служить коэффициенты потерь при течении в трубе, разделяющейся на две, или, наоборот, при течении в соединяющихся трубах. Приведенные на рис. 19 данные заимствованы из [4].

Детальную информацию о коэффициентах потерь в трубных соединениях можно найти в [4, 83, 125—132, 92].

В табл. 6 собраны ссылки на работы, в которых рассматривались различные типы соединений.

2.2.3. Тела, погруженные в жидкость

К. Герстен

А. Режимы течения. Ниже рассмотрены течения около тел конечной длины. Основное внимание уделяется течениям с небольшой скоростью, не превышающей в любой точке рассматриваемой области 30% скорости звука.

Вопросам высокоскоростного обтекания тел посвящена специальная литература по газовой динамике [1—6, 8].

Структура течения около затопленных тел зависит от числа Рейнольдса, которое определяется следующим образом:

$$Re = \rho v l / \eta = v l / \nu, \quad (1)$$

где l — характерная длина тела; v — скорость течения; ρ , η и ν — соответственно плотность, динамическая и кинематическая вязкости на достаточно большом удалении от тела вверх по потоку.

Можно различать два предельных случая: $Re \rightarrow \infty$ и $Re \rightarrow 0$.

$Re \rightarrow \infty$. *Теория пограничного слоя.* Основные положения теории пограничного слоя изложены в п. D § 2.2.1. В соответствии с этой асимптотической теорией, предложенной Прандтлем, все поле течения можно разделить на две области: невязкую внешнюю область и очень тонкий вязкий пограничный слой, примыкающий к телу. Применимость этой теории ограничивается следующими двумя динамическими явлениями: турбулентностью и отрывом.

До настоящего времени не существует теории, описывающей переход от ламинарного течения в пограничном слое к турбулентному. Более того, описание полностью турбулентного пограничного слоя требует использования эмпирических или полумэмпирических моделей турбулентности (см. § 2.2.1). Моделирование турбулентности является одной из важнейших проблем гидродинамики.

Если происходит отрыв потока, то исходная концепция пограничного слоя становится непригодной. В таких случаях для описания течения в отрывной зоне и в следе за телом необходимо использовать дополнительные модели. В рамках такого подхода возможно использование модифицированной концепции пограничного слоя, подразумевающей разбиение всего поля течения на ряд взаимодействующих друг с другом областей, таких, как область невязкого внешнего течения, присоединенный пограничный слой, свободный пограничный слой на границе отрывной зоны, область отрыва (застойная зона) и след, расположенный за областью отрывного течения конечной длины.

Такая асимптотическая (для больших чисел Рейнольдса) теория, включающая и отрыв, в настоящее время еще только разрабатывается; более детальную информацию по этому вопросу можно найти в [7] и § 2.2.1 [88—90]. Течения с отрывом в большинстве своем являются предметом экспериментальных исследований, а установленные закономерности носят эмпирический характер (см. § 2.2.1, [91, 92]).

В тех случаях, когда положение точки отрыва не фиксировано, поле течения обычно становится нестационарным, хотя скорость в набегающем потоке и не зависит от времени.

$Re \rightarrow 0$. *Течение с малыми числами Рейнольдса.* В этом предельном случае инерционные слагаемые в уравнениях Навье — Стокса обычно очень малы и ими можно пренебречь (течение Стокса, или ползущее движение). Однако классическая теория Стокса, в которой пренебрегается инерционными слагаемыми в уравнениях Навье — Стокса, строго говоря, непригодна для движения тела в безграничном объеме жидкости, так как в ее рамках невозможно одновременно удовлетворить граничным условиям на поверхности тела и бесконечности [8, 9]. Этот недостаток теории Стокса можно устранить, используя метод сращиваемых асимптотических разложений [10, 11].

Для случая обтекания сферы ван-Дайк показал хорошее совпадение теоретического решения, полученного с использованием двух членов разложения, с численными и экспериментальными данными в области значений числа Рейнольдса, не превышающих 2. Если же учитывать форму и размер стоячего вихря, возникающего вблизи подветренной стороны сферы при значении числа Рейнольдса, примерно равном 16, то результаты согласуются и в области больших чисел Рейнольдса.

Область промежуточных чисел Рейнольдса. Для течений, характеризующихся промежуточными значениями числа Рейнольдса, обычно возможны только экспериментальные исследования, позволяющие установить некоторые эмпирические соотношения. В настоящее время в связи с бурным развитием вычислительной техники существует тенденция ко все большей замене экспериментов численными расчетами. Основные усилия направлены на решение так называемых усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса (см. § 2.2.1) с использованием более или менее детальных моделей турбулентности. Конечной целью является численное решение полных временных уравнений Навье — Стокса, включая прямое численное моделирование крупномасштабных турбулентных вихрей. При этом модельное описание остается необходимым только для мелких вихрей, размер которых меньше шага разностной сетки. Предполагая, что существующие тенденции развития вычислительной техники сохранятся и в будущем, можно заключить, что к 1990 г. станут реальными расчеты течений с учетом турбулентных вихрей на сетке, состоящей из 10^9 — 10^{10} узлов [12].

В. Силы, действующие на тело. Полная сила. При обтекании неподвижного тела стационарным и однородным на бесконечности потоком основной практический интерес представляет суммарная сила, действующая на тело. Сила эта складывается из поверхностных касательных и нормальных напряжений, проинтегрированных по всей поверхности тела.

Действующую на элемент поверхности dA результирующую силу (имеющую нормальную и касательную составляющие) можно представить в виде

$$\mathbf{s} = S\mathbf{n} - p\mathbf{n}, \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к элементу поверхности dA ; S — тензор напряжений (см. § 2.2.1). Интегрируя по поверхности, находим полную силу

$$\mathbf{F} = \iint_A \mathbf{s} dA \quad (3)$$

(см. уравнение (16) § 2.2.1). Поскольку действующая на единицу поверхности сила $\mathbf{s}$ складывается из силы давления (нормальной к поверхности) и касательной силы, то и полную силу можно представить в виде суммы давления и вязкой силы. Составляющая суммарной силы в направлении невозмущенного течения называется силой сопротивления D , перпендикулярная этому направлению компонента — подъемной силой L .

Сила сопротивления. Так же как и полная сила, сила сопротивления складывается из двух частей: вязкого сопротивления (интеграл касательных сил) и сопротивления давления (интеграл нормальных сил). Безразмерный коэффициент сопротивления определяется следующим образом:

$$c_D = \frac{D}{(\rho/2) v^2 A}, \quad (4)$$

где A — характерная площадь.

Для двумерного симметричного тела протяженностью b и длиной l , находящегося в двумерном симметричном потоке коэффициент сопротивления представим

в следующем виде:

$$c_D = 2 \int_0^1 c_f \left(\frac{x}{l} \right) d \left(\frac{x}{l} \right) + 2 \int_0^1 c_p \left(\frac{x}{l} \right) \frac{dy_c}{dx} d \left(\frac{x}{l} \right). \quad (5)$$

Здесь коэффициенты поверхностного трения c_f и давления c_p определены следующим образом:

$$c_f = \frac{\tau_w(x)}{(\rho/2) v^2}; \quad (6)$$

$$c_p = \frac{p(x) - p_\infty}{(\rho/2) v^2}, \quad (7)$$

где p_∞ — давление в невозмущенном потоке вдали от тела. Контур верхней части поверхности двумерного тела описывается функцией $y_c(x)$, удовлетворяющей условиям $y_c(0) = y_c(l) = 0$.

При обтекании невязкой жидкостью сопротивление трения равно нулю. Однако в невязком (дозвуковом) течении отсутствует также и сопротивление давления. Этот результат известен в литературе как парадокс Даламбера. В потоках с большими числами Рейнольдса, когда применима концепция пограничного слоя, на достаточно тонких телах с гладкой поверхностью отрыв может не наступить. В этом случае распределение давления по поверхности описывается теорией невязкого потенциального течения, из которой и следует нулевое сопротивление давления. Расчет течения в пограничном слое на таком теле позволяет найти распределение поверхностного трения $\tau_w(x)$ и, следовательно, коэффициент сопротивления.

В большинстве практических случаев, однако, происходит отрыв пограничного слоя. Вследствие этого на подветренной стороне тела формируется зона отрывного течения, что существенно изменяет всю картину обтекания. Меняется распределение давления по поверхности, поэтому становится отличным от нуля и сопротивление давления. Так как в настоящее время теории отрывных течений не существует, то для большинства тел коэффициент сопротивления можно определить только экспериментально. Наиболее полные данные по коэффициентам

Т а б л и ц а 1. Коэффициент сопротивления сферы

Число Рейнольдса Re	Коэффициент сопротивления c_D	Режим течения
$Re < 1$	$\frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{16} Re + \frac{1}{2} (Re^2 \ln Re) \right]$	Течение с малыми числами Рейнольдса
$1 < Re < 10^3$ Первый отрыв при $Re = 20$	$0,4 < c_D < 28$ (см. [22])	—
$10^3 < Re < 3 \cdot 10^5$	$\sim 0,4$	Докритический
$3 \cdot 10^5 < Re < 10^7$	$0,08 < c_D < 0,4$ (см. [36])	Критический и за- критический
$10^7 < Re$	$\sim 0,2$	Сверхкритический

П р и м е ч а н и е. D — диаметр сферы; $A = \pi D^2/4$ — лобовое сечение; $Re = VD/\nu$ — число Рейнольдса.

сопротивления приведены в [13]. Коэффициенты сопротивления сферы даны в табл. 1.

Подъемная сила. Составляющая суммарной силы, перпендикулярная направлению невозмущенного течения, называется подъемной силой. В [14] собраны данные о подъемной силе, действующей на погруженные в жидкостях тела.

Для достижения большой подъемной силы телам придают специальную форму аэродинамического профиля или крыла. Более детальная информация об аэродинамических профилях содержится в [15].

Хотя средняя подъемная сила, действующая на тело, может быть равна нулю, в отдельные моменты времени в результате осциллирующего характера отрыва пограничного слоя она может быть и отличной от нуля. Это явление может приводить к индуцированному потоком движению даже осесимметричного тела. Детальную информацию по вопросам индуцированной потоком вибрации и аэроупругости можно найти в [16—18].

С. Течение около круглого цилиндра. Режимы течения. Типичным примером течения около плохо обтекаемых тел, когда существенную роль играет отрыв, является обтекание круглого цилиндра, детально рассматриваемое ниже. В табл. 2 перечислены различные режимы обтекания круглого цилиндра несжимаемой жидкостью [19]. Число Рейнольдса рассчитывается по диаметру цилиндра D . В пределе очень малых чисел Рейнольдса существует полная симметрия обтекания. Вблизи значения $Re=3$ происходит отрыв потока на задней стороне тела; образуются два стационарных рециркуляционных вихря. Стационарный рециркуляционный след продолжает существовать, увеличиваясь по длине, по мере роста числа Рейнольдса по крайней мере на два десятилетия. Затем возникающие в его нижней части осцилляции разрушают стационарную структуру, и при значениях $Re \sim 100$ формируется хорошо известная вихревая дорожка Кармана. Такая структура чередующихся вихрей существует примерно до $Re=300$, сменяясь нерегулярным нестационарным следом, который при больших числах Рейнольдса переходит в полностью турбулентный след. Как показано в табл. 2, границы этих режимов не являются строго фиксированными, так как они существенно зависят от условий эксперимента.

В некоторых режимах наблюдается более или менее отчетливо выраженная периодичность течения, обусловленная процессом образования вихрей. Частоту срыва вихрей f можно характеризовать числом Струхала

$$Sr = fD/v, \quad (8)$$

В табл. 2 для различных режимов течения указано также и соответствующее число Струхала.

Коэффициент сопротивления. Коэффициент сопротивления круглого цилиндра как функция числа Рейнольдса показан на рис. 1. Определенный уравнением (4) коэффициент сопротивления вычислен с использованием площади лобовой поверхности, равной произведению диаметра D на длину цилиндра b . В области $Re < 1$ существует хорошее согласие теории с экспериментом. Теоретическая кривая получена с учетом двух членов разложения по малому числу Рейнольдса в методе сращиваемых асимптотических разложений [10]

$$c_D = \frac{8\pi}{Re} [\Delta_1(Re) - 0,87 \Delta_1^3(Re) + O(\Delta_1^4)], \quad (9)$$

где

$$\Delta_1(Re) = \left(\ln \frac{8}{Re} + 0,0772 \right)^{-1} = \left(\ln \frac{7,406}{Re} \right)^{-1}. \quad (10)$$

В этом режиме сопротивление трения составляет примерно половину полного сопротивления.

В предположении о стационарности течения коэффициент сопротивления круглого цилиндра рассчитан в [20]



Рис. 1. Зависимость коэффициента сопротивления круглого цилиндра от числа Рейнольдса. Точки — результаты эксперимента, приведенные в [65] (см. § 2.2.1); штриховая линия — результат теоретического расчета по [9]; штрихпунктирная — численное решение [20]

путем численного решения полных уравнений Навье — Стокса при числах Рейнольдса, не превышающих 100. Полученные таким образом данные также приведены на рис. 1. При $Re=100$ сопротивление трения составляет только 36% полного сопротивления. Из-за сильной нестационарности течения в режиме существования дорожки Кармана численное решение уравнений Навье — Стокса при $Re > 100$ не получено. В диапазоне чисел Re от 10^3 примерно до $1,3 \cdot 10^5$ полное сопротивление практически постоянно, однако вклад сопротивления трения быстро убывает. При $Re=10^5$ в соответствии с данными [21] сопротивление трения составляет менее 1% полного сопротивления. В критической области ($1,5 \cdot 10^5 < Re < 3,5 \cdot 10^6$) коэффициент сопротивления уменьшается очень резко. Это объясняется поведением пограничного слоя на поверхности цилиндра. Когда число Рейнольдса превышает некоторое значение, оторвавшийся ламинарный вязкий слой может стать турбулентным, что приведет к присоединению пограничного слоя. Таким образом, возникает локальная зона отрыва (пузырь). Окончательный отрыв турбулентного пограничного слоя происходит намного дальше вниз по потоку. Максимальный угол отрыва (измеряемый от передней критической точки) примерно равен 140. Этому углу соответствует максимальное значение коэффициента сопротивления $c_D=0,2$. Для больших чисел Рейнольдса пограничный слой становится турбулентным раньше, чем отрывается ламинарный. В этом случае отрывается уже турбулентный пограничный слой и формируется турбулентный след. В той области чисел Рейнольдса, где реализуется такая ситуация, коэффициент сопротивления опять-таки почти постоянен, $c_D \approx 0,6$. Вязкое сопротивление в таком режиме все еще около 1% полного сопротивления.

Критическое число Рейнольдса, определяемое как точка максимальной крутизны на графике зависимости коэффициента сопротивления от числа Re в критической области, является функцией степени турбулентности невозмущенного потока Tu . Величина Tu определяется как отношение усредненной во времени турбулентной кинетической энергии [см. уравнение (113) § 2.2.1] к динамическому давлению в невозмущенном течении.

В [22] получена следующая формула для Re_c :

$$Re_c = 3,78 \cdot 10^5 \exp(-6 \sqrt{Tu}), \quad (11)$$

где

$$0 \leq Tu \leq 0,05, \quad (12)$$

Распределение давления и касательного напряжения по поверхности. В [21] измерены распределения давления и касательного напряжения по окружности цилиндра при нескольких значениях чисел Рейнольдса. Полученные результаты приведены на рис. 2 и 3. Результаты, представленные на рис. 2, относятся к докритическому значению числа Рейнольдса ($Re=10^5$), на рис. 3 — к сверхкритическому.

Таблица 2. Характеристики течения около круглого цилиндра

Число Рейнольдса Re	Режим течения	Картина течения	Характеристика течения	Число Струхала St	Коэффициент сопротивления c_p	Угол отрыва θ_s
$Re \rightarrow 0$	Течение с очень малыми числами Рейнольдса		Стационарное течение, следа нет, симметрия вверх и вниз по потоку, возможно теоретическое описание	—	Уравнение (9)	—
$3 \div 4 < Re < 30 \div 40$	Образование вихрей Твина		Стационарное течение, отрыв, рециркуляционные вихри	—	$1,59 < c_D < 4,52$ ($Re=30$) ($Re=4$) (численный)	$130^\circ < \theta_s < 180^\circ$ ($Re=35$) ($Re=5$)
$30 \div 40 < Re < 80 \div 90$	Возникновение режима Кармана		Ламинарный след, неустойчивость	—	$1,17 < c_D < 1,53$ ($Re=100$) ($Re=30$) (численный)	$115^\circ < \theta_s < 130^\circ$ ($Re=90$) ($Re=35$)
$80 \div 90 < Re < 150 \div 300$	Чистый режим Кармана		Вихревая дорожка Кармана	$0,14 < St < 0,21$	—	—
$150 \div 300 < Re < 100\,000 \div 130\,000$	Докритический режим		Почти ламинарный след с неустойчивой вихревой дорожкой	$St = 0,21$	$\sim 1,2$	$\sim 80^\circ$
$100\,000 \div 130\,000 < Re < 3\,500\,000$	Критический и закритический режимы		Отрыв ламинарного пограничного слоя, присоединение турбулентного, пузырь, окончательный отрыв турбулентного пограничного слоя, турбулентный след	Исчезновение характерной периодичности	$0,2 < c_D < 1,2$	$80^\circ < \theta_s < 140^\circ$
$3\,500\,000 < Re$	Сверхкритический режим		Переход к турбулентному пограничному слою, турбулентный отрыв	$0,25 < St < 0,30$	$\sim 0,6$	$\sim 115^\circ$

Примечание. D — диаметр цилиндра; b — длина цилиндра; $A = Db$ — лобовое сечение; $Re = VD/\nu$ — число Рейнольдса; $St = Df/V$ — число Струхала

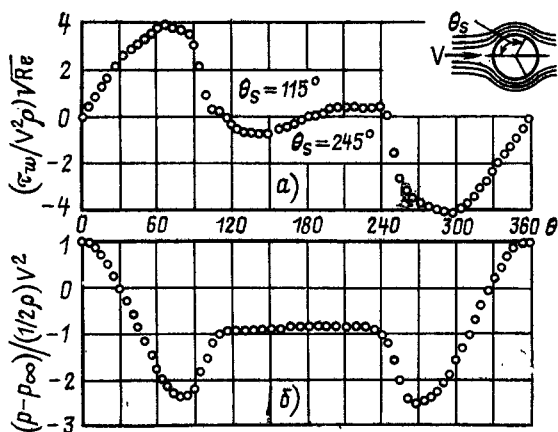


Рис. 2. Распределение поверхностного трения (а) и давления (б) по поверхности круглого цилиндра при $Re = 10^5$ (докритический режим) [21]

скому ($Re = 3,6 \cdot 10^6$). Нетрудно видеть, что в этих режимах распределения различаются очень сильно. В первом случае (отрыв ламинарного пограничного слоя при $\theta_s = 78^\circ$; $c_D = 1,2$) сопротивление примерно на 60% выше, чем во втором (отрыв турбулентного пограничного слоя при $\theta_s = 115^\circ$; $c_D = 0,76$).

Влияние шероховатости. Влияние шероховатости на поле течения около круглого цилиндра исследовалось в [23—26]. На рис. 4 показан коэффициент сопротивления шероховатого круглого цилиндра в поперечном потоке в зависимости от числа Рейнольдса, измеренный в [23]. Параметром является относительная шероховатость k_s/D . Каждая кривая охватывает три режима: докритический, критический и сверхкритический. Очевидно, что в докритическом режиме шероховатость поверхности никак не сказывается. При больших числах Рейнольдса ламинарный отрыв сопровождается образованием замкнутого пузыря. Таким образом, точка отрыва сдвигается вниз по потоку и поэтому сопротивление уменьшается. На шероховатой поверхности этот эффект наблюдается при меньших числах Рейнольдса, что обусловлено дополнительными возмущениями пограничного слоя, создаваемыми шероховатостью. Уменьшение сопротивления в критической области для шероховатой поверхности заметно меньше, чем для гладкой.

Влияние различных параметров. Следует упомянуть влияние следующих факторов на течение около

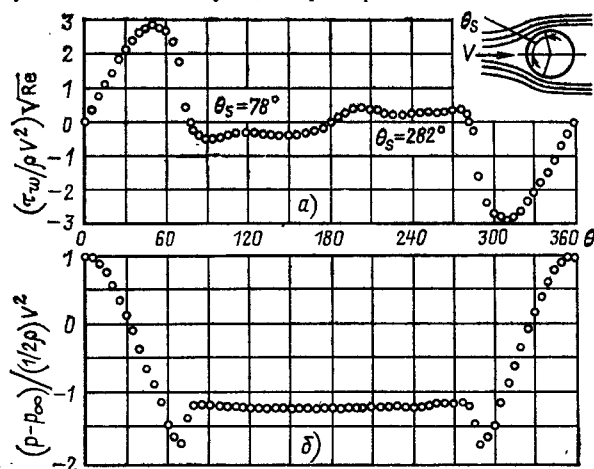


Рис. 3. Распределение поверхностного трения (а) и давления (б) по поверхности круглого цилиндра при $Re = 3,6 \cdot 10^6$ (закритический режим) [21]

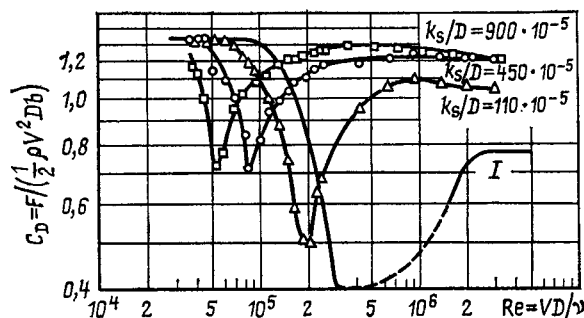


Рис. 4. Коэффициент сопротивления шероховатого круглого цилиндра [23], кривая снизу получена для гладкого цилиндра

круглых цилиндров:

1) турбулентность набегающего потока. Как уже отмечалось выше, турбулентность набегающего потока влияет главным образом на критическое число Рейнольдса (см. (11), а также [24]);

2) сжимаемость. В случае сжимаемой жидкости коэффициент сопротивления и другие параметры зависят также и от числа Маха Ма. Измерения [27] показывают, что при $Ma < 0,3$ влияние сжимаемости практически не проявляется. Кроме того, при больших числах Маха сжимаемость весьма существенна. По мере роста Ма все более ослабевает роль числа Рейнольдса, и при $Ma > 0,8$ коэффициент сопротивления уже не зависит от числа Рейнольдса;

3) зависимость свойств жидкости от температуры. В случае теплообмена при обтекании круглых цилиндров свойства жидкости обычно вычисляются при некоторой характерной температуре [см. уравнение (212) § 2.2.1]. В качестве характерной температуры часто используется среднеарифметическое температур поверхности и набегающего потока [28]. В [29] исследовалось влияние теплообмена на распределение поверхностного трения и, следовательно, на сопротивление трения, которое, однако, составляло лишь малую долю полного сопротивления;

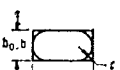
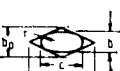
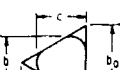
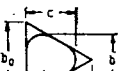
4) нестационарное течение. Как уже отмечалось выше, даже в случае стационарного течения на бесконечности в различных диапазонах изменения числа Рейнольдса течение около цилиндра может оказаться нестационарным. Этот эффект приводит к появлению осциллирующей подъемной силы, которая может быть того же порядка, что и сопротивление [19]. Характеристики течения становятся еще сложнее, когда цилиндр хотя бы слабо колеблется, например вследствие аэроупругости. Этот вопрос подробно освещен в специальной литературе, например в [17—19, 30];

5) ребра. Структура течения около круглых цилиндров, имеющих параллельные набегающему потоку ребра, довольно сложна, что обусловлено взаимодействием пограничных слоев на ребрах и самом цилиндре [31]. Пограничный слой, формирующийся на ребрах, подобен пограничному слою на плоской пластине. В связи с этим мно-

Таблица 3.
Коэффициенты сопротивления для различных плохо обтекаемых цилиндров ($Re > 10^3$, вычислено по высоте лобового сечения)

Форма	c_D
	1,98
	2,30
	1,16
	2,20
	2,05
	1,55

Таблица 4. Коэффициенты сопротивления цилиндров со скругленными кромками [35]

Направление потока	c_0/b_0	r/b_0	cD , $Re = 10^5$
	1:1	0.50	1,00
	1:2		1,6
	2:1		0,6
	1:2	0,021	2,2
	1:2	0,083	1,9
	1:2	0,250	1,6
	1:1	0,021	2,0
	1:1	0,167	1,2*
	1:1	0,333	1,0
	2:1	0,042	1,4
	2:1	0,167	0,7*
	2:1	0,500	0,4
	1:2	0,021	1,8
	1:2	0,083	1,7
	1:2	0,167	1,7
	1:1	0,015	1,5
	1:1	0,118	1,5*
	1:1	0,235	1,5
	2:1	0,042	1,1
	2:1	0,167	1,1*
	2:1	0,333	1,1
	1:1	0,021	1,2
	1:1	0,083	1,3*
	1:1	0,250	1,1
	1:1	0,021	2,0
	1:1	0,083	1,9*
	1:1	0,250	1,3

* $Re = 2 \cdot 10^5$.

жество исследований касалось обтекания круглого цилиндра, установленного перпендикулярно потоку на плоской пластине. Более детальную информацию по этому вопросу можно найти в [32, 33].

Д. Обтекание цилиндров различной формы. Сопротивление затупленных тел зависит главным образом от рас-

пределения давления (сопротивление давления превышает 90%), что радикально отличается от сопротивления в вязких средах. Это отличие обусловлено отрывом потока, который происходит вблизи острых кромок или в том месте, где велик положительный градиент давления.

В диапазоне чисел Рейнольдса $10^3 < Re < 10^8$ зависимость коэффициента сопротивления затупленных тел с острыми кромками от числа Рейнольдса очень слабая. В табл. 3 приведены значения коэффициентов сопротивления для некоторых типичных форм цилиндров.

Число Струхала для затупленных тел

$$Sr = 0,21/c^{3/4}. \quad (13)$$

Эта зависимость получена эмпирически для тел разнообразной формы.

В узком диапазоне изменения числа Рейнольдса, где ламинарный отрыв сменяется турбулентным (критическое число Рейнольдса), для затупленных тел со скругленными кромками коэффициент сопротивления существенно снижается. Термины «докритический» и «сверхкритический» используются для выделения областей чисел Рейнольдса, в которых происходит ламинарный или турбулентный отрыв. В табл. 4 приведены коэффициенты сопротивления в докритической области для некоторых тел со скругленными кромками. Более детальную информацию можно найти в [13, 34].

2.2.4. Пучки гладких и оребренных труб

А. Жукаускас, Р. Улинскас

А. Введение. При поперечном обтекании жидкостью одиночной трубы на ее поверхности, начиная от критической точки, формируется ламинарный пограничный слой, отрыв которого происходит в некоторой точке периметра. Это приводит к образованию за трубой симметричной стационарной пары вихрей и рециркуляционной зоны. Если число Рейнольдса $Re > 40$, то течение в рециркуляционной зоне становится неустойчивым и происходит периодический срыв вихрей. Ламинарный пограничный слой отрывается при $\Phi = 82^\circ$, где Φ — угол, отсчитываемый от передней критической точки. При дальнейшем росте числа Re достигается критический режим ($Re > 2 \cdot 10^5$), характеризующийся тем, что переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный происходит раньше, чем пограничный слой отрывается. При этом точка отрыва сдвигается вниз по потоку до $\Phi = 140^\circ$. Частота срыва вихрей характеризуется числом Струхала $Sr = fd/u$, где f — частота срыва вихрей; d — диаметр трубы. На практике в диапазоне изменения числа Рейнольдса от 300 до $2 \cdot 10^5$ можно считать, что для одиночной трубы число $Sr = 0,2$. В критической области оно возрастает до 0,46, а затем при $Re = 3,5 \cdot 10^6$ уменьшается до 0,27 [1]. В случае несжимаемой жидкости распределение скорости и давления на внешней границе пограничного слоя описывается уравнением Бернулли

$$\rho_b + \frac{\rho u_b^2}{2} = \rho_x + \frac{\rho u_x^2}{2}. \quad (1)$$

Входящие в это уравнение величины определены на рис. 1; u_x — направленная вдоль периметра локальная скорость; ρ_x и ρ_b — локальное давление и давление во внешнем потоке соответственно; ρ — массовая плотность жидкости. Отсюда

$$u_x = u_b \sqrt{1 - \frac{\rho_x - \rho_b}{\rho u_b^2/2}}. \quad (2)$$

¹ Число $Re = ud/v$, где d — диаметр трубы; v — кинематическая вязкость; u — скорость невозмущенного потока для одиночной трубы или максимальная скорость в межтрубном пространстве в случае трубных пучков.

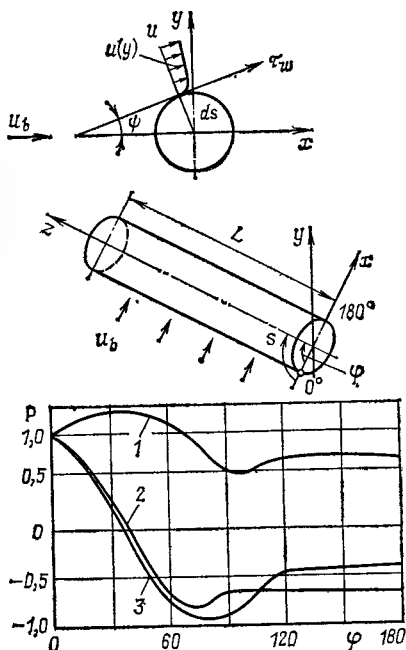


рис. 1. Распределение коэффициента давления по поверхности трубы при $Re=10^4$: 1 — коридорный пучок (внутренний ряд); 2 — одиночная труба; 3 — шахматный пучок (внутренний ряд)

Если труба находится в трубном пучке, то структура течения около нее подобна структуре течения около одиночной трубы. Степень различия зависит от числа Рейнольдса, положения труб в пучке и геометрических характеристик пучка. Два наиболее широко распространенных способа расположения труб в пучке — это коридорный и шахматный. Геометрия пучка описывается следующими параметрами:

$$a = s_1/d; \quad b = s_2/d,$$

где a и b — относительные шаги в поперечном и продольном направлениях соответственно (рис. 2). Во всем трубном пучке градиенты давления, распределения скорости и рециркуляционные зоны за трубами зависят от флуктуаций потока.

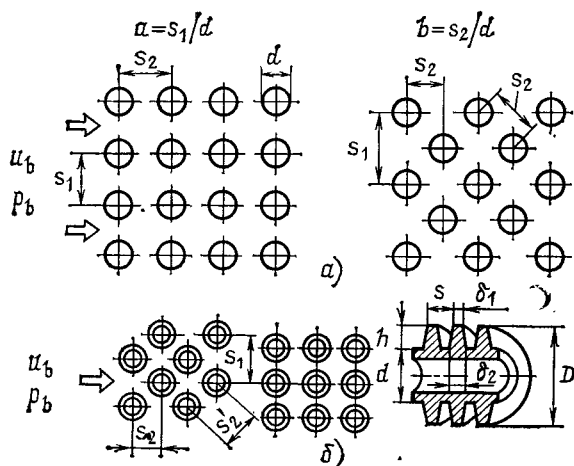


рис. 2. Конфигурации трубных пучков:
а — неооребранные трубы; в — ооребранные трубы

Распределение скорости вне пограничного слоя можно найти с помощью уравнения Бернулли (2), используя данные измерений давления около трубы. На рис. 1 показаны различные распределения давления (приводящие к различным распределениям скорости) по поверхности одиночной трубы или трубы в пучке при поперечном обтекании. При коридорном расположении труб в пучке максимум давления реализуется при $\Phi=40^\circ$ в той точке, где к поверхности приходит поток от расположенной вверх по течению ближайшей трубы. В шахматных пучках давление на лобовой части поверхности каждой трубы близко к давлению для одиночной трубы. Коэффициент давления для находящейся в пучке трубы можно определить следующим образом:

$$p = 1 - \frac{p_{\Phi=0} - p_{\Phi}}{\frac{1}{2} \rho u^2}, \quad (3)$$

где u — средняя скорость в минимальном проходном сечении пучка; $p_{\Phi=0}$ — давление в передней критической точке; p_{Φ} — давление в точке на поверхности с координатой Φ .

Картина течения около находящейся в пучке трубы зависит от числа Рейнольдса. В области малых значений Re , так же как и на одиночной трубе, формируется ламинарный пограничный слой, который отрывается при $\Phi \approx 90^\circ$, а за трубой образуются вихри. Межтрубное пространство занято в основном областью ламинарного течения и крупномасштабными вихрями в рециркуляционной зоне. Влияние этих макроскопических вихрей на ламинарный слой на лобовой поверхности ближайших труб полностью нивелируется вязкими силами и отрицательным градиентом давления. Такая структура течения, реализующаяся при $Re < 10^5$, рассматривается как преимущественно ламинарная.

По мере дальнейшего увеличения числа Re течение в межтрубном пространстве становится сильно турбулентным. Степень турбулентности зависит от геометрии конфигурации пучка и числа Re . Турбулентность увеличивается по мере продвижения в глубь пучка и, примерно, на уровне третьего или четвертого ряда становится полностью развитой. Несмотря на турбулентный характер окружающего потока, на поверхности внутренних труб по-прежнему развивается ламинарный пограничный слой. Такая структура течения наблюдается до $Re=10^6$ и выше.

В трубных пучках такой конфигурации, при которой $(2b^2 - 0,5) < a$, образование пузыря отрыва и повторное присоединение ламинарного пограничного слоя можно наблюдать при очень малых числах Рейнольдса, вплоть до 10^4 . Это приводит к интенсивной турбулентности пограничного слоя на задней поверхности трубы. По мере дальнейшего роста Re до значений $10^5 \div 2 \cdot 10^5$ (в зависимости от геометрии) переход от ламинарного пограничного слоя к турбу-

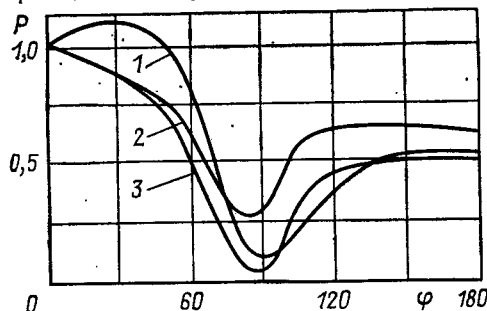


рис. 3. Распределение коэффициента давления по поверхности трубы:

1 — коридорный пучок ($Re=6 \cdot 10^5$); 2 — шахматный пучок ($Re=10^6$); 3 — коридорный пучок ($Re=10^6$, внутренние ряды)

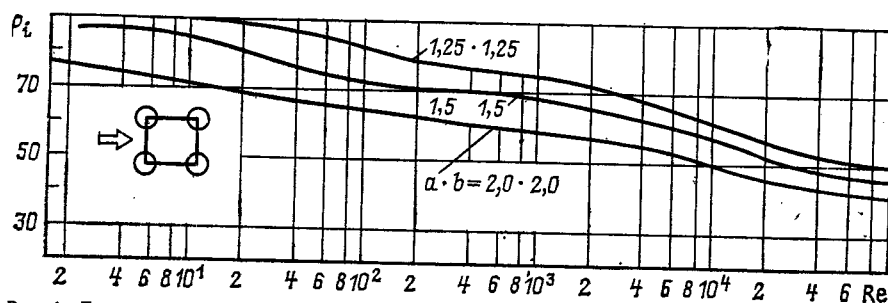


Рис. 4. Точка соударения потока

лентному происходит до точки отрыва ($\Phi = 140^\circ$). Это так называемый критический режим течения. Возрастание Re до 10^6 приводит к формированию закризического режима с развитым турбулентным пограничным слоем. В закризическом режиме также наблюдаются значительные изменения в распределении давления. При $Re > 10^6$ структура течения и распределение давления в коридорных и шахматных пучках очень схожи (рис. 3). Уменьшение p происходит в области между точкой соударения потока с поверхностью трубы и точкой с координатой 90° , что сопровождается ускорением течения на внешней границе пограничного слоя. В кормовой части p увеличивается (скорость внешнего течения уменьшается), что приводит к отрыву турбулентного пограничного слоя. В рециркуляционной зоне давление меняется незначительно.

Увеличение скорости течения в межтрубном пространстве зависит главным образом от относительного поперечного шага a . Величина u с уменьшением a быстро возрастает. Средняя скорость в минимальном проходном сечении

$$u = u_b \frac{a}{(a-1)}, \quad (4)$$

если только $a < 2b^2 - 0,5$. В сжатых пучках при $a < 2b^2 - 0,5$ минимальное проходное сечение может соответствовать диагональному направлению. В этом случае

$$u = u_b \frac{a}{2 \sqrt{(a^2/4) + b^2} - 1}, \quad (5)$$

а средняя скорость в любом сечении прохода

$$u_\Phi = u_b \frac{a}{a - \sin \Phi}. \quad (6)$$

В. Сопротивление и перепад давления в трубных пучках. При течении сквозь трубные пучки происходят необратимые изменения энергии вследствие трения. Эти изменения проявляются в виде потерь давления в пучках. Расчеты перепада давления играют первостепенную роль при конструировании систем, обеспечивающих циркуляцию (насосов, вентиляторов и т. д.). С другой стороны, изменения энергии связаны с силами, действующими на отдельные трубы в пучке, знать которые совершенно необходимо, например, для расчета вибрации труб. Хотя потери давления и действующие на трубу силы взаимосвязаны, удобно рассматривать их отдельно. Вначале рассмотрим действующие на трубу силы.

Сопротивление находящейся в пучке трубы. Течение жидкости сквозь трубный пучок приводит к появлению действующей на каждую отдельную трубу силы, направление которой не обязательно совпадает с направлением потока. Суммарное сопротивление складывается из сопротивления поверхностного трения и сопротивления формы. Его продольный компонент называется силой сопротивления F_x , а перпендикулярный — подъемной силой F_y . Силу, действующую на находящуюся в пучке трубу, мож-

но описывать с помощью коэффициента поверхностного трения c_f и коэффициента сопротивления c_D . Коэффициент поверхностного трения определяется следующим образом [2, 3]:

$$c_f = \frac{2\tau_{wx}}{\rho u^2}, \quad (7)$$

где τ_{wx} — среднее касательное напряжение, приложенное к поверхности трубы. Локальное касательное напряжение

$$\tau_w = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (8)$$

где η — динамическая вязкость; $(du/dy)_{y=0}$ — градиент скорости на поверхности (см. на рис. 1). В том случае, когда известно распределение скорости в пограничном слое, τ_{wx} можно найти, интегрируя τ_w вдоль периметра трубы от передней до задней критической точки или до точки отрыва,

$$\tau_{wx} = \frac{1}{s} \int_0^s \tau_w dX. \quad (9)$$

Здесь $dX = \cos \psi ds$; ψ — угол между направлением основного потока и касательной к поверхности трубы (см. рис. 1); s — расстояние вдоль окружности. При расчете касательных напряжений по уравнению (9) предполагается, что в диапазоне чисел Рейнольдса от 2 до 10^6 соударение потока с поверхностью происходит при $\Phi = 0^\circ$ для шахматных пучков, а для коридорных пучков положение точки соударения находится из эксперимента (рис. 4).

Для облегчения решения уравнения (9) можно воспользоваться корреляционными зависимостями для локального трения $c_f = 2\tau_w/(\rho u^2)$, аналогичными показанным на рис. 5.

При малых числах Re основной вклад в F_x дает поверхностное трение. По мере роста числа Re его вклад уменьшается, и в критическом режиме поверхностное трение составляет лишь 0,5–2% полной силы F_x . Коэффициент сопротивления c_D удобно выразить через полную силу F_x

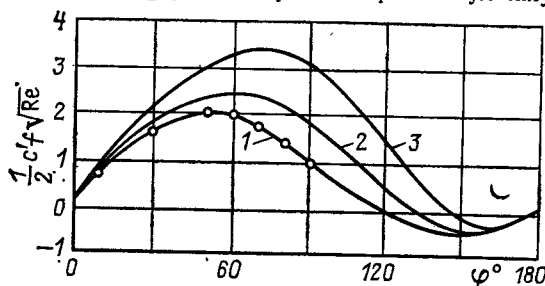


Рис. 5. Зависимость коэффициента поверхностного трения от угла в шахматных пучках. Точки — аналитическое решение уравнения до точки отрыва; 1 — результат эксперимента (пучок 1,50·1,50; $Re=1017$); кривая 2 — $Re=1,3 \cdot 10^4$ [2] 3 — $Re=1,4 \cdot 10^4$, пучок 2,0·1,4 [2]

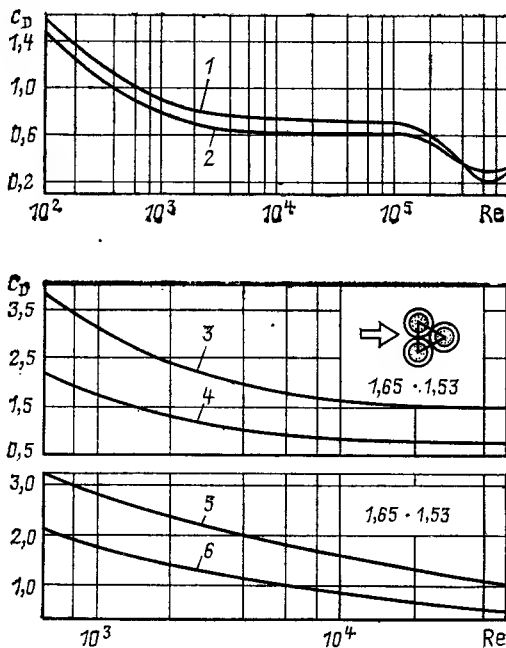


Рис. 6. Зависимость коэффициента сопротивления трубы в пучке от числа Рейнольдса: кривая 1 — коридорный пучок; 2 — шахматный пучок (2,0·2,0, необребленные трубы, первый ряд); 3, 4 — шахматный пучок (1,65·1,53, первый ряд); 5, 6 — шахматный пучок (1,65·1,53, внутренний ряд), $D=25$; $d=15$; $h=5$; $s=3$; $\delta_1=0,4$; $\delta_2=3,0$ мм. Угол атаки ребра составляет 3°

(включающую и поверхностное трение, и сопротивление формы)

$$c_D = \frac{2F_x}{\rho u^2 A_{tr}}, \quad (10)$$

где $A_{tr} = Ld$ — площадь максимального сечения трубы плоскостью, перпендикулярной потоку (здесь L — длина трубы, d — ее диаметр). Для того чтобы определить F_x для данной трубы, давление p нужно измерить в нескольких равномерно распределенных по поверхности точках (например, в n_0 точках)

$$F_x = \Delta A \sum_{i=1}^{n_0} p_{\Phi} \cos \Phi, \quad (11)$$

где

$$\Delta A = \pi \frac{dL}{n_0}; \quad (12)$$

L — длина трубы; d — ее диаметр.

На рис. 6 изображен коэффициент сопротивления для гладких труб первого ряда в коридорном и шахматном пучках с $a \cdot b = 2,0 \cdot 2,0$ (кривые 1 и 2), а также коэффициент сопротивления труб со спиральным оребрением в сжатых пучках $a \cdot b = 1,65 \cdot 1,53$ для первого ряда (кривые 3 и 4) и для внутренних рядов (кривые 5 и 6).

Для расчета c_D рекомендуются следующие формулы: коридорные пучки ($10^2 < Re < 4 \cdot 10^3$)

$$c_D = 0,535 \exp(5,378 Re^{-0,345}); \quad (13)$$

шахматные пучки ($10^2 < Re < 4 \cdot 10^3$)

$$c_D = 0,417 \exp(4,932 Re^{-0,296}); \quad (14)$$

коридорные пучки ($4 \cdot 10^3 < Re < 6 \cdot 10^4$)

$$c_D = 0,735 - 0,411 \cdot 10^{-6} Re; \quad (15)$$

шахматные пучки ($4 \cdot 10^3 < Re < 6 \cdot 10^4$)

$$c_D = 0,647 - 0,5 \cdot 10^{-6} Re; \quad (16)$$

коридорные пучки ($6 \cdot 10^4 < Re < 10^6$)

$$c_D = 0,621 + 0,169 \cdot 10^{-5} Re - 11,343 \cdot 10^{-12} Re^2 + 16,656 \cdot 10^{-18} Re^3 - 7,377 \cdot 10^{-24} Re^4; \quad (17)$$

шахматные пучки ($6 \cdot 10^4 < Re < 10^6$)

$$c_D = 0,618 + 0,491 \cdot 10^{-5} Re - 6,303 \cdot 10^{-12} Re^2 + 10,694 \cdot 10^{-18} Re^3 - 5,2 \cdot 10^{-24} Re^4. \quad (18)$$

Типичные результаты для c_D в пучках оребренных труб показаны на рис. 6. Значения c_D зависят от определения A_{tr} в формуле для c_D (10): в качестве диаметра можно использовать диаметр основной трубы или диаметр трубы с учетом ребер. Если для труб первого ряда при определении c_D использовать диаметр трубы с учетом ребер, то

$$c_D = 1,451 + \frac{1908,9}{Re} - \frac{275,6 \cdot 10^3}{Re^2}. \quad (19)$$

Если же в качестве диаметра использовать диаметр основной трубы, то

$$c_D = 0,706 + \frac{1190,9}{Re} - \frac{215,4 \cdot 10^3}{Re^2}. \quad (20)$$

Формулы (19), (20) описывают соответственно кривые 3 и 4 на рис. 6.

Для внутренних рядов пучка оребренных труб аппроксимационные формулы для c_D имеют вид

$$c_D = 16,03 Re^{-0,256} \quad (21)$$

в случае диаметра трубы вместе с ребрами (кривая 5) и

$$c_D = 24,37 Re^{-0,388} \quad (22)$$

в случае диаметра основной трубы (кривая 6).

Перепад давления в трубных пучках. Перепад давления при течении сквозь пучок труб зависит от его конфигурации (описываемой параметрами s_1 , s_2 и d) (см. рис. 2), числа рядов в пучке z , скорости потока u и физических свойств жидкости

$$\Delta p = f(u, s_1, s_2, d, z, \eta, \rho). \quad (23)$$

В дальнейшем для удобства в качестве скорости u будем использовать скорость потока в минимальном проходном сечении, т. е. максимальную скорость, которую приобретает жидкость при движении в межтрубном пространстве. Пусть u_b — скорость натекания жидкости на пучок, т. е. объемный расход через единицу площади лобовой поверхности всего пучка, включая поверхность как труб, так и межтрубного пространства. Тогда для коридорных пучков $u = u_b s_1 / (s_1 - d)$, а для шахматных $u = u_b s_1 / (s_1 - d)$ или $u = u_b s_1 / 2(s_2 - d)$ в зависимости от того, какое из этих значений больше. Взаимосвязь скоростей u и u_b можно представить также в функции параметров a и b .

Уравнение (23) перепишем в безразмерной форме

$$Eu = f(Re, a, b, z), \quad (24)$$

где $Re = ud/\nu$; $a = s_1/d$; $b = s_2/d$. Число Эйлера связано с перепадом давления соотношением

$$\Delta p = Eu \frac{\rho u^2}{2} z, \quad (25)$$

где z — число рядов труб. Коэффициент трения f выразим через число Эйлера

$$f = \frac{2\Delta p p}{4\dot{m}^2 z} = \frac{1}{4} Eu. \quad (26)$$

Здесь $\dot{m}$ — плотность потока массы, $\dot{m} = \rho u = \dot{M}/S$, где $\dot{M}$ — массовый расход; S — площадь поперечного сечения по-

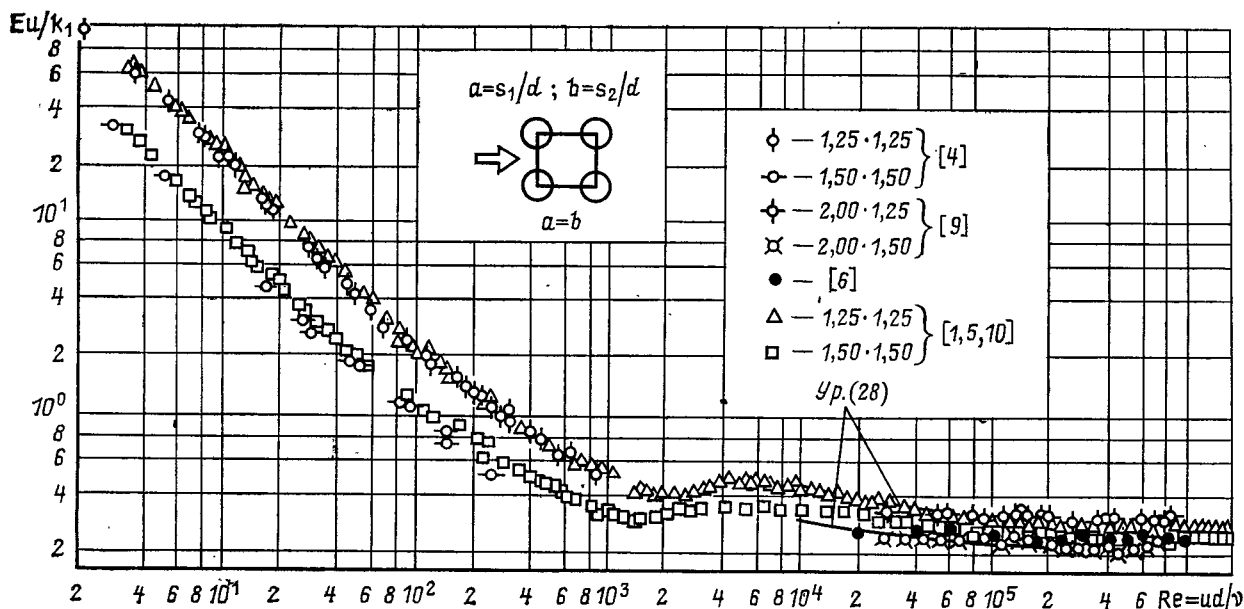


Рис. 7. Перепад давления в коридорных пучках

тока, соответствующая минимальному межтрубному промежутку.

На рис. 7 и 8 представлены заимствованные из различных источников данные для коридорных и шахматных пучков соответственно. Показаны зависимости Eu/k_1 от числа Re , где k_1 — определенный ниже параметр, описывающий геометрию пучка. Видно, что данные разных авторов хорошо согласуются друг с другом.

Для обобщения экспериментальных данных используется степенная зависимость

$$Eu = k_2 Re^r, \quad (27)$$

где постоянные k_2 и r зависят от геометрии системы. Ниже приведены соотношения такого типа.

1. Уравнения для коридорных пучков в диапазоне $Re = 10^4 \div 2 \cdot 10^5$:

при $(b-0,8)/(a-1) \geq 1$

$$Eu = 0,52 \left(\frac{b-0,8}{a-1} \right)^{1,5} Re^r; \quad (28)$$

при $(b-0,8)/(a-1) < 1$

$$Eu = 0,52 \left(\frac{b-0,8}{a-1} \right) Re^r; \quad (29)$$

показатель степени

$$r = 0,12 \left(\frac{b-1}{a-1} \right)^{0,5}. \quad (30)$$

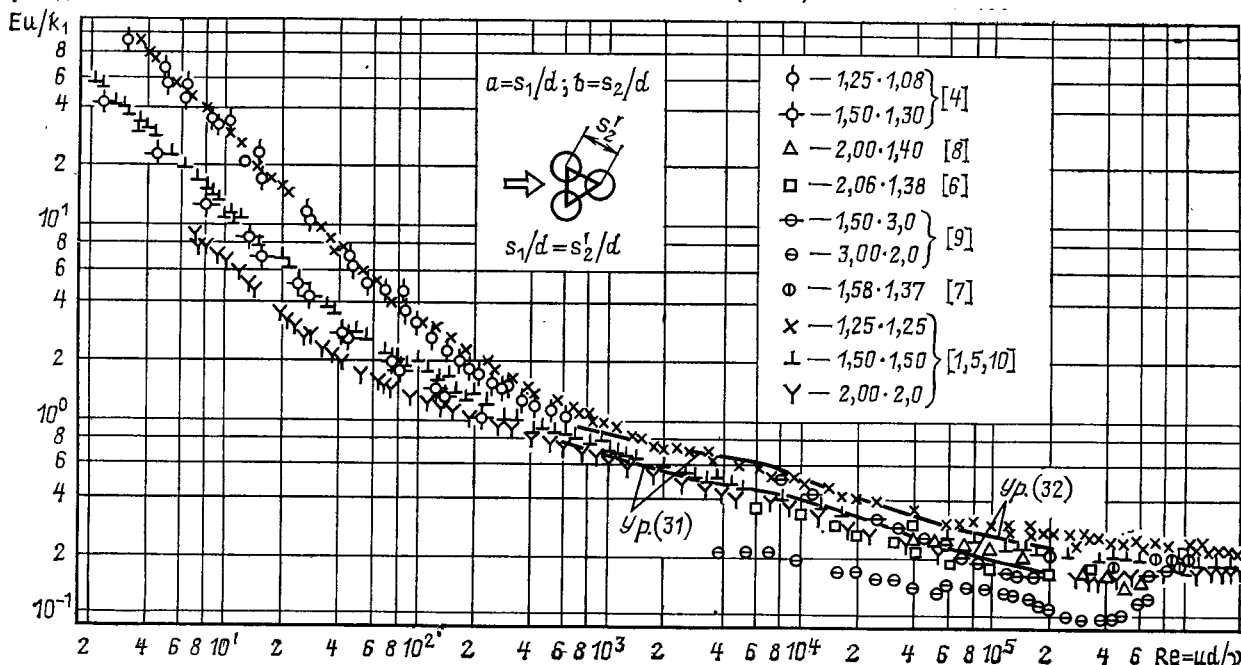


Рис. 8. Перепад давления в шахматных пучках

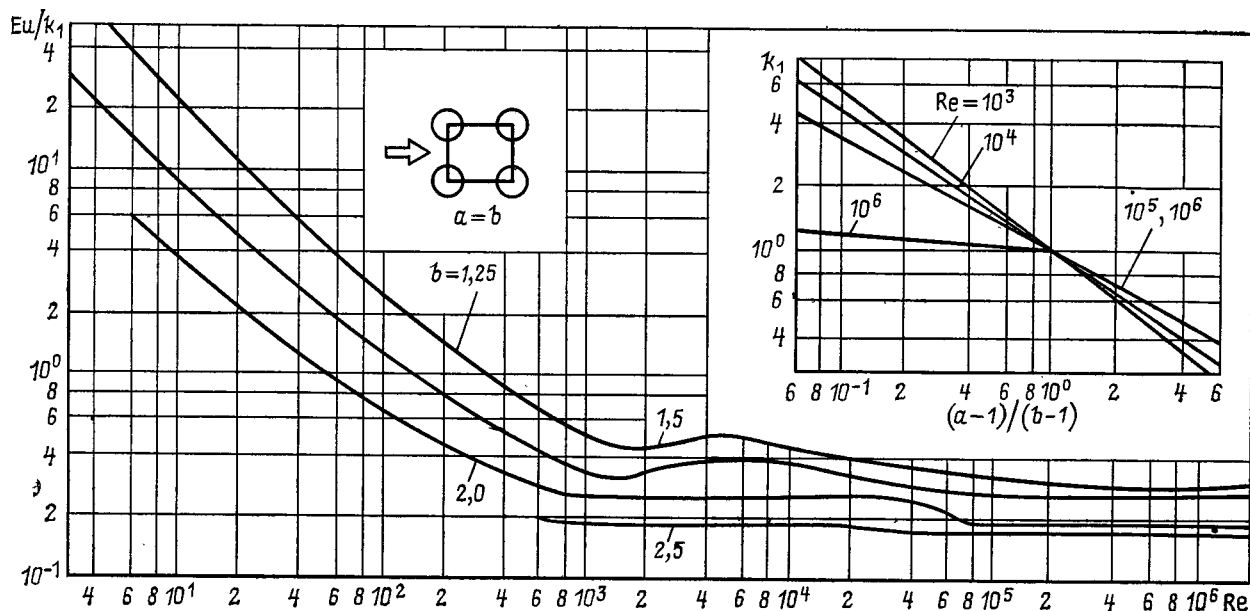


Рис. 9. Перепад давления в коридорных пучках при различных значениях относительного продольного шага

2. Уравнения для шахматных пучков, расположенных по равнобедренному треугольнику:
в области $6 \cdot 10^2 < Re < 7 \cdot 10^3$

$$Eu = 1,42 \left(\frac{1}{a-1} \right)^{0,33} Re^{-0,15}; \quad (31)$$

в области $7 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$

$$Eu = 5,2 \left(\frac{1}{a-1} \right)^{0,25} Re^{-0,29}. \quad (32)$$

Для сопоставления аппроксимаций (28)–(32) с представленными на рис. 7 и 8 экспериментальными данными число Eu было найдено из уравнений, а затем оценено отношение Eu/k_1 с помощью приведенных ниже для k_1 соотношений (следует заметить, что для рассмотренных выше примеров $k_1 \approx 1$). Полученные таким образом результаты изображены на рис. 7 и 8 сплошными линиями. Видно, что уравнения (28)–(32) очень хорошо описывают результаты эксперимента. Однако степенная форма уравнения (27) позволяет описать лишь ограниченный диапазон данных, поэтому она здесь и не рекомендуется. Рекомендуемые уравнения (приведенные ниже) имеют форму рядов по обратным степеням Re , различных для коридорных и шахматных пучков. Эти уравнения относятся к пучкам, помещенным в различные поперечные потоки; коррекция для нескольких первых рядов труб будет сделана позднее.

Рекомендуемые соотношения для коридорных пучков труб. Рекомендуемые зависимости отношения Eu/k_1 от числа Re представлены на рис. 9 [5]. Эти кривые описывают пучки с большим числом рядов труб (корректирующие множители для пучков с небольшим числом рядов приведены ниже) соотношениями в форме рядов по обратным степеням, различными для разных значений параметра b (отношение продольного шага к диаметру) и разных диапазонов числа Рейнольдса:

для $b=1,25; 3 < Re < 2 \cdot 10^3$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,272 + \frac{0,207 \cdot 10^3}{Re} + \frac{0,102 \cdot 10^3}{Re^2} - \frac{0,286 \cdot 10^3}{Re^3}; \quad (33)$$

для $b=1,25; 2 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^6$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,267 + \frac{0,249 \cdot 10^4}{Re} - \frac{0,927 \cdot 10^7}{Re^2} + \frac{0,10 \cdot 10^{11}}{Re^3}; \quad (34)$$

для $b=1,50; 3 < Re < 2 \cdot 10^3$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,263 + \frac{0,867 \cdot 10^2}{Re} - \frac{0,202 \cdot 10}{Re^2}; \quad (35)$$

для $b=1,50; 2 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^6$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,235 + \frac{0,197 \cdot 10^4}{Re} - \frac{0,124 \cdot 10^8}{Re^2} + \frac{0,312 \cdot 10^{11}}{Re^3} - \frac{0,274 \cdot 10^{14}}{Re^4}; \quad (36)$$

для $b=2,0; 7 < Re < 800$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,188 + \frac{0,566 \cdot 10^2}{Re} - \frac{0,646 \cdot 10^3}{Re^2} + \frac{0,601 \cdot 10^4}{Re^3} - \frac{0,183 \cdot 10^5}{Re^4}; \quad (37)$$

для $b=2,0; 800 < Re < 2 \cdot 10^6$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,247 - \frac{0,595 Re}{10^6} + \frac{0,15 Re^2}{10^{11}} - \frac{0,137 Re^3}{10^{17}} + \frac{0,396 Re^4}{10^{24}}; \quad (38)$$

для $b=2,5; 600 < Re < 2 \cdot 10^5$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,177 - 0,311 \cdot 10^{-6} Re + 0,117 \cdot 10^{11} Re^2. \quad (39)$$

Для расчета с помощью этих соотношений числа Эйлера Eu необходимо знать геометрический параметр k_1 . На рис. 9 изображены также зависимости k_1 от параметров a, b и числа Re . Следует заметить, что, как видно из этого рисунка, $k_1 \approx 1$ при $a=b$, т. е. при равенстве продольного и поперечного шагов (квадратное расположение труб). При $a \neq b$ значение k_1 зависит от отношения $(a-1)/(b-1)$ и числа Рейнольдса. В диапазоне $0,06 < (a-1)/(b-1) < 6$ для расчета k_1 можно использовать следующие формулы:

$$k_1 = 1,009 \left(\frac{a-1}{b-1} \right)^{-0,744} \quad \text{для } Re = 10^3; \quad (40)$$

$$k_1 = 1,007 \left(\frac{a-1}{b-1} \right)^{-0,655} \quad \text{для } Re = 10^4; \quad (41)$$

$$k_1 = 1,004 \left(\frac{a-1}{b-1} \right)^{-0,539} \quad \text{для } Re = 10^5; \quad (42)$$

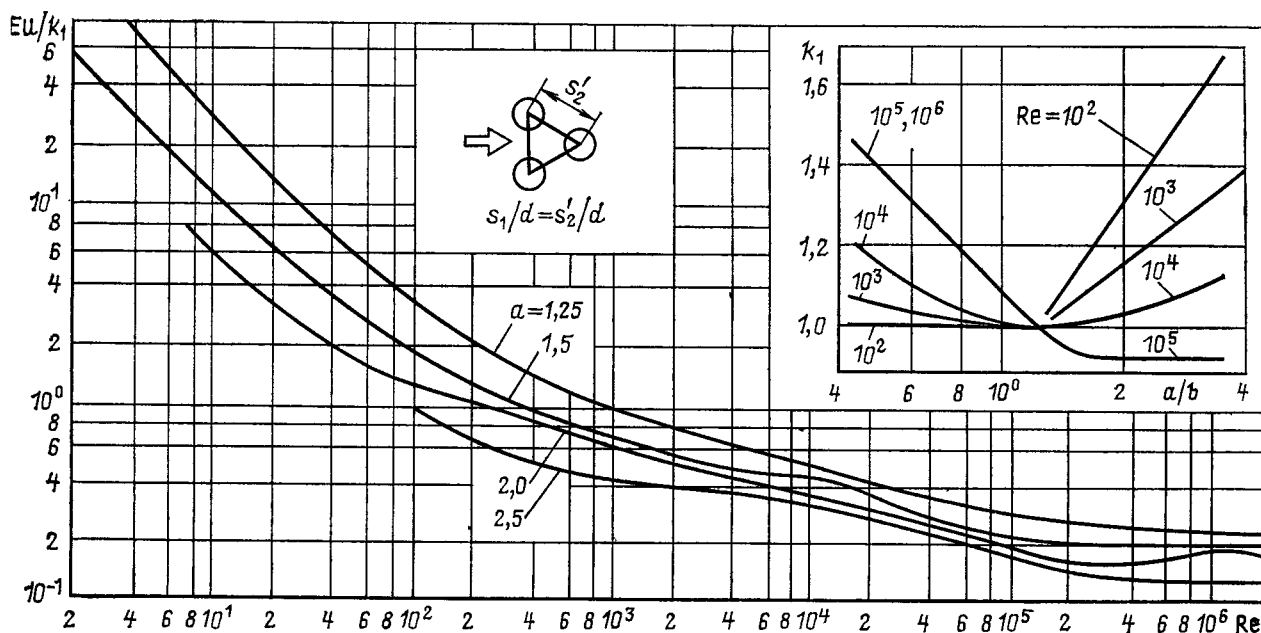


Рис. 10. Перепад давления в коридорных пучках при различных значениях относительного поперечного шага

$$k_1 = 1,218 - 0,297 \left(\frac{a-1}{b-1} \right) + 0,0265 \left(\frac{a-1}{b-1} \right)^2 \quad \text{для } Re = 10^6. \quad (43)$$

Для $Re = 10^7$ полагаем $k_1 = 1$.

Рекомендуемые соотношения для шахматных пучков труб. Для шахматных пучков труб рекомендуемые кривые [5], описывающие пучки с большим числом рядов, приведены на рис. 10. Здесь параметром является отношение поперечного шага к диаметру трубы. Эти кривые также описываются соотношениями в форме рядов по обратным степеням, коэффициенты которых зависят от a и числа Рейнольдса:

$$\text{для } a = 1,25; 3 < Re < 10^3$$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,795 + \frac{0,247 \cdot 10^3}{Re} + \frac{0,335 \cdot 10^3}{Re^2} - \frac{0,155 \cdot 10^4}{Re^3} + \frac{0,241 \cdot 10^4}{Re^4}; \quad (44)$$

$$\text{для } a = 1,25; 10^3 < Re < 2 \cdot 10^6$$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,245 + \frac{0,339 \cdot 10^4}{Re} - \frac{0,984 \cdot 10^7}{Re^2} + \frac{0,132 \cdot 10^{11}}{Re^3} - \frac{0,599 \cdot 10^{13}}{Re^4}; \quad (45)$$

$$\text{для } a = 1,5; 3 < Re < 10^3$$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,683 + \frac{0,111 \cdot 10^3}{Re} - \frac{0,973 \cdot 10^2}{Re^2} + \frac{0,426 \cdot 10^3}{Re^3} - \frac{0,574 \cdot 10^3}{Re^4}; \quad (46)$$

$$\text{для } a = 1,5; 10^3 < Re < 2 \cdot 10^6$$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,203 + \frac{0,248 \cdot 10^4}{Re} - \frac{0,758 \cdot 10^7}{Re^2} + \frac{0,104 \cdot 10^{11}}{Re^3} - \frac{0,482 \cdot 10^{13}}{Re^4}; \quad (47)$$

$$\text{для } a = 2,0; 7 < Re < 10^2$$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,713 + \frac{0,448 \cdot 10^3}{Re} - \frac{0,126 \cdot 10^3}{Re^2} - \frac{0,582 \cdot 10^3}{Re^2}; \quad (48)$$

для $a = 2,0; 10^2 < Re < 10^4$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,343 + \frac{0,303 \cdot 10^3}{Re} - \frac{0,717 \cdot 10^5}{Re^2} + \frac{0,88 \cdot 10^7}{Re^3} - \frac{0,38 \cdot 10^9}{Re^4}; \quad (49)$$

для $a = 2,0; 10^4 < Re < 10^6$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,162 + \frac{0,181 \cdot 10^4}{Re} + \frac{0,792 \cdot 10^8}{Re^2} - \frac{0,165 \cdot 10^{13}}{Re^3} + \frac{0,872 \cdot 10^{16}}{Re^4}; \quad (50)$$

для $a = 2,5; 10^2 < Re < 5 \cdot 10^3$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,33 + \frac{0,989 \cdot 10^2}{Re} - \frac{0,148 \cdot 10^5}{Re^2} + \frac{0,192 \cdot 10^7}{Re^3} - \frac{0,862 \cdot 10^8}{Re^4}; \quad (51)$$

для $a = 2,5; 5 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^6$

$$\frac{Eu}{k_1} = 0,119 + \frac{0,498 \cdot 10^4}{Re} - \frac{0,507 \cdot 10^8}{Re^2} + \frac{0,251 \cdot 10^{12}}{Re^3} - \frac{0,463 \cdot 10^{15}}{Re^4}. \quad (52)$$

Геометрический коэффициент k_1 для шахматных пучков изображен на вставке на рис. 10. Видно, что k_1 зависит от отношения поперечного шага к продольному (a/b). Заметим, что при расположении труб по равнобедренному треугольнику ($a/b = 1,55$) $k_1 \approx 1$. Ниже приведены формулы, используемые для других геометрий:

$$\text{для } 0,5 < a/b < 1,2; Re = 10^3$$

$$k_1 = (a/b)^{-0,048}; \quad (53)$$

для $0,45 < a/b < 3,5; Re = 10^4$

$$k_1 = 1,28 - \frac{0,708}{a/b} + \frac{0,55}{(a/b)^2} - \frac{0,113}{(a/b)^3}; \quad (54)$$

для $0,45 < a/b < 3,5; Re = 10^5$ и $0,45 < a/b < 1,6; Re = 10^6$

$$k_1 = 2,016 - 1,675 (a/b) + 0,948 (a/b)^2 - 0,234 (a/b)^3 + 0,021 (a/b)^4; \quad (55)$$

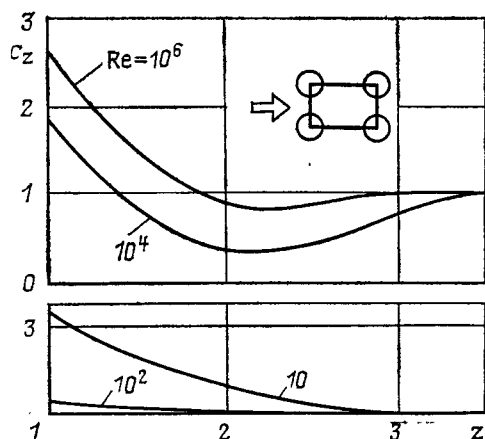


Рис. 11. Зависимость корректирующего множителя от номера ряда в коридорном пучке (2,0,2,0; неообренные трубы)

для $1,25 < a/b < 3,5$; $Re = 10^2$

$$k_1 = 0,93 (a/b)^{0,48}; \quad (56)$$

для $1,25 < a/b < 3,5$; $Re = 10^3$

$$k_1 = 0,951 (a/b)^{0,284}. \quad (57)$$

Корректирующий множитель для расчета перепада давления в пучках с небольшим числом рядов труб. Приведенные выше соотношения для числа Eu относятся к пучкам с большим числом рядов труб в поперечном направлении. Перепад давления в расчете на один ряд для нескольких первых рядов может быть существенно другим. При рассмотрении пучков с небольшим числом рядов этот эффект обязательно нужно учитывать. Используя эквивалентное число Эйлера для одного ряда труб Eu' , $Eu'_z = \Delta p' / \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right)$,

где $\Delta p'$ — перепад давления для ряда z , можно определить коэффициент c_z так, что $Eu'_z = c_z Eu$, где число Eu определяется приведенными выше формулами. Можно ввести также коэффициент C_z , связывающий среднее число Эйлера Eu_z для пучка из z рядов с числом Эйлера, найденным по рекомендованным выше соотношениям. Таким образом,

$$Eu_z = C_z Eu; \quad C_z = \frac{1}{z} \sum_{z=1}^z c_z.$$

Коэффициенты c_z для коридорных и шахматных пучков изображены соответственно на рис. 11 и 12. При расчете c_z можно рекомендовать следующие формулы:

для коридорных пучков при $Re = 10$

$$c_z = \frac{3,879}{z + 0,091} - 0,21z, \quad c_z = 1; \quad z > 3; \quad (58)$$

при $Re = 10^2$

$$c_z = 0,409 + \frac{5,049}{z + 5,006}, \quad c_z = 1, \quad z > 3; \quad (59)$$

при $Re = 10^4$

$$c_z = 7,0 - 7,53z + 2,73z^2 - 0,305z^3, \quad c_z = 1, \quad z > 4; \quad (60)$$

при $Re = 10^6$

$$c_z = 8,16 - 8,314z + 3,303z^2 - 0,52z^3 + 0,025z^4, \quad c_z = 1, \quad z > 6; \quad (61)$$

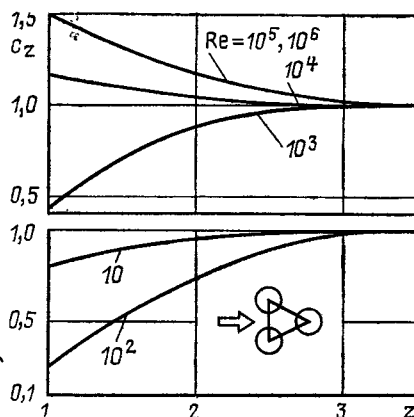


Рис. 12. Зависимость корректирующего множителя от номера ряда для шахматного пучка (2,0,2,0; неообренные трубы)

для шахматных пучков при $Re = 10$

$$c_z = 1,065 - \frac{0,180}{z - 0,29z}, \quad c_z = 1, \quad z \geq 3; \quad (62)$$

при $Re = 10^2$

$$c_z = 1,798 - \frac{3,497}{z + 1,273}, \quad c_z = 1; \quad z \geq 4; \quad (63)$$

при $Re = 10^3$

$$c_z = 1,149 - \frac{0,411}{z - 0,412}, \quad c_z = 1; \quad z \geq 3; \quad (64)$$

при $Re = 10^4$

$$c_z = 0,924 + \frac{0,269}{z + 0,143}, \quad c_z = 1; \quad z \geq 3; \quad (65)$$

при $Re = 10^5$ и 10^6

$$c_z = 0,62 + \frac{1,467}{z - 0,667}, \quad c_z = 1; \quad z \geq 4. \quad (66)$$

Приведенные выше формулы удобно использовать при численных расчетах на ЭВМ. Для простых расчетов предпочтительнее использовать таблицы, такие, как, например, табл. 1, и рис. 13.

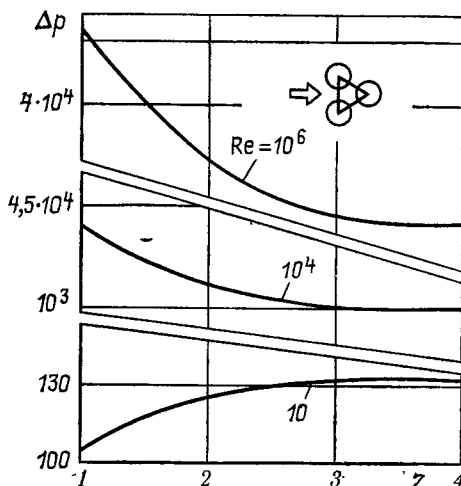


Рис. 13. Зависимость перепада давления от номера ряда в шахматном пучке (2,0,2,0): для $Re = 10$, авиационное масло при $T_b = 25^\circ C$, $\rho_b = 892,4$, $\nu_b = 671,8 \cdot 10^{-6}$; для $Re = 10^4$, трансформаторное масло при $T_b = 50^\circ C$, $\rho_b = 879,9$, $\nu_b = 7,4 \cdot 10^{-6}$; для $Re = 10^6$, вода при $T_b = 50^\circ C$, $\rho_b = 988,1$, $\nu_b = 0,556 \cdot 10^{-6}$

Таблица 1. Корректирующий множитель для учета зависимости от числа рядов z

		Номер ряда									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Коридорные пучки											
$Re = 10$	$c_z =$	3.357	1.640	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	3.357	2.499	1.999	1.749	1.599	1.499	1.428	1.375	1.333	1.299
$Re = 10^2$	$c_z =$	1.250	1.130	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	1.250	1.190	1.127	1.095	1.076	1.063	1.054	1.048	1.042	1.038
$Re = 10^4$	$c_z =$	1.895	0.420	0.745	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	1.895	1.157	1.020	1.015	1.012	1.010	1.009	1.008	1.007	1.006
$Re = 10^6$	$c_z =$	2.658	0.993	0.958	0.953	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	2.658	1.826	1.536	1.392	1.313	1.261	1.224	1.196	1.174	1.157
Шахматные пучки											
$Re = 10$	$c_z =$	0.809	0.959	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	0.809	0.884	0.923	0.942	0.954	0.961	0.967	0.971	0.974	0.977
$Re = 10^2$	$c_z =$	0.260	0.730	0.980	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	0.260	0.495	0.657	0.743	0.794	0.838	0.853	0.871	0.886	0.897
$Re = 10^3$	$c_z =$	0.450	0.890	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	0.450	0.670	0.780	0.835	0.868	0.890	0.906	0.917	0.927	0.934
$Re = 10^4$	$c_z =$	1.159	1.050	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	1.159	1.105	1.070	1.052	1.042	1.035	1.030	1.026	1.023	1.021
$Re = 10^5, 10^6$	$c_z =$	1.500	1.170	1.020	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	$C_z =$	1.500	1.335	1.230	1.173	1.138	1.115	1.099	1.086	1.077	1.069

Влияние переменности свойств жидкости на перепад давления. Поскольку физические свойства жидкости зависят от температуры, то вблизи поверхности холодной или горячей трубы они отличны от свойств в объеме, вдали от поверхности. Число Эйлера при наличии теплообмена Eu_T можно выразить через число Эйлера для изотермического течения Eu следующим образом:

$$Eu_T = Eu (\eta_w / \eta_b)^n, \quad (67)$$

где η_w и η_b — динамические вязкости при температурах стенки и жидкости в объеме. Показатель степени n зависит от числа Рейнольдса и направления теплового потока (рис. 14). При $Re > 10^3$ заметного влияния температурного перепада на число Eu не наблюдается, т. е. $n = 0$. При охлаждении жидкости ($\eta_w > \eta_b$) показатель

$$n = 0,776 \exp(-0,545 Re^{0,250}), \quad (68)$$

а при нагреве ($\eta_w < \eta_b$)

$$n = 0,968 \exp(-1,076 Re^{0,100}). \quad (69)$$

В расчетах перепада давления необходимо также учитывать температурную зависимость физических свойств

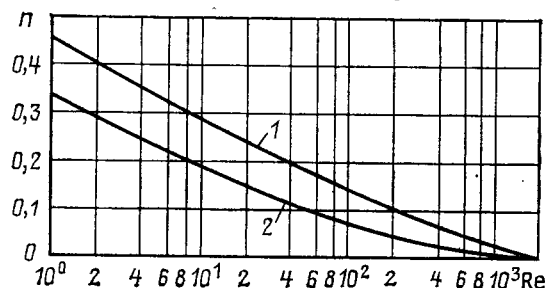


Рис. 14. Зависимость показателя степени для отношения коэффициентов вязкости от Re :

1 — охлаждение; 2 — нагрев

жидкости в объеме вдали от стенок. Для жидких теплоносителей можно использовать среднеарифметическое плотностей во входном и выходном сечениях в тех случаях, когда изменения плотности на протяжении пучка малы. Если же изменения более существенны, то весь пучок можно рассматривать как состоящий из нескольких меньших пучков, каждый из которых содержит лишь небольшое число рядов труб. Плотность внутри элементарных пучков вычисляется в соответствии со средней температурой внутри них. Последующее суммирование позволяет найти полный перепад давления с учетом переменности плотности. Влияние температурной зависимости вязкости в объеме жидкости учитывается аналогичным образом.

При неизотермических течениях газов сквозь пучки труб их плотность и скорость заметно меняются. Ускорение приводит к появлению дополнительного перепада давления, который для канала с постоянным сечением равен

$$\Delta p_a = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = \frac{T_2 - T_1}{T_m} \rho_m u_m^2, \quad (70)$$

где Δp_a — перепад давления, обусловленный ускорением; T_1, ρ_1, u_1 и T_2, ρ_2, u_2 — соответственно температуры, плотности и скорости газа во входном и выходном сечениях; $T_m^1 = 273,15 + T_m$; T_m — средняя температура в пучке; ρ_m — плотность газа при температуре T_m ; u_m — средняя скорость, соответствующая температуре T_m . При нагреве Δp_a положительно, при охлаждении — отрицательно. Кроме перепада давления из-за трения и ускорения существует еще перепад давления $\rho g H \sin \theta$, обусловленный силой тяжести, где ρ — средняя плотность жидкости внутри пучка; θ — угол наклона потока по отношению к горизонтали. Если пучок окружен объемом жидкости с плотностью ρ_0 , внутри него появляется движущий перепад давления

$$\Delta p_d = (\rho_0 - \rho) g H \sin \theta. \quad (71)$$

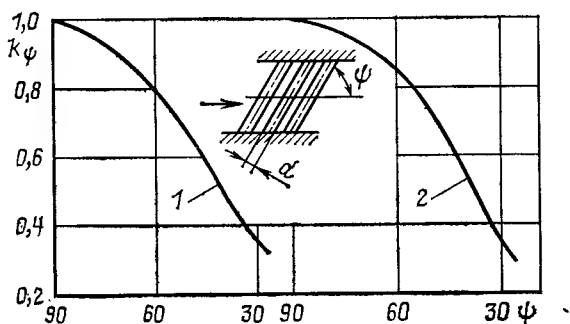


Рис. 15. Зависимость коэффициента наклона от угла наклона в шахматных 1 и коридорных 2 пучках, $1,26 < a < 2$; $b=2,0$

Эту составляющую также нужно учитывать при расчете суммарного перепада давления. Отметим, что в системах с естественной конвективной циркуляцией полный перепад давления равен нулю.

Перепад давления в пучках наклонных труб. Число Эйлера Eu_ψ для пучков труб, наклоненных по отношению к направлению потока на угол ψ (рис. 15), связано с числом Эйлера для аналогичного пучка в поперечном потоке следующим образом:

$$Eu_\psi = k_\psi Eu. \quad (72)$$

Коэффициенты k_ψ для коридорных и шахматных пучков в диапазоне чисел Рейнольдса от 10^4 до $2 \cdot 10^5$ представлены в графическом виде на рис. 15. Аналитическая аппроксимация этих кривых приведена ниже:

$$k_\psi = 1,245 \exp(-0,478\psi^{-1,733}); \quad (73)$$

для шахматных пучков

$$k_\psi = 1,107 \exp(-0,301\psi^{-2,413}). \quad (74)$$

Здесь угол ψ выражен в радианах. Дополнительную информацию по вопросу о влиянии наклона для пучков, состоящих из круглых или эллиптических труб, можно получить из [11].

Описание процедуры расчета перепада давления. Изложенные выше рекомендации позволяют предложить следующую процедуру расчета перепада давления в пучках, состоящих из z рядов труб:

- 1) расчет средних физических свойств жидкости в объеме по среднеарифметическому температур на входе и выходе;
- 2) расчет максимальной скорости u в межтрубном пространстве по формулам (4)–(6);
- 3) расчет числа Рейнольдса $Re = ud/\nu$;
- 4) расчет отношения Eu/k_1 для бесконечного пучка с помощью соотношений (33)–(39) для коридорных пучков или (44)–(54) для шахматных пучков;
- 5) расчет коэффициента k_1 по формулам (40)–(43) (коридорные пучки) или (56)–(57) (шахматные пучки) и числа $Eu = k_1(Eu/k_1)$. Следует использовать логарифмическую интерполяцию коэффициента k_1 по числу Рейнольдса;
- 6) расчет числа Эйлера для z рядов ($Eu_z = C_z Eu$) с учетом интерполяционных значений C_z из табл. 1 по числу Рейнольдса. Коэффициент C_z можно определить также

$$\text{с помощью формул (58)–(66): } C_z = \frac{1}{z} \sum_{z=1}^z c_z;$$

- 7) учет влияния изменения вязкости от значения вблизи стенок трубы до значения в объеме с помощью формулы (67). Показатель степени n находится по формулам (68) (охлаждение) или (69) (нагрев);

8) оценка дополнительного перепада давления, обусловленного крупномасштабными изменениями вязкости жидкости в объеме, ускорением и силой тяжести;

9) учет влияния наклона труб (72). Коэффициент k_ψ рассчитывается по формулам (73) или (74).

С. Перепад давления в пучках оребренных и шероховатых труб. Перепад давления в пучках оребренных труб является функцией их геометрических характеристик (см. рис. 2). Профили скорости и толщины пограничных слоев около труб зависят от перечисленных на этом рисунке параметров и, конечно, от свойств жидкости и скорости ее течения. Структура потока в окрестности первого ряда труб существенно отличается от структуры, реализующейся во внутренней части пучка. Для внутренней части характерна высокая степень турбулентности потока как в межтрубном, так и в межреберном пространствах. В первых двух рядах отрыв пограничного слоя, после которого формируется рециркуляционная зона, наступает при $\theta \approx 90^\circ$ (см. рис. 1). Влияние турбулентности на отрыв пограничного слоя проявляется начиная с третьего или четвертого рядов. Сравнение с трубами первого и второго ряда показывает, что для внутренних труб точка отрыва смещается вниз по потоку, а циркуляционная зона становится меньше по объему и усложняется по структуре. Чем меньше высота ребра h и чем больше расстояние между ребрами, тем больше течение около оребренной трубы напоминает течение около гладкой трубы. И наоборот, чем выше ребра и чем ближе они расположены друг к другу, тем больше течение напоминает течение в щели.

Перепад давления в пучке оребренных труб является функцией скорости течения, геометрии ребра и пучка и физических свойств жидкости

$$\Delta p = f(u, d, s, h, \delta_1, \delta_2, s_1, s_2, z, \eta, \rho). \quad (75)$$

Часто оказывается, что толщина ребра не влияет существенно на перепад давления, поэтому уравнение (75) принимает следующий безразмерный вид:

$$Eu = 2 \frac{\Delta p}{\rho u^2 z} = f\left(Re, \frac{h}{d}, \frac{s}{d}, \frac{s_1}{d}, \frac{s_2}{d}, z\right). \quad (76)$$

Ниже приводятся корреляционные зависимости [12], рекомендуемые для практического использования. В литературе можно встретить и другие корреляции (например, [13]), однако их обсуждение выходит за рамки данного раздела.

Корреляционные соотношения для шахматных пучков труб с кольцевыми ребрами. Ниже для этого случая предложены следующие корреляционные соотношения [12]:

$$\text{для } 2,2 \cdot 10^3 < Re_d^* < 1,8 \cdot 10^5$$

$$Eu = 2 \frac{\Delta p}{\rho u^2 z} = 5,4 \left(\frac{d^*}{d_e}\right)^{0,3} Re_d^{0,25} C_z; \quad (77)$$

$$\text{для } Re_d^* > 1,8 \cdot 10^5$$

$$Eu = 0,26 \left(\frac{d^*}{d_e}\right)^{0,3} C_z. \quad (78)$$

Здесь d^* — относительный диаметр, причем

$$d^* = \frac{d A_{\text{tube}}}{A_{\text{tot}}} + \frac{A_{\text{fin}}}{A_{\text{tot}}} \sqrt{0,785(D^2 - d^2)}, \quad (79)$$

где d — диаметр основной трубы; D — диаметр трубы вместе с ребрами (см. рис. 2); A_{tube} — площадь поверхности неоребреной трубы на единицу длины; A_{fin} — площадь поверхности ребер на единицу длины; A_{tot} — площадь полной поверхности на единицу длины. Средний гидравлический диаметр

$$d_e = \frac{4 \text{ flow area}}{\text{flow perimeter}} = \frac{2[s(s_1 - d) - 2\delta h']}{2h + s} \quad (80)$$

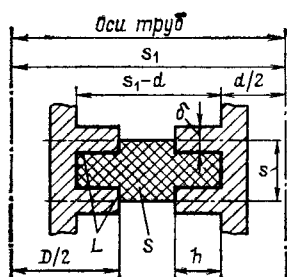


Рис. 16. К определению эквивалентного диаметра

(определение параметров s , s_1 , h и δ на рис. 2 и 16). Число Рейнольдса $Re_{d^*} = ud^*/\nu$, где u — максимальная скорость в межтрубном пространстве, рассчитанная для пучка гладких труб диаметром d с межтрубными расстояниями s_1 и s_2 по формулам (4) или (5).

В уравнениях (77) и (78) корректирующий множитель C_z учитывает число рядов труб в пучке: $C_z = \frac{1}{z} \sum_{z=1}^z c_z$, где

c_z — множитель, определяющий отличие перепада давления для ряда с номером z в конечном пучке от отнесенного

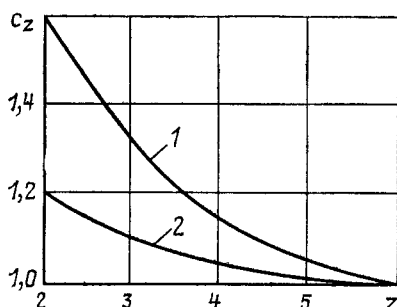


Рис. 17. Зависимость корректирующего множителя от номера ряда для оребренных труб в коридорных 1 и шахматных 2 пучках

к одному ряду перепада давления в бесконечном пучке. Зависимость c_z от z изображена на рис. 17. Аналитическое выражение для c_z имеет вид

$$c_z = 0,934 + \frac{0,355}{z - 0,667}, \quad c_z = 1; \quad z \geq 6. \quad (81)$$

Соответствующие значения C_z и c_z приведены также в табл. 2.

Таблица 2. Корректирующий множитель для учета зависимости от номера ряда в шахматных пучках труб с кольцевыми ребрами

z	c_z	C_z	z	c_z	C_z
1	2,000	2,000	6	1,000	1,224
2	1,200	1,600	7	1,000	1,192
3	1,086	1,429	8	1,000	1,168
4	1,040	1,332	9	1,000	1,149
5	1,016	1,268	10	1,000	1,134

Корреляционные соотношения для коридорных пучков труб с кольцевыми и квадратными ребрами. Для коридорных пучков труб с кольцевыми и квадратными ребрами в [12] предложено следующее корреляционное

соотношение:

$$Eu = 0,52 \left(\frac{d^*}{d_e} \right)^{0,3} \left(\frac{b-1}{a-1} \right)^{0,68} Re_{d^*}^{-0,08} C_z, \quad (82)$$

где диаметр d_e определен формулой (80); $a = s_1/d$; $b = s_2/d$ (рис. 2); $Re_{d^*} = ud^*/\nu$;

$$d^* = \frac{A_{tube} d}{A_{tot}} + \frac{A_{fin}}{A_{tot}} \sqrt{\frac{A'_{fin}}{2n_{fin}}}. \quad (83)$$

Здесь A_{tube} — площадь поверхности неоребренной трубы на единицу длины (равна πd); A_{fin} — площадь поверхности ребер на единицу длины; A'_{fin} — площадь оребренной поверхности; n_{fin} — число ребер на единицу длины. Формула (82) применима в следующем диапазоне параметров:

$$4 \cdot 10^3 < Re_{d^*} < 1,6 \cdot 10^5; \quad 0,85 < \frac{d^*}{d_e} < 11,5; \quad 0,5 < \frac{b-1}{a-1} < 2.$$

При вычислении $C = \frac{1}{z} \sum_{z=1}^z c_z$ используется следующее

выражение для c_z :

$$c_z = 0,738 + \frac{1,509}{z - 0,250}, \quad c_z = 1; \quad z > 6. \quad (84)$$

В уравнении (82) коэффициент C_z представляет собой корректирующий множитель для перепада давления для ряда труб с номером z . В табл. 3 представлены значения C_z и c_z , рассчитанные по формуле (84).

Корреляционные соотношения для шахматных пучков труб со спиральными ребрами. Для многорядных ($z > 6$) шахматных пучков труб со спиральными ребрами рекомендуются следующие соотношения:

$$Eu = \frac{13,10 (1 - s/d)^{1,8} Re^{-0,25}}{a^{0,55} b^{0,5} (1 - h/d)^{1,4}}; \quad (85)$$

для $10^5 < Re < 10^6$

$$Eu = \frac{0,74 (1 - s/d)^{1,8}}{a^{0,55} b^{0,5} (1 - h/d)^{1,4}}, \quad (86)$$

где $Re = ud/\nu$; все прочие параметры определены на рис. 2. Формулы (85) и (86) применимы только в следующем диапазоне параметров: $2,2 < a < 4,13$; $1,27 < b < 2,14$; $0,12 < s/d < 0,28$; $0,12 < h/d < 0,59$; угол спирали $2-4^\circ$; $\delta_2/\delta_1 \approx 2$.

Перепад давления в пучках труб с шероховатой поверхностью. Шероховатость поверхности трубы может интенсифицировать перенос импульса вблизи стенки. В турбулентных течениях шероховатость трубы увеличивает сопротивление только в том случае, когда высота элементов шероховатости больше толщины вязкого подслоя, т. е. когда безразмерная высота элементов шероховатости $k^+ > 5$. Здесь $k^+ = uk/\nu$, где k — истинная высота элементов шероховатости; $u^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — динамическая скорость; ν — ки-

Таблица 3. Корректирующий множитель для учета зависимости от номера ряда в коридорных пучках труб с кольцевыми или квадратными ребрами

z	c_z	C_z	z	c_z	C_z
1	2,750	2,750	6	1,000	1,472
2	1,600	2,176	7	1,000	1,405
3	1,287	1,879	8	1,000	1,354
4	1,140	1,694	9	1,000	1,315
5	1,056	1,567	10	1,000	1,283

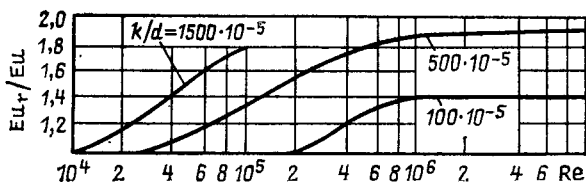


Рис. 18. Зависимость отношения Eu_r/Eu от Re для различных значений параметра шероховатости (шахматный пучок, $2,0 \cdot 2,0$, внутренний ряд)

нematicкая вязкость. При $k^+ > 70$ влияние шероховатости становится определяющим, а касательные напряжения на стенке определяются только сопротивлением формы отдельных элементов шероховатости. Влияние шероховатости на число Эйлера для шахматных пучков иллюстрируется на рис. 18, где Eu_r — число Эйлера для шероховатых труб; Eu — для гладких. Для каждого значения относительной шероховатости k/d влияние шероховатости начинает сказываться лишь с некоторого определенного числа Рейнольдса (аналогично течению в трубах). Приведенные на рис. 18 кривые описываются следующими уравнениями:

$$Eu_r/Eu = 2,013 \exp(-189,29 Re^{-0,458}); \quad (87)$$

$$\text{при } k/d = 5 \cdot 10^{-3}; \quad 2 \cdot 10^4 < Re < 10^6$$

$$Eu_r/Eu = 2,185 \exp(-90,477 Re^{-0,458}); \quad (88)$$

$$\text{при } k/d = 15 \cdot 10^{-3}; \quad 10^4 < Re < 10^6$$

$$Eu_r/Eu = 1,115 \cdot 10^{-4} \exp(-7,12 Re^{0,0286}). \quad (89)$$

Для коридорных пучков влияние шероховатости несколько меньше, чем для шахматных.

Д. Гидродинамические параметры отрывных потоков в пучках труб. При поперечном обтекании трубы потоком жидкости с ее подветренной стороны происходит срыв вихрей. Частота срыва f характеризуется числом Струхала $Sr = fd/u$, где d — диаметр трубы; u — скорость жидкости. В пучках труб [где u обычно определяется уравнениями (4) и (5)] картина срыва вихрей становится весьма сложной и для некоторых конфигураций число Sr оказывается значительно большим, чем в случае одиночной трубы. Анализ результатов измерений числа Sr в коридорных пучках в широком диапазоне изменения числа Re и параметров a и b показывает, что обычно число Re на число Sr практически не влияет. Однако результаты, полученные для шахматных пучков с относительным продольным шагом $b=2,5$, показывают, что с ростом числа Re число Sr уменьшается на 50%.

На рис. 19 и 20 приведены данные результатов исследования симметричных коридорных ($a=b$) и шахматных ($s_1=s_2$) пучков в диапазоне изменения параметра a от 1,25 до 3,5. Видно, что по мере возрастания a (или b) число Sr уменьшается, приближаясь при больших a к постоянному значению. Ниже приведены соотношения, описывающие кривые на рис. 19 и 20.

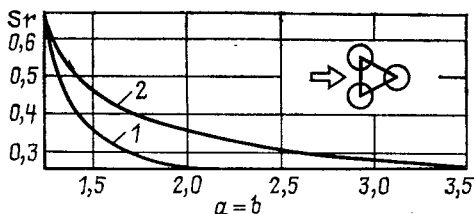


Рис. 19. Зависимость числа Струхала от a для симметричных шахматных пучков в первом 1 и внутреннем 2 рядах

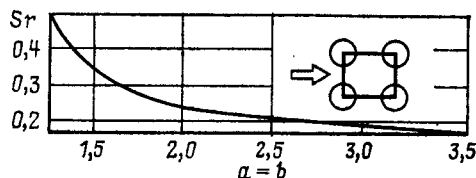


Рис. 20. Зависимость числа Струхала от a для симметричных коридорных пучков

Для первого ряда симметричных ($s_1=s_2$) шахматных пучков при $1,25 < a < 2,0$ и $Re > 1,5 \cdot 10^3$

$$Sr = 0,195 + \frac{0,0576}{a - 1,116}; \quad (90)$$

для внутренних рядов симметричных ($s_1=s_2$) шахматных пучков при $1,25 < a < 2,0$ и $Re > 1,5 \cdot 10^3$

$$Sr = 0,21 + \frac{0,154}{a - 0,913}; \quad (91)$$

для симметричных ($a=b$) коридорных пучков при $1,25 < a < 3,5$ для первого и для внутренних рядов

$$Sr = 0,138 + \frac{0,0939}{a - 0,987}. \quad (92)$$

При любом фиксированном a сильное влияние на число Sr оказывает продольный шаг. С уменьшением b число Sr резко возрастает.

Разность давлений на лобовой и тыльной частях поверхности трубы приводит к появлению постоянной силы, направленной вниз по потоку. Срыв вихрей обуславливает появление дополнительной флуктуирующей силы, действующей попеременно в продольном и поперечном направлениях, что вызывает вибрацию трубы. Амплитуду флуктуирующей силы, действующей на отрезок трубы длиной L , в направлении, перпендикулярном направлению потока, можно выразить через коэффициент подъемной силы c_L

$$c_L = 2F_y / (\rho u^2 A_p). \quad (93)$$

где A_p — площадь поперечного сечения трубы плоскостью, параллельной потоку ($A_p = Ld$). Коэффициент c_L для коридорных пучков, показанный на рис. 21, получен в [15] в диапазоне чисел Рейнольдса от $1,36 \cdot 10^3$ до $2,66 \cdot 10^6$. Локальная турбулентность также генерирует флуктуации давления в широком спектре частот, причем на частотах, близких к собственным частотам трубы f_n , колебания давления усиливаются. Объем жидкости в межтрубном пространстве также может колебаться со своей собственной акустической частотой f_a в поперечном направлении.

Частоту срыва вихрей, найденную с помощью числа Sr , следует сопоставлять с собственной частотой трубы f_n и с акустической частотой f_a . Подбирая параметры системы таким образом, чтобы эти частоты не совпадали, можно избежать возбуждения резонансных колебаний. Было уста-

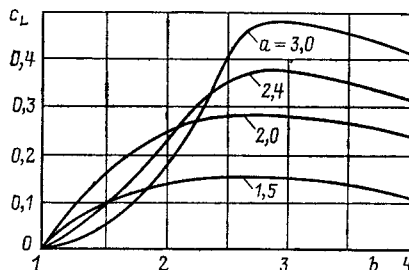


Рис. 21. Зависимость коэффициента подъемной силы от продольного шага (коридорные пучки) при различных значениях поперечного шага

новлено, что резонансные вибрации возможны при $1/3 < f/f_n < 3$ и неизбежны при $0,75 < f/f_n < 1,25$. Акустический резонанс возможен при $1/2 < f/f_n < 2$ и неизбежен при $0,75 < f/f_n < 1,25$. Резонансные колебания приводят к возникновению сильного шума и дополнительным нагрузкам на трубы и оболочку. Более детальную информацию по этому вопросу можно найти в [16] и в разд. 4.6.

2.2.5. Неподвижные слои

П. Дж. Хегс

Структурные свойства неподвижных слоев были детально проанализированы в [1]. Существуют два типа неподвижных слоев: с регулярной и хаотической (случайной) упаковкой. Регулярная упаковка обеспечивает возможность надежного контроля площади поверхности и суммарной пористости слоя, однако его сборка является дорогостоящей. Тем не менее регулярная упаковка применяется в тепловых регенераторах, в кладке насадки регенератора в высокотемпературных кауперах, используемых в сталелитейной промышленности и при производстве стекла, а также во вращающихся регенераторах Лjungstroma, используемых на электростанциях. Во всех этих случаях перепад давления в неподвижном слое должен быть мал.

Слои со случайной упаковкой широко применяются в различных технологических процессах: при адсорбции, катализе, сжигании, фильтрации, сепарировании и во многих других случаях, когда требуется осуществить контакт жидкой и твердой фаз. Такие слои образуются при произвольном способе заполнения объема частицами, и их осредненные свойства сильно зависят от технологии изготовления слоя [2]. Только слои бесконечного размера можно рассматривать как слои с действительно случайной упаковкой. Тем не менее если диаметр контейнера D и его длина L более чем в 10 раз превышают размер заполняющих его частиц, то такой слой с хорошей степенью точности можно считать бесконечным [3]. Слои со случайной упаковкой просты и дешевы в изготовлении.

Неподвижные слои обычно характеризуются удельной площадью внутренней поверхности слоя S_B и пористостью ε . Величина ε определяется как отношение свободного объема в слое к его суммарному объему

$$\varepsilon = \frac{\text{Объем слоя} - \text{объем, занятый частицами}}{\text{Объем слоя}} \quad (1)$$

Удельная площадь внутренней поверхности слоя непосредственно зависит от значения ε . Удельная площадь поверхности частицы S определяется как отношение площади ее поверхности к объему. Для сферы

$$S = 6/d. \quad (2)$$

Таким образом, удельная площадь поверхности слоя меньше, чем удельная площадь поверхности образующих его частиц,

$$S_B = S(1 - \varepsilon). \quad (3)$$

Для характеристики несферических частиц используется характерный диаметр d , определяемый как отношение коэффициента k к удельной площади поверхности частицы. Свойства слоев, состоящих из частиц с некоторыми регулярными формами, представлены в табл. 1 [4, 5].

Даже в случае регулярной формы частиц удельная площадь и пористость слоя могут меняться в широких пределах. Пористость слоя, состоящего из частиц какой-нибудь определенной формы, зависит от способа его изготовления. Приведенные в табл. 1 данные относятся к слоям, которые в процессе изготовления непрерывно уплотнялись.

Таблица 1. Свойства слоев, состоящих из частиц некоторой правильной формы

Номер упаковки	Описание	S , м ² /м ³	ε	S_B , м ² /м ³	d , мм
С ф е р ы					
1	диаметром 3 мм	2000	0,36	1280	3,0
2	» 6 мм	1000	0,37	630	6,0
3	» 9 мм	500	0,38	310	9,0
Ц и л и н д р ы					
(диаметр × длина)					
4	4,76 × 4,76 мм	1261	0,30	882	4,76
5	6,35 × 6,35 мм	945	0,31	652	6,35
6	6,35 × 12,7 мм	787	0,34	520	7,62
П л а с т и н ы					
толщиной 3,175 мм					
7	промежуток 1,32 мм	576	0,31	398	10,41
8	» 2,64 мм	576	0,46	311	10,41
9	» 5,94 мм	576	0,63	213	10,41
К о л ь ц а Л е с с и н г а					
(диаметр × длина)					
10	6,35 × 6,35 мм, сталь	4444	0,77	1022	1,35
11	6,35 × 6,35 мм, фарфор	2490	0,62	946	2,41
12	9,35 × 9,35 мм, фарфор	1432	0,56	630	4,19

Во всех случаях применения неподвижных слоев перепад давления является одним из основных факторов, определяющих стоимость их эксплуатации. На перепад давления в слое влияют скорость жидкости, ее плотность и вязкость, размер, форма и ориентация частиц, пористость слоя, шероховатость поверхности и, возможно, наличие стенок. Для интерпретации экспериментальных данных развиты два основных подхода:

1. Предполагается, что слой состоит из множества извилистых каналов переменного сечения (канальная модель).

2. Рассматривается слой из множества помещенных в движущийся поток частиц, на каждой из которых формируется свой собственный пограничный слой.

Наиболее широко используется первый подход, хотя вторая модель более соответствует физической ситуации. Хорошо известным уравнением, полученным для модели канала, является уравнение Эргуна [6]. Оно описывает влияние на перепад давления всех эффектов, за исключением влияния шероховатости и стенок, и имеет следующий вид:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{150\eta\mu(1-\varepsilon)^2}{d^2\varepsilon^3} + \frac{1,75\rho u^2(1-\varepsilon)}{d\varepsilon^3}. \quad (4)$$

Перепад давления представляется в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое описывает влияние шероховатости трения, второе — сопротивление формы. Значения постоянных 150 и 1,75 получены при обработке экспериментальных данных [7—9]. В качестве частиц в этих исследованиях использовались шарики, цилиндры, таблетки, мраморная крошка и сортированный кокс. Поэтому в (4) использовался характерный диаметр частиц d .

Уравнение (4) нетрудно записать в виде двух уравнений, каждое из которых устанавливает линейную связь между коэффициентом трения и числом Рейнольдса частицы ($Re = \rho u d / \eta$),

$$f_v = 150 + 1,75 \frac{Re}{1 - \varepsilon}; \quad (5)$$

$$f_k = 150 \frac{1 - \varepsilon}{Re} + 1,75, \quad (6)$$

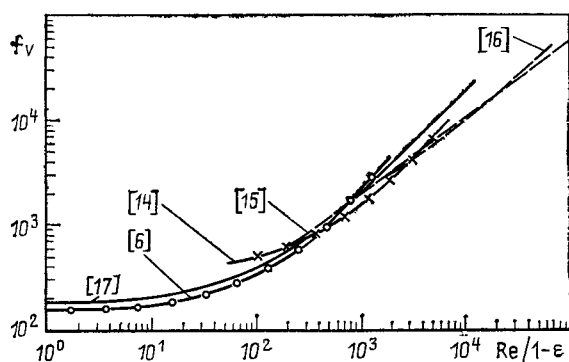


Рис. 1. Корреляционная зависимость для слоя засыпки из сферических частиц

где $f_v = \Delta P d^3 / [L \eta u (1-\varepsilon)^2]$ — отношение перепада давления к слагаемому, пропорциональному вязкой энергии; $f_k = \Delta P d^3 / [L \rho u^2 (1-\varepsilon)]$ — отношение перепада давления к слагаемому, пропорциональному кинетической энергии. Величина f_k аналогична коэффициенту трения Фаннинга, который используется обычно для описания течения в трубах.

При малых числах Рейнольдса уравнение (4) сводится к уравнению Блейка [10] — Кармана [11] — Козени [12] для ламинарного течения, а при больших — к уравнению Барке — Пламмера [8] для турбулентного течения.

Универсальность постоянных 150 и 1,75 в уравнении Эргуна вызывает, однако, сомнение. В [13] проведены измерения перепада давления в неподвижном слое, заполненном цилиндрами диаметром 0,617 и высотой 0,488 мм, чему соответствует эквивалентный диаметр $d=0,566$ мм. Полученные данные почти на 50% превышают значения, вычисленные по уравнению Эргуна. Авторы [14] также обнаружили, что уравнение Эргуна не позволяет корректно рассчитать перепад давления в слоях со случайной упаковкой, состоящих из сфер, цилиндров, колец и пластин. Тем не менее выражения типа предложенного Эргуном позволяют довольно хорошо описывать экспериментальные данные, если только для каждого типа частиц использовать свою пару констант.

В [15] показано, что константы в уравнении Эргуна в действительности являются функциями числа Рейнольдса, а вовсе не истинными константами, как это обычно считается. На рис. 1 представлены данные разных авторов о зависимости f_v от $Re/(1-\varepsilon)$ для слоя со случайной упаковкой из сфер

$$f_v = 150 + 1,75 \frac{Re}{1-\varepsilon}, \quad 1 < \frac{Re}{1-\varepsilon} < 2000 \quad [6]; \quad (7)$$

$$f_v = 0,396 \frac{Re/(1-\varepsilon)}{[Re/(1-\varepsilon)]^{0,05} - 1,20}, \quad 2000 < \frac{Re}{1-\varepsilon} < 65000 \quad [16]; \quad (8)$$

$$f_v = 368 + 1,24 \frac{Re}{1-\varepsilon}, \quad 60 < \frac{Re}{1-\varepsilon} < 7000 \quad [14]; \quad (9)$$

$$f_v = 6,8 \left(\frac{Re}{1-\varepsilon} \right)^{0,8}, \quad 300 < \frac{Re}{1-\varepsilon} < 6500 \quad [15]; \quad (10)$$

$$f_v = 180 + 1,8 \frac{Re}{1-\varepsilon}, \quad 0,1 < \frac{Re}{1-\varepsilon} < 10\,000 \quad [17]. \quad (11)$$

Все эти аналитические выражения базируются на экспериментальных данных, полученных в ограниченном интервале значений числа Рейнольдса. Из рис. 1 видно, насколько можно доверять экстраполяции этих выражений за пределы данного интервала. Формула (11) охватывает наиболее широкий диапазон чисел Рейнольдса и почти всюду пред-

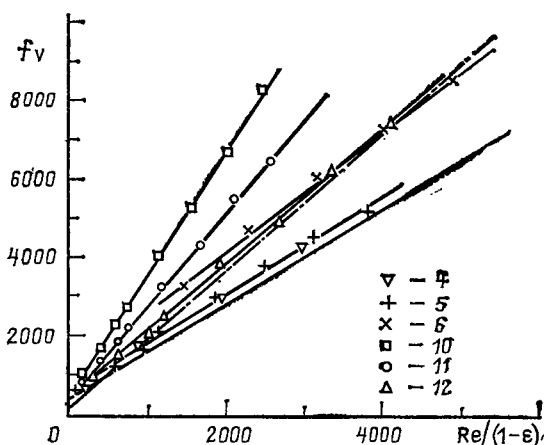


Рис. 2. Перепад давления в слое из несферических частиц. Сплошные кривые взяты из [14], штрихпунктирная — из [17]; тип упаковки слоя, который использовался в эксперименте, указан на рисунке

сказывает больший перепад давления, чем остальные. Эту формулу и следует использовать в практических расчетах перепада давления в неподвижном слое со случайной упаковкой сферических частицами. Все прочие формулы, хотя они и описывают эксперимент довольно хорошо, нельзя экстраполировать за пределы того диапазона чисел Рейнольдса, в котором они получены.

Приведенные выше формулы позволяют рассчитать перепад давления в слоях со случайной упаковкой из сферических частиц. Однако их применение для слоев из частиц иной формы может привести к серьезным погрешностям. На рис. 2 показаны экспериментальные данные и аппроксимирующие их прямые для цилиндрических частиц и колец Лессинга, параметры которых приведены в табл. 1. Здесь же указаны корреляционные зависимости (9) относящиеся к слою из сферических частиц и (11). Ни одна из этих зависимостей не позволяет корректно описать перепад давления в слое из несферических частиц. В табл. 2 приведены значения констант в формуле (5), полученные при обработке экспериментальных данных методом наименьших квадратов, и указан соответствующий диапазон чисел Рейнольдса. Эти слои были изготовлены таким же способом, как и слои из сферических частиц, исследовавшиеся в [14], однако во всем рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса коэффициент вязкого трения для них оказался выше.

На рис. 3 показана зависимость f_v от $Re/(1-\varepsilon)$ для слоя из пластин толщиной 3,175 мм, расположенных на расстоянии 1,32 мм (вариант 7 в табл. 1). Шесть серий данных относятся к пластинам разной длины: 6,35; 12,7; 25,4; 101,6 и 203,2 мм. Очевидно, что данные для каждой из пластин описываются уравнением типа (5) с помощью своей пары констант, которые, однако, могут варьировать-

Таблица 2. Корреляции для перепада давления в слое, состоящем из цилиндрических частиц и колец Лессинга

Номер упаковки	m	c	Диапазон изменения $Re/(1-\varepsilon)$	Номер упаковки	m	c	Диапазон изменения $Re/(1-\varepsilon)$
4	1,25	598	200—3000	10	3,15	410	200—2500
5	1,28	458	600—3900	11	2,37	356	200—2600
6	1,54	1083	1500—4900	12	1,72	452	300—4100

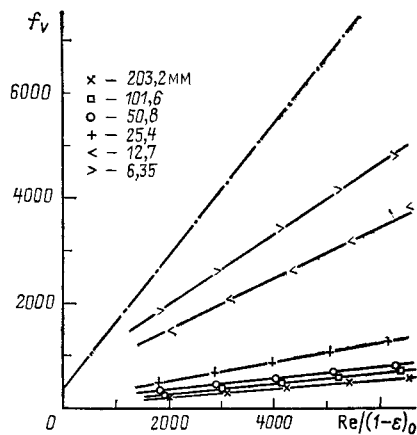


Рис. 3. Перепад давления в слое из параллельных пластин различной длины, штрих-пунктирная кривая — данные [14]

ся в широких пределах. Во всех случаях значение коэффициента вязкого трения намного меньше, чем предсказывает формула (11). Константы в уравнении Эргуна, позволяющие описать приведенные на рис. 3 данные, а также данные для вариантов 8 и 9 из табл. 1 можно найти в [14]. Многочисленные результаты, относящиеся к разным способам упаковки, таким, как плетеные сетки или матрицы компактных теплообменников, содержатся в [18].

В том случае, когда отношение диаметра колонны к характерному размеру заполняющих ее частиц меньше 7, влияние стенок можно оценить в соответствии с рекомендациями [19] с помощью специального корректирующего множителя M , входящего в уравнение Эргуна. Этот множитель, позволяющий учесть наличие стенок колонны при расчете гидравлического радиуса в рамках модели канала,

$$M = 1 + \frac{4d}{6D(1-\varepsilon)}, \quad (12)$$

где D — диаметр колонны. Модифицированное уравнение Эргуна имеет следующий вид:

$$f_v = 150M^2 + 1,75M \frac{Re}{1-\varepsilon}. \quad (13)$$

Константы в этом уравнении могут изменяться в зависимости от формы образующих рассматриваемый слой частиц.

Для учета шероховатости частиц подобной модификации не существует, хотя в [17] для описания данных, полученных в слое шероховатых частиц, и использовалось уравнение (11), в котором значение постоянной 180 сохранилось, а постоянная 1,8 была заменена на 1,4. Это свидетельствует о том, что шероховатость изменяет только инерционный вклад в суммарный перепад давления.

2.2.6. Псевдооживленные слои

О. Молерус

А. Общие характеристики. Типы псевдооживления. В псевдооживленном слое, состоящем из мелкодисперсных частиц, восходящий поток жидкости или газа в точности уравновешивает силу тяжести частиц, которые поэтому уже не находятся в постоянном контакте друг с другом. Таким образом, достигается подвижность частиц, вследствие чего и поведение всего слоя в целом напоминает поведение жидкости.

При малых скоростях течения жидкость просачивается сквозь поры слоя, не изменяя его структуры (рис. 1, а). Рост скорости и, следовательно, действующей на частицы

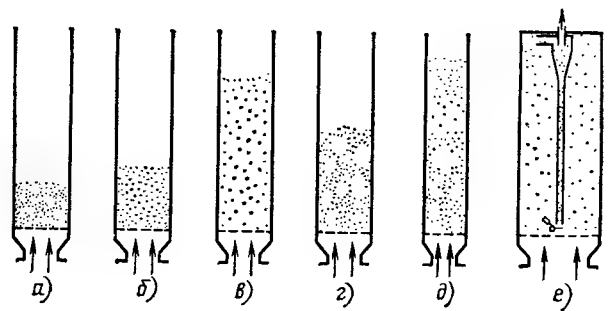


Рис. 1. Типы псевдооживления

силы приводят к тому, что некоторые из них начинают двигаться внутри малой части объема, в то время как большинство остальных частиц неподвижны и находятся в соприкосновении, как в твердом теле. Если массовый расход жидкости увеличить еще больше, то постоянный контакт между частицами нарушится и возникнет такое состояние, когда частицы будут находиться во взвешенном состоянии. При этом перепад давления между двумя плоскими горизонтальными сечениями слоя в точности равен массе заключенных между этими сечениями частиц и жидкости в расчете на единицу площади поверхности. Наступает псевдооживление слоя (рис. 1, б), который теперь можно характеризовать двумя параметрами: высотой h_{mf} и пористостью ε_{mf} .

По мере дальнейшего увеличения массового расхода можно наблюдать два различных типа псевдооживления. Слой твердых частиц в потоке жидкости будет продолжать в основном расширяться, причем распределение частиц по объему остается почти равномерным (рис. 1, в). Этот тип псевдооживления называется частичным.

В случае твердых частиц в газовом потоке повышение массового расхода газа за пределы значения, необходимого для наступления псевдооживления, приводит к тому, что в объеме появляются газовые пузыри — области, практически свободные от частиц (рис. 1, г). Такой тип псевдооживления называется агрегатным псевдооживлением. В обоих этих случаях как высота, так и пористость псевдооживленного слоя превышают значения h_{mf} и ε_{mf} соответственно.

Поднимающиеся вверх пузыри газа быстро увеличиваются в объеме в результате коалесценции, если только не происходит объединение перегородок, что способствует расщеплению пузырей. В достаточно узкой и высокой колонне диаметр пузырей может быть близок к диаметру колонны; при этом газ заполняет все поперечное сечение. В таком случае говорят, что псевдооживленный слой становится сплошным (рис. 1, д).

До тех пор, пока более или менее отчетливо наблюдается верхняя граница слоя, превалирует псевдооживление плотной фазы. Если направленная вверх приведенная скорость псевдооживляющей жидкости приближается к скорости свободного падения частиц, то содержимое слоя начинает выноситься вверх.

В псевдооживленных системах из твердых частиц и газа при большой пористости образование пузырей не происходит. Отсутствует также отчетливая верхняя граница слоя. В этом случае существует возможность функционирования циркулирующих псевдооживленных слоев при приведенной скорости, значительно превышающей скорость свободного падения отдельных частиц (рис. 1, е).

Перепад давления и минимальное псевдооживление. Перепад давления в псевдооживленном слое высотой h уравновешивается суммарной массой частиц и находящейся внутри слоя несущей фазы. Таким образом,

$$\frac{\Delta p}{h} = [(1-\varepsilon)\rho_s + \varepsilon\rho_l]g. \quad (1)$$

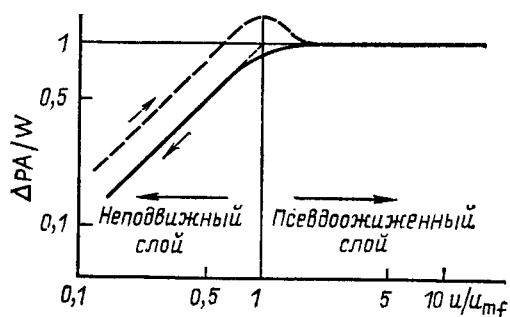


Рис. 2. Зависимость перепада давления от скорости

Если несущей фазой оказывается газ, то суммарная масса примерно равна массе частиц.

Безразмерный перепад давления в слое с хорошим псевдоожжением, состоящем из частиц примерно одинакового размера с малым сцеплением, связан с приведенной скоростью (отнесенной к минимальной скорости, необходимой для псевдоожжения, u_{mf}). Соответствующая зависимость приведена на рис. 2.

Однако в случае мелкодисперсных частиц их собственная масса приводит к увеличению сил сцепления и дополнительному упрочнению неподвижного слоя. Поэтому зависимость перепада давления от скорости при течении сквозь такой слой проходит через максимум, прежде чем выходит на равновесное значение, соответствующее состоянию псевдоожжения. Избыток перепада давления необходим для того, чтобы разрушить монолитную структуру неподвижного слоя.

Если теперь уменьшать скорость потока, то кривая, описывающая зависимость перепада давления в области неподвижного слоя от скорости, будет целиком находиться ниже первоначальной вследствие того, что объем пустот во вновь сформировавшемся неподвижном слое окажется выше, чем в первоначальном.

Переход от горизонтального участка в зависимости перепада давления от скорости, соответствующего псевдоожженному слою, к наклонному для неподвижного слоя обычно происходит плавно. Минимально необходимая для псевдоожжения скорость определяется в этом случае как точка пересечения экстраполированных прямых, описывающих перепад давления в псевдоожженном и неподвижном слоях (рис. 2).

Расчет минимальной скорости псевдоожжения. В технических приложениях используемые для псевдоожжения частицы имеют различную форму. Их распределение по размерам также может варьироваться в довольно широких пределах.

При минимальном псевдоожжении слой находится в состоянии наиболее свободной упаковки. Пористость слоя возрастает по мере уменьшения среднего размера частиц и коэффициента формы Φ_s , однако общей формулы, описывающей эту зависимость, не существует.

Для частиц с известной плотностью распределения по массе $q_3(d_p)$ средний диаметр можно определить следующим образом:

$$\bar{d}_p = \frac{1}{\int_{d_{p, \min}}^{d_{p, \max}} d_p^{-1} q_3(d_p) d(d_p)} \quad (2)$$

Состояние минимального псевдоожжения можно рассматривать как предельное состояние неподвижного слоя. Поэтому, приравняв перепад давления, найденный с помощью уравнения Эргуна [1] (для неподвижного слоя) и

уравнения (1) (для псевдоожженного слоя), находим

$$Re_{mf} = 42,9 \frac{1 - \epsilon_{mf}}{\Phi_s} \times \left[\sqrt{1 + 3,1 \cdot 10^{-4} \frac{\Phi_s^3 \epsilon_{mf}^3}{(1 - \epsilon_{mf})^2} Ar - 1} \right] \quad (3)$$

Это уравнение позволяет рассчитать минимально необходимую для псевдоожжения приведенную скорость.

Диаграмма состояния и безразмерные параметры. Для псевдоожженных сферических частиц сила сопротивления и выталкивающая сила уравновешиваются массой частиц

$$C_D(Re, \epsilon) \frac{\pi d_p^2 \rho_F}{4} \frac{(u^2)}{2} + \frac{\pi d_p^3 \rho_F g}{6} = \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_s g \quad (4)$$

Коэффициент сопротивления C_D для частиц, находящихся в псевдоожженном слое, зависит от числа Рейнольдса $Re = u d_p / \nu$ и пористости ϵ .

Преобразуя уравнение (4), находим

$$\frac{3}{4} \frac{u^3}{d_p g} \frac{\rho_F}{\rho_F - \rho_s} = \frac{\epsilon^2}{C_D(Re, \epsilon)}$$

или в другой форме

$$\frac{3}{4} Fr \frac{\rho_F}{\rho_s - \rho_F} = f(Re, \epsilon) \quad (5)$$

По результатам измерений с учетом уравнения (5) в [2] построена диаграмма состояний, описывающая псевдоожжение слоя одинаковых сферических частиц (рис. 3). Эта диаграмма не является однозначной, так как штриховые кривые соответствуют частичному псевдоожжению, а сплошные — агрегатному и описывают простейший случай частичного псевдоожжения; кривые построены на основе вполне надежных количественных данных. Для каждой конкретной системы твердых частиц и жидкости расширение слоя происходит вдоль линии $Ar = \text{const}$, начиная

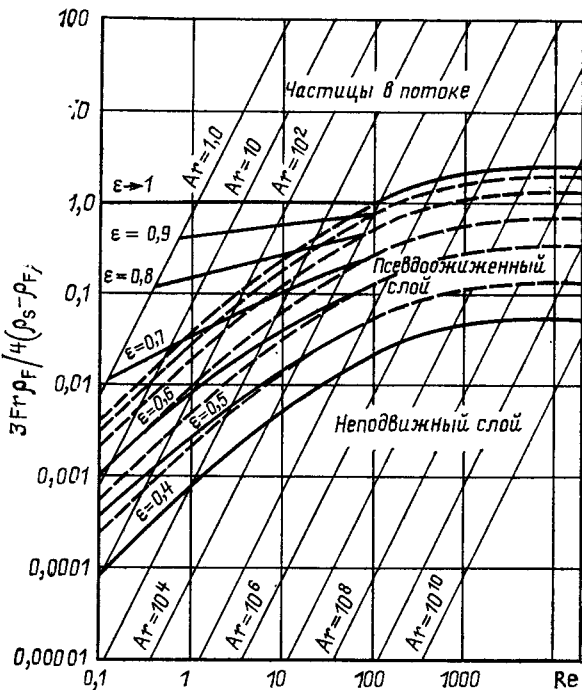


Рис. 3. Диаграмма состояний слоя из одинаковых сферических частиц

со значения $\varepsilon \approx 0,4$, что соответствует минимальному псевдоожигению, вплоть до $\varepsilon = 1$ для отдельных частиц в потоке.

В более сложном случае агрегатного псевдоожигения состояние слоя существенно зависит от его диаметра и высоты, а также от распределительного устройства. В связи с этим не следует переоценивать точность численных значений ε , определяемых сплошными линиями на рис. 2. Тем не менее эта диаграмма позволяет отчетливо увидеть ряд важных различий между частичным и агрегатным псевдоожигением. Линии $\varepsilon = \text{const}$ для агрегатного псевдоожигения лежат выше соответствующих линий для частичного псевдоожигения. Поэтому при одних и тех же значениях чисел Архимеда и Рейнольдса агрегатный псевдоожигенный слой расширен меньше.

Очень важным для практических приложений является тот факт, что при малых числах Архимеда выше линии, соответствующей одиночной взвешенной частице, существует область параметров, в которой может реализоваться псевдоожигенный слой твердых частиц в газовом потоке. В результате расслоения газа и частиц в этой области появляется возможность функционирования так называемых быстрых псевдоожигенных слоев [3], в которых создается рециркуляция частиц.

Неоднозначность изображенной на рис. 3 диаграммы означает, что чисто статистический подход, в котором учитываются только три фигурирующих в уравнении (5) безразмерных параметра, не позволяет полностью описать агрегатное псевдоожигение.

На основании экспериментальных данных в [4] установлено, что число Фруда

$$Fr_{mf} = u_{mf}^2 / (d_p g) \quad (6)$$

может служить грубым критерием, позволяющим разграничить два типа псевдоожигения: при $Fr_{mf} \leq 1$ реализуется частичное псевдоожигение, а при $Fr_{mf} \geq 1$ — агрегатное.

В. Локальная структура псевдоожигенных газом слоев твердых частиц. В подавляющем большинстве технологических приложений используется псевдоожигение слоев твердых частиц газом.

В таких системах происходит быстрое перемешивание частиц, поэтому коэффициент теплоотдачи от ограничивающих слоев стенок или с поверхности самих частиц оказывается сравнительно высоким.

Механизм теплопереноса в псевдоожигенных газом слоях твердых частиц можно представить более отчетливо, если изучить локальную структуру течения газа и поведение частиц в слое (см. § 2.8.4).

Типы порошков. В соответствии с рекомендациями [5] при рассмотрении псевдоожигенных газом слоев твердых частиц следует различать следующие четыре типа порошков (рис. 4).

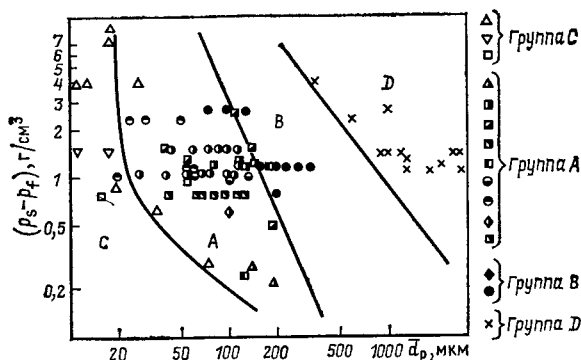


Рис. 4. Классификация порошков при псевдоожигении воздухом [5]

Группа А. Материалы, состоящие из частиц малой плотности (меньшей примерно $1,4 \text{ г/см}^3$) и(или) малого среднего размера обычно ведут себя так, как это описано ниже. Типичными примерами могут служить некоторые катализаторы, используемые при крекинге. Слои из порошков данной группы сильно расширяются, раньше чем образуются пузыри. Если внезапно прекратить подачу газа, то такие слои коллапсируют медленно с типичной скоростью $0,3\text{--}0,6 \text{ см/с}$. Эта скорость близка к приведенной скорости газа в плотной фазе. Все образующиеся пузыри всплывают вверх со скоростью, большей скорости газа в промежутках между частицами. Средний размер пузырей можно уменьшить двумя способами: применяя порошки, состоящие из маленьких частиц и(или) характеризующиеся широкой функцией распределения частиц по размерам. Однако и в этом случае сохраняется возможность образования пузырей с максимальным размером.

Группа В. К группе В относится большинство материалов. Диапазон размеров частиц и их плотностей следующий: $40 \text{ мкм} \leq d_p \leq 500 \text{ мкм}$; $1,4 \text{ г/см}^3 \leq \rho_s \leq 4 \text{ г/см}^3$.

В отличие от группы А, образование пузырей в порошках данной группы начинается при скоростях газа, лишь немого превышающих минимально необходимую для псевдоожигения скорость. Расширение слоя оказывается малым, а его схлопывание после прекращения подачи газа происходит быстро. Большинство пузырей всплывают со скоростью, большей скорости течения газа между частицами. Ничто не указывает на существование пузырей максимального размера. При одинаковых условиях, т. е. на одинаковом расстоянии от распределительного устройства, размер пузырей, по-видимому, не зависит от размера частиц.

Группа С. Порошки, состоящие из слипающихся по тем или иным причинам частиц, образуют группу С. «Обычное» псевдоожигение таких порошков довольно сложно. В трубах или каналах малого диаметра такие порошки поднимаются как единое целое, образуя пробку. Причиной этого является большая сила сцепления частиц, намного превышающая силу, с которой воздействует на частицу газовый поток.

Псевдоожигение таких порошков или улучшение характеристик псевдоожигенного слоя достигается с помощью специальных механических мешалок.

Группа D. Порошки этой группы состоят из крупных и(или) очень плотных частиц. Практически все пузыри, за исключением наиболее крупных, движутся вверх медленно, чем газ. Таким образом, газ втекает внутрь пузыря через его нижнюю границу и вытекает через верхнюю. Такая картина движения пузырей, сквозь которые непрерывно течет газ, существенно отличается от реализуемой в порошках из группы А или В. Скорость газа в плотной фазе велика. Если газ подается в контейнер только через одно отверстие, расположенное в определенном месте, порошки группы D могут образовывать струю.

Диаграмма классификации порошков [5] (рис. 4), построенная на основе экспериментальных данных о псевдоожигенных слоях при использовании в качестве газа воздуха, показывает, что при уменьшении разности плотностей границы между группами смещаются, как правило, в сторону больших размеров частиц.

Обычно в псевдоожигенных слоях используются частицы из групп А или В. Эти группы различаются в основном условиями первоначального возникновения пузырей. Кроме того, в слоях частиц из группы А максимальный размер пузырей ограничен.

Проведенное ниже рассмотрение поведения псевдоожигенных слоев с пузырями относится в основном к порошкам группы В.

Одиночные пузыри. Образование газовых пузырей является характерным свойством систем газ — твердые частицы. Из-за того что псевдоожигенные слои непрозрачны, исследование их локальной структуры представляет

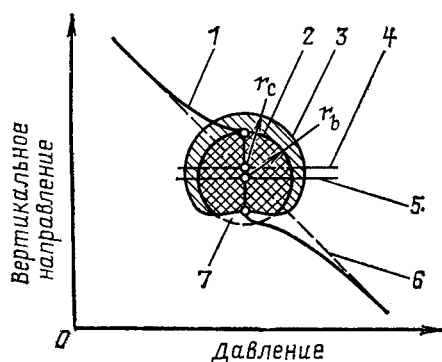


Рис. 5. Образование оболочки и распределение давления около одиночного пузыря:

1 — распределение давления вдоль вертикальной оси, проходящей через центр пузыря; 2 — граница пузыря; 3 — оболочка пузыря; 4 — нулевой перепад давления; 5 — горизонтальная линия, проходящая через центр пузыря; 6 — распределение давления в псевдоожигенном слое на большом удалении от пузыря; 7 — след

собой довольно сложную задачу. Однако основные особенности воздействия газовых пузырей на свойства псевдоожигенных слоев можно понять, рассматривая находящийся в таком слое одиночный пузырь при приведенной скорости, лишь немного превышающей минимально необходимую для псевдоожигения скорость. Исчерпывающие обзоры современного состояния теоретических и экспериментальных исследований этого вопроса содержатся в [7], [8].

Основные результаты можно сформулировать следующим образом (рис. 5).

Пузырь имеет форму сферы со слегка вдавленной нижней частью. Скорость его всплывания

$$u_b \approx \sqrt{0,95gr_b}, \quad (7)$$

так что, если пузырь не слишком мал, u_b превышает скорость движения газа между частицами в окружающей суспензии из порошков типов А и В.

С точки зрения наблюдателя, поднимающегося вверх вместе с пузырем, частицы движутся около него по стационарным линиям тока.

По аналогии с картиной обтекания твердой сферы при $Re > 1$ около нижней части пузыря формируется след, в котором частицы увлекаются вверх.

Такая структура течения согласуется с распределением давления внутри пузыря, тщательное измерение которого проведено в [9].

На рис. 5 штриховой линией показано распределение давления в невозмущенном слое вдали от пузыря, сплошной линией — истинное распределение вдоль вертикальной оси симметрии пузыря, вблизи его поверхности.

В соответствии с таким распределением давления газ втекает снизу внутрь пузыря. Вместе с газом в след затягиваются и частицы. Именно поэтому нижняя часть пузыря деформируется. Так как неограниченное накопление частиц в следе невозможно, то через определенные промежутки времени происходит их отрыв.

Распределение давления в верхней части пузыря показывает, что газ поступает из него в окружающее пространство. Скорость всплывания пузырей, за исключением очень маленьких, значительно превышает скорость газа в суспензии, поэтому вытекший газ сносится вниз и вновь возвращается внутрь пузыря через его нижнюю часть.

Существование циркуляционного движения газа внутри относительно малой окрестности пузыря предсказано теоретически [10] и подтверждено экспериментально [11] для систем газ — твердые частицы. По мере увеличения размера пузыря расстояние, на которое распространяется

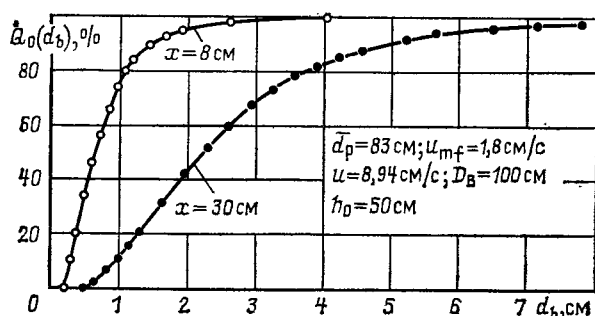


Рис. 6. Распределение пузырей по размерам в слое песка на двух различных высотах над распределительным устройством

в окружающую суспензию вытекающий из пузыря газ, уменьшается.

Результаты, полученные при исследовании одиночного пузыря, позволяют сделать следующие выводы об общем поведении псевдоожигенных систем газ — твердые частицы, справедливые для порошков типов А и В.

1. Газовые пузыри увлекают за собой вверх находящиеся в их следе частицы. Однако даже частицы, не попавшие внутрь следа, движутся какое-то время вверх, что обусловлено структурой поля течения около всплывающего пузыря. Такая картина согласуется с наблюдениями общего характера движения частиц.

2. Циркуляция газа внутри пузыря приводит к байпасному эффекту, в результате чего пропадает прямой контакт этого газа с частицами.

3. Вследствие меньшего давления вблизи нижней части пузыря пузыри большего размера и более быстро всплывающие, догоняя мелкие пузыри, поглощают их. В результате такой коалесценции происходит быстрый рост пузырей по мере их движения вверх.

Коалесценция пузырей. С помощью миниатюрных емкостных зондов специальной формы, не искажающих состояния псевдоожигения, в [12] проведено исследование локальной структуры псевдоожигенных слоев большого диаметра ($D_B = 1$ м).

На рис. 6 показаны интегральные распределения пузырей по размерам в двух точках внутри слоя: на расстояниях 8 и 30 см от распределительного устройства.

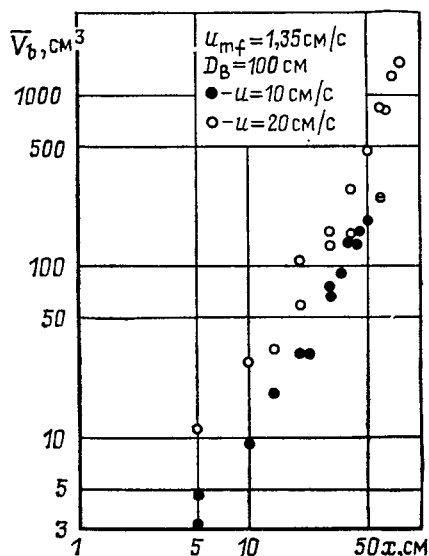


Рис. 7. Зависимость среднего локального объема пузыря в слое песка от высоты над распределительным устройством для двух различных значений приведенной скорости газа u [13]

Нетрудно видеть, что как средний размер пузыря, так и характерная ширина распределения возрастают по мере их удаления вверх от распределительного устройства.

На рис. 7 представлены результаты измерений локального среднего объема пузыря [13]. Видно, что при увеличении высоты примерно на 1 м средний объем пузыря возрастает почти в 100 раз.

На основе данных измерений, аналогичных изображенным на рис. 7, в [13] разработана статистическая модель коалесценции пузырей и предложено следующее эмпирическое корреляционное соотношение:

$$d_b = 0,853 \sqrt[3]{1 + 0,272(u - u_{mf})(1 + 0,0684x)^{1,21}}. \quad (8)$$

Уравнение (8) связывает локальный средний размер пузыря с избыточной скоростью на границе слоя $u - u_{mf}$, см/с, и высотой x , см, над распределительным устройством. В этом уравнении свойства псевдооживленных твердых частиц определяются только минимально необходимой для псевдооживления скоростью u_{mf} . Следует подчеркнуть, что определяющим фактором является именно избыточная скорость, а не отношение u/u_{mf} , как это часто считают. На рис. 8 результаты расчетов, проведенных по уравнению (8), сравниваются с экспериментальными.

Обсуждаемые здесь исследования скорости роста пузыря проводились для псевдооживленных слоев без внутренних перегородок и труб, хотя в теплообменных приложениях довольно часто внутри таких слоев присутствуют трубы. К недостаткам подобных конструкций относятся возможность быстрой эрозии, образование отложений или ржавчины и возникновение помех движению газа и частиц. Кроме качественных соображений о возможном влиянии труб и перегородок на рост пузырей, никакой количественной информации по этому очень интересному для практики вопросу в настоящее время нет.

Пространственное распределение пузырей и циркуляция твердых частиц. Выше обсуждалась лишь зависимость размера пузыря от высоты его положения над распределительным устройством. Дополнительное усложнение картины движения газа и частиц в псевдооживленном слое связано с обычно неравномерным распределением всплывающих вверх пузырей по поперечному сечению слоя.

Слева на рис. 9 показаны результаты измерений зависимости локальных скоростей движения газа от радиально-

го расстояния до центральной оси трубы [15]. Видно, что вблизи распределительного устройства наиболее интенсивное образование пузырей происходит около стенок емкости. По мере продвижения вверх точка максимума скорости смещается к середине трубы. В соответствии с таким полем скоростей формируется характерное циркуляционное движение частиц, показанное схематически справа на рис. 9.

Проведенные в [16] расчеты показали, что такая структура течения обусловлена влиянием стенок на коалесценцию пузырей. Однако это взаимодействие представляет собой только инициирующий механизм, поскольку пузыри увлекают за собой частицы вверх в своем следе; частицы на верхней границе покидают слой и затем опускаются преимущественно в таких его частях, где пузырей меньше. Следствием такого циркуляционного движения, показанного на рис. 9, является дальнейшее увеличение и в конечном счете стабилизация неравномерности распределения пузырей по поперечному сечению слоя.

Описанное выше циркуляционное движение приводит к интенсивному конвективному перемешиванию частиц и повторному смешению газа. Этот эффект нежелателен в каталитических псевдооживленных слоях, поскольку он приводит к возвращению в слой отработавшего истощенного газа. В большинстве же других приложений интенсивное перемешивание твердой фазы полезно.

Организуя соответствующим образом распределение втекающего в слой газа по его поперечному сечению, можно, как показано в [17], добиться увеличения циркуляции частиц. Замедлить же циркуляцию сложно, так как вызывающий ее механизм преимущественной коалесценции пузырей вблизи стенок, типичный для всех псевдооживленных слоев, в которых пузыри вообще формируются, довольно сильно демпфирует влияние распределительного устройства на структуру течения.

С другой стороны, как показано в [18—20], любые средства, приводящие к замедлению роста пузырей или способствующие их развалу (внутренние перегородки; трубы, увеличение статического давления или доли мелких частиц), обеспечивают более равномерное по сечению развитие пузырей.

Влияние распределительного устройства. Часто считается, что если отношение потерь давления в распределительном устройстве к потерям давления в слое велико,

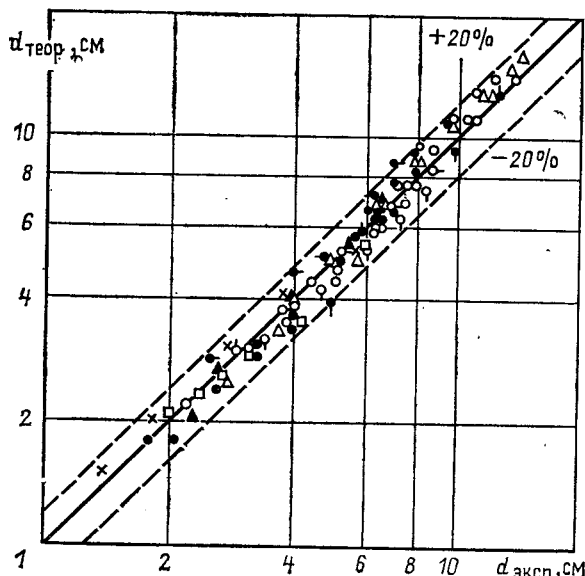


Рис. 8. Сопоставление экспериментальных данных по размерам пузырей с результатами расчетов по (8)

Эксперимент	Материал	u_{mf} , см/с	$u - u_{mf}$, см/с	Литература
×	Песок	1,35	3,65	[13]
е	»	1,35	8,65	[13]
▲	»	1,35	13,65	[13]
о	»	1,35	18,65	[13]
Δ	»	1,35	28,65	[13]
□	Стеклянные шарики	1,35	7,8	[13]
●	Песок	2,75	9,35 15,40	[14]
●	Стекло (раздробленное)	5,5	6,88 9,63	[14]
○	Стеклянные шарики	8,0	8,0 11,2	[14]
○	Каменный уголь	8,0	5,6	[14]

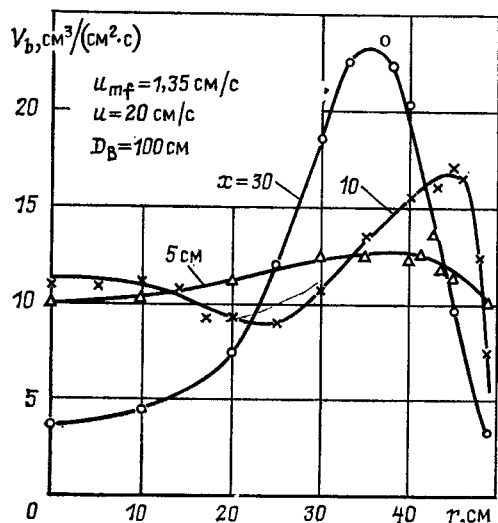
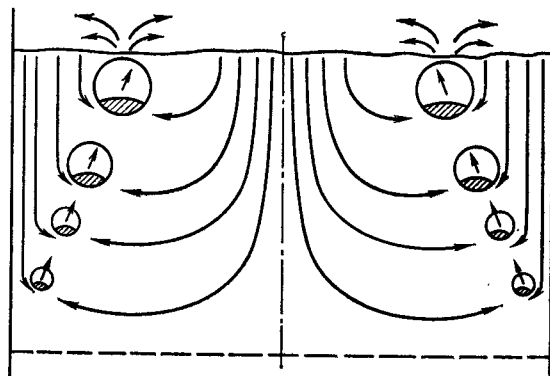


Рис. 9. Радиальное распределение удельного объемного расхода газа, переносимого пузырями в слое песка, на различных высотах h над распределительным устройством (слева) и обусловленная этим движением циркуляция твердых частиц (справа) [15]



то распределительное устройство хорошее. Непосредственные измерения [21] показывают, однако, что увеличение перепада давления в распределительном устройстве сверх некоторого предельного значения не сопровождается дальнейшим улучшением газораспределения. В то же время, если перепад давления меньше определенного минимального значения, наблюдаются нерегулярности и неустойчивости в распределении потока газа, переносимого в пузырях (рис. 10). В общем случае для минимального отношения потерь давления в распределительном устройстве и в слое рекомендуется значение, лежащее в интервале от 0,1 до 0,4 [21—23], хотя, как видно из рис. 10, к подобным рекомендациям нужно относиться осторожно.

Проведенные в [18] исследования показали, что минимальный перепад давления в распределительном устройстве зависит не только от перепада давления в слое, но также и от приведенной скорости и параметров распределительного устройства, характеризующих взаимосвязь скорости и перепада давления в нем.

На рис. 11 приведены результаты измерений массового расхода газа, переносимого в пузырях, на двух различных высотах над распределительным устройством со множеством отверстий [24]. Стрелками на нижней части рисунка

указаны положения отверстий (в вертикальной плоскости измерений), через которые подается газ. Видно, что на высоте $x=40$ см влияние положения отверстий еще заметно, в то время как на высоте $x=60$ см формируется типичное

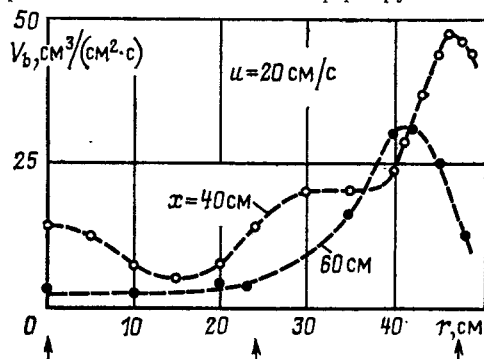


Рис. 11. Распределение удельного объемного расхода газа, переносимого пузырями, в слое песка для двух типов распределительного устройства [24]

неравномерное распределение массового расхода газа, переносимого в пузырях, аналогичное распределению, реализующемуся при использовании в качестве распределительного устройства пористой пластины (ср. с рис. 9).

2.2.7. Коллекторы, патрубки и поворотные камеры

Дж. А. Р. Генри

А. Введение. Патрубки, коллекторы и поворотные камеры предназначены в основном для организации течения жидкости по всему объему теплообменника (рис. 1).

Кроме того, эти компоненты, также как и все прочие, должны препятствовать утечке рабочей среды, которая может находиться под большим давлением. Поэтому их конструкция часто определяется соображениями прочности и герметичности, простоты и дешевизны изготовления, а не законами гидродинамики. В результате такого подхода может случиться так, что организация течения в теплообменнике оказывается далеко не оптимальной.

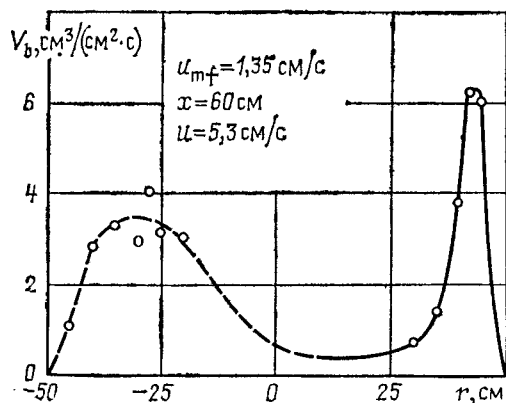


Рис. 10. Нерегулярности распределения удельного объемного расхода газа, переносимого пузырями в слое песка (отношение перепада давления в распределительном устройстве к перепаду давления в слое равно 0,19) [15]

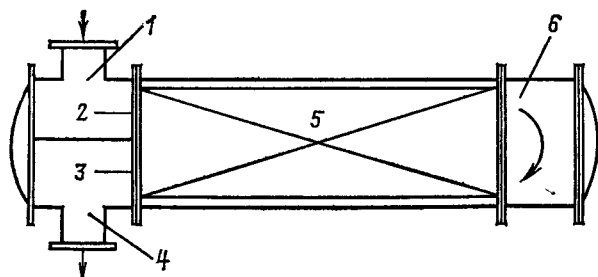


Рис. 1. К определению терминов?

1 — входной патрубок; 2 — входной коллектор; 3 — выходной коллектор; 4 — выходной патрубок; 5 — трубный пучок; 6 — поворотная камера

Плохое распределение потоков внутри теплообменника существенно ухудшает его характеристики. В недалеком прошлом это обстоятельство обычно не принималось во внимание. Однако в связи с ростом стоимости энергии и материалов в настоящее время проблема использования оборудования в течение срока его службы с максимальной эффективностью становится довольно актуальной. Ее решение требует сбалансированности всех параметров, более однородного распределения течения, для чего необходимо уметь рассчитывать с достаточной точностью перепад давления в различных элементах системы.

Впускной и выпускной патрубки обеспечивают связь объема теплообменника с внешними трубопроводами.

Впускной патрубок подает рабочую среду во впускной коллектор, где происходит ее распределение по отдельным трубам трубного пучка. Во впускном патрубке обычно происходит расширение потока, а динамический напор втекающей среды создает необходимый градиент давления внутри коллектора. При этом, конечно, существенно расположение места стыка патрубка с коллектором (рис. 2). Естественно предположить, что для конфигураций с боковым (а) и торцевым (б) расположением места стыка распределения давления по лицевой поверхности трубного пучка будут различными. Вследствие этого будут различными и массовые расходы теплоносителя в каждой из труб пучка. В конфигурации а по трубам, расположенным в нижней части пучка, будет протекать больше жидкости, чем по верхним; в конфигурации б относительно большая часть втекающей жидкости пойдет по центральным трубам и меньшая — по периферийным.

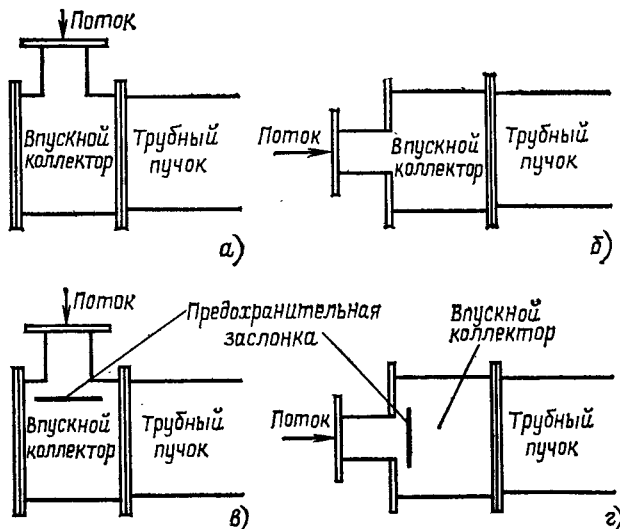


Рис. 2. Различные схемы расположения впускного патрубка при наличии и отсутствии заслонки

В выпускном патрубке происходит сужение потока. Место его стыка с выпускным коллектором также влияет на поле давления внутри коллектора и тем самым на распределение потоков по отдельным трубам пучка.

Вследствие тесной взаимосвязи между патрубком и коллектором обычно рассматривается сразу их комбинация.

При однофазном течении удовлетворительное распределение потока можно всегда обеспечить, увеличивая общий перепад давления в системе, например, с помощью помещенной в подходящем месте дроссельной заслонки. Однако такой способ требует увеличения эксплуатационных и, возможно, капитальных затрат, так как появляется необходимость в более мощных насосах. Хорошее распределение можно организовать также на основе экспериментов, используя, например, обычную визуализацию течения. Число возможных конфигураций, однако, довольно велико, и каждую из них, по-видимому, нужно рассматривать заново. Именно поэтому оценка важности хорошей организации течения в теплообменнике и выбор пути ее реализации целиком и полностью зависят от инженера-конструктора.

Неравномерность распределения потока по трубам пучка обусловлена действующими на жидкость инерционными и вязкими силами. Поэтому, рассматривая соответствующие уравнения, можно видеть, в каких случаях достигается более удовлетворительное решение. Ниже рассмотрены некоторые источники потерь давления.

В. Патрубки. Изменения давления во впускном патрубке. Перепад давления во впускном патрубке чаще всего мал по сравнению с перепадом давления во всем теплообменнике. Обычно считается, что этот перепад давления обусловлен внезапным расширением поперечного сечения потока от значения S_n до S_D в области вниз по потоку. Изменение статического давления в результате изменения площади поперечного сечения складывается из двух составляющих, первая из которых обусловлена необратимостью процесса, вторая — изменением скорости. Соответствующая формула для перепада давления имеет вид

$$\frac{p_n - p_D}{\rho} = \left[K_e + \left(\frac{S_n}{S_D} \right)^2 - 1 \right] \frac{v_n^2}{2}. \quad (1)$$

При полностью развитом турбулентном течении в патрубке ($Re_n > 4000$) коэффициент необратимости K_e определяется уравнением

$$K_e = \left(1 - \frac{S_n}{S_D} \right)^2. \quad (2)$$

Если сечение патрубка S_n мало по сравнению с сечением S_D , т. е. $S_n/S_D \approx 0$, то из уравнения (2) следует, что изменение удельной энергии равно скоростному напору в патрубке, т. е. $v_n^2/2$. Значения K_e для случая, когда течение в патрубке не является турбулентным ($Re_n < 4000$), приведены на рис. 3 [1].

Изменения давления в выпускном патрубке. Перепад давления в выпускном патрубке находится обычно в предположении о внезапном сужении площади поперечного сечения потока от значения S_U до S_n в патрубке. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{p_U - p_n}{\rho} = \left[1 - \left(\frac{S_n}{S_U} \right)^2 + \lambda K_c \right] \frac{v_n^2}{2}. \quad (3)$$

Коэффициент K_c показан на рис. 4 и 5 [2].

Обусловленные внезапным сужением потери энергии существенно зависят от радиуса кривизны контура сужения. Присутствующий в (3) коэффициент λ (рис. 5) [2] позволяет приближенно учесть этот эффект. Исследованию этой особенности конструкции теплообменников посвящено лишь небольшое число работ. Одной из них является работа [3], в которой для расчета суммарных потерь

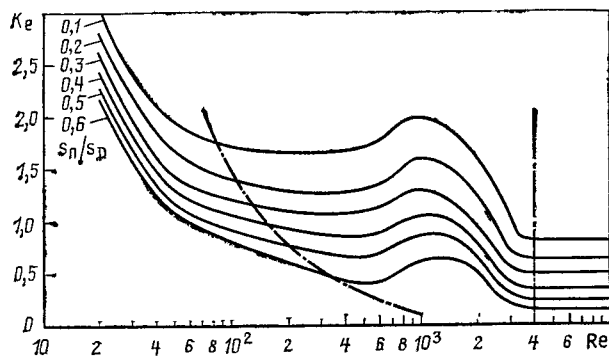


Рис. 3. Коэффициент потерь энергии при внезапном расширении трубы [1]. Границы возможной области перехода от ламинарного течения к турбулентному показаны штрихпунктирной кривой

давления во впускном и выпускном патрубках рекомендуется использовать следующую формулу:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = 1,5 \frac{v_n^2}{2} \quad (4)$$

Эта формула неплохо согласуется со значением, которое следует из уравнений (1) и (3) при $Re_n > 4000$ и $S_n/S_D = 0$; $S_n/S_D = 0$,

$$\frac{\Delta p}{\rho} = 1,58 \frac{v_n^2}{2} \quad (5)$$

Влияние заслонки. В некоторых случаях появляется необходимость установки за впускным патрубком специальной заслонки, предназначенной для защиты труб, находящихся напротив патрубка, от абразивного воздействия втекающей струи жидкости.

Такая предохранительная заслонка используется обычно тогда, когда произведение ρv^2 превышает [4]:

1) 2235 Н/м² для однофазных течений коррозионно-неактивной жидкости, не обладающей абразивным воздействием;

2) 745 Н/м² для прочих жидкостей, включая и жидкости, находящиеся в состоянии, близком к точке кипения.

Для течения газов, паров и двухфазных смесей предохранительная заслонка используется независимо от значения ρv^2 .

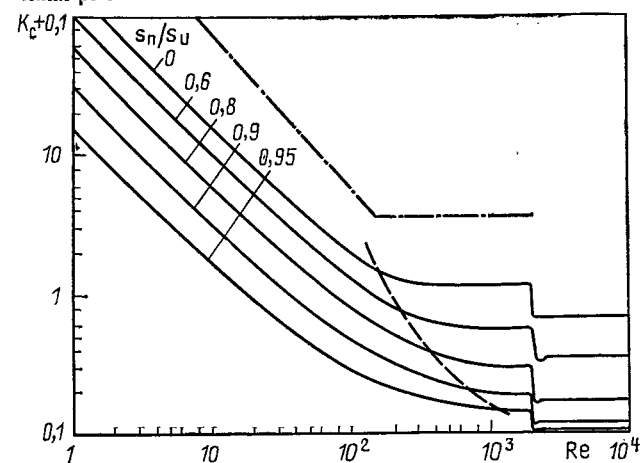


Рис. 4. Коэффициент потерь энергии при внезапном сужении трубы для $Re < 10^4$ (несжимаемое течение) [1]. Штрихпунктирная кривая — граница разброса экспериментальных данных; штриховая кривая — граница применимости уравнений. По оси ординат отложена величина $K_\epsilon + 0,1$, что позволяет при расчетах использовать диапазон значений $K_\epsilon < 0,1$

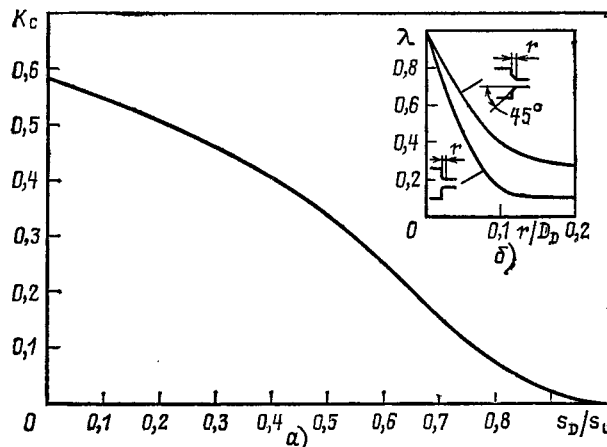


Рис. 5. Коэффициент потерь энергии при внезапном сужении сечения (a) ($Re > 10^4$, несжимаемое течение) и влияние формы контура сужения на коэффициент потерь (б)

Обычно заслонку уставляют на расстоянии от нижнего среза патрубка, превышающем $D_n/4$ (рис. 6). Это означает, что она не вызывает изменения площади поперечного сечения потока. В таких случаях для расчета перепада статического давления можно использовать уравнение, описывающее потери давления в прямоугольном колене,

$$\frac{p_n - p_D}{\rho} = \left[\left(\frac{S_n}{S_D} \right)^2 + 0,3 \right] \frac{v_n^2}{2} \quad (6)$$

При отсутствии заслонки впускной патрубок открывается непосредственно в трубный пучок. Перепад давления в этом случае не удается определить достаточно точно вследствие сложного характера поля течения. Оценочные же расчеты можно провести, используя для определения скорости течения в удаленной вниз по потоку области площадь межтрубной части поверхности.

Хотя основная роль расположенной на боковой стороне теплообменника заслонки состоит в предохранении близлежащих труб от эрозии, подобную же заслонку часто устанавливают во впускном коллекторе перпендикулярно трубному пучку (см. рис. 2, а и г), что способствует диссипации кинетической энергии втекающего потока и обеспечивает более однородное распределение давления в коллекторе. Как будет показано ниже, это позволяет существенно улучшить распределение потока по отдельным трубам пучка.

С. Коллекторы. Коллекторы предназначены для распределения потока рабочей жидкости по близко расположенным трубам, как, например, в случае трубного пучка, а также для объединения вытекающей из отдельных труб жидкости, как на выходе из пучка, в один общий поток (см. рис. 1). Идеальным можно считать коллектор, который обеспечивает одинаковый массовый расход в каждой из труб. В большинстве случаев, если отклонение массового расхода от среднего значения не превышает 5%, распределение потока по трубам можно считать однородным. Не-

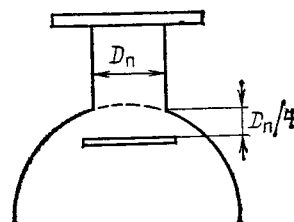


Рис. 6. Положение предохранительной заслонки

которые последствия неравномерности распределения рассмотрены в [5].

Если течение не является одномерным, теоретический расчет характеристик коллектора очень сложен, поэтому его конструкцию, обладающую заданными параметрами, находят чаще всего из экспериментов. В большинстве случаев поле течения в коллекторе является трехмерным и его рассчитывают с помощью ЭВМ. До настоящего времени подобные расчеты применительно к коллекторам теплообменников не проводились.

Степень неравномерности распределения потока по трубам пучка можно в какой-то мере характеризовать отношением полного перепада давления в трубном пучке к динамическому напору на входе в коллектор

$$\frac{\text{Максимальная скорость течения в трубе}}{\text{Средняя скорость течения в трубе}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Delta p_T + \frac{1}{2}(\rho v^2)_{in}}{\Delta p_T}} \quad (7)$$

Отсюда видно, что улучшить распределение можно:

1) увеличивая общий перепад давления до тех пор, пока он не станет намного больше динамического напора, т. е.

$$\Delta p_T \gg \left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)_{in};$$

2) уменьшая динамический напор на входе и изменяя соответствующим образом размеры коллектора.

К сожалению, оба этих очевидных способа не всегда пригодны, так как в первом случае требуется увеличивать мощность насоса, а во втором — размеры коллектора. Уравнение (7) показывает, что если неравномерность распределения потока не должна превышать 5%, то динамический напор на входе должен составлять не более 10% суммарного перепада давления [6]. В общем случае перепады давления по поверхности трубной пластины, на которой расположены входные отверстия труб, малы по сравнению с динамическим напором на входе в коллектор; их можно уменьшить еще больше, если обеспечить диссипацию динамического напора потока, прежде чем он достигнет пластины. Одним из возможных способов является использование заслонок, как это показано на рис. 2, в и г.

Если течение можно считать одномерным, возможен более строгий теоретический анализ при условии, однако, что некоторые параметры будут определены экспериментально. В открытой литературе посвященных этому вопросу работ очень мало.

Если поток разделяется, то необходимо учитывать перепад давления как в основном течении, так и в каждом из каналов.

Впускной (распределительный) коллектор. Впускной коллектор распределяет жидкость по отдельным каналам (рис. 7). В этом случае основной поток замедляется, так как часть жидкости уходит в боковые трубы.

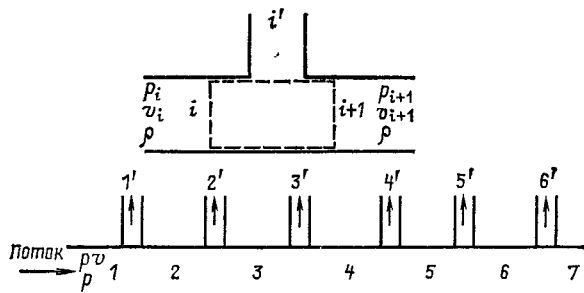


Рис. 7. Одномерный распределительный коллектор

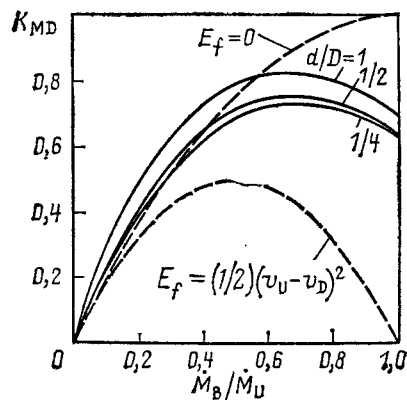


Рис. 8. Коэффициент импульса для разделяющегося потока

Применяя к контрольному объему, охватывающему место стыка, уравнение энергии, можно получить следующее уравнение [7]:

$$\frac{p_P - p_U}{\frac{1}{2}\rho v_U^2} = 1 - \left(\frac{v_D}{v_U}\right)^2 - \frac{E_f}{\frac{1}{2}v_U^2} = K_{MD} \quad (8)$$

Перепад давления на стыке в направлении основного потока можно связать со скоростью течения в области вверх по потоку с помощью коэффициента K_{MD} . Как видно на рис. 8, этот коэффициент зависит от отношения диаметра отводящей трубы к диаметру коллектора, а также от отношения массовых расходов в трубе и коллекторе. Приведенные на рис. 8 сплошные линии неплохо согласуются с данными [7, 8], которые на этом рисунке не показаны (чтобы не загромождать рисунок).

В той части потока, который отводится в трубу, также реализуется перепад давления, который связан со скоростью основного потока в коллекторе следующим образом:

$$\frac{p_U - p_B}{\frac{1}{2}\rho v_U^2} + 1 - \left(\frac{S_U}{S_B}\right)^2 = K_{SD} \quad (9)$$

а коэффициент K_{SD} приведен на рис. 9.

Выпускной (собирающий) коллектор. В выпускном коллекторе вытекающая из отдельных труб жидкость собирается в один общий поток (рис. 10). При этом происходит ускорение основного потока вследствие того, что

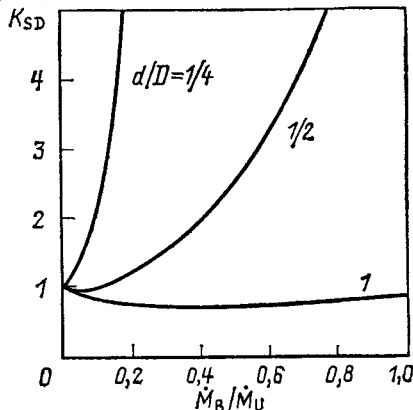


Рис. 9. Коэффициент потерь в ответвлении для разделяющегося потока

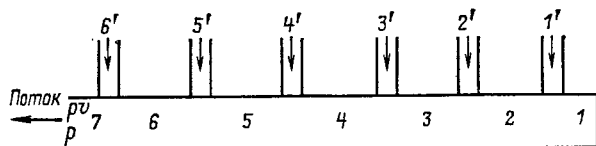


Рис. 10. Одномерный собирающий коллектор

в него поступают все новые и новые порции жидкости. Возникающий в таком течении перепад давления можно также найти из уравнения энергии

$$\frac{p_U - p_D}{\frac{1}{2} \rho v_D^2} = 1 - \left(\frac{v_U}{v_D} \right)^2 + \frac{F_f}{\frac{1}{2} v_D^2} = K_{MC}. \quad (10)$$

Коэффициент импульса для общего потока K_{MC} (рис. 11) зависит также от отношений $\dot{M}_B/\dot{M}_D$ и d/D .

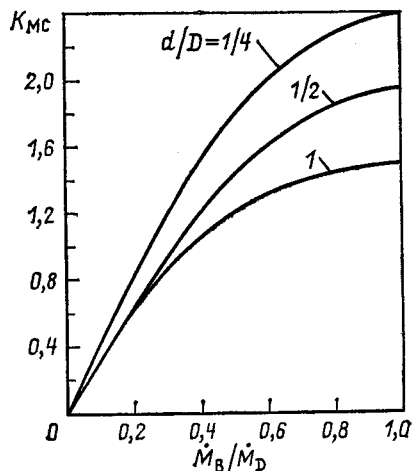


Рис. 11. Коэффициент импульса для сливающегося потока

Коэффициент потерь для бокового потока при его слиянии с общим

$$\frac{p_B - p_D}{\frac{1}{2} \rho v_D^2} - 1 + \left(\frac{S_D}{S_B} \right)^2 = K_{SC}. \quad (11)$$

Зависимость K_{SC} от определяющих параметров показана на рис. 12.

Одномерный коллектор с непрерывным делением потока. Если из коллектора постоянного диаметра происходит непрерывный по его длине отвод жидкости (или когда реальный отвод можно рассматривать как непрерывно распределенный), дифференциальное уравнение, описывающее течение в коллекторе, имеет следующий вид [9]:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + V \frac{dV}{dz} + F V^{1/4} = 0, \quad (12)$$

где V — отношение локального значения аксиальной скорости к скорости на входе в коллектор; Z — безразмерная продольная координата,

$$Z = \frac{4\alpha C}{D} \sqrt{2K_{MD}} X; \quad (13)$$

$$F = \frac{f_1}{V (2^5 H_{MD}^3) \alpha C}. \quad (14)$$

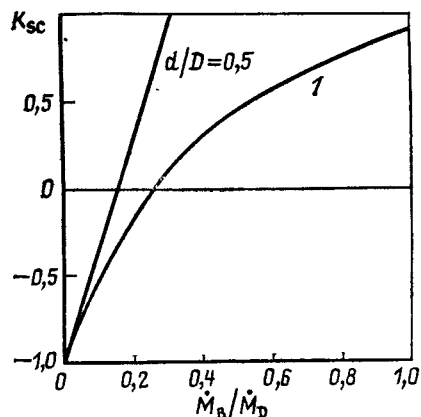


Рис. 12. Коэффициент потерь в ответвлении для сливающегося потока

Запишем граничные условия для уравнения (12) при $Z=0$ (на входе в коллектор при $X=0$)

$$V=1; \quad \frac{dV}{dZ} = -M. \quad (15)$$

Параметр M связывает перепад давления, вызывающий течение в отводе из начальной части коллектора, с импульсом жидкости (в направлении оси коллектора) в той же точке

$$M = \sqrt{\frac{\Delta p_B}{K_{MD} \rho v_D^2}}. \quad (16)$$

Уравнение (12) можно решить для различных параметров M и F . На рис. 13 показаны типичные распределения градиента dV/dZ , характеризующего интенсивность бокового оттока жидкости, по продольной координате. На рис. 14 показаны пределы изменения бокового оттока по всей длине коллектора. Очевидно, что, изменяя параметры M и F , характеризующие условия на входе, можно добиться хорошей равномерности распределения бокового оттока по длине. Однако это распределение тем лучше, чем больше параметр M [это уже отмечалось выше в связи с уравнением (7)], т. е. чем больше перепад давления в боковых трубах по сравнению с динамическим напором на входе в распределительное устройство.

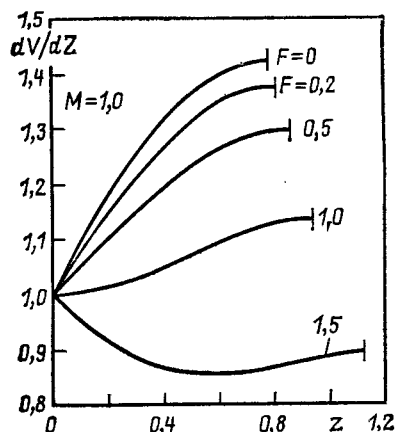


Рис. 13. Зависимость локального значения расхода от координаты (разделяющий поток)

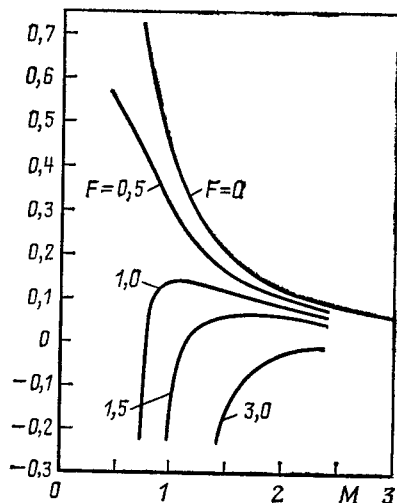


Рис. 14. Зависимость диапазона изменения расхода от координаты (разделяющийся поток)

Для собирающего коллектора, изображенного на рис. 10, уравнение (12) имеет вид [9]

$$\frac{d^2V}{dZ^2} \frac{dV}{dZ} - V \frac{dV}{dZ} + FV^{7/4} = 0. \quad (17)$$

Это уравнение вместе с (13) — (15) можно решить численно; результаты приведены на рис. 15.

В собирающем коллекторе силы трения и инерции действуют в одном направлении. Это проявляется в том, что в решении отсутствует точка поворота, которая была в случае распределительного коллектора. Из рис. 13 нетрудно видеть, что для заданной пары значений \$M\$ и \$F\$

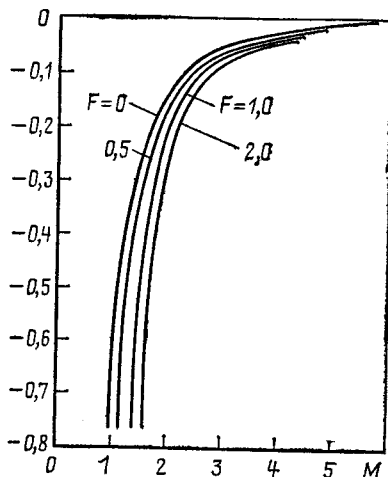


Рис. 15. Зависимость диапазона изменения расхода от координаты (сливающийся поток)

при прочих равных условиях собирающий коллектор обеспечивает менее однородное распределение потока. Именно поэтому одинаковое распределение в распределительном и собирающем коллекторах реализуется только тогда, когда площадь поперечного сечения последнего больше.

Расчет потерь давления на входе в трубу. Потери давления на входе в трубу можно рассчитать по уравне-

нию (3), описывающему внезапное сужение потока,

$$\frac{p_U - p_D}{\rho} = \left[\lambda K_C + 1 - \left(\frac{S_D}{S_U} \right)^2 \right] \frac{v^2}{2},$$

где \$v\$ — средняя скорость течения в трубе. Зависимость коэффициента \$K_C\$ от числа Рейнольдса для течения в трубе изображена на рис. 4 и 5. Отношение площадей поперечного сечения потока в областях, расположенных вниз и вверх по потоку от места сужения, можно рассчитать по следующим формулам:

для треугольного расположения труб

$$S_D/S_U = 0,907 (d/P)^2;$$

для квадратного расположения труб

$$S_D/S_U = 0,785 (d/P)^2. \quad (18)$$

Потери давления на входе в пучок редко являются определяющим фактором. В том случае, когда это так, необходим учет параметра \$\lambda\$, описывающего влияние радиуса кривизны контура сужения на входе в трубу.

Расчет потерь давления на выходе из трубы. Поток, выходящий из трубы в коллектор, внезапно расширяется. Соответствующие потери давления можно рассчитать по уравнению (1)

$$\frac{p_U - p_D}{\rho} = \left[K_e + \left(\frac{S_U}{S_D} \right)^2 - 1 \right] \frac{v_D^2}{2}, \quad (19)$$

где \$v\$ — средняя скорость течения в трубе. Коэффициент \$K_e\$ приведен на рис. 3. Отношение площадей поперечных сечений равно:

для треугольного расположения труб

$$S_U/S_D = 0,907 (d/P)^2; \quad (20)$$

для квадратного расположения труб

$$S_U/S_D = 0,785 (d/P)^2. \quad (21)$$

При использовании этих уравнений для расчета потерь давления на входе и выходе из трубного пучка обычно предполагают, что все трубы находятся в одинаковых условиях, т. е. распределение потока идеальное.

Д. Поворотные камеры. Обычно каждый ход многоходового теплообменника содержит одинаковое число труб. Поворотная камера принимает поток из одного хода и направляет его в другой. Таким образом, поворотная камера совмещает в себе функции впускного и выпускного коллекторов. Понятно, что течение в ней имеет еще более сложную структуру. Представляется маловероятным, чтобы такое течение можно было описать в рамках одномерного или даже двумерного подхода.

Потери давления на входе и выходе из поворотной камеры можно рассчитать по формулам, приведенным в п. С. В дополнение к этим потерям возникают еще и потери, обусловленные разворотом потока на \$180^\circ\$. Экспериментальные результаты по этому вопросу в литературе не приводятся. По-видимому, вполне разумно считать, что потери при развороте потока, как и в колене \$180^\circ\$, примерно равны полутора скоростным напорам в трубе.

В отсутствие экспериментальных данных трудно дать количественную оценку влияния поворотной камеры на распределение потока по трубам. Представляется, однако, маловероятным, чтобы это влияние было больше влияния впускного коллектора, что дает основание использовать те же самые критерии. Следует поэтому стремиться организовать течение таким образом, чтобы динамический напор в поворотной камере был мал по сравнению с перепадом давления в расположенном вслед за ней ходе. Основные ограничения здесь налагаются допустимым перепадом давления во всей системе.

Е. Пример. Ниже рассмотрен конкретный пример расчета, иллюстрирующий применение некоторых из приведенных выше формул.

Рассчитать потери давления и возможную неравномерность распределения потока в теплообменнике со следующими параметрами:

внутренний диаметр коллектора 400 мм;

длина труб 1500 мм;

длина коллектора 300 мм;

диаметр входного и выходного патрубков 100 мм;

теплообменник одноходовый, состоит из 150 труб с внутренним диаметром 17 мм; отношение шага трубного пучка к диаметру 1,25; суммарный массовый расход жидкости 25 кг/с, ее плотность 1000 кг/м³, вязкость 10⁻¹ кг/(м·с).

Площадь поперечного сечения потока в патрубке

$$S_n = \frac{\pi}{4} \cdot 0,1^2 = 0,00785 \text{ м}^2.$$

Скорость течения в патрубке $v_n = \frac{25}{1000 \cdot 0,00785} =$

$$= 3,18 \text{ м/с}.$$

Потери давления во впускном патрубке. Из уравнения (1)

$$\frac{p_n - p_D}{\rho} = \left[K_e + \left(\frac{S_n}{S_D} \right)^2 - 1 \right] \frac{v_n^2}{2}.$$

Число Рейнольдса в патрубке

$$Re_n = \frac{\rho v_n d}{\eta} = \frac{1000 \cdot 3,18 \cdot 0,1}{0,001} = 3,18 \cdot 10^5.$$

Для нахождения коэффициента K_e следует использовать уравнение (2)

$$K_e = \left(1 - \frac{S_n}{S_D} \right)^2 = 0,87.$$

Следовательно,

$$p_n - p_D = \left[0,87 + \left(\frac{0,00785}{0,12} \right)^2 - 1 \right] \frac{3,18^2}{2} \cdot 1000 = -633 \text{ Н/м}^2.$$

Таким образом, возрастание давления обусловлено в основном потерей импульса.

Потери давления в выпускном патрубке. Из уравнения (3)

$$\frac{p_U - p_n}{\rho} = \left[1 - \left(\frac{S_n}{S_U} \right)^2 + \lambda K_c \right] \frac{v_n^2}{2}.$$

Число Рейнольдса $Re = 3,18 \cdot 10^5$; следовательно, коэффициент K_c можно найти из рис. 5

$$\frac{S_n}{S_U} = \frac{0,00785}{0,12} = 0,0655;$$

$$K_c = 0,56.$$

Будем считать, что патрубок имеет острые кромки; поэтому $\lambda = 1$,

$$p_U - p_n = \left[1 - (0,0655)^2 + 0,56 \right] \frac{3,18^2}{2} \cdot 1000 = 7866 \text{ Н/м}^2.$$

Среднее течение в трубах. Полное сечение потока

$$S_T = 150 \frac{\pi}{4} (0,017)^2 = 0,034 \text{ м}^2.$$

$$\text{Средняя скорость } \bar{v} = \frac{25}{1000 \cdot 0,034} = 0,73 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{1000 \cdot 0,73 \cdot 0,017}{0,001} = 12410.$$

Потери давления на входе в трубы. Используя уравнение (3), находим

$$\frac{p_U - p_D}{\rho} = \left[1 - \left(\frac{S_D}{S_U} \right)^2 + \lambda K_c \right] \frac{U_n^2}{2}.$$

Из уравнения (18)

$$S_D/S_U = 0,907 (d/p)^2,$$

т. е.

$$S_D/S_U = 0,907 (1/1,25)^2 = 0,58.$$

Следовательно, из рис. 5

$$K_c = 0,275;$$

$$p_U - p_D = (0,275 + 1 - 0,58^2) \cdot \frac{0,73^2}{2} \cdot 1000 = 250 \text{ Н/м}^2.$$

Потери давления на выходе из труб. Поскольку $Re > 10^4$, можно использовать уравнение (2)

$$K_e = \left(1 - \frac{S_U}{S_D} \right)^2 = (1 - 0,58)^2 = 0,176.$$

Потери давления можно рассчитать по уравнению (1)

$$p_U - p_D = \left[K_c + \left(\frac{S_U}{S_D} \right)^2 - 1 \right] \frac{v_U^2}{2} \rho =$$

$$= (0,176 + 0,58^2 - 1) \cdot \frac{0,73^2}{2} \cdot 1000 = -130 \text{ Н/м}^2.$$

Перепад давления в трубах находится по уравнению Дарси

$$\Delta p = \frac{4f l v^2 \rho}{2d},$$

где коэффициент трения

$$f = \frac{0,046}{Re^{0,2}} = \frac{0,046}{12410^{0,2}} = 0,007;$$

$$\Delta p = \frac{4 \cdot 0,007 \cdot 1,5 \cdot 0,73 \cdot 1000}{2 \cdot 0,017} = 658 \text{ Н/м}^2.$$

Следовательно, полный перепад давления

$$\Delta p_T = -633 + 7866 + 250 - 130 + 658 = 8011 \text{ Н/м}^2.$$

Возможный уровень неоднородности распределения потока согласно уравнению (7) равен

$$\frac{\text{Максимальная скорость}}{\text{Средняя скорость}} = \sqrt{\frac{\Delta p_T + \frac{1}{2} \rho v_n^2}{\Delta p_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8011 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 3,18^2}{8011}} = 1,28.$$

Следовательно, можно ожидать, что массовый расход через некоторые трубы будет больше среднего значения на 28%; сквозь другие трубы расход будет соответственно меньше.

2.2.8. Неньютоновские жидкости

С. Армстронг

А. Введение. Многие жидкости не описываются ньютоновским законом вязкости: подобные материалы обычно объединяются под одним общим названием — неньютоновские жидкости. Примерами неньютоновских жидкостей могут служить растворы и расплавы полимеров, краски, мыла, биологические жидкости, смазки, пасты и

Е. Пример. Ниже рассмотрен конкретный пример расчета, иллюстрирующий применение некоторых из приведенных выше формул.

Рассчитать потери давления и возможную неравномерность распределения потока в теплообменнике со следующими параметрами:

внутренний диаметр коллектора 400 мм;
длина труб 1500 мм;
длина коллектора 300 мм;
диаметр входного и выходного патрубков 100 мм;
теплообменник одноходовый, состоит из 150 труб с внутренним диаметром 17 мм; отношение шага трубного пучка к диаметру 1,25; суммарный массовый расход жидкости 25 кг/с, ее плотность 1000 кг/м³, вязкость 10⁻¹ кг/(м·с).

Площадь поперечного сечения потока в патрубке

$$S_n = \frac{\pi}{4} \cdot 0,1^2 = 0,00785 \text{ м}^2.$$

Скорость течения в патрубке $v_n = \frac{25}{1000 \cdot 0,00785} = 3,18 \text{ м/с}$.

Потери давления во впускном патрубке. Из уравнения (1)

$$\frac{p_n - p_D}{\rho} = \left[K_e + \left(\frac{S_n}{S_D} \right)^2 - 1 \right] \frac{v_n^2}{2}.$$

Число Рейнольдса в патрубке

$$Re_n = \frac{\rho v_n d}{\eta} = \frac{1000 \cdot 3,18 \cdot 0,1}{0,001} = 3,18 \cdot 10^5.$$

Для нахождения коэффициента K_e следует использовать уравнение (2)

$$K_e = \left(1 - \frac{S_n}{S_D} \right)^2 = 0,87.$$

Следовательно,

$$p_n - p_D = \left[0,87 + \left(\frac{0,00785}{0,12} \right)^2 - 1 \right] \frac{3,18^2}{2} \cdot 1000 = -633 \text{ Н/м}^2.$$

Таким образом, возрастание давления обусловлено в основном потерей импульса.

Потери давления в выпускном патрубке. Из уравнения (3)

$$\frac{p_U - p_n}{\rho} = \left[1 - \left(\frac{S_n}{S_U} \right)^2 + \lambda K_c \right] \frac{v_n^2}{2}.$$

Число Рейнольдса $Re = 3,18 \cdot 10^5$; следовательно, коэффициент K_c можно найти из рис. 5

$$\frac{S_n}{S_U} = \frac{0,00785}{0,12} = 0,0655;$$

$$K_c = 0,56.$$

Будем считать, что патрубок имеет острые кромки; поэтому $\lambda = 1$,

$$p_U - p_n = \left[1 - (0,0655)^2 + 0,56 \right] \frac{3,18^2}{2} \cdot 1000 = 7866 \text{ Н/м}^2.$$

Среднее течение в трубах. Полное сечение потока

$$S_T = 150 \frac{\pi}{4} (0,017)^2 = 0,034 \text{ м}^2.$$

$$\text{Средняя скорость } \bar{v} = \frac{25}{1000 \cdot 0,034} = 0,73 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{1000 \cdot 0,73 \cdot 0,017}{0,001} = 12410.$$

Потери давления на входе в трубы. Используя уравнение (3), находим

$$\frac{p_U - p_D}{\rho} = \left[1 - \left(\frac{S_D}{S_U} \right)^2 + \lambda K_c \right] \frac{U_n^2}{2}.$$

Из уравнения (18)

$$S_D/S_U = 0,907 (d/p)^2,$$

т. е.

$$S_D/S_U = 0,907 (1/1,25)^2 = 0,58.$$

Следовательно, из рис. 5

$$K_c = 0,275;$$

$$p_U - p_D = (0,275 + 1 - 0,58^2) \cdot \frac{0,73^2}{2} \cdot 1000 = 250 \text{ Н/м}^2.$$

Потери давления на выходе из труб. Поскольку $Re > 10^4$, можно использовать уравнение (2)

$$K_e = \left(1 - \frac{S_U}{S_D} \right)^2 = (1 - 0,58)^2 = 0,176.$$

Потери давления можно рассчитать по уравнению (1)

$$p_U - p_D = \left[K_c + \left(\frac{S_U}{S_D} \right)^2 - 1 \right] \frac{v_U^2}{2} \rho =$$

$$= (0,176 + 0,58^2 - 1) \cdot \frac{0,73^2}{2} \cdot 1000 = -130 \text{ Н/м}^2.$$

Перепад давления в трубах находится по уравнению Дарси

$$\Delta p = \frac{4f l v^2 \rho}{2d},$$

где коэффициент трения

$$f = \frac{0,046}{Re^{0,2}} = \frac{0,046}{12410^{0,2}} = 0,007;$$

$$\Delta p = \frac{4 \cdot 0,007 \cdot 1,5 \cdot 0,73 \cdot 1000}{2 \cdot 0,017} = 658 \text{ Н/м}^2.$$

Следовательно, полный перепад давления

$$\Delta p_T = -633 + 7866 + 250 - 130 + 658 = 8011 \text{ Н/м}^2.$$

Возможный уровень неоднородности распределения потока согласно уравнению (7) равен

$$\frac{\text{Максимальная скорость}}{\text{Средняя скорость}} = \sqrt{\frac{\Delta p_T + \frac{1}{2} \rho v_n^2}{\Delta p_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8011 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 3,18^2}{8011}} = 1,28.$$

Следовательно, можно ожидать, что массовый расход через некоторые трубы будет больше среднего значения на 28%; сквозь другие трубы расход будет соответственно меньше.

2.2.8. Неньютоновские жидкости

С. Армстронг

А. Введение. Многие жидкости не описываются ньютоновским законом вязкости: подобные материалы обычно объединяются под одним общим названием — неньютоновские жидкости. Примерами неньютоновских жидкостей могут служить растворы и расплавы полимеров, краски, мыла, биологические жидкости, смазки, пасты и

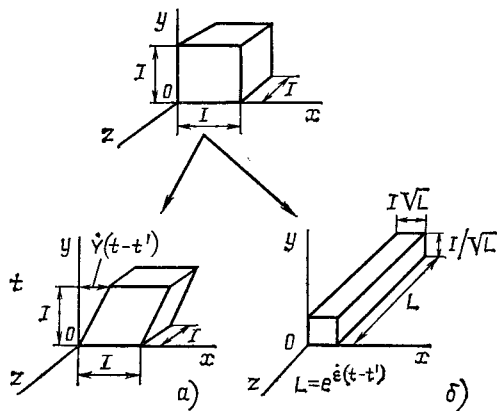


Рис. 1. Деформация изолированного единичного куба жидкостной среды при стационарном сдвиговом течении со скоростью сдвига $\dot{\gamma}(a)$ и при стационарном элонгационном течении с элонгационной скоростью $\dot{\epsilon}(b)$ при $t > t'$

суспензии. Область науки, посвященная изучению деформации и текучести веществ, называется реологией. Ниже основное внимание уделяется полимерам — типичным и наиболее часто встречающимся на практике представителям неньютоновских материалов [1].

Вследствие очень большой вязкости большинства концентрированных растворов полимеров и их расплавов на практике чаще всего реализуются ламинарные режимы течения. Именно ламинарным течениям и уделяется основное внимание в данном параграфе. В п. В содержится описание экспериментальных методов исследования неньютоновских жидкостей; в п. С рассмотрены некоторые их модели, в п. Д приведены конкретные примеры расчета наиболее важных для инженерных приложений параметров. В п. Е обсуждаются турбулентные течения неньютоновских жидкостей в трубе.

В. Экспериментальные характеристики неньютоновских жидкостей. В большинстве используемых в настоящее время экспериментальных методов измеряется связь между напряжением и скоростью деформации материала в сдвиговом потоке или в течении без сдвига. К сдвиговым течениям относятся, например, течение жидкости в трубе или сквозь щель. Примерами течений без сдвига могут служить течение в точке торможения, а также течение, реализующееся при выдавливании волокон, формовке дутьем и вакуумной формовке.

Сдвиговое течение. Для примера сдвигового течения рассмотрим изображенное на рис. 1 поле скоростей

$$u_x = \dot{\gamma} y; u_y = 0; u_z = 0. \quad (1)$$

Такое поле скоростей формируется в плоском слое жидкости, ограниченном параллельными пластинами, движущимися относительно друг друга. Градиент скорости $\dot{\gamma}$ называется скоростью сдвига; течение с постоянными значениями $\dot{\gamma}$ называется вискозиметрическим или течением с постоянным сдвигом.

За время $t - t'$ происходит сдвиговая деформация изображенного на рис. 1, а куба [на величину $\dot{\gamma}(t - t')$], причем длины его сторон в направлениях осей x и z не изменяются. В случае, изображенном на рис. 1, б, сдвига нет; происходит только растяжение куба вдоль одной из его сторон, причем за время $t - t'$ длина в направлении растяжения увеличивается в $e^{\dot{\epsilon}(t-t')}$ раз. Объем в обоих случаях остается неизменным.

Можно показать, что в сдвиговом течении единственными отличными от нуля напряжениями являются напряжения сдвига $T_{yx} = \tau$ и три нормальных напряжения

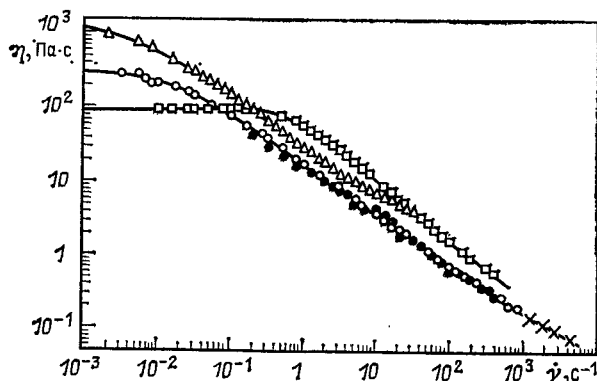


Рис. 2. Зависимость вязкости от скорости сдвига для двух полимерных растворов и раствора алюминиевого мыла: $\circ$ — (1,5%-ный раствор полиакриламида (Serafan AP30) в смеси воды и глицерина (50/50 по массе); $\triangle$ — 2%-ный раствор полиизобутилена в Примоле (Primol); $\square$ — 7%-ный раствор алюминиевого мыла (aluminum laurate) в смеси декалина и *m*-крезола; $\times$ — результаты, полученные с помощью вискозиметра Ферранти — Ширлея; $\bullet$ — с помощью реограмметра Вейзенберга [2]. Все результаты получены при $T = 298$ К

T_{xx} , T_{yy} и T_{zz} . Здесь T_{ij} — компоненты тензора дополнительных напряжений, которые считаются положительными, если приводят к растяжению элемента жидкости. Если жидкость несжимаема (хорошее приближение в большинстве задач с неньютоновской жидкостью), то независимое измерение нормальных компонент напряжений оказывается невозможным. Вместо этого измеряются разности компонент $N_1 = T_{xx} - T_{yy}$ и $N_2 = T_{yy} - T_{zz}$, называемые обычно первой (первичной) и второй (вторичной) разностями нормальных напряжений. Таким образом, стационарное сдвиговое течение неньютоновских жидкостей можно охарактеризовать с помощью трех коэффициентов напряжений η , Ψ_1 и Ψ_2 , определяемых следующим образом:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}; \quad (2)$$

$$N_1 = \Psi_1(\dot{\gamma})\dot{\gamma}; \quad (3)$$

$$N_2 = \Psi_2(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2. \quad (4)$$

В этих уравнениях η — неньютоновская вязкость; Ψ_1 и Ψ_2 — соответственно первый и второй коэффициенты нормальных напряжений. Заметим, что при стационарном сдвиговом течении ньютоновской жидкости коэффициент η совпадает с обычным коэффициентом вязкости μ , а $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$. Для большинства неньютоновских жидкостей η , Ψ_1 и Ψ_2 зависят от скорости сдвига $\dot{\gamma}$.

На рис. 2 изображена зависимость $\eta(\dot{\gamma})$ для двух полимерных растворов и раствора мыла; такие зависимости типичны для различных неньютоновских жидкостей. Видно, что при малых скоростях сдвига вязкость η стремится к постоянному значению η_0 , называемому вязкостью при нулевой скорости сдвига. По мере возрастания скорости сдвига вязкость уменьшается очень быстро; η может уменьшиться на 3—4 порядка величины при увеличении скорости сдвига. В области наиболее резкого убывания $\lg \eta$ находится в линейной зависимости от $\lg \dot{\gamma}$; эта область скоростей сдвига называется областью степенного закона. Во многих практических приложениях реализуются течения со скоростью сдвига из диапазона значений, где справедлив степенной закон.

Материалы, у которых наблюдается такое уменьшение вязкости, называются псевдопластичными. У небольшого числа жидкостей η , наоборот, увеличивается с ростом $\dot{\gamma}$; такие жидкости называются дилатантными. Подобная зависимость $\eta(\dot{\gamma})$ характерна для сильно концент-

рированных суспензий очень мелких частиц. Примерами могут служить порошок оксида титана в растворе сахарозы и зерна крахмала в смеси воды с этиленгликолем.

На рис. 3 изображен первый коэффициент нормальных напряжений Ψ_1 для тех же растворов, что и на рис. 2. При малых скоростях сдвига Ψ_1 также стремится к постоянному значению $\Psi_{1,0}$, а при больших — оказывается справедливым степенной закон. Обычно с возрастанием $\dot{\gamma}$ коэффициент Ψ_1 убывает быстрее, чем η . В области действия степенного закона Ψ_1 может уменьшиться в 10^6 раз.

Измерить второй коэффициент нормальных напряжений Ψ_2 гораздо сложнее, чем Ψ_1 или η ; поэтому сведений о нем довольно мало. Имеющиеся для растворов полимеров данные показывают, что его значение составляет примерно 10% Ψ_1 , а знак коэффициента Ψ_2 противоположен знаку Ψ_1 . В большинстве инженерных приложений коэффициентом Ψ_2 можно, по-видимому, пренебрегать. Тем не менее он может играть важную роль в задачах о гидродинамической устойчивости и при расчетах вторичных течений.

Помимо изучения стационарных сдвиговых течений можно предложить различные схемы экспериментов, в которых бы реализовались нестационарные сдвиговые течения. Некоторые из них перечислены в табл. 1, где указаны также соответствующие зависимости $\dot{\gamma}(t)$. Для каждого из этих течений можно определить и измерить коэффициенты напряжений, аналогичные η , Ψ_1 и Ψ_2 . В некоторых из таких экспериментов можно непосредственно наблюдать упругий характер неньютоновских жидкостей, например при вынужденном упругом последствии после стационарного сдвигового течения. Большую информацию можно получить при сопоставлении результатов динамических экспериментов, в которых реализуются колебания с малой амплитудой, с резуль-

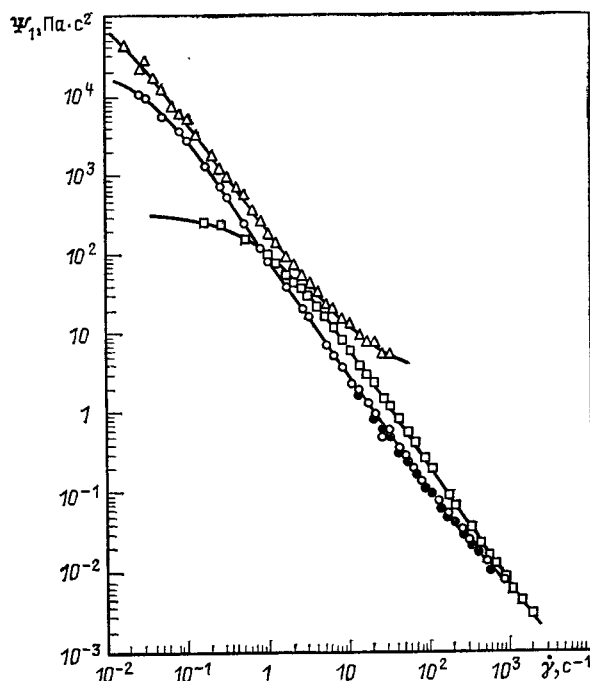


Рис. 3. Зависимость первого коэффициента нормальных напряжений от скорости сдвига. Обозначения см. на рис. 2

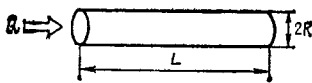
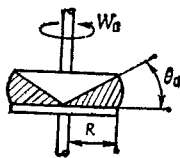
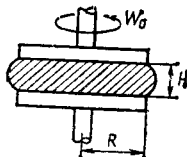
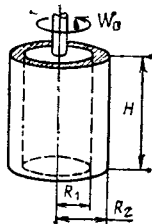
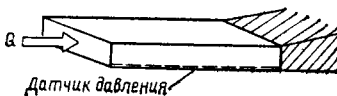
татами исследований молекулярной структуры. В настоящее время данный раздел реологии, являющийся составной частью теории линейной вязкоупругости, приобре-

Таблица 1. Эксперименты по исследованию сдвиговых течений в реологии

Название	$t < 0$	$t \geq 0$
Стационарное сдвиговое течение	$\dot{\gamma} = \text{const } (\dot{\gamma}_0)$; измеряется $T_{ij}(\dot{\gamma}_0)$	
Сдвиговое течение с малой амплитудой осцилляций	$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \cos \omega t$, $\dot{\gamma}_0$ — амплитуда скорости сдвига; ω — круговая частота	
Рост напряжений после возникновения стационарного сдвигового течения	$\dot{\gamma} = 0$	$\dot{\gamma} = \text{const } (\dot{\gamma}_0)$; измеряется $T_{ij}(t)$
Релаксация напряжений после окончания стационарного сдвигового течения	$\dot{\gamma} = \text{const } (\dot{\gamma}_0)$	$\dot{\gamma} = 0$; измеряется $T_{ij}(t)$
Релаксация напряжений после одиночной сдвиговой деформации	$\dot{\gamma} = 0$	$\dot{\gamma} = \gamma_0 \delta(t)$, γ_0 — сдвиговая деформация; измеряется $T_{ij}(t)$
Пластическая деформация	$\dot{\gamma} = 0$	$T_{yx} = \text{const } (\tau_0)$, измеряется $\dot{\gamma}(t)$
Вынужденное упругое последствие после стационарного сдвигового течения	$\dot{\gamma} = \text{const } (\dot{\gamma}_0)$	$T_{yx} = 0$; измеряется $\dot{\gamma}(t)$, $T_{ii}(t)$

Примечание. Поле течения $v_x = \dot{\gamma}(t)y$; $v_y = 0$; $v_z = 0$; напряжения: $T_{yx} = \tau$; $T_{xx} - T_{yy} = N_1$; $T_{yy} - T_{zz} = N_2$.

Таблица 2. Методы измерения вискозиметрических функций

Геометрия	Измеряемые величины	Рассчитываемые величины
Капиллярный вискозиметр 	Q — объемный расход; $\Delta p/L$ — градиент давления	$\tau_w = \Delta p R / (2L)$; $\dot{\gamma}_a = 4Q / (\pi R^3)$; $\dot{\gamma}_w = d(\tau_w^3 \dot{\gamma}_a) / (4\tau_w^2 d\tau_w)$; $\eta(\dot{\gamma}_w) = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{d \ln \dot{\gamma}_a}{d \ln \tau_w} \right)^{-1}$
Устройство типа конус — пластина 	W_0 — угловая скорость вращения конуса; J — крутящий момент на пластине; F — действующая на пластину сила, направленная вниз	$\dot{\gamma} = W_0 / \theta_0$; $\eta(\dot{\gamma}) = 3J / (2\pi R^3 \dot{\gamma})$; $\Psi_1(\dot{\gamma}) = 2F / (\pi R^2 \dot{\gamma}^2)$
Устройство с параллельными дисками 	W_0 — угловая скорость вращения верхнего диска; J — крутящий момент на нижнем диске; F — действующая на нижний диск сила, направленная вниз	$\dot{\gamma} R = W_0 R / H$; $\eta(\dot{\gamma} R) = \frac{1}{\dot{\gamma} R} \left(3 + \frac{d \ln t}{d \ln \dot{\gamma} R} \right)$; $(t = J / 2\pi R^3)$; $\Psi_1(\dot{\gamma} R) - \Psi_2(\dot{\gamma} R) = \frac{f}{\dot{\gamma}^2 R} \left[2 + \frac{d \ln f}{d \ln \dot{\gamma} R} \right] (f = F / (\pi R^2))$
Вискозиметр Куэтта 	W_0 — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра; J — крутящий момент на внешнем цилиндре	$\dot{\gamma} = \frac{W_0 R_1}{R_2 - R_1}$; $\eta(\dot{\gamma}) = \frac{J(R_2 - R_1)}{2\pi R_1^3 W_0}$
Щелевая фильера * 	Q — объемный расход; dp/dz — градиент давления; S_{BL} — значение давления на выходе	$\tau_w = (-dp/dz) B$; $\dot{\gamma}_a = 3Q / (2WB^2)$; $\dot{\gamma}_w = \frac{2}{3} \dot{\gamma}_a \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d \ln \dot{\gamma}_a}{d \ln \tau_w} \right)$; $\eta(\dot{\gamma}_w) = \tau_w / \dot{\gamma}_w$; $\Psi_1(\dot{\gamma}_w) = -\frac{1}{\dot{\gamma}_w^2} \left(S_{BL} + \frac{\partial S_{BL}}{\partial \ln \tau_w} \right)$ (для малых чисел Рейнольдса)

* W — ширина; $2B$ — зазор; L — длина.

тает форму механической спектроскопии. Обзор результатов этого направления содержится в [3].

В табл. 2 показаны также некоторые из применяемых в экспериментах по исследованию сдвиговых течений стандартных геометрических конфигураций. Наиболее удобным для одновременного измерения коэффициентов η и Ψ_1 является устройство типа конус — пластина. Если конус вращается с угловой скоростью W_0 , а его образующая составляет угол θ_0 с пластиной ($\theta_0 \ll 1$), то всюду в зазоре скорость сдвига равна W/θ_0 . Измеряя крутящий момент, который нужно приложить к пластине для того,

чтобы предотвратить ее вращение, а также суммарное давление (направленное вниз), можно рассчитать η и Ψ_1 по формулам

$$\eta = 3J / (2\pi R^3 \dot{\gamma}); \quad (5)$$

$$\Psi_1 = 2F / (\pi R^2 \dot{\gamma}^2), \quad (6)$$

где R — радиус пластины. Если, кроме того, измерять радиальное распределение давления на нижней пластине, можно определить и коэффициент Ψ_2 . Подобные изме-

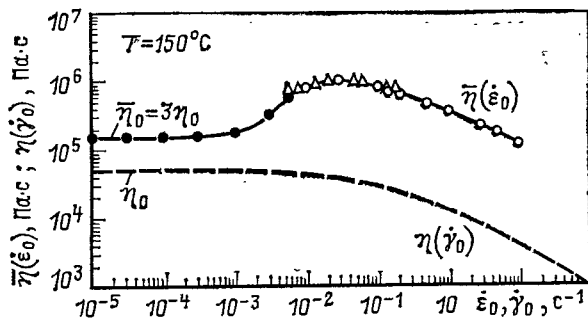


Рис. 4. Зависимость элонгационной вязкости от скорости элонгации и вязкости от скорости сдвига для расплава полиэтилена низкой плотности (IUPAC A) [5]

рения, однако, довольно затруднительны и поэтому не предусмотрены в серийных приборах.

Необходимые для обработки экспериментальных данных формулы, соответствующие другим геометрическим конфигурациям, можно найти в [1, 4, 28].

Течение без сдвига. Такое течение характеризуется отсутствием вращательного движения жидкости. Для примера рассмотрим простейшее элонгационное течение, в котором компоненты скорости равны

$$v_x = -\frac{\dot{\epsilon}}{2}x; \quad v_y = -\frac{\dot{\epsilon}}{2}y; \quad v_z = \dot{\epsilon}z, \quad (7)$$

где $\dot{\epsilon}$ — элонгационная скорость. Схема деформации элемента жидкости в таком течении показана на рис. 1.

При чисто элонгационном течении касательные напряжения не возникают, поэтому для несжимаемых жидкостей можно измерять только комбинации нормальных напряжений $T_{zz} - T_{xx} = T_{zz} - T_{yy}$. В стационарном случае, когда скорость $\dot{\epsilon}$ не зависит от времени, напряженное состояние обычно описывается с помощью элонгационной вязкости $\bar{\eta}$

$$\bar{\eta}(\dot{\epsilon}) = (T_{zz} - T_{xx})/\dot{\epsilon}. \quad (8)$$

Для ньютоновских жидкостей $\bar{\eta}$ постоянно и равно $\bar{\eta} = 3\mu$, (9)

поэтому изучение элонгационных течений не дает какой-либо новой информации о жидкости. Для неньютоновских жидкостей $\bar{\eta}$ зависит от $\dot{\epsilon}$ и не связана каким-либо простым соотношением с вязкостью $\eta(\dot{\gamma})$.

На рис. 4 показана зависимость от $\dot{\epsilon}$ элонгационной вязкости $\bar{\eta}$ расплава полиэтилена малой плотности. При малых скоростях деформации $\bar{\eta}$ стремится к постоянному значению, равному $3\eta_0$. По мере возрастания скорости деформации $\bar{\eta}$ сначала увеличивается, затем постепенно выходит на почти постоянное значение и далее уменьшается аналогично тому, как уменьшается η при больших $\dot{\gamma}$. Возрастающий участок в зависимости $\bar{\eta}(\dot{\epsilon})$ для полимерных жидкостей объясняется тем, что в этой области происходят ориентация макромолекул материала в направлении приложенной силы и их растяжение. В таком состоянии полимерные жидкости обладают повышенной сопротивляемостью к деформации.

Измерить $\bar{\eta}$ довольно трудно, что связано со сложностью реализации стационарного состояния. Так, например, в [6] отмечалось, что в экспериментах, результаты которых представлены на рис. 4, стационарные условия, по-видимому, не были достигнуты. Из рис. 1 видно, что в стационарном течении длина элемента жидкости увеличивается со временем по экспоненциальному закону,

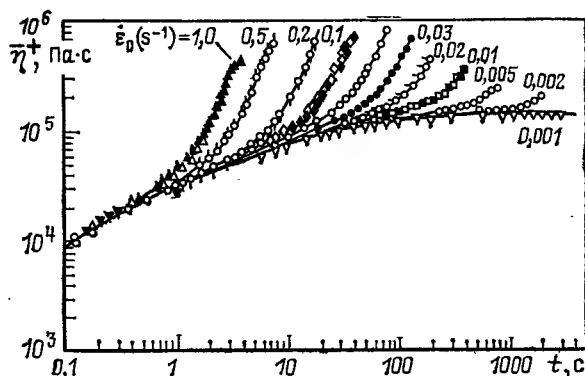


Рис. 5. Зависимость коэффициента роста элонгационных напряжений от времени при различных скоростях элонгации для расплава полиэтилена низкой плотности (melt 1) [7]

При умеренных скоростях растяжения поперечное сечение исследуемого образца быстро уменьшается до значения, при котором или наступает разрыв, или суммарная сила становится настолько малой, что ее измерения с достаточной точностью уже невозможны.

Для измерений $\bar{\eta}$ в настоящее время используются два типа устройств, различающихся тем, движутся ли относительно друг друга зажимы, в которых закреплен образец, или нет [5]. В случае подвижных зажимов растяжение образца реализуется при их раздвижении по экспоненциальному закону. В устройствах с неизменным расстоянием между зажимами происходит их вращение таким образом, чтобы происходило «вытекание» образца из зазора между зажимами с постоянной скоростью. Второй метод, по-видимому, позволяет получить большие деформации образца $\epsilon = \dot{\epsilon}t$ и поэтому обеспечить стационарные условия при больших скоростях деформации.

При исследованиях элонгационных течений очень важны измерения в нестационарных условиях. Это связано с тем, что стационарные условия на практике почти никогда не реализуются; кроме того, их очень сложно создать и в лабораторных установках. Наиболее распространенный нестационарный эксперимент заключается в мгновенном переходе от состояния покоя к элонгационному течению с постоянной скоростью деформации. Зависимость растягивающего напряжения от времени измеряется вплоть до момента выхода его на стационарное значение. Результаты представляют в виде коэффициента роста растягивающего напряжения $\bar{\eta}^+$, определяемого следующим образом:

$$\bar{\eta}^+(t, \dot{\epsilon}_0) = \frac{T_{zz}(t) - T_{xx}(t)}{\dot{\epsilon}_0}. \quad (10)$$

По мере увеличения времени t $\bar{\eta}^+$ стремится к $\bar{\eta}$. На рис. 5 представлены некоторые данные для расплава полиэтилена малой плотности. Монотонно возрастающая кривая в области малых $\dot{\epsilon}_0$ соответствует линейной теории вязкоупругости. При больших скоростях деформации в некоторой точке происходит резкое изменение характера зависимости $\bar{\eta}^+$ от t , причем в этой точке произведение $\dot{\epsilon}_0 t$ можно считать приблизительно постоянным.

Необходимо подчеркнуть, что в настоящее время методы измерения элонгационных свойств неньютоновских жидкостей активно разрабатываются. Данных по элонгационной вязкости расплавов полимеров очень мало, а для полимерных растворов их совсем нет. Обзоры теоретических и экспериментальных исследований различных аспектов бессдвиговых течений можно найти в [4, 8, 9].

С. Модели неньютоновских жидкостей. Проблема построения реологических уравнений состояния, описывающих реальную взаимосвязь напряжений и деформаций в неньютоновских жидкостях, являлась основным предметом реологии на протяжении последних 20 лет. Определенный прогресс в описании различных аспектов вязкоупругого поведения материалов был достигнут за счет использования более громоздких и сложных уравнений состояния, что значительно затрудняет их применение в решениях конкретных задач гидродинамики. Ниже сначала описывается модель обобщенной ньютоновской жидкости, которая хотя и является одной из наиболее ранних моделей, до сих пор широко используется в инженерных приложениях. Затем кратко излагаются некоторые из более современных моделей с указанием их предельных форм, представляющих определенный практический интерес.

Обобщенная ньютоновская жидкость. В модели обобщенной ньютоновской жидкости зависящая от скорости сдвига вязкость неньютоновской жидкости описывается с помощью модифицированного закона Ньютона. Реологическое уравнение имеет следующий вид:

$$\dot{\gamma} = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}, \quad (11)$$

где $\dot{\gamma} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*$ — тензор скоростей деформаций. Уравнение (11) аналогично закону вязкости Ньютона, за тем лишь исключением, что вязкость η зависит теперь от $\dot{\gamma}$, определяемой следующим образом:

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma} : \dot{\gamma} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}}. \quad (12)$$

В случае простого сдвигового течения (см. рис. 1) значение $\dot{\gamma}$ в уравнении (12) совпадает со скоростью сдвига.

Для описания зависимости η от $\dot{\gamma}$ предлагались различные эмпирические выражения. В настоящее время наиболее хорошо известен и широко используется степенной закон Оствальда — де Вилля

$$\eta(\dot{\gamma}) = m \dot{\gamma}^{n-1}. \quad (13)$$

Уравнение (13) описывает важную область, в которой логарифм вязкости линейно уменьшается с уменьшением логарифма $\dot{\gamma}$. Значения коэффициентов m , $\text{H} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, и n (безразмерного) для каждой неньютоновской жидкости различны (см. рис. 2). В табл. 3 значения m и n приведены для трех жидкостей (см. рис. 2). Следует заметить, что m определяет вязкость, n — степень крутизны зависимости η от $\dot{\gamma}$. Для псевдопластичных жидкостей n лежит между 0 и 1, для дилатантных n больше, чем 1. Случаю $n=1$ соответствует обычная ньютоновская жидкость, коэффициент m при этом совпадает с обычным коэффициентом вязкости μ . Для большинства полимерных жидкостей n заключено в интервале 0,15—0,6.

Таблица 3. Параметры степенного закона для различных жидкостей (см. рис. 2)

Жидкость	m , $\text{H} \cdot \text{с}/\text{м}^2$	n
1,5%-ный раствор полиакриламида в смеси воды и глицерина	18	0,320
2,0%-ный раствор полиизобутилена в Примоле (Primol)	27	0,295
7%-ный раствор алюминиевого мыла (aluminum Laurate) в смеси декалина и m -крезола	62	0,207

Недостатком степенного закона является то, что с его помощью невозможно получить предельное значение вязкости, соответствующее малым скоростям сдвига. Кроме того, этот закон не содержит временных констант, что не позволяет описать вязкоупругие свойства материала. Для устранения этих недостатков были разработаны другие модели, наиболее известные (см. табл. 4).

Температурная зависимость вязкости в степенной модели задается зависимостью от температуры коэффициентов m и n . Экспериментально установлено, что коэффициент n , определяющий наклон, зависит от температуры гораздо слабее, чем m . Могут оказаться полезными следующие эмпирические зависимости [10]:

$$m = m^0 e^{-A(T - T_0)/T_0}; \quad (14)$$

$$n = n^0 + B \frac{T - T_0}{T_0}, \quad (15)$$

где T_0 — некоторая характерная температура; m^0 и n^0 — значения коэффициентов m и n при этой температуре. Константы A и B для каждой жидкости свои. Их можно найти только экспериментально. Часто достаточно считать, что $B=0$.

Модель обобщенной ньютоновской жидкости позволяет получать точные результаты для объемного расхода в зависимости от перепада давления при течениях в прямолнейных каналах постоянного поперечного сечения, поскольку в ее рамках касательное напряжение можно аппроксимировать как угодно точно. Эта модель, однако, не позволяет описывать ни одно из упоминавшихся в предыдущем разделе нестационарных или упругих явлений. Несмотря на это она широко используется и в тех случаях, когда течение не является стационарным и необходимо рассчитывать не только касательные напряжения. К сожалению, в настоящее время не представляется возможным оценить погрешности, возникающие при использовании этой модели за пределами той области условий, для описания которой она и была построена.

Современные теории сплошной среды. Разработка реологических уравнений неньютоновских жидкостей, которые совмещали бы в себе идеи вязкости и упругости, как раз и является предметом современных теорий сплошной среды. Есть надежда на то, что все многообразие наблюдаемых в экспериментах явлений удастся описать с помощью лишь относительно небольшого числа функций (таких как $\eta(\dot{\gamma})$ в модели обобщенной ньютоновской жидкости) или констант (таких как m и n в степенном законе). На сегодняшний день основные усилия в этой области концентрируются на изучении реологических простых жидкостей, представляющих собой такие материалы, в которых напряжения в каждом элементе зависят лишь от истории его деформации, но, например, не от движения соседних элементов. Такое определение до сих пор представляется достаточно широким, так что к данному классу относятся все неньютоновские жидкости. С точки зрения конкретных приложений это утверждение о напряжениях в простых жидкостях не особенно ценно. Полезные частные формы реологического уравнения можно установить, используя определенные упрощающие предположения или об особенностях рассматриваемого течения, или о свойствах самого материала. Многие из таких уравнений приведены в [1].

Подобным образом получается и модель максвелловской жидкости, в которой используются довольно сильные предположения об особенностях поведения материала. Соответствующее реологическое уравнение имеет вид

$$\mathbf{T} + \lambda_0 \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T} = \eta_0 \dot{\gamma}, \quad (16)$$

где дифференциальный оператор равен

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{T} - [(\nabla \mathbf{v})^* \mathbf{T} + \mathbf{T} \nabla \mathbf{v}]. \quad (17)$$

Т а б л и ц а 4. Модели вязкости для описания обобщенной ньютоновской жидкости

Модель	Параметры	Зависимость $\eta(\dot{\gamma})$	Примечание
Степенной закон	m, n	$m\dot{\gamma}^{n-1}$	Отсутствие временных констант и вязкости при нулевой скорости сдвига
Усеченный степенной закон	$\eta_0, \dot{\gamma}_0, n$	η_0 при $\dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0$ $\eta_0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right)^{n-1}$ при $\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$	$1/\dot{\gamma}_0$ — характерное время; зависимость η от $\dot{\gamma}$ имеет скачок производной при $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$
Карро	$\eta_0, \lambda, n, \eta_\infty$	$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2}$	Обеспечивает плавный переход от значения вязкости при нулевой скорости сдвига к зависимости в области действия степенного закона и затем к значению при бесконечной скорости сдвига
Эйринга	t_0, τ_0	$t_0\tau_0 \left(\frac{\text{arcsinh } t_0\dot{\gamma}}{t_0\dot{\gamma}} \right)$	t_0, τ_0 — характерное время и напряжение; $t_0\tau_0$ — вязкость при нулевой скорости сдвига
Эллиса	$\tau_{1/2}, \eta_0, \alpha$	$\frac{\eta_0}{\eta(\tau)} = 1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1}$	Модель дает зависимость вязкости от напряжения сдвига, а не от скорости сдвига; $\tau_{1/2}$ — сдвиговое напряжение, при котором $\eta = \eta_0/2$
Бингама	μ_0, τ_0	$\eta = \infty, \tau \leq \tau_0$ $\eta = \mu_0 + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}, \tau \geq \tau_0$	Модель часто используется для описания течений паст и суспензий; τ_0 — предел текучести; до тех пор, пока напряжение меньше этого значения, течение отсутствует

Первые два слагаемых в этом выражении представляют собой обычную материальную и субстанциональную производные, последнее учитывает деформацию элемента среды, для которого вычисляется T . Две константы, присутствующие в этой модели, представляют собой вязкость при нулевой скорости сдвига η_0 и временную константу λ_0 . Нетрудно видеть, что в стационарном сдвиговом течении

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_0; \\ \Psi_1 &= 2\lambda_0\eta_0; \\ \Psi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Так как η и Ψ_1 не равны нулю, модель Максвелла отражает и вязкие, и упругие свойства жидкости. Эта модель, однако, не предсказывает зависимости η и Ψ_1 от скорости сдвига, хотя ее и можно модифицировать таким образом, чтобы такая зависимость появилась. Для элонгационного течения в рамках этой модели имеем следующее выражение для η :

$$\eta = \frac{3\eta_0}{(1 + \lambda_0\dot{\epsilon})(1 - 2\lambda_0\dot{\epsilon})}. \quad (19)$$

Видно, что даже при умеренных скоростях деформации ($\dot{\epsilon} \geq \frac{1}{2}\lambda_0$) стационарное состояние не реализуется. Несмотря на то что модель Максвелла не дает правильного

количественного описания поведения неньютоновских жидкостей, из-за своей простоты она широко используется тогда, когда требуется оценить относительную роль вязких и упругих сил. Примерами течений, в которых упругость жидкости приводит к появлению интересных эффектов, являются сходящиеся и расходящиеся течения, течение в окрестности критической точки, вторичные течения, возникающие в таких условиях, когда искривлены линии тока основного потока.

Обобщение модели Максвелла достигается путем замены постоянного коэффициента η_0 в (15) на зависящую от скорости сдвига функцию вязкости $\eta(\dot{\gamma})$, а коэффициента λ_0 — на $\eta(\dot{\gamma})/G$, где G — постоянная величина. Функция η может определяться экспериментально или же ее можно аппроксимировать подходящим эмпирическим выражением типа использованного в модели обобщенной ньютоновской жидкости. В рамках такой уточненной модели, известной как модель Уайта — Мецнера, получаются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta(\dot{\gamma}); \\ \Psi_1 &= 2\eta^2(\dot{\gamma})/G; \\ \Psi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Систематическая процедура уточнения модели Максвелла была предложена в [11], где было сделано предположение, что поскольку участвующая в уравнении (17)

производная уже содержит произведение градиента скорости на тензор напряжений, то в соответствующую модель должны быть включены все возможные парные произведения, содержащие градиент скорости и тензор напряжений. Получающаяся таким образом модель называется моделью Олдройда с восемью константами

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + \lambda_1 \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mu_0 (\text{tr } \mathbf{T}) \dot{\mathbf{v}} - \frac{1}{2} \mu_1 (\mathbf{T} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}} \mathbf{T}) + \\ + \frac{1}{2} \nu_1 (\mathbf{T} : \dot{\mathbf{v}}) \delta = \eta_0 \left[\dot{\mathbf{v}} + \lambda_2 \frac{\delta}{\delta t} \dot{\mathbf{v}} - \mu_2 (\dot{\mathbf{v}} : \dot{\mathbf{v}}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \nu_2 (\dot{\mathbf{v}} : \dot{\mathbf{v}}) \delta \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где $\text{tr } \mathbf{T}$ — след тензора $\mathbf{T}$; δ — единичный тензор. Выбирая различные значения констант $\lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \eta_0$ можно с помощью уравнения (21) получить различные известные модели, используемые в гидродинамических расчетах (см. [1], табл. 8.1—1). Модель Максвелла, например, получается при $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \lambda_2 = \nu_1 = \nu_2 = 0$.

В большинстве из представленных выше дифференциальных моделей можно с помощью простого интегрирования выразить напряжение через деформацию в явном виде. Так, интегральная форма уравнения Максвелла имеет следующий вид:

$$\mathbf{T} = - \int_{-\infty}^t \mathbf{M}(t-t') \mathbf{v}_{[0]}(t') dt', \quad (22)$$

где

$$\mathbf{M}(t-t') = \frac{\eta_0}{\lambda_0^2} e^{-(t-t')/\lambda_0} \quad (23)$$

называется функцией памяти. Здесь $\mathbf{v}_{[0]}$ — тензор конечных деформаций, определяемый следующим образом:

$$\mathbf{v}_{[0]}(t') = \delta - \mathbf{E}(t') : \mathbf{E}^*(t'); \quad (24)$$

$$E_{ij}(t') = \partial x_i / \partial x'_j, \quad (25)$$

где x_i, x'_i — декартовы координаты жидкой частицы в моменты времени t и t' соответственно. Произведение $\mathbf{E} : \mathbf{E}^*$ обычно называется тензором деформаций Фингера. Из уравнения (23) видно, что память полимерного материала описывается затухающей экспоненциальной функцией.

Уравнение (22) с произвольной функцией $\mathbf{M}(t-t')$ получается в рамках сеточной модели полимерной жидкости и описывает так называемую жидкость Лода, имеющую свойства резины. Независимо от вида функции $\mathbf{M}(t-t')$ эта модель не позволяет, однако, описать не-ньютоновскую вязкость или зависящие от скорости сдвига разности нормальных напряжений

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \int_0^\infty s \mathbf{M}(s) ds; \\ \Psi_1 &= \int_0^\infty s^2 \mathbf{M}(s) ds; \\ \Psi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

В [13] предложен простой способ модификации уравнения (26), позволяющий учесть зависимость от скорости сдвига,

$$\mathbf{T} = - \int_{-\infty}^t \mathbf{M}(t-t') h(I, II) \mathbf{v}_{[0]}(t') dt', \quad (27)$$

где $h(I, II)$ — функция первого и второго инвариантов тензора $\mathbf{v}_{[0]}$, описывающая нелинейность вязкости и первой разности нормальных напряжений. Инварианты I и II можно выбрать следующими:

$$\left. \begin{aligned} I &= \text{tr } \mathbf{v}_{[0]} = \sum_i \mathbf{v}_{[0]}_{ii}; \\ II &= \text{tr } (\mathbf{v}_{[0]} \mathbf{v}_{[0]}) = \sum_i \sum_j (\mathbf{v}_{[0]}_{ij} \mathbf{v}_{[0]}_{ji}). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

При простом сдвиговом течении оба инварианта зависят только от сдвига $\gamma = \int_{t_0}^t \dot{\gamma}(t') dt'$, поэтому можно считать, что функция h также зависит только от γ . Для сдвиговых течений [13, 14]

$$h(\gamma) = e^{-n\gamma}, \quad (29)$$

где n — не зависящая от молекулярной структуры константа.

В случае элонгационного течения h зависит от инвариантов тензора деформации по-другому. Недостатком модели (27) является невозможность прямого измерения функции h . Тем не менее для $h(I, II)$ можно построить такое выражение, которое в предельных случаях элонгационного и сдвигового течений должным образом упрощается [15]. Было показано, что в таких течениях, когда деформации не всегда растут со временем, h является не функцией, а скорее функционалом инвариантов [15]. Было также установлено, что модель Вагнера позволяет количественно правильно описать широкий набор данных, полученных при исследованиях сдвигового и элонгационного течений полиэтилена низкой плотности.

Д. Соотношения, связывающие объемный расход с перепадом давления. Ниже показано применение рассмотренных выше моделей для решения конкретных инженерных задач, таких, как расчет массового расхода при течении в круглой трубе или плоском канале. В каждом из этих случаев единственным свойством неньютоновской жидкости, влияющим на расход, является вязкость, зависящая от скорости сдвига. По этой причине для решения подобных задач вполне достаточно использовать модель обобщенной ньютоновской жидкости. Следует отметить, что для стационарного течения в трубе все дифференциальные и интегральные модели, рассмотренные выше, в которых вязкость оказывается постоянной, подчиняются закону Пуазейля

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \eta_0 L}, \quad (30)$$

где Q — объемный расход; $\Delta p/L$ — градиент давления; R — радиус трубы; η_0 — постоянная вязкость (соответствующая нулевой скорости сдвига). При течении в плоском канале

$$Q = \frac{2}{3} \frac{\Delta p B^3 W}{\eta_0 L}, \quad (31)$$

где W — ширина, B — высота канала.

В табл. 5 и 6 приведены результаты, аналогичные уравнениям (30) и (31), полученные при использовании перечисленных в табл. 4 моделей. Метод приближенного расчета объемного расхода в зависимости от перепада давления при течении неньютоновских жидкостей в каналах с нерегулярным поперечным сечением был предложен в [16] (см. также [17]).

Необходимо подчеркнуть, что приведенные в этих таблицах формулы получены для ламинарного изотермического течения обобщенной ньютоновской жидкости. Вследствие типичной для полимерных жидкостей большой вязкости часто оказывается существенной вязкая диссипация, что обуславливает необходимость расчетов неизо-термических течений. Как правило, это требует численного решения соответствующих уравнений. Обзор результатов, полученных с учетом нагрева при вязкой диссипации в сдвиговых течениях, содержится в [18]. Ниже

Таблица 5. Объемный расход при течении в щелевых зазорах

Модель (константы)	$q = \frac{3Q}{2B^3W}$
Степенной закон (m, n)	$\frac{3}{[(1/n)+2]} \left(\frac{\tau_w}{m} \right)^{1/n}$ (A)
Усеченный степенной закон ($\eta_0, \dot{\gamma}_0, n$)	$\frac{3\tau_w}{[(1/n)+2]\eta_0} \left[\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_0}{\tau_w} \right)^{1-1/n} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_0}{\tau_w} \right)^3 \right]$ (для $\tau_w \gg \eta_0 \dot{\gamma}_0$) (B)
Эйринга (t_0, τ_0)	$\frac{3}{t_0} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w} \right)^2 \left(\frac{\tau_w}{\tau_0} \operatorname{ch} \frac{\tau_w}{\tau_0} - \operatorname{sh} \frac{\tau_w}{\tau_0} \right)$ (C)
Эллиса ($\tau_{1/2}, \eta_0, \alpha$)	$\frac{\tau_w}{\eta_0} \left[1 + \frac{3}{\alpha+2} \left(\frac{\tau_w}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1} \right]$ (D)
Бингама (μ_0, τ_0)	$\frac{\tau_w}{\mu_0} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w} \right)^3 \right]$ (для $\tau_w \geq \tau_0$) (E)

Примечание. Q — объемный расход; $2B$ — зазор щели; W — ширина щели; $\Delta p/L$ — градиент давления; τ_w — касательное напряжение на стенке ($\Delta p B/L$).

Таблица 6. Объемный расход при течении в трубах

Модель (константы)	$q = \frac{4Q}{\pi R^3}$
Степенной закон (m, n)	$\frac{4}{[(1/n)+3]} \left(\frac{\tau_w}{m} \right)^{1/n}$ (A)
Усеченный степенной закон ($\eta_0, \dot{\gamma}_0, n$)	$\frac{4}{[(1/n)+3]} \frac{\tau_w}{\eta_0} \left[\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_0}{\tau_w} \right)^{1-1/n} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_0}{\tau_w} \right)^4 \right]$ (для $\tau_w \gg \eta_0 \dot{\gamma}_0$) (B)
Эйринга (t_0, τ_0)	$\frac{8}{t_0} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w} \right)^3 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tau_w}{\tau_0} \right)^2 + 1 \right] \operatorname{ch} \left(\frac{\tau_w}{\tau_0} \right) - \frac{\tau_w}{\tau_0} \operatorname{sh} \left(\frac{\tau_w}{\tau_0} \right) - 1 \right\}$ (C)
Эллиса ($\tau_{1/2}, \eta_0, \alpha$)	$\frac{\tau_w}{\eta_0} \left[1 + \frac{4}{\alpha+3} \left(\frac{\tau_w}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1} \right]$ (D)
Бингама (μ_0, τ_0)	$\frac{\tau_w}{\mu_0} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_w} \right)^4 \right]$ (для $\tau_w \geq \tau_0$) (E)

Примечание. Q — объемный расход; R — радиус трубы; $\Delta p/L$ — градиент давления; τ_w — касательное напряжение на стенке [$\Delta p R/(2L)$].

рассмотрено применение приведенных в табл. 5 и 6 формул.

Пример 1. Течение в трубе расплава полистирола. Зависимость вязкости расплава полистирола от скорости

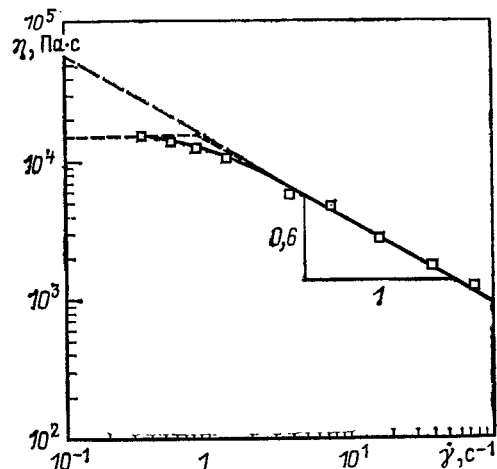


Рис. 6. Вязкость расплавленного полистирола при $T=453$ К. Штриховая кривая соответствует аппроксимации вязкости в рамках модели степенного закона; пунктирная — аппроксимации с помощью усеченного степенного закона [19]

сдвига при температуре 453 К показана на рис. 6. Требуется прокачать такой расплав сквозь трубу, радиус которой 0,5, а длина 8 см. Каким будет объемный расход, если перепад давления в трубе равен $5,6 \cdot 10^6$ Па?

Решение. В первом приближении используем для описания вязкости расплава полистирола степенной закон. Соответствующая аппроксимация показана на рис. 6 штриховой прямой. Ее наклон равен

$$n - 1 = -0,6 \quad (n = 0,4).$$

Параметр m в степенной модели равен ординате штриховой линии в точке $\dot{\gamma} = 1 \text{ с}^{-1}$. Поэтому $m = 1,45 \cdot 10^4$.

Касательное напряжение на поверхности данной трубы

$$\tau_w = \frac{(\Delta p) R}{2L} = \frac{(5,6 \cdot 10^6) \cdot 0,005}{2(0,08)} = 1,75 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Объемный расход теперь можно рассчитать по уравнению (A) из табл. 6

$$Q = \frac{\pi R^3}{(1/n)+3} \left(\frac{\tau_w}{m} \right)^{1/n} = \frac{\pi (0,005)^3}{(1/0,4)+3} \left(\frac{1,75 \cdot 10^5}{1,45 \cdot 10^4} \right)^{1/0,4} = 3,61 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с} = 36,1 \text{ см}^3/\text{с}. \quad (32)$$

Для оценки погрешностей, вносимых при пренебрежении величиной η_0 , используем модель, описываемую усеченным степенным законом. Из рис. 6 находим вязкость η_0 , соответствующую нулевой скорости сдвига:

$$\eta_0 = 1,48 \cdot 10^4 \text{ Па·с},$$

а критическая скорость сдвига $\dot{\gamma}_0$, соответствующая точке пересечения изображающей степенной закон пунктирной линии с линией $\eta = \eta_0$,

$$\dot{\gamma}_0 = 0,966 \text{ с}^{-1}.$$

Используя теперь уравнение (B) из табл. 6, находим

$$Q = \frac{\pi R^3 \tau_w}{[(1/n)+3]\eta_0} \left[\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_0}{\tau_w} \right)^{1-1/n} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \times \left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_0}{\tau_w} \right)^4 \right] = (8,44 \cdot 10^{-7}) (4,28 \cdot 10^1 + 1,6 \cdot 10^{-5}) = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с} = 36 \text{ см}^3/\text{с}, \quad (33)$$

что в точности совпадает с полученным выше значением. Заметим, что произведение $\eta_0 \gamma_0 = 1,43 \cdot 10^4$ меньше τ_w более чем на порядок, что и позволяет использовать уравнение (13).

В общем случае использование степенного закона вместо более сложного выражения для вязкости оправдано в таких случаях, когда кажущаяся скорость сдвига $\dot{\gamma}_a = 4Q/(\pi R^3)$

намного превышает характерную скорости сдвига, при которой η начинает отклоняться от η_0 . В рассмотренном примере

$$\dot{\gamma}_a = \frac{4(4,5 \cdot 10^{-5})}{\pi(0,005)^3} = 460 \gg \dot{\gamma}_0.$$

Кажущаяся скорость сдвига в точности совпадает со скоростью сдвига на поверхности трубы того же радиуса R при течении в ней ньютоновской жидкости с объемным расходом Q .

Пример 2. Течение раствора карбоксиметилцеллюлозы в кольцевом канале. Пусть требуется создать объемный расход $50 \text{ см}^3/\text{с}$ при течении в кольцевом канале между трубами с радиусами 6, 8 и 7 см 3,5%-ного водного раствора карбоксиметилцеллюлозы. Такой раствор описывается моделью Эллиса со следующими значениями констант:

$$\eta_0 = 2,27 \text{ Па} \cdot \text{с}; \tau_{1/2} = 152 \text{ Па}; \alpha = 3,0.$$

Нужно рассчитать перепад давления, обеспечивающий такой расход.

Решение. Мы не располагаем точной зависимостью Q от $\Delta p/L$ для течения в кольцевом канале жидкости, описываемой моделью Эллиса. Тем не менее возможно следующее приближенное решение.

Поскольку зазор между внутренней и внешней трубами мал по сравнению с радиусом любой из них, можно заменить кольцевой канал плоским, имеющим прямоугольное поперечное сечение со сторонами $2\pi R_{av}$ и $2B = \Delta R$. Теперь воспользуемся уравнением (D) из табл. 5. В рассматриваемом случае

$$\frac{3Q}{2WB^2} \eta_0 = \frac{3 \cdot 50 \cdot 2,27}{2 \cdot 43,4 \cdot (0,1)^2} = 392 \text{ Па}.$$

Касательное напряжение на поверхности удовлетворяет следующему уравнению:

$$\tau_w \left[1 + \frac{3}{\alpha + 2} \left(\frac{\tau_w}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1} \right] = 392. \quad (35)$$

Методом проб и ошибок можно найти его решение

$$\tau_w = 196 \text{ Па}.$$

Градиент давления, обеспечивающий заданный расход, равен

$$\Delta p/L = \tau_w/B = 1,96 \cdot 10^5 \text{ Па/м}. \quad (36)$$

Хотя строго оценить погрешность, связанную с заменой кольцевого канала прямоугольным, не представляется возможным, точные результаты для ньютоновской жидкости дают основание считать, что она составляет около 2% (см. [1], уравнение (5.2—42)).

Е. Турбулентные течения неньютоновских жидкостей. В этом пункте рассматривается зависимость объемного расхода от градиента давления при турбулентном течении в трубе неньютоновских жидкостей. Вследствие очень большой вязкости большинства неньютоновских жидкостей турбулентный режим их течения не является типичным. Исключения составляют сильно разбавленные растворы полимеров, для которых наблюдается эффект умень-

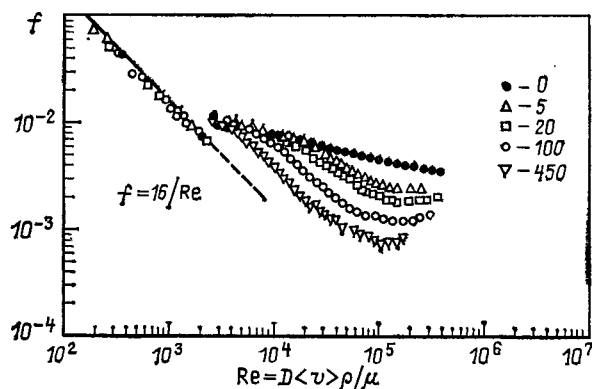


Рис. 7. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса для чистой воды и слабого водного раствора оксида полиэтилена ($M_v = 6,1 \cdot 10^4$). Концентрация полимера в млн. $^{-1}$ указана на рисунке. В случае турбулентного течения кривые для раствора полимера лежат ниже соответствующей кривой для растворителя, что и означает уменьшение сопротивления [22]

шения сопротивления в турбулентном течении. Ниже результаты выражаются через коэффициент трения

$$f = \frac{1}{4} \frac{D}{L} \frac{\Delta p}{(1/2) \rho v^2}, \quad (37)$$

где Δp — перепад давления на длине L ; v — средняя скорость течения в трубе. Обобщенное число Рейнольдса определяется следующим образом:

$$Re_n = \frac{D^n v^{2-n} \rho}{m}. \quad (38)$$

Присутствующие в (38) коэффициенты m и n являются коэффициентами степенного закона. Подобное выражение для числа Рейнольдса получается при обезразмеривании уравнения движения обобщенной ньютоновской жидкости, если для вязкости использовать степенной закон [21]. Отметим, что для ньютоновской жидкости уравнение (38)

сводится к обычному $\left(Re = \frac{D v \rho}{\mu} \right)$.

Уменьшение сопротивления. Под уменьшением сопротивления понимают значительное снижение коэффициента трения при малых добавках определенного высокомолекулярного полимера в ньютоновскую жидкость при ее турбулентном течении в трубе. Этот эффект виден из рис. 7, на котором показана зависимость f от Re для разных концентраций оксида полиэтилена в воде. Здесь Re — обычное число Рейнольдса, поскольку вязкость столь сильно разбавленных растворов полимера практически не зависит от скорости сдвига. В ламинарном режиме течения добавки полимера на величину f не влияют. Правее той точки, где начинается такое влияние ($Re \approx 3000$), с увеличением концентрации полимера f уменьшается. Однако существует предел, меньше которого коэффициент трения быть не может, как бы много полимера мы ни добавляли. Из рисунка видно, что добавки долей по массе оксида полиэтилена приводят к уменьшению f для воды на 40% при значении $Re = 10^5$, в то время как вязкость раствора увеличивается по сравнению с вязкостью чистой воды всего на 1%. В табл. 7 приведены примеры некоторых других систем, в которых наблюдается аналогичное уменьшение сопротивления. Дополнительную информацию по этому вопросу можно найти в обзорах [23, 24].

Концентрированные растворы. Для полимерных жидкостей переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при обобщенном числе Рейнольдса $Re_n = 2100$; при $n \ll 1$ соответствующее критическое значение Re_n

Таблица 7. Некоторые из систем полимер — растворитель, в которых наблюдается уменьшение сопротивления

Полимер	$M_w, 10^{-6}$	Растворитель
Оксид полиэтилена	0,30—8,45	Вода
Оксид полиэтилена	—	Бензол
Гомополимер полиакриламида	0,8—4,0	Вода
Частично гидролизированный полиакриламид	1,0—10,0	1,0 М NaCl
Полиизобутилен	1,0—15,0	Циклогексан
Полидиметилсилоксан	—	Толуол
Полиметилметакрилат	0,4—3,3	Толуол
Полнисиопрен	0,07—1,0	Толуол
Гуарановая смола (Guar gum)	1,72	Вода
Гуарановый (Guar gum) триацетат	0,07—5,34	Ацетонитрил
Гидроксизетилцеллюлоза	0,08—0,63	Вода

несколько выше [25]. В [25] обнаружено, что для жидкостей, описываемых обобщенной ньютоновской моделью, т. е. не слишком упругих, универсальный закон трения

Прандтля должен быть модифицирован следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4}{n^{3/4}} \lg(\text{Re} f^{(2-n)/2}) - \frac{0,4}{n^{1,2}}. \quad (39)$$

Это уравнение описывает коэффициент трения в мягких гелях и суспензиях.

Для вязкоупругих неньютоновских жидкостей коэффициент трения обычно меньше, чем для обладающих такой же вязкостью, но не упругих. Сравнительно простые корреляционные соотношения для этих жидкостей предложены в [26]

$$f = \frac{0,079}{n^5 \text{Re}^n}, \quad \gamma = \frac{2,63}{(10,5)n}. \quad (40)$$

Несколько более точные значения f по сравнению с (40) можно получить с помощью уравнений Метера [27]

$$f = 0,0064 - 0,00425 \lg\left(\frac{\tau_w}{\tau_{1/2}}\right), \quad 0,2 < \frac{\tau_w}{\tau_{1/2}} < 10; \quad (41)$$

$$f = 0,0117 \left(\frac{\tau_w}{\tau_{1/2}}\right)^{-0,73}, \quad 10 < \frac{\tau_w}{\tau_{1/2}} < 40, \quad (42)$$

где τ_w — поверхностное трение; $\tau_{1/2}$ — параметр модели Эллипса из табл. 4. Все приведенные выше формулы для коэффициента трения справедливы только для течений в гладких трубах,

Раздел 2.3

ТЕЧЕНИЯ И ПОТЕРИ ДАВЛЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД¹

2.3.1. Введение и основные понятия

Дж. Ф. Хьюитт

А. Классификация многофазных течений. Исследования, выполненные на промышленных теплообменных системах, показали, что в большинстве таких установок существуют многофазные течения в той или иной форме. Многофазные течения повсеместно распространены в энергетике и в обрабатывающей промышленности и имеют очень широкую область применения. Природа таких потоков часто чрезвычайно сложна, и с самого начала следует подчеркнуть, что многие соотношения, используемые для расчета многофазных течений, по существу эмпирические, имеют ограниченную применимость и отражают только физическое понимание явлений двухфазных течений.

Ниже рассмотрены многофазные течения с твердыми (индекс s), жидкими (l) и газообразными² (g) фазами.

Некоторые из характерных особенностей, связанных с поведением каждой из этих фаз, приведены ниже:

Твердые фазы. Обычно твердая фаза существует в виде кусков или частиц. Твердую фазу можно считать несжимаемой; она имеет недеформируемые границы раздела с жидкой фазой или фазами, в которых она движется. Характеристики потока сильно зависят от размера отдельных твердых частиц и течения жидких сред, входящих в систему. Очень маленькие частицы следуют в своем движении за пульсациями жидкости, в то время как ча-

стицы больших размеров менее чувствительны к турбулентным пульсациям жидкости. Как правило, размеры частиц неодинаковы, и знание характера распределения частиц по размерам имеет большое значение при изучении таких течений. В большинстве случаев твердые частицы обладают большей плотностью, чем текучие фазы, входящие в систему, и в горизонтальном потоке это может вызывать разделение или расслоение потока под действием сил тяжести. Твердые частицы могут прилипать к стенкам канала в виде непрерывных беспорядочных слоев, и эти слои часто могут оказывать значительное сопротивление переосу теплоты. Примерами могут служить осаждение частиц магнетита в трубах котлов или осаждение твердых кристаллических частиц в охлаждаемом кристаллизаторе.

Жидкость. В многофазные потоки жидкость может входить в виде непрерывной среды, содержащей диспергированные элементы твердых тел (частицы), газов (пузырьки) или других жидкостей (капли). Жидкая фаза также может быть дискретной, например в виде капель, взвешенных в газовой фазе или другой жидкости. За исключением некоторых специальных видов неньютоновских жидкостей, жидкости сильно отличаются от твердых тел своей реакцией на силы деформации. В твердых телах, если сила деформации не слишком велика, возникают маленькие обратимые деформации (упругие), вызывающие равную и противоположную по знаку силу, уравновешивающую приложенную силу, при условии, что твердое тело должно оставаться в покое. В жидкости же уравновешивающая сила может возникать только при условии, что жидкость находится в движении. Жидкость также отличается от твердого тела той легкостью, с которой деформируется граница с другими текучими средами (газами или жидкостями). Существование сил поверхностного натяжения (которое может рассматриваться как

¹ Пер. с англ. Е. Б. Эйгенсон.

² Термин «газ» использован для описания газовой фазы вне зависимости от того, конденсируется она или нет в том или ином рассматриваемом случае. Таким образом, термин «газ» замещается на «пар» в тех случаях, где использованные слова «пар» является более привычным.

энергия, требуемая для образования единицы площади границы раздела) ведет к ограничению деформации. Например, когда жидкость представляет собой дискретную фазу, имеется тенденция к образованию сферических капель, так как такие капли характеризуются минимальной силой поверхностного натяжения на единицу объема жидкости.

Другое важное свойство жидкой фазы связано со смачиванием. Когда жидкая фаза находится в контакте с твердой фазой (например, со стенкой канала) и является смежной с другой фазой, которая также находится в контакте со стенкой, у стенки существует тройная граница раздела, и угол, образуемый у этой границы раздела границами раздела жидкость — газ и жидкость — твердое тело, известен как краевой угол. Краевой угол зависит от соответствующих энергий поверхностного натяжения (жидкость — текучая среда, текучая среда — твердое тело, жидкость — твердое тело), и для большинства систем он меньше 90° . Таким образом, жидкая фаза имеет тенденцию смачивать поверхность. Конечно, бывают исключения; поверхность может быть специально обработана гидрофобизатором (как это делается при капельной конденсации) или краевой угол по своей природе может быть больше 90° (как, например, в случае соприкосновения ртути и поверхности стекла). Хотя жидкости вообще более сжимаемы, чем твердые тела, их сжимаемость такова, что на практике, как правило, ее можно не принимать в расчет.

Газ. В качестве текучей среды газ имеет те же самые свойства с точки зрения реакции на воздействие силы, что и жидкость. Но по сравнению с жидкостью и твердыми телами газ обладает одним важным дополнительным свойством — высокой сжимаемостью. Однако многие многофазные системы, в которые входят газы, можно считать несжимаемыми, особенно если давление достаточно велико и число Маха для газовой среды мало (0,2).

После некоторых общих замечаний относительно свойств различных фаз, которые могут составлять многофазные потоки, рассмотрим основные типы многофазных потоков и примеры их использования. Ниже рассмотрены наиболее часто встречающиеся многофазные потоки.

Газожидкостные потоки — наиболее часто встречающийся вид многофазных течений; он находит широкое применение во всех областях промышленности. Целый ряд промышленных установок, таких, как системы трубопроводов для транспортировки газонефтяных смесей, испарители и котлы, конденсаторы, системы подводного горения, сооружения для очистки сточных вод, установки кондиционирования воздуха и холодильные установки, криогенные установки, включают в себя такие течения. Газожидкостные системы имеют также большое значение для метеорологии и других наук, изучающих природные явления.

2. Течения систем газ — твердые частицы. Течения твердых частиц, взвешенных в газе, важны при пневматической транспортировке и горении распыленного топлива. Псевдоожидженные слои также можно рассматривать как форму течения системы газ — твердое тело. В таких слоях твердые частицы остаются внутри определенного резервуара, в то время как газ проходит сквозь него. Однако внутри самого слоя газ и твердые частицы испытывают сложные перемещения.

Течения систем жидкость — жидкость. Примером применения таких течений служит поток водонефтяных эмульсий в трубопроводах и жидко-жидкостных массообменных системах извлечения растворителя. Оборудование для экстракции растворителя включает в себя насадочные и вибрационные колонны, контакторы перемешивания и трубопровода.

Течения систем жидкость — твердое тело. Наиболее важным применением этого течения является гидравлическая транспортировка твердых материалов, которая ста-

новится все более и более экономичной, поскольку энергетические затраты на традиционный транспорт непрерывно увеличиваются. Суспензии частиц в жидкостях также встречаются в кристаллизационных системах для экстракции каолина и в гидроциклонах.

Трехфазные течения, хотя они и менее распространены, чем двухфазные, также имеют практическое значение. Ниже приведены примеры таких течений.

Течения систем газ — жидкость — твердое тело. Эти течения встречаются в двухфазных химических реакторах, например там, где газ может барботировать через жидкость и псевдоожидженный слой твердых частиц. Такие системы полезны для проведения каталитических газожидкостных реакций.

Течения систем газ — жидкость — жидкость. Смесь пара и двух несмешивающихся жидкостей является обычной в инженерных химических установках. Примером такой системы может служить конденсатор, в котором конденсируется смесь водяного пара и паров углеводорода; конденсат представляет собой перемешивающуюся смесь жидкого углеводорода и воды.

Течения систем твердое тело — жидкость — жидкость. Примером такой системы могла бы быть реакция двух несмешивающихся жидкостей, в результате которой образуется твердая фаза и эта фаза выделяется из системы.

Конечно, многофазные течения не ограничиваются только трехфазными потоками. Примером четырехфазной системы может быть система, образующаяся при кристаллизации и прямом контакте веществ, например если жидкий бутан вводить внутрь раствора, из которого должны образовываться кристаллы, и затвердевание происходит в результате испарения жидкого бутана. В этом случае четырьмя фазами являются соответственно жидкий бутан, испарившийся бутан, растворенное вещество и кристаллическая (твердая) фаза.

В. Некоторые параметры многофазных систем. Хотя многие исследовательские работы стимулируются стремлением найти понимание физического явления, обычно основной целью этих работ является получение теоретических и экспериментальных данных, которые позволяют найти параметры, необходимые на практике, т. е. для конструирования и эксплуатации промышленных систем.

Основные параметры многофазных течений приведены ниже.

Перепад давления. Очень важно найти перепад давления между двумя точками в потоке многофазной системы. Если нужно обеспечить постоянный расход вещества в системе, то перепад давления определяет мощность перекачивающей системы. Примером такого рода требований может служить конструирование насосов для транспортировки суспензий по трубопроводу. Если, наоборот, неизменным является перепад давлений, существующий в системе, то зависимость между перепадом давления и результирующей скоростью системы важна для определения параметров, зависящих от скорости, таких, как коэффициент теплоотдачи, ограничения по плотности тепловых и массовых потоков и т. д. Для примера можно привести определение скорости циркуляции в вертикальном котле с естественной циркуляцией в дистилляционной системе, где перепад давления (напор жидкости) фиксирован, а скорость циркуляции — зависящая переменная. Следует заметить, что ниже давление в системе будем обозначать p , а градиент давления в стационарных условиях dp/dz , где z — расстояние по оси в направлении потока.

Коэффициент теплоотдачи. Коэффициент теплоотдачи равен отношению теплового потока к соответствующей разности температур. Если коэффициент теплоотдачи определяется разностью температур между стенкой канала и жидкостью, его обозначают символом α ; если коэффициент теплопередачи определяется разностью температур между двумя потоками жидкости обменивающи-

нися теплом, его называют коэффициентом теплопередачи и обозначают символом U . Часто жизненно важно знать коэффициент теплопередачи систем многофазных течений для конструирования таких систем.

Коэффициент массоотдачи β . Коэффициент массоотдачи определяется аналогично коэффициенту теплоотдачи как отношение потока массы к разности концентраций. Определение коэффициента массоотдачи широко изменяется от случая к случаю, но снова совершенно ясно, что для конструирования устройств, в которых существуют многофазные течения с непосредственно контактирующими фазами, необходимо знать его величину.

Средняя объемная концентрация фазы ϵ . Величина средней объемной концентрации фазы представляет часть объема или площади поперечного сечения, занимаемую определенной фазой. В газожидкостных потоках среднюю объемную концентрацию газа ϵ_g часто называют истинным объемным газосодержанием, а среднеобъемную концентрацию жидкости ϵ_l — истинным объемным влажосодержанием. В системах, содержащих твердую фазу, среднеобъемная концентрация твердой фазы обозначается как ϵ_s . Следует отметить, что существуют различия между реальной объемной долей фазы и объемной долей, рассчитанной на основе долей объемного расхода; это происходит из-за различия в скоростях соответствующих фаз. Информация о концентрации фаз очень важна для расчета требующихся материалов с точки зрения экономики и безопасности эксплуатации. Более того, информация о концентрации фаз (как будет видно позже) важна для расчета перепадов давления; в системах ядерных реакторов, содержащих парожидкостные смеси, концентрация фаз (истинное объемное паросодержание) приобретает ключевое значение при определении степени поглощения нейтронов и, следовательно, реактивности системы.

Ограничения на поток. Ограничения, накладываемые на плотности массовых и тепловых потоков, важны при конструировании многофазных систем. Примерами ограничений на плотности массового потока являются критические расходы (имеют тенденцию проявляться в многофазных системах при более низких скоростях, чем в однофазных), «захлебывание» в системах с противоточным течением (например, в противоточном конденсаторе) и минимальные скорости ожигения в системах с псевдоожигенным слоем. Ограничения на плотности тепловых потоков важны при кипении, где превышение предельной плотности теплового потока может вызвать резкое ухудшение коэффициента теплоотдачи, ведущее к низким рабочим характеристикам системы или к опасности, вызванной чрезмерным повышением температуры стенок канала.

Механические проблемы. При конструировании многих систем необходимо учитывать поведение потока, чтобы решить, например, проблемы, возникающие из-за вибрации труб в теплообменниках и проблемы эрозии и(или) коррозии.

Устойчивость и контроль. Системы с многофазными потоками подвержены многим видам неустойчивости, которые вызывают флуктуации скоростей потоков, давлений и т. д. Расчет устойчивости системы имеет определяющее значение. Сильно связаны с вопросами устойчивости проблемы нестационарного поведения многофазных систем. Переходные процессы важны во время запуска и останова, особенно в аварийных условиях. Могут быть важными также явления сброса, давления и гидравлического удара. При конструировании систем контроля важно знать временные характеристики многофазных систем.

Приведенные выше примеры служат для иллюстрации задач конструктора и исследователя, возникающих при расчетах многофазных систем. Большинство (но не все) указанных выше параметров более детально обсуждаются ниже.

С. Уравнения сохранения для многофазных течений. В настоящее время существуют различные подходы к получению законов сохранения для массы, количества движения и энергии в многофазных течениях. С одной стороны, имеются традиционные эмпирические (инженерные) аппроксимации и они все еще образуют основу практически всех расчетов многофазных потоков. Как другая крайность существует фундаментальный подход, согласно которому локальные и относящиеся к данному моменту соотношения последовательно усредняются различными методами. Вывод соотношения традиционного вида находят обычно в учебниках [1—3]; описания более фундаментальных подходов к получению уравнения сохранения даны в [4—6]. Особенно интересной является трактовка [6], где сделана попытка объединить фундаментальный и более традиционный инженерный подходы.

Хотя фундаментальные аналитические исследования внесли большой вклад в понимание природы многофазных течений, они до сих пор не имели большого влияния на технические расчеты. Поэтому для целей данного справочника законы сохранения будут выводиться и(или) представляться в общепринятой для инженерной практики форме. Два наиболее важных допущения, связанных с таким подходом, состоят в следующем.

Давление жидкости считается постоянным по всей площади поперечного сечения канала, в котором движется многофазная среда;

скорость данной фазы считается по существу постоянной поперек канала, хотя между средними скоростями соответствующих фаз могут быть различия.

Для получения уравнений сохранения поток рассматривают как гомогенную смесь с фазами, движущимися с одной и той же скоростью, или считают, что две фазы движутся раздельно, причем каждая из них имеет свою собственную скорость. Уравнения гомогенного течения аналогичны уравнениям однофазного течения. Более детально эти два подхода рассмотрены ниже, а сначала изучены некоторые из основных величин, используемые в них.

Основные величины, используемые в многофазных течениях. Средняя объемная концентрация ϵ_i i -й фазы определяется как осредненная по времени часть объема, занимаемого этой фазой в многофазной смеси, или как осредненная по времени часть площади, занимаемой фазой в данном поперечном сечении (в настоящем разделе эти два определения считаются эквивалентными). В частности, среднеобъемную концентрацию газовой фазы часто называют истинным объемным содержанием. Среднюю объемную концентрацию следует отличать от доли объемного расхода ϵ_i , которая для многофазной смеси, содержащей n фаз, определяется следующим образом:

$$\epsilon_i = \dot{V}_i / \sum_{s=1}^n \dot{V}_s, \quad (1)$$

где $\dot{V}_i$ и $\dot{V}_s$ — объемные расходы i -й и s -й фаз соответственно.

Плотность объемного расхода (или приведенная скорость) фазы

$$j_i = \dot{V}_i / S, \quad (2)$$

где S — площадь поперечного сечения канала. Полная плотность расхода j задается выражением

$$j = \sum_{s=1}^n j_s. \quad (3)$$

Средняя скорость i -й фазы

$$u_i = j_i / \epsilon_i = \dot{V}_i / (\epsilon_i S). \quad (4)$$

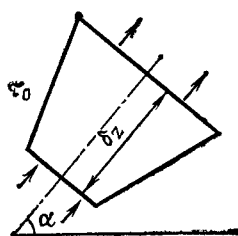


Рис. 1. Элемент канала для уравнений баланса в гомогенной модели течения

Расходное массовое газосодержание i -й фазы

$$\dot{x}_i = \dot{m}_i \left/ \sum_{s=1}^n \dot{m}_s \right. \quad (5)$$

где $\dot{m}_i$ — плотность потока массы i -й фазы, равная $\dot{M}_i/S$, где $\dot{M}_i$ — массовый расход фазы через поперечное сечение канала; $\dot{m}_s$ — плотность потока массы s -й фазы.

Термин «расходное массовое газосодержание» (паросодержание) наиболее часто применяется по отношению к газовой фазе в газожидкостных потоках. Символ x используется вместо более обычного χ ; последний символ используется для обозначения статического массового газосодержания, которое представляет собой массу данной фазы, находящуюся в данном объеме (вместо движущейся через него).

Плотность многофазной среды ρ_{MP} можно определить как массу текучей среды на единицу объема канала

$$\rho_{MP} = \sum_{s=1}^n \epsilon_s \rho_s \quad (6)$$

где ρ_s — плотность s -й фазы.

Уравнения сохранения для гомогенной модели течения. Наиболее простой метод для исследования многофазных течений заключается в том, что смесь компонентов считается гомогенной средой, в которой скорости всех фаз идентичны. Таким образом, $u_1 = u_2 = \dots = u_s = \dots = u_n = u_H$.

Скорость гомогенной среды u_H определяется выражением

$$u_H = j = \dot{m}/\rho_H = \dot{M}/(S\rho_H), \quad (8)$$

где $\dot{m}$ — полная плотность потока массы; ρ_H — средняя плотность гомогенной среды (плотность смеси), причем

$$\rho_H = \dot{m}/j = 1 \left/ \sum_{s=1}^n (\dot{x}_s/\rho_s) \right. \quad (9)$$

Из предположения о гомогенности потока следует, что средняя объемная концентрация фазы

$$\epsilon_i = \dot{v}_i = j_i/j = (\dot{x}_i/\rho_i) \left/ \sum_{s=1}^n (\dot{x}_s/\rho_s) \right. \quad (10)$$

Из уравнений (6), (9) и (10) следует, что для случая гомогенного течения, как и ожидалось, $\rho_H = \rho_{MP}$.

Уравнения сохранения для гомогенного течения можно записать для элемента канала δz , который имеет площадь поперечного сечения S и наклонен под углом α к горизонтали (рис. 1). Уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности) можно представить в следующем виде:

$$\begin{array}{cccc} \text{Скорость} & \text{Массовый} & \text{Массовый} & \text{Скорость} \\ \text{образования} & \text{расход на} & \text{расход} & \text{+ накопле-} \\ & \text{выходе} & \text{на входе} & \text{ния, массы} \end{array} \quad (11)$$

или

$$0 = \left[j\rho_H S + \delta z \frac{\partial}{\partial z} (j\rho_H S) \right] - j\rho_H S + S\delta z \frac{\partial \rho_H}{\partial t} \quad (12)$$

Преобразуя (12), получаем уравнение неразрывности для гомогенного течения

$$\frac{\partial}{\partial z} (j\rho_H S) + S \frac{\partial \rho_H}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Подобным же образом принцип сохранения импульса можно применить к элементу канала длиной δz

Скорость Поток Поток Скорость
образования = импульса — импульса + накопления =
импульса на выходе на входе импульса

$$\begin{array}{c} \text{Сумма сил, действующих} \\ \text{= на рассматриваемый} \\ \text{объем} \end{array} \quad (14)$$

Поток импульса в данном поперечном сечении равен $\dot{m}jS$, и силы, действующие на элемент канала, являются результатом воздействия на него градиента давления, силы тяжести и касательного напряжения у стенки. Таким образом, уравнение (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \left[\dot{m}jS + \delta z \frac{\partial}{\partial z} (\dot{m}jS) \right] - \dot{m}jS + \left[\frac{\partial}{\partial t} (\dot{m}S\delta z) \right] = \\ & = S \left[p - \left(p + \delta z \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] - g\rho_H S \delta z \sin \alpha - \tau_0 \delta z PS, \end{aligned} \quad (15)$$

где τ_0 — напряжение трения на стенке; P — периметр канала. Упрощая и вспоминая, что $j = \dot{m}/\rho_H$, получаем

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial (\dot{m}^2 S / \rho_H)}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_H \sin \alpha - \frac{\tau_0 P}{S}. \quad (16)$$

Для стационарного течения в канале постоянного поперечного сечения это уравнение приобретает вид

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\tau_0 P}{S} + \frac{d(\dot{m}^2/\rho_H)}{dz} + g\rho_H \sin \alpha, \quad (17)$$

которое чаще всего используется для расчета перепада давления. Три члена в правой части уравнения представляют соответственно градиенты давления, обусловленные трением ($-dp_F/dz$), ускорением ($-dp_A/dz$) и силой тяжести ($-dp_G/dz$), которые в сумме дают полный градиент давления,

$$-\frac{dp}{dz} = -\frac{dp_F}{dz} - \frac{dp_A}{dz} - \frac{dp_G}{dz}. \quad (18)$$

Для определения градиента давления, обусловленного трением, нужна эмпирическая корреляционная зависимость, и в п. В обсуждаются корреляции, в основе которых лежат модели гомогенного течения газожидкостного потока.

Третьим уравнением сохранения для гомогенного течения является уравнение энергии. Энергетический баланс может быть сформулирован так:

$$\begin{array}{cccc} \text{Скорость} & \text{Поток} & \text{Поток} & \text{Скорость} \\ \text{образования} & \text{= энергии} & \text{— энергии} & \text{+ накопления.} \\ & \text{на выходе} & \text{на входе} & \text{энергии} \end{array} \quad (19)$$

Записывая различные члены этого выражения, получаем

$$\begin{aligned} 0 = & \left[\dot{m}e + \delta z \frac{\partial}{\partial z} (\dot{m}e) \right] - (\dot{m}e + \dot{q}P\delta z + \dot{q}_v S\delta z) + \\ & + \left[S\delta z \frac{\partial}{\partial t} (\rho_H \mu + \frac{j^2}{2}) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

В уравнении (20) $\dot{q}$ — плотность теплового потока внутри системы через стенки канала; $\dot{q}_v$ — скорость внутреннего тепловыделения на единицу объема; μ — удельная внутренняя энергия на единицу массы; e — энергия, содер-

жающаяся в единице массы жидкости, задается выражением

$$e = h + \frac{v^2}{2} + gz \sin \alpha, \quad (21)$$

где h — удельная энтальпия,

$$h = \mu + p/\rho_H. \quad (22)$$

Комбинируя (20) с уравнением неразрывности (13), можно получить уравнение баланса энергии в следующем виде [3]:

$$\rho_H \left(\frac{\partial e}{\partial t} + v \frac{\partial e}{\partial z} \right) = \frac{qP}{S} + \dot{q}_v + \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (23)$$

Уравнения сохранения для модели раздельного течения многофазных потоков. В модели раздельного течения каждой фазе приписывается особая область в канале, где она имеет постоянную скорость. В противоположность гомогенной модели эта постоянная скорость не обязательно равна скоростям другой фазы или фаз.

Уравнения сохранения для массы, движения и энергии можно записать для каждой фазы с учетом обмена между соответственными фазами. Однако каждый соответствующий набор уравнений сохранения можно суммировать, чтобы дать полные уравнения сохранения для смеси, и именно эти уравнения сохранения для смеси обычно выбирались для технических расчетов. Однако недавно появилась тенденция использовать уравнения для индивидуальных фаз с введением подходящих соотношений для членов, учитывающих взаимодействие фаз между собой. Примером этого подхода является расчет кольцевого двухфазного течения газа и жидкости, обсуждаемого более подробно в п. С, § 2.3.2.

Основной элемент, используемый в модели раздельного течения, показан на рис. 2. Фаза i занимает часть площади поперечного сечения ϵ_i и находится в контакте с S -й фазой вдоль части P_{is} и со стенкой по части периметра P_{i0} . Уравнение неразрывности (уравнение баланса массы) можно записать аналогично (11) в следующем виде:

$$0 = \left[\rho_i \epsilon_i u_i S + \delta z \frac{\partial}{\partial z} (\rho_i \epsilon_i u_i S) + \dot{m}_{it} \delta z \right] - \rho_i \epsilon_i u_i S + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \epsilon_i S \delta z), \quad (24)$$

где $\dot{m}_{it}$ — скорость превращения фазы i в другие фазы (плотность потока массы на единицу длины из фазы i к другим фазам). Заметим, что величина $\dot{m}_{it}$ положительна, если фаза i испаряется или сублимирует, и отрицательна, если фаза i образуется из других фаз при конденсации. Преобразуя и упрощая уравнение (24), получаем уравнение неразрывности для фазы i в следу-

ющем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \epsilon_i S) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_i u_i \epsilon_i S) = -\dot{m}_{it}. \quad (25)$$

Уравнение неразрывности раздельного течения для многофазной смеси можно получить, суммируя уравнение вида (25) для n фаз. Заметив, что

$$\sum_{S=1}^n \dot{m}_{St} = 0 \quad (26)$$

и

$$\sum_{S=1}^n \rho_S u_S \epsilon_S = \dot{m}, \quad (27)$$

и используя определение ρ_{MP} [см. уравнение (6)], получаем, что уравнение неразрывности раздельного течения для многофазной смеси принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{MP} S + \frac{\partial}{\partial z} \dot{m} S = 0. \quad (28)$$

Баланс импульса для i -й фазы можно представить в виде уравнения (14). Для фазы i слагаемые, соответствующие правой части уравнения (14), имеют следующий вид:

$$(\dot{M}_i u_i + \delta z \frac{\partial}{\partial z} \dot{M}_i u_i) - \dot{M}_i u_i + \frac{\partial}{\partial t} u_i \rho_i \epsilon_i S \delta z, \quad (29)$$

где M — массовый расход i -й фазы, равный

$$\dot{M}_i = u_i \rho_i \epsilon_i S. \quad (30)$$

Комбинируя уравнения (29) и (30) и упрощая выражение, получаем скорость образования фазы

$$\delta z \left(\frac{\partial}{\partial t} u_i^2 \rho_i \epsilon_i S \right) + \frac{\partial}{\partial t} u_i \rho_i \epsilon_i S \delta z, \quad (31)$$

которая уравновешивается суммой сил, действующих на выделенный объем фазы i . Сумма принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ p \epsilon_i S - \left(p \epsilon_i S + \delta z \frac{\partial}{\partial z} p \epsilon_i S \right) - \right. \\ & \left. - \left[p \left(-\delta z \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_i S \right) \right] \right\} - g \rho_i \epsilon_i S \delta z \sin \alpha - \tau_{i0} P_{i0} \delta z + \\ & + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n \tau_{is} P_{is} \delta z, \end{aligned} \quad (32)$$

где τ_{i0} — напряжение трения у стенки между фазой i и стенкой канала; P_{i0} — часть периметра фазы i , находящаяся в соприкосновении со стенкой канала (рис. 2); τ_{is} — напряжение трения на поверхности раздела между фазой i и фазой s ; P_{is} — длина соответствующей границы раздела. Заметим, что P_{i0} и P_{is} могут быть равны нулю в зависимости от геометрического расположения фаз внутри канала. На межфазное напряжение трения может оказывать влияние массообмен между фазами, и это обстоятельство будет обсуждаться ниже при описании газожидкостных потоков в п. В. Приравнявая выражения (31) и (32) и упрощая их, получаем уравнение баланса импульса раздельного течения для фазы i в виде

$$\begin{aligned} & -\epsilon_i \frac{\partial p}{\partial z} - g \rho_i \epsilon_i \sin \alpha - \frac{\tau_{i0} P_{i0}}{S} + \frac{\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n \tau_{is} P_{is}}{S} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \rho_i u_i \epsilon_i + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial t} \rho_i u_i^2 \epsilon_i S. \end{aligned} \quad (33)$$

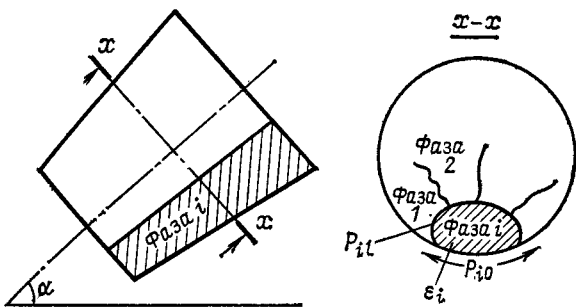


Рис. 2. Элемент канала для уравнений сохранения в модели раздельного течения:

P_{i0} — периметр; ϵ_i — площадь, занимаемая фазой i

Чтобы получить уравнение движения смеси фаз (раздельное течение), можно просуммировать уравнение движения раздельных фаз, и найти следующее выражение:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_{MP} \sin \alpha - \frac{\sum_{s=1}^n \tau_{s0} P_{s0}}{S} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{s=1}^n \rho_s \varepsilon_s u_s \right) + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial s} \left(\sum_{s=1}^n \rho_s \varepsilon_s u_s^2 \right). \quad (34)$$

Следует заметить, что в результирующем выражении нет членов, связанных с межфазными напряжениями трения, так как при суммировании они дают нуль. Уравнение (34) можно представить в виде зависимости от плотности потока массы $\dot{m}$ и газосодержания фаз в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_{MP} \sin \alpha - \frac{\sum_{s=1}^n \tau_{s0} P_{s0}}{S} = \\ = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} \left(\dot{m}^2 S \sum_{s=1}^n \frac{\dot{x}_s^2}{\rho_s \varepsilon_s} \right). \quad (35)$$

Для стационарных течений в каналах с постоянной площадью поперечного сечения, где напряжения трения на стенке имеют постоянное значение τ_0 вдоль периметра, уравнение (35) сводится к уравнению

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\tau_0 P}{S} + \dot{m}^2 \frac{d}{dz} \left(\sum_{s=1}^n \frac{\dot{x}_s^2}{\rho_s \varepsilon_s} \right) + g\rho_{MP} \sin \alpha, \quad (36)$$

которое для раздельного течения является эквивалентным уравнению (17) для гомогенного течения. Три члена в правой части уравнения (36) представляют соответственно составляющие градиента давления за счет трения, ускорения и силы тяжести.

Уравнение энергии для течения смеси фаз в модели раздельного течения аналогично уравнению, полученному в [3] для двухфазного течения,

$$S \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{s=1}^n \rho_s h_s \varepsilon_s \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(S \sum_{s=1}^n \dot{m} \dot{x}_s h_s \right) = \dot{q}P + \dot{q}_0 S - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\dot{m}^3 S \sum_{s=1}^n \frac{\dot{x}_s^3}{\rho_s \varepsilon_s^2} \right) - g\dot{m}S \sin \alpha - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{m}^2 \sum_{s=1}^n \frac{\dot{x}_s^2}{\rho_s \varepsilon_s} \right) + S \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (37)$$

Во многих промышленных системах изменения физических свойств малы, а значения кинетической энергии, потенциальной энергии и внутреннего тепловыделения пренебрежимо малы по сравнению с внешним подводом теплоты и энтальпией. Это ведет к упрощенной форме (37) для расчета, например, изменений расхода массового газосодержания фазы вдоль канала; мы вернемся к уравнениям этого вида в п. В, § 2.3.2.

Д. Поток дрейфа и связанные с ним модели. Так называемая модель потока дрейфа очень полезна при расчетах средней объемной концентрации фазы (например, истинного объемного паросодержания) в многофазных течениях. Эту модель обычно применяли к различным видам двухфазных течений. Нет никаких причин, почему она не может быть распространена на многофазные течения (течения с тремя или более фазами), но для простоты (и чтобы соз-

дать более подходящую основу для материала по двухфазным потокам, который приведен ниже) в этом параграфе не будет сделано никаких попыток обобщить эту модель, и все, что описывается далее, имеет отношение только к двухфазным течениям.

Понятие потока дрейфа и связанные с ним модели особенно подходят для описания тех двухфазных течений, которые состоят из непрерывной фазы (жидкости или газа), в которой вторая фаза рассеяна в виде дискретных элементов (твердых частиц, пузырьков газа или капель жидкости). Индекс s ниже используется для непрерывной фазы, а d — для дискретной. Сначала описывается модель потока дрейфа, в которой не учитываются изменения объемной концентрации фазы или скорости вдоль радиуса. Затем вводятся более сложные модификации модели, учитывающие радиальные изменения параметров.

Модель потока дрейфа для течений с преобладающим влиянием сил тяжести без учета напряжения трения на стенке. Обычно считается, что цель этого метода — расчет средней объемной концентрации дискретной фазы при двухфазном течении в канале, когда известны объемные расходы $\dot{V}_d$ и $\dot{V}_c$ соответственно дискретной и непрерывной фаз. Метод обычно применяли к вертикальным потокам, в которых его главные допущения (постоянство скоростей и концентраций фаз поперек канала) ближе всего к действительности. Влияния касательных напряжений у стенок не учитываются, и, следовательно, метод непригоден для расчета потерь давления, вызываемых трением. Самое подробное описание этого метода дано в книге [7]. Следуя ей, допустим, что скорости и плотности потоков положительны в направлении движения элемента дискретной фазы, находящегося под действием силы тяжести в статическом объеме непрерывной фазы. В этом случае скорости, направленные, например, вверх, рассматриваются как положительные для пузырькового режима течения газожидкостного потока, а скорости, направленные вниз, считаются положительными для суспензии тяжелых твердых частиц в более легкой жидкости. Это правило позволяет представлять все соответствующие системы (пузырьковые газожидкостные потоки, капельные жидко-жидкостные потоки, суспензии твердых частиц в газе, суспензии твердых частиц в жидкости, дисперсные газожидкостные потоки) обычным образом.

Полная плотность объемного расхода (или приведенная скорость) определяется (см. п. С) следующим образом:

$$j = j_d + j_c = \frac{\dot{v}_d}{S} + \frac{\dot{v}_c}{S}; \quad (38)$$

кроме того, согласно определению

$$u_d = j_d / \varepsilon_d; \quad (39)$$

$$u_c = j_c / \varepsilon_c = j_c / (1 - \varepsilon_d). \quad (40)$$

Если рассматривать плоскость, движущуюся вдоль канала со скоростью j , то можно определить скорости дрейфа для каждой фазы относительно этой поверхности следующим образом:

$$u_{dj} = u_d - j; \quad (41)$$

$$u_{cj} = u_c - j. \quad (42)$$

Плотности потоков дрейфа j_{dc} и j_{cd} для потоков фаз d и c через поверхность, движущуюся со скоростью смеси j , получают умножением скоростей дрейфа u_{dj} и u_{cj} на часть площади поверхности, занимаемую каждой фазой,

$$j_{dc} = \varepsilon_d u_{dj}; \quad (43)$$

$$j_{cd} = \varepsilon_c u_{cj} = (1 - \varepsilon_d) u_{cj}. \quad (44)$$

Из условия неразрывности течения следует, что никакого суммарного дрейфа через поверхность, движущуюся со скоростью j , нет и, следовательно,

$$j_{dc} + j_{cd} = 0. \quad (45)$$

Из приведенных выше уравнений следует, что

$$j_{dc} = \varepsilon_d u_{dj} = \varepsilon_d (u_d - j) = \varepsilon_d \left(\frac{j_d}{\varepsilon_d} - j_d - j_c \right) = j_d (1 - \varepsilon_d) - \varepsilon_d j_c = -j_{cd}. \quad (46)$$

Таким образом, j_{dc} линейно зависит от ε_d и $j_{dc} = j_d$ для $\varepsilon_d = 0$, $j_{dc} = -j_c$ для $\varepsilon_d = 1$. Уравнение (46) можно преобразовать к виду

$$\varepsilon_d = \frac{j_d}{j} \left(1 - \frac{j_{dc}}{j_d} \right) = \varepsilon_d \left(1 - \frac{j_{dc}}{j_d} \right), \quad (47)$$

где ε_d — доля объемного расхода фазы d . Средняя плотность двухфазной среды [см. уравнение (6)]

$$\rho_{TP} = \frac{j_c \rho_c + j_d \rho_d}{j} + (\rho_c - \rho_d) \frac{j_{dc}}{j}, \quad (48)$$

где ρ_c и ρ_d — соответственно плотности непрерывной и дисперсной фаз. Заметим, что при $j_{dc} = 0$ уравнения (47) и (48) преобразуются к выражениям, эквивалентным уравнениям для гомогенного потока.

В добавление к уравнению неразрывности для j_{dc} [см. уравнение (46)] можно убедиться, что приведенная скорость дрейфа является функцией физических свойств системы и что

$$j_{dc} = j_{dc}(\varepsilon_d, \text{физические свойства, режим течения}). \quad (49)$$

При одновременном решении уравнений (46) и (49) получаем значения ε_d . Соотношение для данной системы дисперсной фазы — непрерывная фаза описывается типичным эмпирическим уравнением вида

$$j_{dc}/u_\infty = \varepsilon_d (1 - \varepsilon_d)^n, \quad (50)$$

где u_∞ — скорость осаждения одиночной частицы дисперсной фазы в результате воздействия на нее сил выталкивания и тяжести в бесконечном объеме непрерывной фазы. Для случая пузырькового течения показатель степени n обычно имеет значение 2; для систем жидкость — твердые частицы $n=3$.

На рис. 3 приведено графическое решение уравнения (50) для смеси твердых частиц с водой. Заметим, что при определенном значении ε_d , т. е. при $\varepsilon_{d, \max}$, частицы образуют уплотненный слой и больше не способны двигаться. Это можно рассматривать как ситуацию, при которой силы взаимодействия между частицами становятся преобладающими. В то же время в газожидкостных потоках силы взаимодействия между пузырьками малы и уравнение (50) применимо вплоть до значений ε_d , близких к единице. Чтобы получить ε_d , необходимо одновременно решить уравнение неразрывности (46) и корреляционное уравнение (50). Это решение удобнее всего получить в графическом виде, показанном на рис. 4. Ниже рассмотрены четыре случая.

Однонаправленное движение в направлении u_∞ . В этом случае обе приведенные скорости j_d и j_c положительны, отрицательное значение j_{dc} имеет место при $\varepsilon_d = 1$. Для этого получено единственное решение. Такое решение типично для однонаправленного подъемного пузырькового течения газожидкостной среды и для опускного однонаправленного течения суспензии жидкость — твердые частицы.

Однонаправленное движение в направлении, противоположном u_∞ . В этом случае тоже получено единственное решение для ε_d , но заметим, что численное значение при этом намного выше, чем в первом случае, при тех же расходах фаз. Такая ситуация типична для однонаправленного опускного пузырькового течения газожидкостной среды или для однонаправленного подъемного течения суспензии жидкость — твердые частицы.

Противоток с дисперсной фазой, движущейся в направлении u_∞ . Как показано на рис. 4, в этом случае может быть два решения, или в предельном случае одно. Видно,

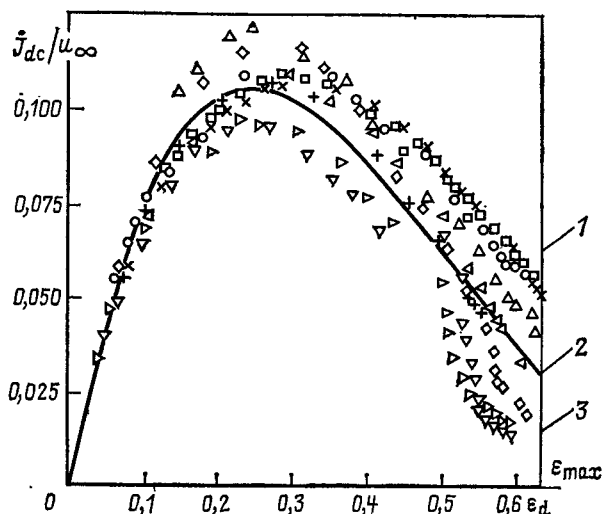


Рис. 3. Зависимость отношения приведенной скорости дрейфа к предельной скорости осаждения одиночной частицы от объемной концентрации частиц при псевдооживлении различных материалов водой [4]:

1 — частицы, поддерживаемые сверху; 2 — частицы в начальной стадии псевдооживления; 3 — частицы, поддерживаемые снизу. Сплошная кривая — результат расчета по (50) при $n=3$

Условное обозначение	Материал	Диаметр, мм	Условное обозначение	Материал	Диаметр, мм
×	Частицы катализатора	3, 28	▽	Морской песок	0,37
□	Частицы катализатора	4, 42	△	»	0,55
○	Стекло	5	+	Дробленая порода	1,00
◇	»	0,51			1,41
△	Свинцовая дробь	1,28			

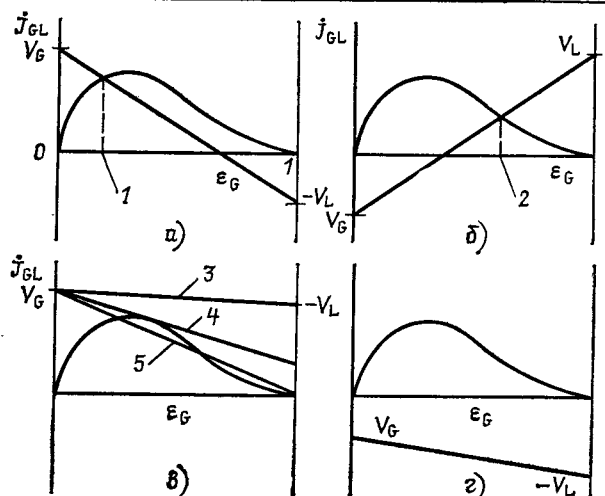


Рис. 4. Графический метод решения уравнений для истинного объемного газосодержания при вертикальном течении, использующий одномерную модель потока дрейфа для анализа однонаправленного движения в направлении u_∞ (а), в направлении, противоположном направлению u_∞ (б); противотока с дисперсной фазой, текущей в направлении u_∞ (в) и в направлении, противоположном направлению u_∞ (г):

1, 2 — решение для ε_G ; 3 — нет решения; 4 — одно решение (точка «захлебывания», предельный случай); 5 — два решения

что при высоких значениях скоростей непрерывной фазы система не имеет ни одного решения; в этом случае дискретная фаза должна увлекаться в направлении течения непрерывной, давая однопоточный, а не противоточный режим течения. Примерами такого типа течений могут быть пузырьковое течение газожидкостной системы, когда пузырьки газа поднимаются вверх сквозь текущий вниз поток жидкости, и течение суспензий жидкость — твердые частицы, когда твердые частицы опускаются вниз в направлении, противоположном жидкости, текущей вниз. Предельное состояние, при котором имеется только одно решение, или так называемое «захлебывание», можно определить из графика в координатах j_d и j_c для отдельной системы.

Противоток с дискретной фазой, текущей в направлении, противоположном u_{∞} . Очевидно, что с точки зрения физики здесь не может быть никаких решений. Это подтверждается диаграммой.

Модель, включающая изменения u и v по радиусу канала. В реальных системах наличие стенки и другие явления часто вызывают значительные изменения скорости и истинного объемного паросодержания в поперечном сечении канала. При помощи определенного усреднения и вводя понятие средневзвешенных значений различных параметров, можно расширить модель потока дрейфа и на эти случаи. В [8] развит этот метод для газожидкостных течений, но его можно непосредственно применять и к другим двухфазным системам.

Различные параметры, определенные выше (т. е. u_d , j_d , j , u_{dj} , ϵ_d и т. д.) можно рассматривать как локальные значения, взятые в отдельной точке поперечного сечения канала. Если считать, что F — любой произвольный локальный параметр, тогда среднее по поперечной площади канала значение можно определить как

$$\langle F \rangle = \frac{1}{S} \int_S F dS. \quad (51)$$

Если F выражает некоторое свойство дисперсной фазы d , можно определить среднемассовое значение этого свойства

$$\bar{F} = \frac{\langle \epsilon_d F \rangle}{\langle \epsilon_d \rangle} = \frac{(1/S) \int_S \epsilon_d F dS}{(1/S) \int_S \epsilon_d dS}. \quad (52)$$

Например, выражения [связанные с уравнением (40)] для среднего и среднемассового значений скоростей дисперсной фазы можно представить в виде

$$\langle u_d \rangle = \langle j \rangle + \langle u_{dj} \rangle; \quad (53)$$

$$\bar{u}_d = \frac{\langle j_d \rangle}{\langle \epsilon_d \rangle} = \frac{\dot{V}_d / S}{\langle \epsilon_d \rangle}. \quad (54)$$

Заметим, что $\langle j_d \rangle$ — независимая переменная системы, определяемая как отношение объемного расхода $\dot{V}_d$ дисперсной фазы к площади поперечного сечения S ; $\langle \epsilon_d \rangle$ — истинное объемное газосодержание площади поперечного сечения, которое можно считать равным средней объемной концентрации газовой фазы, измеренной, например, при мгновенном отключении некоторого участка канала и измерении части общего объема, занимаемого диспергированной фазой внутри этого участка канала. Таким образом, среднемассовое значение скорости диспергированной фазы имеет большее практическое значение, чем среднее значение скорости. Уравнение (54) можно записать в более удобной форме

$$\begin{aligned} \bar{u}_d &= \bar{j} + \bar{u}_{dj} = \frac{\langle \epsilon_d j \rangle}{\langle \epsilon_d \rangle} + \frac{\langle \epsilon_d u_{dj} \rangle}{\langle \epsilon_d \rangle} \\ &= C_0 \langle j \rangle + \frac{\langle \epsilon_d u_{dj} \rangle}{\langle \epsilon_d \rangle}, \end{aligned} \quad (55)$$

где C_0 задано выражением

$$C_0 = \frac{\langle \epsilon_d j \rangle}{\langle \epsilon_d \rangle \langle j \rangle} = \frac{(1/S) \int_S \epsilon_d j dS}{(1/S) \int_S j dS \int_S \epsilon_d dS}. \quad (56)$$

Значение среднемассовой скорости для непрерывной фазы

$$\bar{u}_c = \frac{\langle j_c \rangle}{\langle \epsilon_c \rangle} = \frac{\langle j \rangle - \langle j_d \rangle}{\langle 1 - \epsilon_d \rangle}. \quad (57)$$

Величину $\bar{u}_d / \bar{u}_c$ часто называют отношением истинных скоростей фаз (коэффициентом скольжения) S' . Комбинируя уравнения (55) — (57), получаем следующее выражение для коэффициента скольжения:

$$S' = \frac{\bar{u}_d}{\bar{u}_c} = \frac{\langle 1 - \epsilon_d \rangle}{1 / (C_0 + \langle u_{dj} \epsilon_d \rangle / \langle \epsilon_d \rangle \langle j \rangle) - \langle \epsilon_d \rangle}. \quad (58)$$

Для случая, когда разницы между локальными скоростями фаз нет ($u_{dj} = 0$), имеем

$$S' = \frac{\langle 1 - \epsilon_d \rangle}{1 / C_0 - \langle \epsilon_d \rangle}. \quad (59)$$

Впервые этот вид зависимости получен в [9]. Видно, что если даже во всех точках поперечного сечения канала локальные скорости двух фаз равны, между среднемассовыми значениями скоростей соответствующих фаз может существовать разница ($S' \neq 1$) из-за того, что существуют различные профили концентрации диспергированной фазы и локальной приведенной скорости j . Значение C_0 зависит от режима течения и особенностей рассматриваемой двухфазной системы. Значения C_0 обсуждаются в п. В, § 2.3.2 для газожидкостных течений.

Если предположить, что относительная скорость u_{dj} постоянна поперек канала, то уравнение (58) можно представить в виде зависимости объемного газосодержания фазы ϵ_d от расходного массового газосодержания x_d

$$\langle \epsilon_d \rangle = \frac{x_d \rho_c}{C_0 [x_d \rho_c + (1 - x_d) \rho_d] + \rho_d \rho_c u_{dj} / \bar{m}}. \quad (60)$$

Хотя может показаться, что модель потока дрейфа представляет собой до некоторой степени формальный подход к решению проблем, связанных с относительными скоростями, следует помнить, что в расчетах такого рода довольно просто сделать ошибки, и формализм может помочь их избежать. Такие модели широко применяются в расчетах средней объемной концентрации фаз (истинного объемного газосодержания) и представляют собой один из наиболее прямых и простых подходов. Однако ограничения действия этих моделей, проистекающие из их основного допущения и отсутствия феноменологического описания течения, делают ограниченными их полезность и область применения.

2.3.2. Газожидкостные потоки

Дж. Ф. Хьюитт

А. Общее описание двухфазных течений: режимы течения. Газожидкостные потоки являются наиболее сложными двухфазными потоками из-за существования деформируемой границы раздела фаз (что имеет место также в жидко-жидкостных потоках) и вследствие того, что одна из фаз (газовая) сжимаема. В двухфазном потоке возможен очень широкий диапазон конфигураций границ раздела фаз, но трактовку газожидкостных потоков можно до некоторой степени упростить, классифицируя тип распреде-

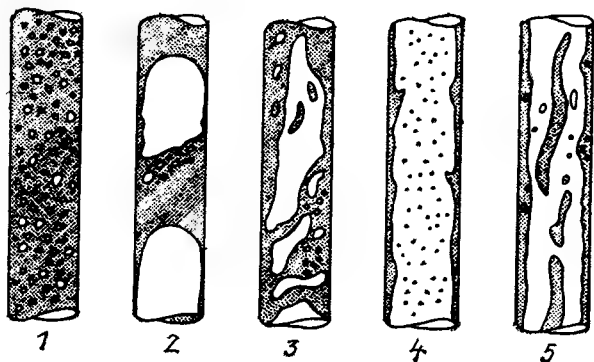


Рис. 1. Режимы течения в вертикальной трубе:

1 — пузырьковый; 2 — снарядный, или пробковый; 3 — вспененный; 4 — кольцевой; 5 — клочкообразно-кольцевой

ления фаз по отношению друг к другу и к стенкам канала в ряд категорий, называемых видами или режимами течения.

Наблюдения двухфазных течений, а следовательно, и их классификация довольно субъективны. Методы наблюдения и описания режимов течения обсуждаются, например, в [1]. Используемые методы включают высокоскоростную фотографию, исследование с помощью рентгеновского излучения и статистический анализ изменения величин, таких, как локальное давление в системе, напряжение трения на стенке, поглощение рентгеновского излучения. Любую информацию о режимах течения следовало бы рассматривать строго в рамках метода, которым она была получена. Обычно, лучше всего стараться использовать комбинацию методов, но даже и в этом случае имеется сильный элемент субъективности.

Ниже рассмотрены режимы течений и переходы между ними для вертикальных, горизонтальных и наклонных труб, а также для кожуха теплообменников.

Режимы течения в вертикальных трубах. Режимы течения, которые возникают при вертикальных подъемных течениях, перечислены ниже (рис. 1).

Пузырьковое течение — газовая фаза в виде отдельных пузырьков распределена в сплошной среде жидкости. **Пробковое, или снарядное, течение** — при более высоких скоростях газа происходит слияние пузырьков, в результате чего образуются большие, имеющие характерную пулеобразную форму пузыри, которые могут быть разделены областями жидкости, содержащей более мелкие пузырьки газа, диспергированного в этой жидкости.

Вспененное течение — с увеличением скорости потока происходит разрушение пузырей снарядного течения, ведущее к неустойчивому режиму течения. В трубах с большим внутренним диаметром происходит колебательное движение жидкости вверх и вниз — так называемое вспененное течение. Для труб с маленьким внутренним диаметром пульсации могут не появляться и можно наблюдать более плавный переход от снарядного режима течения к кольцевому.

Кольцевое течение — жидкость течет на стенках трубы в виде пленки, а газ течет в центре. Обычно некоторая часть жидкой фазы увлекается в виде мелких капель газовым ядром, возможно также (хотя и менее обычно) увлечение пузырьков в жидкую пленку.

Клочкообразно-кольцевое течение — при увеличении скорости жидкости концентрация капель в газовом ядре растет, и в конечном счете происходит слияние капель в ядре, ведущее к большому клочку, полосам или «жгутам» жидкости в газовом ядре. Этот режим характеризует течение с высокой массовой скоростью и низким расходом массовым газосодержанием.

Для вертикальных опускных течений режимы сходны с теми, что показаны на рис. 1, за исключением того, что вспененного течения не существует. В вертикальном опускном течении преобладающим является кольцевой режим течения, причем возможно, что на стенках имеет место кольцевое течение, а течение газа в канале отсутствует (аналогично течению стекающей пленки).

Физическая интерпретация переходных режимов течения обсуждается, например, в [2]. Переход от пузырькового течения к снарядному происходит при межпузырьковых столкновениях, слиянии и росте пузырей. Этот процесс обычно делает пузырьковое течение неустойчивым при истинном объемном паросодержании выше 30% или около того, хотя может иметь место стабилизирующее влияние поверхностно-активных загрязнений или высокой степени турбулентности, что позволяет пузырьковому течению сохраняться при истинных объемных газосодержаниях и превышающих названный уровень. Считают, что переход (в подъемном потоке) от снарядного течения к вспененному вызывается существованием явления «захлебывания» в основании крупных пузырей, вызывающего унос жидкости вверх внутри пузыря и ведущего в конце концов к вспененному режиму течения. Переход от вспененного режима течения к кольцевому связывают с обращением потока, т. е. с изменением, при котором весь поток жидкости, вводимой в канал, течет вверх. Область кольцевого течения можно расширить, если в нее включить область, в которой пульсации напряжений трения на стенке отрицательны. Более детальное обсуждение этого вопроса дано в [2].

Для представления результатов наблюдений режимов течения обычно прибегают к построению карт режимов течения. На осях координат откладывают приведенные скорости потоков или некоторые связанные с ними обобщенные параметры каждой из двух фаз, а линии на картах разделяют области, в которых можно было бы ожидать соответствующие режимы течения.

В карте из [3] (рис. 2) представлен довольно обширный материал о вертикальном подъемном течении. Карта нанесена в координатах приведенных потоков импульса соответствующих фаз $\rho_l j_l^2$ и $\rho_g j_g^2$, где ρ_l и ρ_g — плотности жидкости и газа; j_l и j_g — приведенные скорости или иначе объемные расходы фаз, приходящиеся на единицу площади поперечного сечения канала.

Для вертикального опускного течения имеется очень мало данных по режимам течения. На рис. 3 представлена карта режимов, которая взята из [4]. Карта основана на данных, полученных при изучении воздушно-водяных течений, для других систем ее следует использовать с осторожностью.

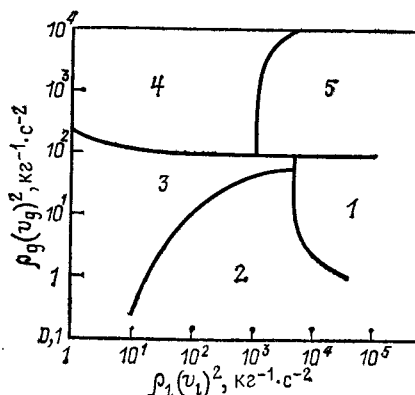


Рис. 2. Карта режимов течения Хьюитта и Робертса [3] для вертикального подъемного течения:

1 — пузырьковый с развитой структурой; 2 — снарядный; 3 — вспененный; 4 — кольцевой; 5 — клочкообразно-кольцевой

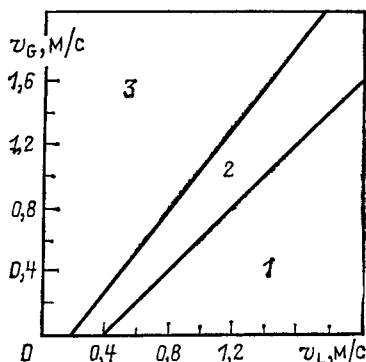


Рис. 3. Карта режимов течения для вертикального однонаправленного опускного потока [4] (v_L — приведенная скорость жидкости; v_G — приведенная скорость газа):

1 — сплошной и пузырьковый; 2 — переходный; 3 — дисперсно-кольцевой и кольцевой

Режимы течения в горизонтальных трубах. Режимы течения в горизонтальных двухфазных потоках рассмотрены на рис. 4.

Расслоенное течение — полное разделение фаз под действием сил тяжести: жидкость течет по дну канала, а газ — вдоль верхней части канала над ней с малым взаимодействием фаз.

Волновое течение — при увеличении скорости газа в расслоенном режиме течения на границе раздела газа и жидкости формируются волны, дающие расслоенный волновой, или просто волновой, режим течения.

Пузырьковое течение — газовая фаза в виде отдельных пузырьков распределена в сплошной среде жидкости. В горизонтальном потоке (см. рис. 4) пузырьки имеют тенденцию собираться в верхней части канала. При высоких скоростях жидкости пузырьки могут быть более равномерно распределены внутри жидкости и образовывать вспенившее течение.

Дисперсно-кольцевое течение — его характер подобен течению, наблюдаемому в вертикальных каналах, исключение составляет толщина пленки, которая неодинакова по периметру; на дне канала пленка много толще. В большинстве случаев встречается частичное увлечение капелек жидкости внутри газового ядра

Переменяющиеся течения — в горизонтальных трубах может существовать целый ряд сложных переменяющихся течений, и иногда принято рассматривать все такие течения как единый характерный тип режима течения. Однако этот класс переменяющихся течений довольно удобно разделить на пробковое (сплошное), волновое и гребнеобразное течения. При волновом течении, как и при вертикальном наблюдаются характерные пулеобразной формы пузыри, которые имеют тенденцию двигаться вдоль канала ближе к верхней части трубы, как показано на рисунке 4.

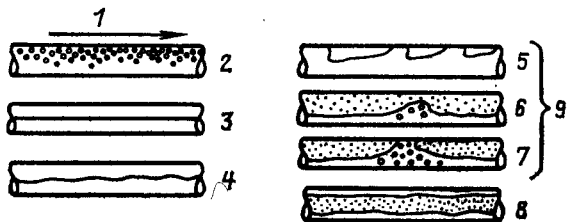


Рис. 4. Режимы течения горизонтального двухфазного потока: 1 — сплошное; 2 — пузырьковое; 3 — расслоенное; 4 — волновое; 5 — сплошное с перемычками; 6 — гребнеобразное; 7 — волновое с перемычками (слизистое); 8 — дисперсно-кольцевое; 9 — переменяющееся

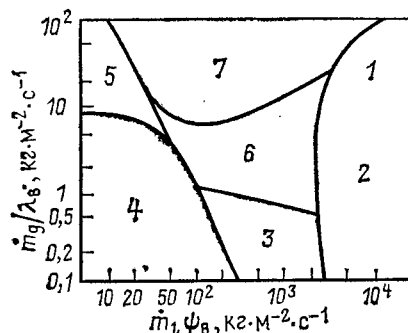


Рис. 5. Карта режимов течения Бейкера [5]:

1 — сплошное; 2 — пузырьковое; 3 — дисперсно-кольцевое; 4 — расслоенное; 5 — волновое; 6 — волновое с перемычками; 7 — дисперсно-кольцевое

Волновое течение (с перемычками) характеризуется распространением вдоль канала жидкостных перемычек, в которых в сплошной среде жидкости уносится большое количество газовых пузырьков.

При гребнеобразном течении вспененные жидкостные перемычки принимают форму гребнеобразных волн на поверхности слоя жидкости, текущей по дну трубы; эти волны фактически не прикасаются к верхней стенке трубы, как это происходит в волновом течении с перемычками.

Одной из наиболее широко используемых карт режимов течения для горизонтальных двухфазных потоков является карта из [5]. Эта карта находит широкое применение и в настоящее время, поэтому мы сочли возможным воспроизвести ее здесь, хотя существуют и другие карты. При построении карты автор учитывал физические свойства среды введением следующих параметров:

$$\lambda_B = \left(\frac{\rho_g}{\rho_A} \frac{\rho_l}{\rho_w} \right)^{0.5}; \quad (1)$$

$$\psi_B = \frac{\sigma_w}{\sigma} \left[\frac{\eta_l}{\eta_w} \left(\frac{\rho_w}{\rho_l} \right)^2 \right]^{1/3}, \quad (2)$$

где ρ , σ и η — соответственно плотность, поверхностное натяжение и вязкость; индексы g и l обозначают газообразную и жидкую фазы; индексы A и w относятся к значениям параметров для воздуха и воды при атмосферных условиях (обычно 20°C и атмосферное давление). Ясно, что λ_B и ψ_B имеют одну и ту же размерность при атмосферном давлении воздушно-водяного течения. В системе единиц СИ принимаются следующие значения параметров для системы воздух — вода при нормальных условиях: $\rho_A = 1,205 \text{ кг/м}^3$; $\eta_w = 0,001002 \text{ кг/(м·с)}$; $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$; $\sigma_w = 0,0728 \text{ Н/м}$. Удобно строить карту режимов в системе координат m_g/λ_B и $m_L\psi_B$ (рис. 5).

Однако карта режимов из [5] непригодна для учета влияния различных параметров системы. Основной проблемой для всех карт этого типа является невозможность представить все свойственные течениям переходы при помощи единого набора параметров.

С учетом этого факта для описания режимов течения в горизонтальной системе был рекомендован полутеоретический метод [6]. Этот метод имеет по крайней мере то преимущество, что в его основе лежат определенные физические закономерности, и он считается более подходящим для экстраполяции в более широкую область параметров системы, чем другие карты режимов течения горизонтальных двухфазных потоков.

Карта режимов, приведенная в [6], представлена в координатах следующих безразмерных параметров:

$$X = \left[\frac{(dp_F/dz)_l}{(dp_F/dz)_g} \right]^{1/2}; \quad (3)$$

$$F = \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l - \rho_g} \frac{j_g}{D g \cos \alpha}}; \quad (4)$$

$$K = \left[\frac{\rho_g j_g^2}{(\rho_l - \rho_g) D g \cos \alpha} \frac{D j_l}{\nu_l} \right]^{1/2}; \quad (5)$$

$$T = \left[\frac{(dp_F/dz)_l}{(\rho_l - \rho_g) g \cos \alpha} \right]^{1/2}; \quad (6)$$

где $(dp_F/dz)_l$ и $(dp_F/dz)_g$ — градиенты давления из-за трения для жидкой и газовой фаз при условии, что в канале течет только жидкость или газ; ρ_g и ρ_l — плотности газовой и жидкой фаз; j_g и j_l — приведенные скорости газа и жидкости (объемный расход соответствующей фазы, деленный на площадь поперечного сечения канала); D — диаметр трубы; ν_l — кинематическая вязкость жидкости; g — ускорение силы тяжести; α — угол наклона канала к горизонтالي.

Методология состоит в расчете значений F , K и T для различных переходов в виде зависимости от безразмерной высоты слоя жидкости $\tilde{h}_l = h_l/D$, где h_l — высота жидкого слоя при условии, что в канале существует расслоенный режим течения. Можно показать, что $\tilde{h}_l$ для расслоенных режимов течения является функцией только параметра X , следовательно, критерии перехода F , K и T можно однозначно связать с X и карту режимов течения можно построить в системе координат F , K , T и X как показано на рис. 6. Ниже перечислены различные переходы, представленные на этой диаграмме.

Переход А — граница между расслоенным 3 и перемежающимся 2 или дисперсно-кольцевым 5 режимами течения. Авторы [6] описывают этот переход в терминах классической неустойчивости Кельвина — Гельмгольца и выражают его в безразмерном виде с помощью соотношения между F и X .

Переход В — граница между перемежающимся 2 и дисперсно-кольцевым 5 режимами течения. Авторы [6] высказали гипотезу, что если $\tilde{h}_l > 0,5$, то синусоидальные волны, вырастающие на поверхности раздела фаз, касаются верхней стенки трубы раньше, чем провал между волнами достигает дна трубы. Из этого предположения следует, что для $\tilde{h}_l > 0,5$, переход от расслоенного течения к перемежающемуся более вероятен, чем к кольцевому. Для горизонтального течения $\tilde{h}_l = 0,5$ соответствует $X = 1,6$.

Переход С — граница между расслоенным 3 и волновым 4 режимами течения. Авторы [6] используют модифицированную форму модели Джеффриса [7, 8] для межфазных неустойчивостей и выражают переход в виде соотношения между K и X .

Переход D — граница между перемежающимися 2 и пузырьковым 1 режимами течения. Авторы [6] считают

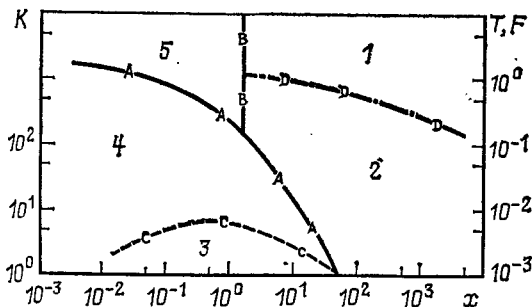


Рис. 6. Обобщенная карта режимов горизонтального двухфазного потока Тейтла и Даклера [6]:

1 — пузырьковый; 2 — перемежающийся; 3 — расслоенный; 4 — волновой; 5 — дисперсно-кольцевой жидкостный

Кривые: А и В С D
Координаты: F от X K от X T от X

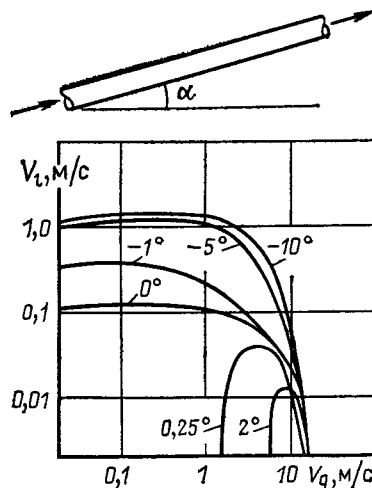


Рис. 7. Влияние угла наклона на границу между расслоенным (область под кривыми) и перемежающимся (над кривыми) режимами течения [11]

этот переход сходным с ситуацией, когда турбулентные флуктуации внутри жидкости достаточны, чтобы преодолеть силы выталкивания, ведущие к удерживанию газа у верхней стенки трубы. Приближенный анализ приводит к выражению для перехода D в виде зависимости между T и X (рис. 6).

Метод, используемый в [6], вероятно, является наилучшим общим методом для предварительного определения режимов течения в горизонтальных потоках, но его физическая основа не вполне надежна. Недостатки модели, например, были показаны в недавних работах [9, 10]. Некоторые из переходов изменяются с углом наклона трубы к горизонтالي совсем не таким образом, как предсказывает теория; плохо описывается также влияние вязкости жидкости на режимы течения.

Режимы течения в наклонных трубах. Хотя системы наклонных труб имеют довольно большое значение в промышленных установках, мы располагаем очень небольшой информацией о режимах течения в них. Наиболее заметное влияние наклон трубы (по отношению к горизонтальным течениям) оказывает на границу между расслоенным и перемежающимся режимами течений. Это показано на рис. 7, на который нанесены данные из [11].

Влияние даже очень маленького отклонения от горизонтали на линию перехода от режима к режиму очень заметно, и именно этим можно объяснить некоторые из расхождений между данными, приведенными в литературе для режимов течения в номинально горизонтальных трубах.

Модель режимов течения [6] можно применить и к течениям в наклонных трубах, но тогда зависимости между F , K , T и X невозможно представить на одной диаграмме, как это было сделано раньше для горизонтальных течений на рис. 6. Это происходит потому, что $\tilde{h}_l$ больше не является функцией только X , зависят также и от угла наклона трубы. Читателю, заинтересованному в последовательном предсказании режимов течения в наклонных трубах, следует обратиться к оригинальной статье [6], а также к более детальному обзору [2]. В [11] было показано, что большое влияние наклона на границу между расслоенными и перемежающимися режимами течения (рис. 7) можно успешно предсказать с помощью методологии [6].

Режимы течения в кожухе кожухотрубных теплообменников. Часто течение в трубных теплообменниках рассматривают в виде идеализированного поперечного потока вокруг пучка труб.

Режимы течения в поперечном потоке были исследованы в [12] (рис. 8). Карта режимов течения для двухфазного поперечного обтекания пучков труб, данная Грэнтом, приведена на рис. 9 для горизонтальных и вертикальных потоков. Карты Грэнта построены в координатах приведен-

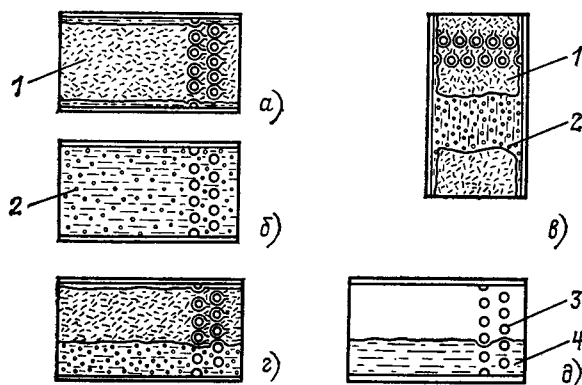


Рис. 8. Режимы течения в поперечном потоке [12]: дисперсный (а); пузырьковый — вертикальный и горизонтальный поток (б); нестабильный режим течения — вертикальный поток (в); дисперсно-расслоенный (г) и расслоенный (д); 1 — капельки жидкости в газе; 2 — пузырьки газа в жидкости; 3 — газ; 4 — жидкость

ных скоростей, умноженных на параметры физических свойств. Приведенная скорость определяется как плотность объемного расхода фазы, деленная на среднюю площадь поперечного сечения потока. Течения в реальных теплообменниках отличаются от идеализированного поперечного сечения, показанного на рис. 9, некоторыми эффектами, которые включают: 1) сепарацию из-за изменений в направлении потока, поступающего в теплообменник, разделенный перегородками (например, газовые пузырьки могут образовываться на той стороне перегородки, которая расположена ниже по течению); 2) утечки жидкости через пространства между трубами и перегородками и оболочкой. Вокруг пучка возникает также обходное течение. В двухфазных течениях эти явления связываются с разделением фаз, так что двухфазный состав байпасных потоков и утечек жидкости обычно отличен от состава основных противоточных течений.

Эти факторы делают исключительно трудным прогнозирование двухфазных течений в трубных теплообменниках.

Режимы течения в системах с фазовыми превращениями. Путь, по которому идет развитие режимов течения в испаряющейся системе, показан на рис. 10. На этой концептуальной диаграмме жидкость входит в трубу при по-

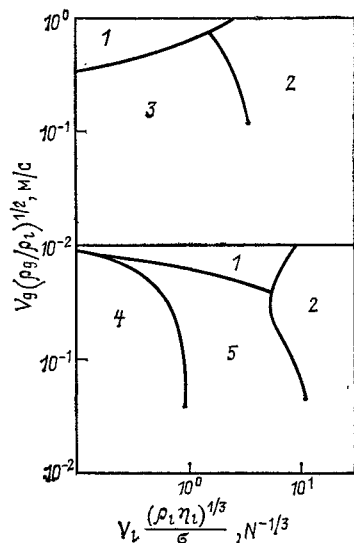


Рис. 9. Карты режимов течения двухфазного поперечного потока [12] для вертикального (сверху) и горизонтального (снизу) потоков:

1 — дисперсный; 2 — пузырьковый; 3 — перемежающийся; 4 — расслоенный; 5 — дисперсно-расслоенный

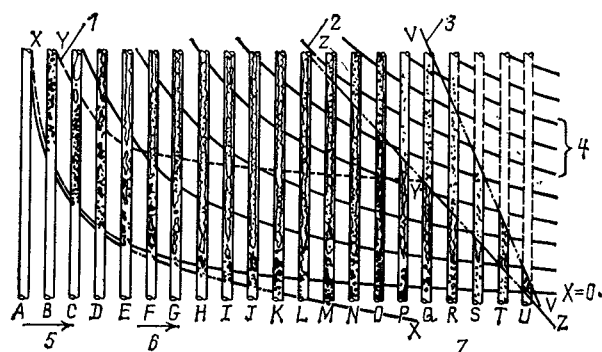


Рис. 10. Режимы течения жидкости и подвод теплоты при испарении в трубе:

1 — подавление пузырьчатого кипения; 2 — сечение кризиса теплоотдачи; 3 — сечение, где наступает расплавление трубы; 4 — линия постоянного паросодержания; 5 — вход жидкости с постоянной скоростью и температурой; 6 — равномерное, скачкообразное возрастание потока теплоты; 7 — пузырьчатое кипение на выходе

стоянным скорости и температуре, и состояние потока и теплоперенос в трубе, подвод теплоты к которой нарастает равномерно и постепенно, показаны в точках А—U. Приращение теплового потока составляет величину, необходимую для нагрева входящей жидкости до температуры насыщения в конце трубы. Режимы течения жидкости развиваются от однофазного через пузырьковый, сырадный и вспененный к кольцевому. Пар прежде всего образуется в виде маленьких пузырьков — зародышей на стенке трубы, и геометрическим местом точек начала зародышеобразования является линия XX. Если тепловой поток низок (шаг В), тогда зародышеобразование может быть задержано дальше точки, в которой термодинамическое истинное объемное паросодержание $x=0$. В этом случае температура стенки недостаточна, чтобы вызывать зародышеобразование, и жидкость может иметь значительный объемный перегрев еще до начала парообразования. При высоких тепловых потоках, однако, зародышеобразование происходит выше сечения, где термодинамическое истинное объемное паросодержание равно нулю вследствие кипения недогретой жидкости (кипения с недогревом). Первоначально в области кипения с недогревом пузырьки пара имеют тенденцию оставаться вблизи стенки. Однако, если тепловой поток продолжает повышаться, пузырьки отделяются и подвергаются конденсации до размера, зависящего от объемной температуры жидкости в ядре потока. Заметим, что существование пузырьков в области чистого недогрева представляет отклонение от термодинамического равновесия, и это отклонение продолжает существовать внутри области, где нет удельного паросодержания. В этой области низкого паросодержания, в частности, режимы течения, прогнозируемые на основе термодинамического равновесия, отличаются от режимов, полученных на практике. По мере движения потока вверх по трубе происходит дальнейшее образование пара в центрах парообразования и в результате непосредственного испарения с поверхности раздела. Температурный напор, необходимый, чтобы передать теплоту через жидкую фазу к границе раздела с помощью механизмов теплопроводности и конвекции, уменьшается, в то время как паросодержание увеличивается. Это означает, что важность межфазного теплообмена растет по отношению к теплоотдаче при пузырьковом кипении, и когда паросодержание увеличивается, пузырьковое кипение подавляется, так как температура стенки дальше становится недостаточно высокой, чтобы поддерживать активные центры парообразования. Полное подавление кипения показано на рис. 10 линией YY. В кольцевом режиме течения жидкость теряется из пленки жидкости в результате испарения и уноса. Расход жидкости в

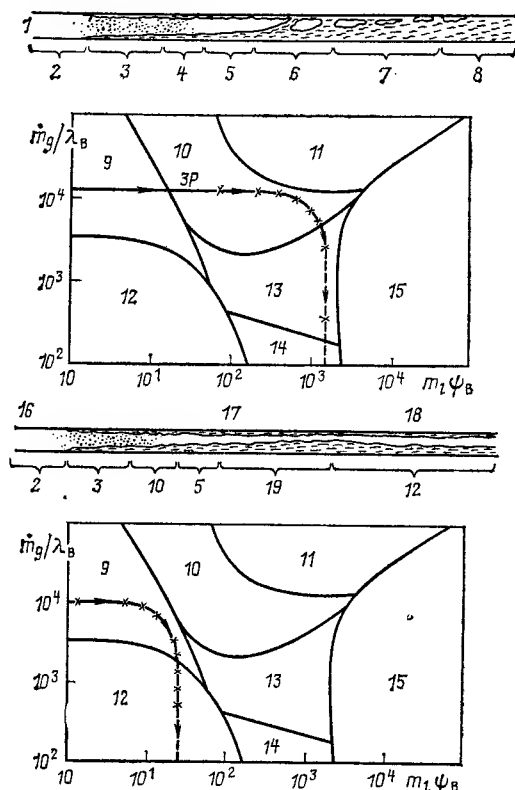


Рис. 11. Режимы течения при конденсации в горизонтальной трубе [14].

1 — высокие расходы жидкости; 2 — перегретый пар, сухая стенка; 3 — перегретый пар, влажная стенка, дисперсно-кольцевой режим течения; 4 — кольцевой; 5 — полукольцевой; 6 — волновой с перемычками; 7 — снарядный; 8 — недогретая жидкость; 9 — волновой; 10 — кольцевой; 11 — дисперсно-кольцевой; 12 — расслоенный; 13 — волновой с перемычками; 14 — снарядный; 15 — пузырьковый; 16 — низкие расходы жидкости; 17 — удаление конденсата за счет касательных напряжений при распротранении волн; 18 — стекание конденсата под действием сил тяжести; 19 — волновой

пленке в конце канала уменьшается до нуля (рис. 10, точка L), и стенка становится сухой¹. Именно этот тип критических условий в большей степени, чем переход к пленочному кипению, является наиболее распространенным при кипении с вынужденной конвекцией.

При постоянном подводе теплоты температура стенки в сухой области значительно выше, чем в области ниже точки высыхания. При дальнейшем повышении температурного потока точка высыхания распространяется (перемещается) вниз по потоку (линия ZZ). В большинстве экспериментов по изучению кризиса теплоотдачи опыт прерывался, как только появлялось первое отклонение температуры на конце канала. Если тепловой поток достаточно высок, повышение температуры при кризисе теплоотдачи может привести к расплавлению стенок канала, возможное местоположение этой кривой показано линией VV на рис. 10. Ситуация, показанная в позициях R—U, физически невозможна вследствие расплавления стенок трубы, и, чтобы измерить критический тепловой поток при таких тепловых нагрузках и условиях на входе, необходимо использовать более короткие трубы. Отметим, что линия ZZ пересекает линии постоянного термодинамического паросодержания, и режим течения, в котором происходит кризис теплоотдачи, изменяется от кольцевого до области кипения с недогревом. В этой области механизм кризиса кипения

наиболее вероятно связан с началом пленочного кипения, чем с исчезновением жидкой пленки, как это происходит в кольцевом режиме.

Режимы течения при конденсации пара в горизонтальных каналах обсуждаются в [13, 14]. Режимы течения, встречающиеся при конденсации, приведены на рис. 11, который взят из [14]. Как будет показано, ситуация, которая наблюдалась в этом случае, противоположна ситуации для испарения. На рис. 11 так называемая длина конденсации для двух типичных случаев (высокая и низкая жидкостная нагрузка соответственно) показана на карте [5]. Видно, что области режимов, встречающихся при конденсации, зависят от начальных массовых расходов пара и, следовательно, от конечной жидкостной нагрузки. В работе [14] указано, что встречавшиеся при конденсации режимы не соответствовали предсказанным по карте [5]. Однако в [13] показано, что карта, рекомендованная в [6], дает вполне удовлетворительные прогнозы для режимов течения при конденсации. Бребер и др. предлагают путь, в которых метод расчета коэффициента теплоотдачи при конденсации можно выбрать в соответствии с особенностями встречающегося режима течения.

В. Применение одномомерных уравнений. Различные формы уравнений для многофазного течения были описаны в пп. С и D, § 2.3.1. Ниже обсуждается применение этих уравнений для специфического случая газожидкостного потока для определения градиента давления и истинного объемного газосодержания (средней объемной концентрации газовой фазы). Эти параметры нельзя получить непосредственно из законов сохранения или уравнений потока дрейфа; необходимо вводить некоторый вид эмпирической корреляции. Однако внутри общих уравнений могут быть исследованы эти эмпирические соотношения.

Из этого следует, что мы сначала сформулируем законы сохранения снова для двухфазного потока газа и жидкости в канале. Затем будет сделан обзор эмпирических аппроксимаций для расчетов градиента давления, обусловленного трением, и истинного объемного газосодержания с определенными рекомендациями для целей конструирования. Затем обсудим изменение давления при прохождении через особые точки потока. Здесь под особыми точками понимаются те компоненты системы, в которых происходит отклонение течения от прямолинейного его движения вдоль канала. Такие особые точки включают, например, диафрагмы, сужения и расширения канала и изгибы. Чтобы рассчитать общий перепад давления в системе, необходимо проинтегрировать вдоль всей длины канала с постоянным поперечным сечением выражения для градиента давления, которые приведены ниже, и добавить к этому значению изменения давления во всех особых точках.

Вернемся к уравнениям потока дрейфа, описанным в п. D, § 2.3.1, и обсудим их основное применение к потокам газ — жидкость. Специальные применения этих моделей в отдельных режимах течения рассмотрены в п. С.

Уравнения сохранения газожидкостных течений. Уравнения сохранения для гомогенного течения были выведены в п. С, § 2.3.1.

Уравнение сохранения массы [уравнение (13), § 2.3.1] имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_H S) + S \frac{\partial \rho_H}{\partial t} = 0,$$

уравнение импульса [уравнение (16), § 2.3.1]

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial (\dot{m}^2 S / \rho_H)}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - g_H \sin \alpha - \frac{\tau_0 P}{S}$$

и уравнение энергии [(2.3), § 2.3.1]

$$\rho_H \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \dot{v} \frac{\partial e}{\partial z} \right) = \frac{\dot{q} P}{S} + \dot{q} v + \frac{\partial P}{\partial t},$$

¹ Это явление называют кризисом теплоотдачи. — Прим. пер.

где j — общая плотность объемного расхода; S — поперечное сечение канала; m — плотность потока массы; P — давление; g — ускорение силы тяжести; α — угол наклона канала к горизонтали; τ_0 — напряжения трения на стенке; P — периметр канала; $\dot{q}_w$ — плотность теплового потока на стенке; $\dot{q}_v$ — скорость внутреннего тепловыделения в единице объема; z — расстояние по оси. Гомогенная плотность ρ_H определяется выражением

$$\rho_H = \frac{\dot{m}}{j} = \frac{1}{\dot{x}_g/\rho_g + \dot{x}_l/\rho_l} = \frac{\rho_g \rho_l}{\dot{x}_g \rho_l + (1 - \dot{x}_g) \rho_g}. \quad (7)$$

Внутренняя энергия единицы массы жидкости

$$\begin{aligned} e &= h + \frac{j^2}{2} + gz \sin \alpha = (\dot{x}_g h_g + \dot{x}_l h_l) + \\ &+ \frac{(\dot{m}^2 \dot{x}_g^2 / \rho_g + \dot{m}^2 \dot{x}_l^2 / \rho_l)}{2} + gz \sin \alpha = \\ &= \dot{x}_g h_g + (1 - \dot{x}_g) h_l + \frac{\dot{m}^2}{2} \times \\ &\times \left[\frac{\dot{x}_g^2 \rho_l + (1 - \dot{x}_g)^2 \rho_g}{\rho_g \rho_l} \right] + gz \sin \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Для модели раздельного течения уравнения неразрывности для газовой и жидкой фаз выводят из уравнения (25), § 2.3.1.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \varepsilon_g S) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_g \varepsilon_g u_g S) = -\dot{m}_{gt} = \dot{m}_{lt}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_l (1 - \varepsilon_g) S] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_l (1 - \varepsilon_g) u_l S] = -\dot{m}_{lt}, \quad (10)$$

где $\dot{m}_{lt}$ — скорость превращения жидкой фазы в паровую, деленная на единицу длины канала. Два уравнения можно просуммировать, чтобы получить уравнение неразрывности раздельного течения для двухфазной смеси,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{TP} S) + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{m} S) = 0, \quad (11)$$

где $\rho_{TP} = \rho_{MP}$ из уравнения (6), § 2.3.1

$$\rho_{TP} = \varepsilon_g \rho_g + (1 - \varepsilon_g) \rho_l. \quad (12)$$

Таким же образом получены из уравнения (33), § 2.3.1 и уравнения импульса для модели раздельного течения газожидкостного потока соответственно для жидкой и газовой фаз

$$\begin{aligned} -\varepsilon_g \frac{\partial p}{\partial z} - g \rho_g \varepsilon_g \sin \alpha - \frac{\tau_{g0} P_{g0}}{S} + \\ + \frac{\tau_{gl} P_{gl}}{S} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \varepsilon_g u_g) + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_g u_g^2 \varepsilon_g S); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -(1 - \varepsilon_g) \frac{\partial p}{\partial z} - g \rho_l (1 - \varepsilon_g) \sin \alpha - \frac{\tau_{l0} P_{l0}}{S} - \\ - \frac{\tau_{gl} P_{gl}}{S} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho_l (1 - \varepsilon_g) u_l] + \\ + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} [\rho_l u_l^2 (1 - \varepsilon_g) S], \end{aligned} \quad (14)$$

где τ_{g0} , τ_{l0} и τ_{gl} — соответственно напряжения трения газа на стенке, напряжения трения жидкости на стенке и касательные напряжения газа относительно жидкости (межфазные касательные напряжения); P_{g0} , P_{l0} и P_{gl} — соответственные периметры, на которых действуют эти касательные напряжения.

Уравнения (13) и (14) можно сложить, чтобы получить уравнения импульса смеси для раздельного течения [см.

уравнение (34), § 2.3.1]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial z} - g \rho_{TP} \sin \alpha - \frac{\tau_{g0} P_{g0} + \tau_{l0} P_{l0}}{S} = \\ = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \dot{m}^2 S \left[\frac{\dot{x}_g^2}{\varepsilon_g \rho_g} + \frac{(1 - \dot{x}_g)^2}{\rho_l (1 - \varepsilon_g)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Во многих технических расчетах газожидкостных потоков часто считают напряжение трения на стенке постоянным по периметру канала. При этом допущении уравнение (15) можно привести к следующему уравнению для установившегося стационарного течения в канале с постоянной площадью поперечного сечения

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\tau_0 P}{S} + \dot{m}^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{\dot{x}_g^2}{\rho_g \varepsilon_g} + \frac{(1 - \dot{x}_g)^2}{\rho_l (1 - \varepsilon_g)} \right] + g \rho_{TP} \sin \alpha, \quad (16)$$

которое наиболее часто используется при расчете перепада давления двухфазного потока в канале.

Три слагаемых в правой части этого уравнения являются составляющими градиента давления, обусловленными трением, ускорением и силой тяжести [см. уравнение (18), § 2.3.1].

Уравнение энергии смеси для модели раздельного газожидкостного течения логически вытекает из уравнения (37), § 2.3.1 и имеет вид

$$\begin{aligned} S \frac{\partial}{\partial t} [\rho_g \varepsilon_g h_g + \rho_l (1 - \varepsilon_g) h_l] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \{ \dot{m} S [\dot{x}_g h_g + (1 - \dot{x}_g) h_l] \} = \dot{q} P + \dot{q}_v S - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \dot{m}^3 \left[\frac{\dot{x}_g^3}{\rho_g^2 \varepsilon_g^2} + \frac{(1 - \dot{x}_g)^3}{\rho_l^2 (1 - \varepsilon_g)^2} \right] \right\} - g \dot{m} S \sin \alpha - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \dot{m}^2 \left[\frac{\dot{x}_g^2}{\rho_g \varepsilon_g} + \frac{(1 - \dot{x}_g)^2}{\rho_l (1 - \varepsilon_g)} \right] \right\} + S \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \quad (17)$$

Наиболее важное применение уравнение энергии находит в расчете расходного массового газосодержания потока в испаряющейся или конденсирующейся жидкости. Для установившегося стационарного потока с незначительным внутренним тепловыделением, где члены, описывающие кинетическую и потенциальную энергию, пренебрежимо малы по сравнению с энтальпией, уравнения энергии как гомогенного течения [уравнение (23), § 2.3.1], так и раздельного [уравнение (17)] можно привести к простому виду

$$d\dot{x}_g/dz = \dot{q} P / (\dot{m} S h_{lg}), \quad (18)$$

где h_{lg} — скрытая теплота парообразования, равная $h_g - h_l$. Для канала с постоянным тепловым потоком и входным массовым газосодержанием $\dot{x}_{gi}$ уравнение (18) после интегрирования принимает следующий вид:

$$\dot{x}_g = \dot{x}_{gi} + \dot{q} P_z / (\dot{m} S h_{lg}). \quad (19)$$

Перепад давления в стационарном двухфазном потоке в каналах постоянного поперечного сечения можно рассчитывать, используя баланс импульса гомогенного течения [см. (17), § 2.3.1] или баланс импульса раздельного течения [см. (16)]. В обоих случаях для расчета градиента давления, обусловленного трением, требуется эмпирическая аппроксимация

$$-dP_F/dz = \tau_0 P/S. \quad (20)$$

Хотя градиенты давления, обусловленные ускорением и силой тяжести, в гомогенной модели можно рассчитать в явном виде по скоростям фаз потока и физическим свойствам фаз, модель раздельного течения требует также знания истинного объемного газосодержания ε_g при расчете

этих членов. Обычно ε_g получают из эмпирической зависимости.

Так как градиент давления, характеризующий потери на трение, должен быть описан эмпирически, соотношение зависит от результатов экспериментов, которые дают, по определению, полный градиент давления. Чтобы оценить градиент давления, обусловленный трением, из полного градиента давления необходимо вычесть члены, определяющие падение давления из-за наличия ускорения и силы тяжести. Так как эти члены соответственно различны для гомогенной и раздельной моделей течения, данные по градиентам давления из-за трения, используемые в качестве основы для получения зависимостей, различны. Таким образом, имеется скрытая взаимосвязь между зависимостями для истинного объемного газосодержания и градиента давления, обусловленного трением, использующими модель раздельного течения. Это часто вызывает путаницу при сравнении данных по градиентам давления, характеризующих потери на трение, полученных разными авторами.

Перепады давления, обусловленные трением, в прямых каналах. Обнаружено, что удобно связать градиент давления, характеризующий потери на трение, для двухфазного потока с градиентом давления для потока газовой или жидкой фазы в условиях движения в канале только одной фазы. Перепад давления в двухфазном течении можно связать с однофазными потоками соответствующих фаз при их действительных скоростях течения [а именно $m_g = \dot{x}_g \dot{m}$ и $m_l = (1 - \dot{x}_g) \dot{m}$]. В этом случае градиенты давлений для однофазных течений обозначают как $(dp_F/dz)_g$ и $(dp_F/dz)_l$ для газовой и жидкой фаз соответственно.

Согласно другому методу градиент давления из-за трения для двухфазного потока можно связать с градиентом давления для потока, имеющего тот же самый полный массовый расход, но обладающего физическими свойствами только газа или только жидкости. Эти однофазные градиенты давления определяются соответственно как $(dp_F/dz)_{g0}$ и $(dp_F/dz)_{l0}$. Используя эти исходные градиенты давления однофазных потоков, можно определить параметры трения Φ_g , Φ_l , Φ_{g0} и Φ_{l0} :

$$\Phi_g^2 = \frac{dp_F/dz}{(dp_F/dz)_g}; \quad (21)$$

$$\Phi_l^2 = \frac{dp_F/dz}{(dp_F/dz)_l}; \quad (22)$$

$$\Phi_{g0}^2 = \frac{dp_F/dz}{(dp_F/dz)_{g0}}; \quad (23)$$

$$\Phi_{l0}^2 = \frac{dp_F/dz}{(dp_F/dz)_{l0}}; \quad (24)$$

где dp_F/dz — градиент давления, возникающий в результате трения в двухфазном потоке. Соответствующие градиенты давления для однофазного течения можно рассчитать по стандартным формулам

$$-\left(\frac{dp_F}{dz}\right)_g = \frac{2f_g \dot{m}^2 \dot{x}_g^2}{D \rho_g}; \quad (25)$$

$$-\left(\frac{dp_F}{dz}\right)_l = \frac{2f_l \dot{m}^2 (1 - \dot{x}_g)^2}{D \rho_l}; \quad (26)$$

$$-\left(\frac{dp_F}{dz}\right)_{g0} = \frac{2f_{g0} \dot{m}^2}{D \rho_g}; \quad (27)$$

$$-\left(\frac{dp_F}{dz}\right)_{l0} = \frac{2f_{l0} \dot{m}^2}{D \rho_l}; \quad (28)$$

где f — коэффициент трения Фаннинга; $\dot{m}$ — массовая скорость; $\dot{x}_g$ — расходное массовое газосодержание; D — гидравлический эквивалентный диаметр канала; ρ_g и

ρ_l — плотности газа и жидкости. Коэффициенты трения f_g , f_l , f_{g0} и f_{l0} взяты из стандартных таблиц или уравнений для однофазного потока, который связывает их с числами Рейнольдса,

$$Re_g = \dot{m} x_g D / \eta_g; \quad (29)$$

$$Re_l = \dot{m} (1 - \dot{x}_g) D / \eta_l; \quad (30)$$

$$Re_{g0} = \dot{m} D / \eta_g; \quad (31)$$

$$Re_{l0} = \dot{m} D / \eta_l; \quad (32)$$

где η_g и η_l — коэффициенты динамической вязкости газа и жидкости. Для ламинарного потока ($Re < 2000$) $f = 16/Re$; для турбулентного потока ($Re > 2000$) часто используют уравнение Блазиуса

$$f = 0,079 Re^{-1/4}, \quad (33)$$

хотя оно имеет ограниченную точность (см. разд. 2.2).

Параметрами, обычно используемыми для корреляции данных по перепадам давления в двухфазных потоках, являются параметр Мартинелли

$$X^2 = \frac{(dp_F/dz)_l}{(dp_F/dz)_g} \quad (34)$$

и параметр Чизхолма

$$Y^2 = \frac{(dp_F/dz)_{l0}}{(dp_F/dz)_{g0}}. \quad (35)$$

Корреляции, основанные на гомогенной модели течения. При использовании гомогенной модели течения удобно определить коэффициент трения двухфазного потока таким образом, чтобы можно было рассчитать градиент давления по следующей формуле:

$$-\frac{dp_F}{dz} = \frac{\tau_0 P}{S} = \frac{2f_{TP} \dot{m}^2}{D \rho_H}, \quad (36)$$

где ρ_H — плотность гомогенного потока, определяемая уравнением (7). При обычной процедуре определения f_{TP} необходимо использовать соотношения для однофазного потока, определяя число Рейнольдса для двухфазного потока следующим образом:

$$Re_{TP} = \dot{m} D / \eta_{TP}. \quad (37)$$

Некоторые другие соотношения были предложены для определения вязкости двухфазного потока η_{TP} (см., например, [15]). По-видимому наиболее общим соотношением является следующая зависимость [16]

$$\frac{1}{\eta_{TP}} = \frac{\dot{x}_g}{\eta_g} + \frac{(1 - \dot{x}_g)}{\eta_l}. \quad (38)$$

Если для определения коэффициента трения используется уравнение Блазиуса, из этого определения можно прямо рассчитать параметр Мартинелли

$$\Phi_{l0}^2 = \left(1 + \dot{x}_g \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l}\right) \left(1 + \dot{x}_g \frac{\eta_l - \eta_g}{\eta_g}\right)^{-1/4}. \quad (39)$$

Гомогенная модель имеет тенденцию к недооценке градиента давления двухфазного потока, характеризующего потери на трение (при средних давлениях в пароводяных системах) иногда довольно значительную. Разумные точные оценки с помощью этого метода чаще получают при высоких давлениях и (или) высоких массовых скоростях. Однако обычно лучше использовать некоторые виды раздельной модели течения.

Корреляция для падения давления, характеризующего потери на трение, основанная на модели раздельного течения. Для расчета потерь давления в двухфазном течении

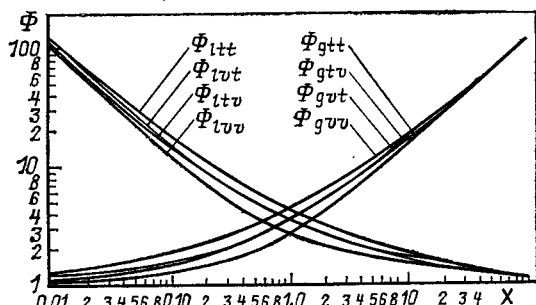


Рис. 12. Корреляция Локкарта и Мартинелли [17] для потери давления на трение

наиболее широко используется корреляция [17], которая связывает параметры Мартинелли Φ_g и Φ_l [см. уравнения (21), (22)] с параметром X , определенным уравнением (23). Кривые для этих корреляций показаны на рис. 12, причем различные кривые помечены соответствующими индексами в зависимости от того, являются ли однофазные потоки по определению ламинарными (вязкими v) или турбулентными (t), причем первый индекс относится к жидкой фазе. Например, Φ_{gvt} — параметр падения давления газовой фазы, причем, если бы в канале текла только жидкая фаза, поток был бы ламинарным, в то время как при заполнении канала только газом — поток турбулентен. Простое и точное аналитическое представление кривой Локкарта — Мартинелли было предложено Чизхолмом [18] в следующем виде:

$$\Phi_l^2 = 1 + C/X + 1/X^2; \quad (40)$$

$$\Phi_g^2 = 1 + CX + X^2, \quad (41)$$

где для безразмерного параметра C предлагаются значения, приведенные в табл. 1.

Поскольку корреляция [17] не давали правильных значений при достижении критических давлений, в [19] была предложена зависимость для поправочных множителей (рис. 13). Хотя непосредственно эту зависимость применяют только для пароводящих смесей, ее часто используют для других жидкостей при том же самом приведенном давлении (отношение давления P к критическому давлению P_c).

Эти корреляции оказываются несовершенными, когда нужно учесть влияние массовых скоростей на параметры падения давления, обычно отклонения могут достигать 100% с разностями порядка величины для некоторых экспериментальных точек. Это ведет к поискам улучшенных зависимостей, и две из них упоминаются здесь, а именно зависимости Чизхолма [20] и Фриделя [21]. Зависимость Чизхолма имеет вид

$$\Phi_{l0}^2 = 1 + (Y^2 - 1) [B \dot{x}_g^{(2-n)/2} (1 - \dot{x}_g)^{(2-n)/2} + \dot{x}_g^{2-n}], \quad (42)$$

где n — степень в зависимости коэффициента трения от числа Рейнольдса (0,25 по Блазиусу); Y — параметр Чиз-

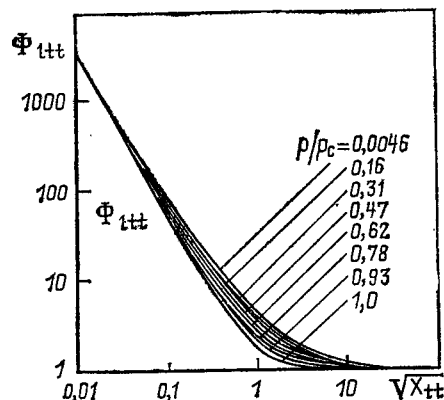


Рис. 13. Корреляция Мартинелли и Нельсона [19], учитывающая влияние давления на двухфазный поток при различных p/p_c

холма (35); B — параметр, определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } 0 < Y < 9,5 \\ B = 55/\dot{m}^{1/2} \text{ для } \dot{m} \geq 1900 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с);} \\ B = 2400/\dot{m} \text{ для } 500 < \dot{m} < 1900 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с);} \\ B = 4,8 \text{ для } \dot{m} < 500 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с);} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \text{при } 9,5 < Y < 28 \\ B = 520/(Y\dot{m}^{1/2}) \text{ для } \dot{m} \leq 600 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с);} \\ B = 21/Y \text{ для } \dot{m} > 600 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с);} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \text{при } 28 < Y \\ B = 15\,000/(Y^2\dot{m}^{1/2}). \end{aligned} \quad (45)$$

Зависимость [21] имеет вид

$$\Phi_{l0}^2 = E + \frac{3,23FH}{Fr^{0,045}We^{0,035}}, \quad (46)$$

где

$$E = (1 - \dot{x}_g)^2 + \dot{x}_g^2 \frac{\rho_l f_{g0}}{\rho_g f_{l0}}; \quad (47)$$

$$F = \dot{x}_g^{0,78} (1 - \dot{x}_g)^{0,224}; \quad (48)$$

$$H = \left(\frac{\rho_l}{\rho_g}\right)^{0,91} \left(\frac{\eta_g}{\eta_l}\right)^{0,19} \left(1 - \frac{\eta_g}{\eta_l}\right)^{0,7}; \quad (49)$$

$$Fr = \frac{\dot{m}^2}{gD\rho_H}; \quad (50)$$

$$We = \frac{\dot{m}^2 D}{\rho_H \sigma}; \quad (51)$$

f_{g0} и f_{l0} — коэффициенты трения, определяемые уравнениями (27), (28); D — эквивалентный диаметр; σ — поверхностное натяжение; ρ_H — плотность гомогенной среды, задаваемая уравнением (7). Приведенные выше зависимости относятся к вертикальным течениям, подъемному и горизонтальному; для вертикального опускного течения в [21] предложены несколько отличающиеся от этих зависимости.

На рис. 14 сравниваются кривые, рассчитанные по зависимостям Фриделя, и данные, содержащие 25 000 экспериментальных точек. Стандартные отклонения колеблются вокруг 30% для однокомпонентных течений и 40—50% для двухкомпонентных.

Таблица 1. Значения C для подгонка к эмпирическим кривым Локкарта — Мартинелли [18]

Кривая Локкарта — Мартинелли [18]	C
Турбулентно-турбулентная tt	20
Ламинарно-турбулентная vt	12
Турбулентно-ламинарная tv	10
Ламинарно-ламинарная vv	5

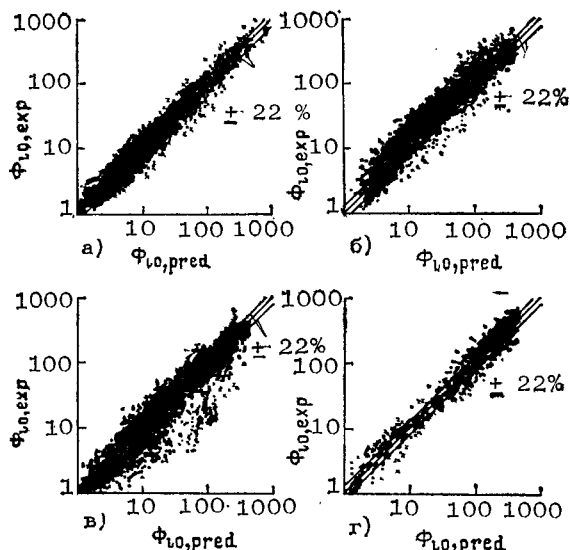


Рис. 14. Сравнение расчетных кривых Фриделя [21] и данных по падению давления в двухфазных течениях при различных режимах: а — однокомпонентное подъемное горизонтальное и вертикальное течение; б — двухкомпонентное подъемное вертикальное течение; в — двухкомпонентное горизонтальное течение; г — одно- и двухкомпонентное опускное течение

Таким образом, несмотря на усложнение корреляции, отклонения от нее все еще очень большие; имеется значительный разброс данных вследствие различных эффектов на входе в каналы и других факторов.

Недавние оценки автора [22] на основе экспериментальных данных *HTFS* привели к следующим предварительным рекомендациям по отношению к уже опубликованным.

Для $\eta_l/\eta_g < 1000$ следует использовать зависимость Фриделя [21].

Для $\eta_l/\eta_g > 1000$ и $\dot{m} > 100 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ следует применять зависимость Чизхолма [20].

Для $\eta_l/\eta_g > 1000$ и $\dot{m} < 100 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ следует пользоваться зависимостями Мартинелли [17, 19].

По мере получения дополнительных результатов, увеличивающих и без того уже большой банк данных, будут возникать другие корреляции. Однако останется ошибка, возникающая из-за эффектов развития потока. Единственный способ ее преодолеть заключается в том, что нужно создать модели, которые будут связаны с режимами течения и позволят поэтапно рассчитать градиент давления вдоль канала, принимая во внимание эффекты развития течения. Образец таких моделей (для кольцевого течения) коротко обсуждается ниже.

С. Перепады давления в теплообменниках. В кожухотрубном теплообменнике поток обычно проходит сквозь теплообменник, направляемый формой перегородок. Наиболее часто встречающимся видом перегородок, используемых в теплообменнике, является так называемая сегментная перегородка; ее полное описание дано в разд. 3.1 и 3.3. Здесь поток может быть рассмотрен как проходящий через серии «зон поперечного тока», где жидкость течет между перегородками, разделенными окнами для прохода потока, в которых поток поворачивает в обратном направлении перед входом в следующую зону поперечного тока.

Измерения и зависимости для расчета перепада давления в кожухотрубных теплообменниках обсуждаются в [23]. Предлагается метод, по которому сначала нужно рассчитать перепад давления в однофазном потоке Δp_{l0} для

суммарного течения через соответствующую зону при условии, что физические свойства потока такие же, как у жидкой фазы. Тогда отношение $\Delta p_{TP}/\Delta p_{l0} = \Phi_{l0}^2$ [см. уравнение (35)] и расходным массовым паросодержанием корреляционной зависимостью.

Для зон поперечного тока перепад давления однофазного потока Δp_{l0} можно рассчитать, используя методы, описанные в § 2.2.4 и 3.3.4. В [23] предлагается использовать уравнение (42) со значениями B и n , выбранными в зависимости от режима течения (см. п.А и рис. 8 и 9) и направления потока, как указано в табл. 2.

Для зоны прохода потока через окно в [23] предлагается следующее выражение для параметра Мартинелли:

$$\Phi_{l0}^2 = 1 + (Y^2 - 1) [B \dot{x}_g (1 - \dot{x}_g) + \dot{x}_g^2], \quad (52)$$

где $B=0,25$ для вертикального подъемного и опускного течений; $B=2/(Y+1)$ для горизонтального параллельного течения.

Значительное влияние перетока жидкости от трубы к перегородке и от перегородки к кожуху и воздействие обходного течения вокруг пучков на перепад давления в кожухе обсуждаются в § 3.3.3 в предположении об однофазности потока. Явления перетока и обхода в двухфазных течениях чрезвычайно сложны из-за эффектов разделения фаз. Таким образом, расходное массовое газосодержание

Таблица 2. Значения B и n для уравнения (42) при расчете падения давления двухфазного потока в поперечном потоке

Тип течения	B	n
Капельное и пузырьковое вертикальные подъемные и опускные течения	1	0,37
Капельное и пузырьковое горизонтальные параллельные течения	0,75	0,46
Стратифицированное и капельно-стратифицированное горизонтальные параллельные течения	0,25	0,46

в соответствующих поперечных, перетекающих и байпасных потоках может быть различным. Похоже, например, что перетекающие потоки могут иметь тенденцию к содержанию более высокой концентрации газовой фазы, чем средний поток, тогда как для байпасного течения может оказаться верным противоположное. В приближенных подходах можно было бы игнорировать эффекты разделения фаз и рассчитывать утечки методами, описываемыми ниже для диаграмм, а байпасные потоки — с помощью методов, описанных ранее для течений в канале. Однако результаты расчетов, основанные на этом приближении, следует рассматривать с большими оговорками, так же как и применение для двухфазных систем поправочных коэффициентов на утечки и байпасные течения, которые даны в § 3.3.4.

Зависимости для истинного объемного газосодержания. Истинное объемное газосодержание ε_g необходимо знать для расчета перепада давления в двухфазных течениях, использующего модели раздельного течения (см. п. В, § 2.3.3). Существует несколько различных расчетных методов для истинного объемного газосодержания ε_g , или коэффициента скольжения $S' (=u_g/u_l)$, где u_g и u_l — средние скорости соответствующих фаз. Истинное объемное газосодержание и коэффициент скольжения могут быть свя-

заны друг с другом следующими зависимостями:

$$\varepsilon_g = \frac{\dot{V}_g}{S' \dot{V}_l + \dot{V}_g} = \frac{\rho_l \dot{x}_g}{S' \rho_g (1 - \dot{x}_g) + \rho_l \dot{x}_g}; \quad (53)$$

$$S' = \frac{\dot{V}_g (1 - \varepsilon_g)}{\dot{V}_l \varepsilon_g} = \frac{\rho_l \dot{x}_g (1 - \varepsilon_g)}{\rho_g (1 - \dot{x}_g) \varepsilon_g}, \quad (54)$$

где $\dot{V}_g$ и $\dot{V}_l$ — объемный расход газовой и жидкой фаз; ρ_l и ρ_g — плотности фаз; $\dot{x}_g$ — расходное массовое газосодержание для газовой фазы.

Ниже приведено описание гомогенной модели расчета для истинного объемного газосодержания и описаны некоторые общие формы модели потока дрейфа.

Затем обсуждаются две эмпирические корреляционные зависимости для расчета истинного объемного газосодержания. Первая из них, данная для справки, — корреляционная зависимость Мартинелли и сотр. [17, 19]. Вторая, так называемая CISE корреляция, описана в [24]. Гомогенная модель дает завышенные значения истинного объемного газосодержания при газожидкостных подъемных течениях и заниженные при опускных. Однако при высоких массовых скоростях, высоких давлениях и низких паросодержаниях уравнение гомогенной модели течения для расчета истинного объемного газосодержания все еще могут давать довольно хорошую точность. Модель потока дрейфа полезна в качестве общей модели для определенных видов расчетов с помощью ЭВМ, но эта модель, как и модели, предложенные Мартинелли, не могут адекватно учитывать влияния массовой скорости, что показано в [25]. Модель CISE лучше учитывает влияние массовой скорости и физических свойств, и поэтому ее рекомендуют для расчета.

Гомогенная модель для истинного объемного газосодержания. В гомогенной модели $S' = 1$, и

$$\dot{\varepsilon}_g = \dot{\varepsilon}_g = \frac{\dot{V}_g}{\dot{V}_l + \dot{V}_g} = \frac{\rho_l \dot{x}_g}{\rho_g (1 - \dot{x}_g) + \rho_l \dot{x}_g}. \quad (55)$$

Модель потока дрейфа для истинного объемного газосодержания (см. п. D, § 2.3.1). Эту модель можно применять к отдельным режимам течения (см. п. C). Однако обычно эта модель используется без ссылок на специфичность режимов течения.

Если относительная скорость u_{gj} постоянна, а истинное объемное газосодержание и скорость потока изменяются в радиальном направлении, модель потока дрейфа приводится к уравнению (6), § 2.3.1, которое для газожидкостного потока приобретает вид

$$\dot{\varepsilon}_g = \frac{\dot{x}_g \rho_l}{C_0 [\dot{x}_g \rho_l + (1 - \dot{x}_g) \rho_g] + \rho_g \rho_l u_{gj}^2 / m}. \quad (56)$$

Значение C_0 зависит от режима течения; для полностью развитого пузырькового и (или) снарядного течения значение C_0 обычно составляет 1,1–1,2. Для течения с паросодержанием, приближающимся к единице, $C_0 \rightarrow 1,0$. Когда истинное объемное паросодержание приближается к нулю при кипении с недогревом, $C_0 \rightarrow 0$. Для истинных объемных паросодержаний, больших 0,1, в [26] предлагается следующее выражение для C_0 :

$$C_0 = 1 + 0,2(1 - \dot{x}_g) \left(\frac{g D \rho_l^2}{\dot{m}^2} \right)^{0,25}, \quad (57)$$

где g — ускорение силы тяжести; D — эквивалентный диаметр канала; $\dot{m}$ — общая массовая скорость. Для u_{gj} предложено следующее выражение:

$$u_{gj} = 1,18 \left[\frac{\sigma_g (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l^2} \right]^{0,25} (1 - \dot{x}_g), \quad (58)$$

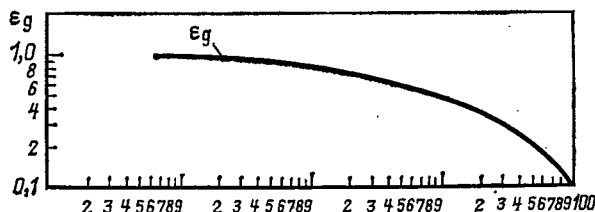


Рис. 15. Зависимость Локкарта и Мартинелли [17] для истинного объемного паросодержания

где σ — поверхностное натяжение. Уравнение (58) основывается на выражении, предложенном в [27], умноженном на $1 - \dot{x}_g$, что дает $u_{gj} = 0$ при $\dot{x}_g = 1$. Это согласуется с наблюдаемым поведением для моделей потока дрейфа. Однако, комбинируя уравнения (56) — (58), можно получить выражение для ε_g в явном виде; при использовании u_{gj} , которая является функцией ε_g [см. уравнение (50), § 2.3.1], часто необходимо искать решение итерационным или графическим методом.

Дальнейшее обсуждение применения моделей потока дрейфа к расчету истинного объемного газосодержания приведено там, где обсуждаются вертикальные пузырьковые и пробковые режимы течения (см. п. C).

Корреляционные зависимости Мартинелли для истинного объемного газосодержания. Модели Локкарта и Мартинелли [17] и Мартинелли и Нельсона [19] для падения давления, обусловленного трением, были рассмотрены в п. В, где также были даны корреляционные зависимости для ε_g в функции параметра Мартинелли X [определенного с помощью уравнения (34)]. На рис. 15 показана графически зависимость Локкарта — Мартинелли для объемного газосодержания; дана единственная кривая, связывающая ε_g и X . Эта кривая хорошо согласуется с выражением

$$\varepsilon_g = \frac{\Phi_{lft} - 1}{\Phi_{lft}}, \quad (59)$$

где Φ_{lft} — параметр Мартинелли для турбулентно-турбулентного потока (см. рис. 12) из уравнения (4) с подходящим значением C , взятым из табл. 1,

$$\Phi_{lft}^2 = 1 + 20/X + 1/X^2. \quad (60)$$

Подобным же образом для градиента давления, характеризующего потери на трение, в [19] введен поправочный множитель на давление в зависимости ε_g от X (рис. 16).

Хотя это соотношение выведено специально для пароводяных смесей, оно применяется также и к другим жидкостям при том же самом отношении давления p к критическому давлению p_c (приведенное давление).

Корреляции Мартинелли широко используются и даны здесь для справки. Однако они не учитывают адекватно массовую скорость и другие эффекты и поэтому не могут быть широко рекомендованы.

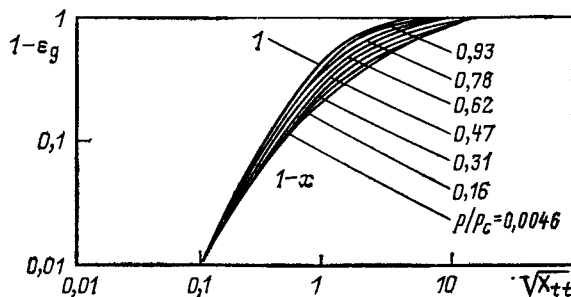


Рис. 16. Поправочные кривые Мартинелли и Нельсона [19] на давление в зависимости истинного объемного паросодержания при различных p/p_c

Корреляционная зависимость CISE для коэффициента скольжения (истинного объемного газосодержания). Эта зависимость имеет следующий вид [24]:

$$S' = 1 + E_1 \left(\frac{y}{1 + yE_2} - yE_2 \right)^{1/2}, \quad (61)$$

где

$$y = \varepsilon_g' / (1 - \varepsilon_g'). \quad (62)$$

В уравнении (62) ε_g' — отношение объемных расходов [см. уравнение (55)]; E_1 и E_2 задаются выражениями

$$E_1 = 1,578 \text{Re}_{10}^{-0,19} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0,22}; \quad (63)$$

$$E_2 = 0,0273 \text{We}' \text{Re}_{10}^{-0,51} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{-0,08}. \quad (64)$$

Здесь ρ_l и ρ_g — плотности жидкой и газовой фаз;

$$\text{Re}_{10} = \dot{m}D/\eta_l; \quad (65)$$

$$\text{We}' = \dot{m}^2 D / (\sigma \rho_l), \quad (66)$$

где $\dot{m}$ — плотность массы потока; D — эквивалентный диаметр канала; η_l — вязкость жидкой фазы; σ — поверхностное натяжение.

Изменения давления при прохождении через особые точки канала. Термин «особые точки» используется здесь для описания элементов системы трубопровода, в которых происходит изменение сечения и формы канала, имеющего до этого неизменное сечение. Такие особые точки включают внезапные сужения или расширения, изгибы, частично открытые клапаны, а также дросселирующие и (или) измерительные устройства, такие как сопла, трубки Вентури и диафрагмы. Здесь различаются три типа особенностей.

1. Особенности, в которых прерывается течение вдоль прямого канала постоянного поперечного сечения. Примерами могут служить изгибы канала или частично открытые клапаны.

2. Особенности системы, ведущие к изменению поперечного сечения канала. В них следовало бы включить плавные и внезапные сужения или расширения поперечного сечения канала.

3. Особые элементы, расположенные в канале для измерения параметров потока. В такие особенности следует включить измерительные диафрагмы и трубки Вентури. Здесь падение давления определяется как разность между давлением торможения набегающего потока и давлением, соответствующим (насколько это возможно) давлению в точке течения с максимальной скоростью. Таким образом, обычно делается попытка измерить давление потока, текущего после измерительной диафрагмы, которое соответствует, насколько это возможно, расположению сужающей струи.

Для первого типа особенностей главный интерес сосредоточивается на необратимых потерях давления из-за их наличия. Для второго типа особенностей характерно наличие необратимых и обратимых потерь давления. Так, например, при внезапных сужениях давление изменяется частично вследствие трения, связанного непосредственно с сужением, частично вследствие общего ускорения жидкостей в результате изменения поперечного сечения канала. Для третьего типа особенностей течения основной интерес представляет изменение давления, которое может быть очень близко к изменению давления, соответствующему необратимому ускорению. Однако, когда жидкость, пройдя через прибор, снова замедляется, там может образоваться чистая потеря давления из-за трения. Для диафрагм восстановление давления за сужением потока обычно довольно мало, что же касается измерительных трубок Вентури, то жидкость часто является ускоренной достаточно гладко для того, чтобы обеспечить восстановление большей части перепада давления, набегающего на горловину потока.

Примеры всех трех форм особых точек обсуждаются более детально; рассматриваются изгибы (тип 1), плавно изменяющиеся площади поперечного канала, внезапные сужения и внезапные расширения (тип 2) и диафрагмы (тип 3). Другая информация об изменении давления в особых точках потока постепенно появляется в литературе, но при отсутствии определенной специфической информации рекомендуется выбирать для расчета модель однородного течения. Часто изменение давления Δp в потоке однофазной жидкости плотности ρ при переходе через особую точку рассчитывается по формулам типа

$$\Delta p = k \frac{\dot{m}^2}{2\rho}, \quad (67)$$

где $\dot{m}$ — плотность потока массы в определенном месте особой точки потока; k — коэффициент потери давления для особой точки. Для модели однородного течения $\rho = \rho_H$, и заменяя его на выражение для ρ_H согласно уравнению (7), имеем

$$\Delta p_{\text{ТР}} = k \frac{\dot{m}}{2\rho_l} \left(\frac{\dot{x}_g \rho_l}{\rho_g} + 1 - \dot{x}_g \right) = \Delta p_{10} \left(\frac{\dot{x}_g \rho_l}{\rho_g} + 1 - \dot{x}_g \right) = \Delta p_{10} \left[1 + \dot{x}_g \left(\frac{v_g}{v_l} - 1 \right) \right], \quad (68)$$

где $\Delta p_{\text{ТР}}$ — падение давления двухфазного потока при переходе через особую точку; Δp_{10} — падение давления только жидкой фазы, текущей с общей массовой скоростью; член в скобках представляет собой поправочный множитель на двухфазность.

1. **Плавные изменения в площади поперечного сечения.** Если поперечное сечение канала изменяется постепенно, так что не происходит отрыва потока (с углом раскрытия диффузора $5-7^\circ$), то градиент давления в области, в которой изменяется площадь поперечного сечения канала, можно рассчитать, используя обычное уравнение моментов, выведенное выше, но с добавлением дополнительного члена, учитывающего ускоряющую компоненту перепада давления, которая появляется вследствие изменения поперечного сечения. Таким образом, для уравнения импульса в однородной модели течения [уравнение (16), § 2.3.1] в стационарном случае имеем

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\tau_0 P}{S} + \dot{m}^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho_H} \right) + \frac{\dot{m}^2}{S \rho_H} \frac{dS}{dz} + g \rho_H \sin \alpha, \quad (69)$$

где S — площадь поперечного сечения; τ — напряжение трения на стенке; P — периметр канала; α — угол наклона канала к горизонтали; g — ускорение силы тяжести.

Подобным образом градиент давления в канале с плавно изменяющимся поперечным сечением, рассчитываемый с помощью модели раздельного течения, получается из уравнения (15) (при постоянном по периметру напряжении трения на стенке)

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\tau_0 P}{S} + \dot{m}^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{\dot{x}_g^2}{\rho_g \varepsilon_g} + \frac{(1 - \dot{x}_g)^2}{\rho_l (1 - \varepsilon_g)} \right] + \frac{\dot{m}}{S} \left[\frac{\dot{x}_g^2}{\rho_g \varepsilon_g} + \frac{(1 - \dot{x}_g)^2}{\rho_l (1 - \varepsilon_g)} \right] \frac{dS}{dz} + g \rho_{\text{ТР}} \sin \alpha, \quad (70)$$

где

$$\rho_{\text{ТР}} = \varepsilon_g \rho_g + (1 - \varepsilon_g) \rho_l.$$

2. **Внезапное расширение** схематически показано на рис. 17. Детальный вывод для этого случая дан в справочнике [28] и в [15]. Соотношения баланса импульса записываются для плоскостей 1 и 2 с учетом того, что давление p_1 действует на площадь S_2 в плоскости 1. Полное падение давления $\Delta p_{\text{ТР}}$ является суммой необратимой потери дав-

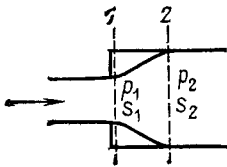


Рис. 17. Течение через внезапное расширение

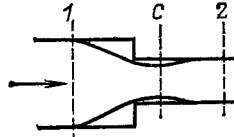


Рис. 18. Течение через внезапное сужение

ления (потери давления из-за трения) Δp_{ITP} и обратимой потери давления Δp_{RTP}

$$\Delta p_{TP} = \Delta p_{ITP} + \Delta p_{RTP} \quad (71)$$

Для гомогенной модели течения соответствующие потери давления имеют вид

$$\Delta p_{TP} = -\dot{m}_1^2 s (1-s) v_l \left[1 + \dot{x}_g \left(\frac{v_g}{v_l} - 1 \right) \right]; \quad (72)$$

$$\Delta p_{I, TP} = \frac{1}{2} \dot{m}_1^2 2s (1-s) (1-s^2) v_l \left[1 + \dot{x}_g \left(\frac{v_g}{v_l} - 1 \right) \right]; \quad (73)$$

$$\Delta p_{R, TP} = \frac{1}{2} \dot{m}_1^2 (1-s^2) v_l \left[1 + \dot{x}_g \left(\frac{v_g}{v_l} - 1 \right) \right], \quad (74)$$

где $s = S_1/S_2$; S_1 и S_2 — площади поперечного сечения вверх и вниз по течению соответственно; v_g и v_l — удельные объемы газовой и жидкой фаз; $\dot{m}_1$ — плотность потока массы в трубе, расположенной вверх по течению. Соответствующие выражения для модели раздельного течения (с учетом того, что истинные объемные паросодержания предвключенных участков и участков вниз по течению идентичны) имеют вид

$$p_1 - p_2 = -\dot{m}_1^2 s (1-s) v_l \left[\frac{(1-\dot{x}_g)^2}{1-\varepsilon_g} + \frac{v_g}{v_l} \frac{x_g^2}{\varepsilon_g} \right]; \quad (75)$$

$$\Delta p_{I, TP} = -\dot{m}_1^2 (1-s) \left\{ \frac{(1-\dot{x}_g)^2 v_l}{1-\varepsilon_g} + \frac{x_g^2 v_g}{\varepsilon_g} - \frac{(1-s) [\dot{x}_g^2 v_g^2 / \varepsilon_g^2 + (1-\dot{x}_g)^3 v_l^2 / (1-\varepsilon_g^2)]}{2 [(1-\dot{x}_g) v_l + \dot{x}_g v_g]} \right\}; \quad (76)$$

$$\Delta p_{R, TP} = \frac{\dot{m}_1^2 (1-s^2) [\dot{x}_g^2 v_g^2 / \varepsilon_g^2 + (1-\dot{x}_g)^3 v_l^2 / (1-\varepsilon_g^2)]}{2 [(1-\dot{x}_g) v_l + \dot{x}_g v_g]}. \quad (77)$$

Модель гомогенного течения имеет тенденцию преувеличивать предсказываемый рост статического давления при расширениях, в то время как модель раздельного течения может дать достаточно хорошее согласие. Однако требуется знать истинное объемное паросодержание, а предположение, что паросодержание не изменяется при расширении, часто не соответствует действительности. Другим выражением для изменения давления при расширении является уравнение [29]

$$p_1 - p_2 = \Delta p_{TP} = \Delta p_l \left(1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2} \right), \quad (78)$$

где Δp_l — перепад давления для потока одной жидкой фазы, текущей через расширение, определяемый выражением

$$\Delta p_l = -\dot{m}_1^2 S (1-S) v_l (1-\dot{x}_g)^2, \quad (79)$$

где X — параметр Мартинелли,

$$X = \Delta p_l / \Delta p_g. \quad (80)$$

В уравнении (80) Δp_g — потеря давления одной только газовой фазы

$$\Delta p_g = \dot{m}_1^2 s (1-s) v_g \dot{x}_g^2. \quad (81)$$

Чизхолм предлагает следующее выражение для параметра C , используемого в уравнении (78),

$$C = \left[1 - 0,5 \left(\frac{v_g - v_l}{v_g} \right)^{0,5} \right] \left[\left(\frac{v_g}{v_l} \right)^{0,5} - \left(\frac{v_l}{v_g} \right)^{0,5} \right]. \quad (82)$$

3. Изменение давления при внезапном сужении схематически показано на рис. 18. Процессы сужения сечения жидкости при переходе от плоскости 1 к плоскости С близки к обратимым; необратимые потери имеют место только в области, расположенной между плоскостями С и 2; при этом течение между названными плоскостями можно рассматривать как внезапно расширяющееся, описанное в разд. В. Детальное описание течения при внезапном сужении дано в [15, 28]. Уравнения модели гомогенного течения для соответствующих потерь давления представим в виде

$$\Delta p_{TP} = p_1 - p_2 = -\frac{\dot{m}_1^2 v_l}{2} \left[\left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 + 1 - \frac{1}{s^2} \right] \times \left[1 + \dot{x}_g \left(\frac{v_g}{v_l} - 1 \right) \right]; \quad (83)$$

$$\Delta p_{I, TP} = -\frac{\dot{m}_1^2 v_l}{2} \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \left[1 + \dot{x}_g \left(\frac{v_g}{v_l} - 1 \right) \right]; \quad (84)$$

$$\Delta p_{R, TP} = -\frac{\dot{m}_1^2 v_l}{2} \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) \left[1 + \dot{x}_g \left(\frac{v_g}{v_l} - 1 \right) \right], \quad (85)$$

где C_c — коэффициент сужения, который зависит от отношения площадей поперечного сечения $s = S_1/S_2$ и приводится в стандартных таблицах для однофазного течения. Ниже приведены классические постоянные Вейсбаха для коэффициента сужения C_c при однофазном течении:

$1/s = S_2/S_1$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
C_c	0,617	0,632	0,658	0,712	0,813	1,0

За некоторым исключением уравнения модели гомогенного течения дают приемлемое согласие с экспериментальными данными, и им отдается предпочтение перед уравнениями модели раздельного течения (более сложным).

4. Потери давления при изгибах 90°. Потери давления, вызванные изгибами, определяются как разность между потерей давления в опытах на трубе, включающей изгиб, и потерей давления в прямой трубе той же самой общей длины для тех же самых фазовых расходов и физических свойств.

Потери давления в изгибах широко изучены, и в [30] приведен обзор сравнительно недавних работ. На рис. 19 приведены данные для коэффициента потерь k [см. уравнение (67)] для различных типов изгибов в функции R_c/D , где R_c — радиус центральной линии трубы в области изгиба; D — диаметр трубы. На рис. 19 приведены также данные для чисел Рейнольдса, равных 10^5 . Числа Рейнольдса оказывают влияние на значения k , особенно при малых радиусах изгиба (рис. 20). Дальнейшая информация об однофазных течениях в изогнутых трубках представлена в п. Ф, § 2.2.2.

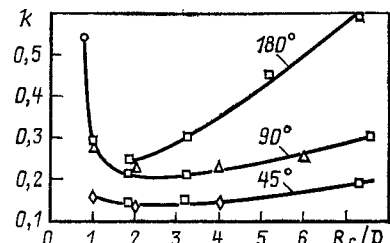


Рис. 19. Изменение коэффициента потерь с R_c/D для течения в изгибе на 90° [30]

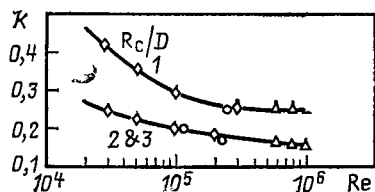


Рис. 20. Влияние числа Рейнольдса на падение давления в изгибах на 90° каналов круглого поперечного сечения [30]

Обзор данных по потерям давления в двухфазных течениях в изгибах (и других изменениях направления течения в трубах) приведен в [31], где предложено использовать уравнение (52) для расчета коэффициента потерь давления для изгибов с помощью параметра B , задаваемого в виде графической функции R_c/D . Совсем недавно в [32] предложена модифицированная форма уравнения (52) в следующем виде:

$$\Delta p_{TP}/\Delta p_{l0} = 1 + (\rho_l/\rho_g - 1) [B \dot{x}_g (1 - \dot{x}_g) + \dot{x}_g^2], \quad (86)$$

где Δp_{TP} — перепад давления для двухфазного течения в изгибе; Δp_{l0} — перепад давления для однофазного потока при той же самой полной плотности массового расхода, имеющего свойства жидкости. Коэффициент B коррелируется в [32] следующим образом:

$$B = 1 + \frac{2,2}{k_{l0} (2 + R_c/D)}, \quad (87)$$

где k_{l0} — коэффициент потерь для потока жидкости при полном массовом расходе потока.

5. *Потери давления в диафрагме.* Потери давления в диафрагме при однофазном течении обсуждаются в § 2.2.2 и в [30]. Обзор более ранних работ, посвященных двухфазному течению через диафрагмы, представлен в [28, 15, 31]. Позже в [33] предложено использовать формулу

$$\frac{\Delta p_{TP}}{\Delta p_l} = 1 + C/X + 1/X^2, \quad (88)$$

где Δp_{TP} — потеря давления в диафрагме для двухфазной смеси; Δp_l — потеря давления при течении только жидкости; C — корреляционный параметр; X — параметр Мартинелли [ср. уравнение (34)], задаваемый в этом случае выражением

$$X = \left(\frac{\Delta p_l}{\Delta p_g} \right)^{1/2} = \frac{1 - \dot{x}_g}{\dot{x}_g} \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{1/2}, \quad (89)$$

где Δp — потеря давления в диафрагме при течении через нее только газа; $\dot{x}_g$ — расходное массовое паросодержание; ρ_g и ρ_l — плотности газовой и жидкой фаз. В [31] корреляционный параметр C связан с коэффициентом скольжения S' следующим образом:

$$C = \frac{1}{S'} \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/2} + S' \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{1/2}, \quad (90)$$

причем предложено, чтобы S' задавалось следующими выражениями:

$$S' = \left(\frac{\rho_l}{\rho_H} \right)^{1/2} \quad \text{для } X > 1; \quad (91)$$

$$S' = \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/4} \quad \text{для } X < 1, \quad (92)$$

где ρ_H — плотность гомогениой смеси, описываемая уравнением (7).

Для сжимаемых течений через диафрагмы Чизхолм [34] предлагает использовать модифицированный параметр

Мартинелли X' в уравнении (88), определяемый выражением

$$X' = X \left(\frac{n-1}{n} \frac{1-r}{1-r^{(n-1)/n}} \frac{1}{r^{2/n}} \right)^{0,5}, \quad (93)$$

где n — показатель степени в выражении для политропного расширения

$$p/\rho^n = \text{const}; \quad (94)$$

$r = p_2/p_1$, где p_2 — давление вниз по течению, p_1 — давление набегающего потока.

6. *Изменения давления при течении через открытые клапаны.* В [31] рекомендуется использовать уравнение (52) с $B=1,6$ для задвижки и $B=2,5$ для тройников с шаровым клапаном. В [35] для открытой задвижки $k=0,17$ и для открытого шарового клапана $k=6,0$. Таким образом, для того чтобы рассчитать потери давления в клапанах, необходимо рассчитать Δp_{l0} для полного массового расхода в потоке, имеющем свойства жидкости, используя соответствующее значение k в уравнении (67). Потеря давления двухфазного потока получается умножением Δp_{l0} на Φ_{l0} из уравнения (52), и подстановкой соответственного значения B . Следует заметить, что Y^2 можно взять равным ρ_l/ρ_g , так как принято, что k имеет постоянное значение.

Д. *Гидродинамика специфических режимов течения (вертикальных).* Улучшения моделирования двухфазных течений можно достичь, учитывая характеристики специфических режимов течения, хотя это и требует дополнительных усилий при предварительном расчете режима течения двухфазной смеси. Проблемы описания режимов обсуждались в п. А. При рассмотрении отдельного режима течения могут оказаться важными также эффекты развития потока. При кольцевом режиме течения такие эффекты являются преобладающими и должны включаться в любую реалистическую модель.

В п. Д обсуждаются режимы вертикальных течений. Здесь, как правило, можно считать, что течение симметрично относительно оси канала. Однако асимметрия может развиваться даже в вертикальных течениях, особенно если канал не является строго прямым и (для некоторых режимов) вертикальным. Там же рассмотрены пузырьковый, снарядный (или пробочный) и кольцевой однонаправленные режимы течения и кратко обсуждается противоточный режим (падающая пленка с поднимающимся газовым потоком) вплоть до его верхнего предельного случая (захлебывания потока).

Пузырьковое течение. Как правило, при вертикальных пузырьковых течениях гравитационная составляющая преобладает над градиентом давления и точность предсказания градиента давления, таким образом, прямо связана с точностью предсказания истинного объемного паросодержания. Для пузырькового течения особенно подходят модели потока дрейфа, и это в общих чертах обсуждалось в п. С, § 2.3.1. Для газожидкостного пузырькового течения уравнение неразрывности [уравнение (46), § 2.3.1] принимает вид

$$j_{gl} = j_g (1 - \varepsilon_g) - \varepsilon_g j_l, \quad (95)$$

и физическое соотношение для плотности потока дрейфа [аналогично уравнению (50), § 2.3.1] выглядит следующим образом:

$$j_{gl} = u_{\infty} \varepsilon_g (1 - \varepsilon_g)^n, \quad (96)$$

где u_{∞} — скорость подъема одиночного пузырька в бесконечном объеме жидкости; n — показатель степени, изменяющийся от 0 до 2. Уравнения (95), (96) решаются одновременно графическими методами, описанными более детально в § 2.3.1.

На скорость подъема пузырька u_{∞} сильно влияет чистота жидкости, особенно для пузырьков маленького

Таблица 3. Выражения для u_∞ и n , используемые в уравнении (52)

Интервал	u_∞	n
$Re_b < 2$	$\frac{2r_b^2(\rho_l - \rho_g)g}{9\eta_l}$	2
$2 < Re_b < 4Ga^{-2,2}$	$0,33g^{0,78}\left(\frac{\rho_l}{\eta_l}\right)^{0,52}r_b^{1,28}$	1,75
$Re_b > 3Ga^{-0,25}$	$1,5\left(\frac{g\sigma}{\rho_l}\right)^{0,25}$	1,5—2,0
$r_b > 2\left(\frac{\sigma}{g\rho_l}\right)^{1/2}$	$1,0(g r_b)^{1/2}$	0

радиуса. Для чистых жидкостей известны различные выражения для расчета скорости подъема пузырька, зависящей от свойств жидкости и радиуса пузырька. Рекомендованные выражения для u_∞ и показателя экспоненты n приведены в табл. 3 [36, 37].

В табл. 3 r_b — радиус пузырька; ρ_l и ρ_g — плотности жидкой и газовой фаз; η_l — вязкость жидкости; g — ускорение силы тяжести; σ — поверхностное натяжение; Re_b и Ga — числа Рейнольдса и Галилея, определяемые следующими выражениями:

$$Re_b = 2\rho_l r_b u_\infty / \eta_l; \quad (97)$$

$$Ga = g\eta_l^4 / \rho_l \sigma^3. \quad (98)$$

При использовании выражений из табл. 3 для определения u_∞ и n требуется итерационное или графическое решение приведенных выражений. Другой подход, использующий эмпирические соотношения, обсуждался в п. В. Для того чтобы оценить u_∞ , необходимо знать радиус пузырька r_b . Аппроксимационные выражения обычно достаточно точны. При применении уравнений (95), (96) подразумевается, что распределение паросодержания однородно ($C_0 = 1,0$, см. § 2.3.1). В действительности же истинное объемное паросодержание, вероятно, не должно быть однородным в пузырьковом потоке, и даже при адиабатном течении паровая фаза может концентрироваться вблизи стенки, особенно при вертикальном подъемном течении, при котором $C_0 < 1$. Может существовать и обратная ситуация, когда паровая фаза имеет максимум распределения вблизи центра трубы; при этом $C_0 > 1$. В качестве первого приближения для многих практических ситуаций можно считать $C_0 = 1$, но следует всегда иметь в виду возможность влияния распределения пузырьков. Детальное исследование применения модели потока дрейфа к пузырьковому течению проведено в [38].

Пробковый (или снарядный) режим течения. В вертикальных пробковых режимах течения средняя скорость газовой фазы u_g имеет следующий вид:

$$u_g = C_0 j + u_s, \quad (99)$$

где j — полная плотность объемного расхода через канал; C_0 — параметр распределения; u_s — скорость подъема газовой пробки в канале, когда он заполнен неподвижной жидкостью. В [39] найдено, что $C_0 \approx 1,2$, и обобщенное выражение для u_s определяют из соотношения [66]

$$\frac{u_s}{\sqrt{gD}} = 0,345 (1 - \exp 0,029 Vi) \left(1 - \exp \frac{3,37 - E\delta}{m} \right), \quad (100)$$

где g — ускорение силы тяжести; D — диаметр трубы; Vi — безразмерный комплекс, характеризующий вязкость,

и число Этвеша $E\delta$ определяют следующим образом:

$$Vi = \frac{[D^3 g (\rho_l - \rho_g) \rho_l]^{1/2}}{\eta_l}; \quad (101)$$

$$E\delta = \frac{g D^2 (\rho_l - \rho_g)}{\sigma}. \quad (102)$$

Параметр m имеет следующие значения:

$$m = 10 \text{ для } Vi > 250; \quad (103)$$

$$m = 69 Vi^{-0,35} \text{ для } 18 < Vi < 250; \quad (104)$$

$$m = 25 \text{ для } Vi < 18. \quad (105)$$

Истинное объемное паросодержание в снарядном режиме течения

$$\varepsilon_g = j_g / u_g, \quad (106)$$

где j_g — плотность объемного расхода газовой фазы.

Кольцевое течение. Параметры вертикального подъемного двухфазного кольцевого течения приведены на рис. 21. Общий массовый расход жидкости потока $\dot{M}_l$ состоит из двух частей, а именно потока жидкой пленки $\dot{M}_{lf}$ и уносимой в паровом ядре жидкости $\dot{M}_{le}$. Доля уносимой жидкости $F_{le} = \dot{M}_{le} / \dot{M}_l$ может изменяться от нуля до значения, близкого к единице, в зависимости от условий течения. Уносимая доля потока увеличивается с ростом скорости жидкости, а также газовой фазы $\dot{M}_g$. Детальное обсуждение параметров кольцевого течения приведено в [28], а более поздний обзор моделирования кольцевого течения дан в [40].

Хотя можно постулировать существование кольцевого течения с гидродинамическим равновесием, при котором скорость осаждения капель на пленку и скорость уноса жидкости равны и противоположно направлены, такая ситуация может достигаться только в очень длинных каналах и представляет довольно-таки академический интерес. Чтобы достичь успеха, в любой модели кольцевого течения необходимо принимать во внимание неравновесные явления, при которых скорости уноса и осаждения жидкости различны. По существу, в модели должно решаться уравнение баланса массы пленки вдоль канала

$$\frac{d\dot{M}_{lf}}{dz} = P \left(\dot{m}_D - \dot{m}_E - \frac{\dot{q}}{\eta_{lg}} \right), \quad (107)$$

где $\dot{M}_{lf}$ — массовый расход пленки жидкости; z — расстояние вдоль оси; P — периметр трубы; $\dot{m}_D$ и $\dot{m}_E$ — скорости осаждения и уноса (масса осаждающейся или уносимой жидкости на единицу площади, взятую по периметру трубы, в единицу времени); $\dot{q}$ — плотность теплового потока; h_{lg} — скрытая теплота парообразования. Заметим, что $\dot{q} > 0$ для испарения и $\dot{q} < 0$ для конденсации.

Уравнение (107) должно быть проинтегрировано вдоль канала с учетом предполагаемых или известных граничных

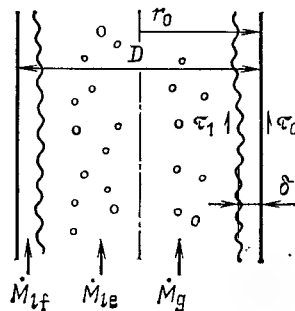


Рис. 21. Параметры кольцевого подъемного течения в вертикальной трубе

условий. Располагая установленным расходом жидкой пленки, можно оценить другие параметры течения (толщину пленки, градиент давления), используя следующие соотношения:

1. *Трехпараметрическое соотношение*, которое для данных физических свойств жидкости и геометрии канала имеет вид

$$\dot{M}_{lf} = \dot{M}_{lf}(\tau_i, \delta), \quad (108)$$

где τ_i — напряжение трения на поверхности раздела фаз; δ — толщина жидкой пленки. Градиент давления можно рассчитать, зная напряжение трения, с учетом ускоряющих и гравитационных членов, как показано ниже (для заданных физических свойств и геометрии канала).

2. *Соотношение для шероховатости границы раздела фаз*, которое имеет вид (для заданных физических свойств и геометрии канала)

$$\tau_i = \tau_i(\dot{M}_g \dot{M}_{le}, \delta). \quad (109)$$

Уравнения (108), (109) следует решать одновременно для определения τ_i (и, следовательно, dp/dz) и δ . Соотношения, которые разработаны для $\dot{m}_D$ и $\dot{m}_E$, часто также зависят от значений τ_i и δ и являются связующим звеном между решениями уравнений (108), (109) и (107).

Ниже представлена упрощенная трактовка кольцевого режима течения; для более детального и всестороннего рассмотрения читатель отсылается к работам [28, 40]. Упрощенная трактовка включает следующие главные допущения.

1. Толщина пленки значительно меньше диаметра канала; напряжения трения в пленке можно считать постоянными и равными напряжениям трения на поверхности раздела фаз τ_i .

2. Газовое ядро можно рассматривать как гомогенную смесь, имеющую вязкость, равную вязкости газа.

3. $\rho_i \gg \rho_g$.

С этими допущениями стационарное уравнение импульса для газового ядра можно записать как

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{4\tau_i}{D} + \frac{1}{\varepsilon_c} \frac{d}{dz} \left[\frac{\dot{m}^2 [\dot{x}_g + F_e(1 - \dot{x}_g)]^2}{\rho_c \varepsilon_c} \right] + g\rho_c, \quad (110)$$

где ε_c — часть поперечного сечения, занятая газовым ядром и описываемая выражением

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_g}{(\dot{M}_g/\rho_g)/(\dot{M}_g/\rho_g + \dot{M}_{le}/\rho_l)}. \quad (111)$$

Средняя плотность ядра

$$\rho_c = \frac{\dot{M}_{le} + \dot{M}_g}{(\dot{M}_g/\rho_g) + (\dot{M}_{le}/\rho_l)}. \quad (112)$$

Упрощенная форма трехпараметрического соотношения, предлагаемая здесь,

$$\dot{M}_{lf} = \pi D \delta \sqrt{\frac{2\tau_i \rho_l}{f_{lf}}}, \quad (113)$$

где f_{lf} — коэффициент трения жидкой пленки, который (с учетом приведенных выше допущений) является функцией числа Рейнольдса для пленки Re_{lf} , определяемого следующим образом:

$$Re_{lf} = \dot{m}_{lf} D / \eta_l. \quad (114)$$

Здесь $\dot{m}_{lf} = \dot{M}_{lf}/S$; η_l — вязкость жидкой фазы. Соотношение между f_{lf} и Re_{lf} приведено в [28] и показано на рис. 22. Заметим, что соотношение становится эквивалентным обыкновенному соотношению для ламинарного течения

$$f_{lf} = 16/Re_{lf} \quad (115)$$

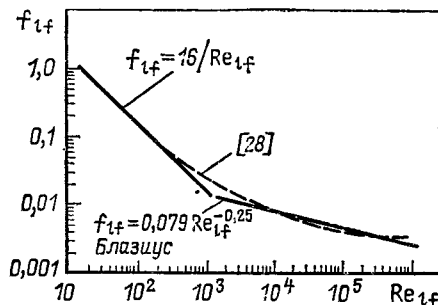


Рис. 22. Зависимость коэффициента трения жидкой пленки от числа Рейнольдса жидкой пленки [28]

при низких числах Рейнольдса и аппроксимируется уравнением Блазиуса для более высоких чисел Рейнольдса. Однако сравнение с экспериментальными данными показывает, что в области перехода лучшее согласие получено при использовании кривой, предложенной в [28].

Поверхность жидкой пленки обычно сильно возмущена и покрыта сложной системой волн. Эти волны в сущности представляют шероховатости поверхности по отношению к газовому ядру, содержащему капли жидкости, и являются причиной увеличения напряжения трения на поверхности раздела фаз. Механизмы, приводящие к росту этих напряжений, очень сложны [28]; однако было показано, что эффективная шероховатость поверхности раздела приблизительно постоянна для данной толщины пленки независимо от скорости течения фаз, приводящих к этой толщине. Это геометрическое сходство очень полезно при получении соотношений для напряжений трения на границе раздела фаз. Для определения коэффициента трения на границе раздела фаз f_{gsc} , по-видимому, чаще используется зависимость Уоллиса [41]

$$f_{gsc} = \frac{\tau_i}{(1/2) \rho_c j_c^2}, \quad (116)$$

где j_c — приведенная скорость (отнесенная к полному сечению трубы) газового ядра. Для $\rho_g \ll \rho_l$ в этом случае имеем

$$j_c \approx 4\dot{M}_g/(\pi \rho_g D^2). \quad (117)$$

Зависимость Уоллиса [41] имеет вид

$$f_{gsc} = f_{sgs} \left(1 + \frac{360 \delta}{D} \right), \quad (118)$$

где f_{sgs} — коэффициент трения однофазного потока, относящийся к числам Рейнольдса Re_{sgs} , определяемым следующим образом:

$$Re_{sgs} = j_c D \rho_c / \eta_g, \quad (119)$$

η_g — вязкость газовой фазы. Модифицированное уравнение, относящееся к более широкому диапазону плотности газа,

$$f_{gsc} = f_{sgs} \left[1 + 24 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/3} \frac{\delta}{D} \right]. \quad (120)$$

Комбинация трехпараметрического соотношения и соотношения для шероховатостей границы раздела фаз позволяет вычислять τ_i и δ , если известно $\dot{M}_{lf}$. Для того чтобы решить уравнение баланса масс (107), необходимо знать $\dot{m}_D$ и $\dot{m}_E$; вообще говоря, соотношения, которыми мы располагаем для определения скоростей осаждения и уноса капель, менее чем удовлетворительны. В наиболее часто используемых соотношениях нужно знать значения δ и τ_i , для этого необходимо решить трехпараметрическое уравнение и уравнение для шероховатостей на границе раздела фаз. Запишем наиболее распространенное выражение, ис-

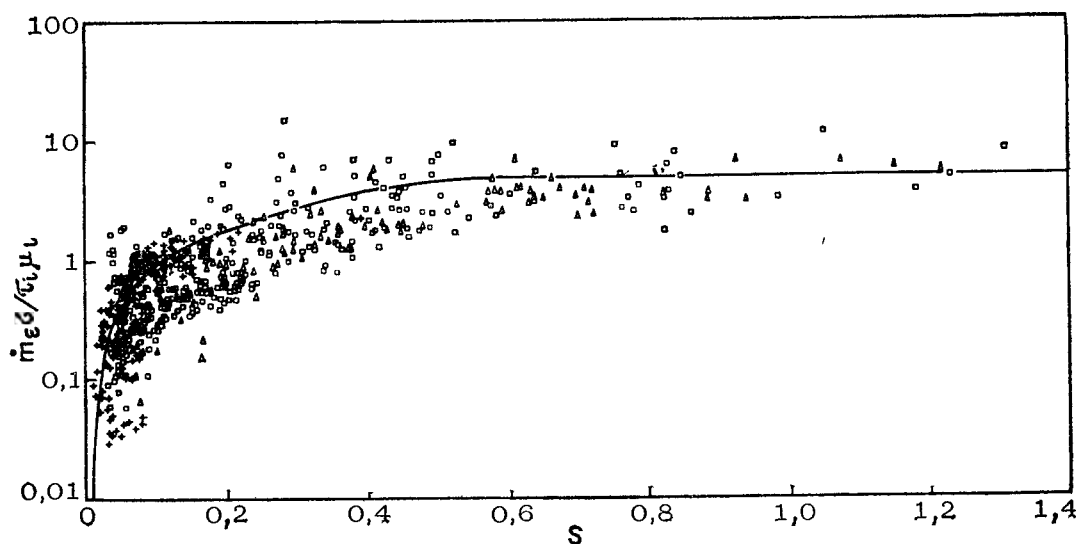


Рис. 23. Корреляция для уноса жидкости в кольцевом течении [42]

пользуемое для расчета скорости осаждения,

$$\dot{m}_D = kC, \quad (121)$$

где C — концентрация капель в газовом ядре, рассчитанная на основе модели гомогенного течения следующим образом:

$$\hat{C} = \frac{\dot{M}_{le}}{\dot{M}_{le}/\rho_l + \dot{M}_g/\rho_g}, \quad (122)$$

k — массовый коэффициент осаждения. Определение и корреляция для k обсуждаются в [43]; в [42] предложена следующая зависимость для k :

$$\frac{k}{u_*} = 87 \sqrt{\frac{\eta_l^2}{D \rho_l}}. \quad (123)$$

Здесь u_* — скорость трения (динамическая скорость), определяемая как $(\tau_i/\rho_c)^{1/2}$.

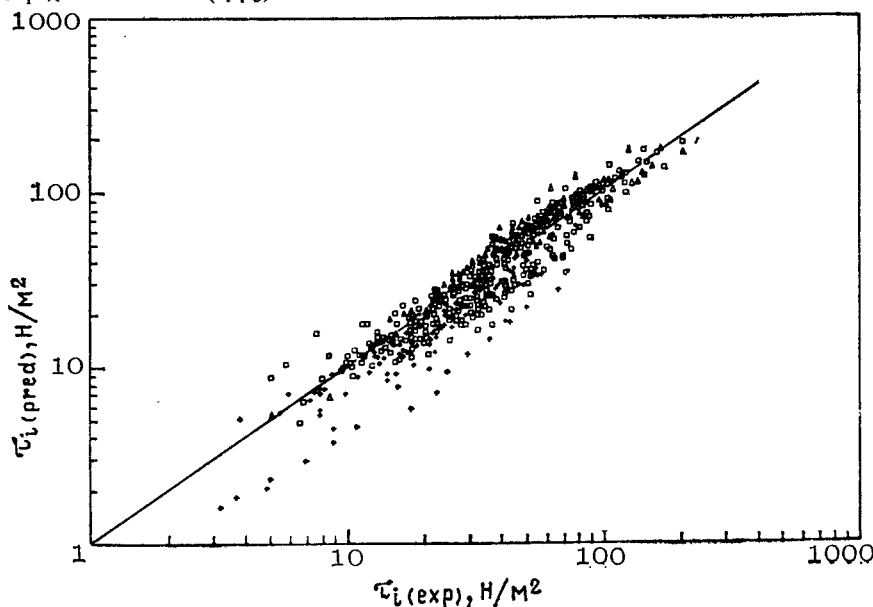


Рис. 24. Сравнение экспериментальных и расчетных значений межфазного касательного напряжения в кольцевом режиме течения [42]

Измерение скорости уноса представляет значительные технические трудности, и ее значение обычно определяется в условиях равновесия, где она равна и противоположна скорости осаждения, рассчитанной по уравнению (121). Большинство зависимостей характеризуется сильным разбросом и представляется в размерном виде. Попытка дать корреляцию в безразмерном виде сделана в [42] (рис. 23).

Несмотря на довольно плохие корреляции для скоростей осаждения и уноса, при использовании моделей кольцевого течения получены сравнительно хорошие результаты расчетов. Может быть, наиболее важным в их применении является расчет критического теплового потока (см. § 2.7.3), но модель также достаточно хороша в сравнении с эмпирическими корреляциями, когда ее применяют к расчету напряжений трения на поверхности раздела фаз (градиент давления). Некоторые сравнения, представленные в [43], приведены на рис. 24. Хотя разброс все еще велик, он все же намного меньше, чем для эмпирических корреляций, о чем свидетельствует сравнение рис. 24 с рис. 14.

Противоточный поток и захлебывание. Противоточные потоки играют важную роль в таком промышленном оборудовании, как газожидкостные контактные теплообменники и холодильники. Они также важны в определенных постулированных аварийных ситуациях в ядерных реакторах. В таких противоточных потоках толщина жидкой пленки на стенке канала остается близкой к ее значению в отсутствие противоположно направленного течения газа при скоростях ниже так называемых скоростей перехода к захлебыванию. Этот переход соответствует условию, при котором жидкая фаза начинает уноситься вверх, выше точки впуска жидкости. Похоже, что захлебывание имеет место из-за образования на поверхности

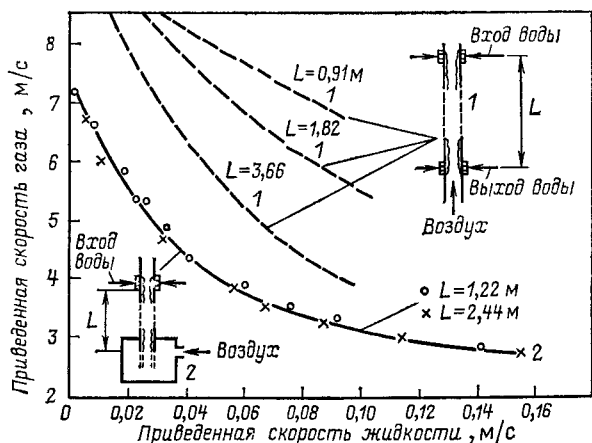


Рис. 25. Захлебывание при течении водовоздушной смеси в вертикальных трубах:

1 — данные [48]; 2 — неопубликованные результаты Уэллса

раздела фаз очень больших волн, которые уносятся в газовую фазу [44].

Вследствие технической важности расчетов режима захлебывания для его предсказания предложен ряд различных зависимостей. Широко используется зависимость [45], которую можно выразить через безразмерные плотности объемного расхода j_g^* и j_l^* ,

$$j_g^* = j_g \rho_g^{1/2} [gD(\rho_l - \rho_g)]^{-1/2}; \quad (124)$$

$$j_l^* = j_l \rho_l^{1/2} [gD(\rho_l - \rho_g)]^{-1/2}, \quad (125)$$

где j_l и j_g — плотности объемного расхода жидкости и газа; ρ_l и ρ_g — плотности жидкой и газовой фаз; D — диаметр трубы; g — ускорение силы тяжести. Условия захлебывания запишем в виде

$$j_g^{*1/2} + j_l^{*1/2} = C, \quad (126)$$

где C — константа, примерно равная единице (значение 0,75 можно рассматривать как наиболее подходящее).

Другое выражение для захлебывания предложено в [46], где предположили, что захлебывание соответствует критическому значению

$$k = j_g \rho_g^{1/2} [g\sigma(\rho_l - \rho_g)]^{-1/4} = 3,2, \quad (127)$$

где σ — поверхностное натяжение. Эксперименты показывают [47], что уравнение (127) для труб с диаметрами, большими 5 см, может оказаться более предпочтительным, чем (126).

По-видимому, трудно найти простое общее выражение, описывающее все экспериментальные данные по захлебыванию. Это происходит вследствие значительной важности эффектов входа, показанных на рис. 25, на котором приведены данные для двух типов конфигураций вход/выход. В первом случае вода беспрепятственно вводится, а затем бесперебойно удаляется через пористые секции стенок; расстояние между входом и выходом изменяется. Скорость захлебывания зависит от длины канала. Это происходит потому, что захлебывание определяется волнами, которые растут на пленке постепенно, в то время как она течет вниз. Чем протяженнее пленка, тем больше время, в течение которого происходит рост волн, и, таким образом, для данной скорости потока жидкости захлебывание наступает при более низких скоростях газа. Второй случай, вероятно, наиболее характерен для холодильников. Газовая фаза входит в трубу из емкости, заполненной газом под более высоким давлением и расположенной ниже трубы. В эту емкость

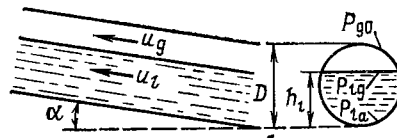


Рис. 26. Параметры расслоенного течения

свободно падает жидкость из трубы. Здесь явление захлебывания регулируется ростом волн вблизи точки, в которой газ входит в трубу, и, таким образом, независимо от длины трубы этот случай можно считать случаем более низкого предела для скорости захлебывания.

Е. Гидродинамика специфических режимов течения (горизонтальные трубы). Течения в горизонтальных трубах более сложны, чем в вертикальных, из-за влияния расслоения потока под действием гравитационных сил. За исключением простейших случаев расслоенного течения, это влияние делает расчеты более сложными.

Расслоенное течение. Параметры расслоенного течения в наклонной трубе показаны на рис. 26. Периметры газовой и жидкой фаз в местах контакта с трубой обозначены P_{go} и P_{lo} , а площади поперечного сечения, соответствующие двум фазам, обозначены S_g и S_l . Высота слоя жидкости h_l и диаметр трубы D . Хотя ранее мы занимались горизонтальными трубами, влияние наклона трубы на расслоенное течение довольно легко учесть; поэтому оно рассматривается здесь для учета большего числа случаев (труба наклонена к горизонтали под углом α).

Анализ рассмотренного течения выполнен в [6] при следующих основных допущениях.

1. Граница раздела фаз по существу плоская (волны на границе раздела не рассматриваются). Однако учитывается образование волн в основных случаях их анализа, главным образом при расчете двухфазных режимов течения, как было описано в п. А.

2. Эквивалентный диаметр жидкой зоны можно определить из ее площади поперечного сечения S_l и ее периметра, находящегося в соприкосновении со стенками трубы, P_{lo} .

3. Для газовой фазы эквивалентный диаметр можно определить из площади поперечного сечения S_g и полного периметра $S_{go} + P_{lg}$, где P_{lg} — длина границы раздела фаз (рис. 26).

С учетом этих предположений можно записать уравнения баланса импульса для двух фаз и определить коэффициент трения (на основе предполагаемых эквивалентных диаметров), который, по предположению, можно рассчитать из ординарных соотношений для однофазного потока. Результаты, полученные из анализа, выражаются в виде соотношений между безразмерной высотой жидкости $\tilde{h}_l = h_l/D$ и параметрами X и Y , определяемыми следующим образом:

$$X^2 = \frac{(dp_F/dz)_l}{(dp_F/dz)_g}, \quad (128)$$

$$Y^2 = \frac{(\rho_l - \rho_g) g \sin \alpha}{(dp_F/dz)_g}, \quad (129)$$

где $(dp_F/dz)_l$ и $(dp_F/dz)_g$ — градиенты давления для жидкой фазы при условии, что в канале течет только жидкость, и для газовой фазы при условии, что в канале течет только газ; ρ_l и ρ_g — плотности жидкой и газовой фаз; g — ускорение силы тяжести. Заметим, что X — параметр Мартинелли (см. п. В) и что $Y=0$ для горизонтальных труб (рис. 27). Так как X и Y можно получить из независимых переменных (скорости потока; параметров, описывающих физические свойства; геометрии трубы), $\tilde{h}_l$ также можно определять каждый раз однозначно. Определив $\tilde{h}_l$ из рис. 27, на основе геометрии определяют истинное объемное

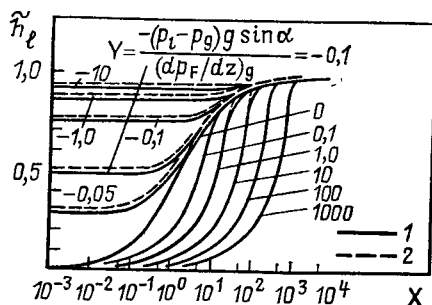


Рис. 27. Равновесный уровень жидкости при расслоенном режиме течения, рассчитанный в [6].

1 — турбулентно-турбулентные режимы; 2 — турбулентно-ламинарные

газосодержание

$$\varepsilon_g = \frac{1}{\pi} [\cos^{-1}(2\tilde{h}_e - 1) - (2\tilde{h}_l - 1) \sqrt{1 - (2\tilde{h}_l - 1)^2}]. \quad (130)$$

Пользуясь методом, описанным в [6], можно также найти градиент давления. Уравнение импульса фаз при сложении дает следующее выражение для определения градиента давления:

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\tau_{g0}P_{g0} + \tau_{l0}P_{l0}}{S} + g\rho_{TP} \sin \alpha, \quad (131)$$

где τ_{g0} и τ_{l0} — напряжения трения на стенках в местах соприкосновения с газовой или жидкой фазами соответственно; S — площадь поперечного сечения трубы; ρ_{TP} — двухфазная плотность, определяемая с помощью уравнения (12). Заметим, что эта форма уравнения импульса соответствует уравнению (15) для случая, в котором предполагается, что поток стационарен и где не рассматривается ускорение потока за счет градиента давления (как это было принято в [6]). Величины P_{g0} и P_{l0} следующим образом связаны с $\tilde{h}_l$:

$$P_{g0} = D \cos^{-1}(2\tilde{h}_l - 1); \quad (132)$$

$$P_{l0} = \pi D - P_{g0} = \pi D - D \cos^{-1}(2\tilde{h}_l - 1). \quad (133)$$

В соответствии с методом, описанным в [6], напряжения трения можно рассчитать, используя выражения:

$$\tau_{g0} = C_g \left(\frac{D_g u_l}{\nu_l} \right)^{-n} \frac{\rho_g u_g^2}{2}; \quad (134)$$

$$\tau_{l0} = C_l \left(\frac{D_l u_l}{\nu_l} \right)^{-m} \frac{\rho_l u_l^2}{2}. \quad (135)$$

Здесь использовались следующие значения постоянных: $C_g = C_l = 0,046$ и $n = m = 0,2$ для турбулентного течения; $C_g = C_l = 16$ и $n = m = 1,0$ для ламинарного течения. Скорости u_g и u_l соответственно равны j_g/ε_g и $j_l/(1 - \varepsilon_g)$. Эквивалентные диаметры D_g и D_l задаются следующими выражениями:

$$D_l = \frac{4S(1 - \varepsilon_g)}{P_{l0}}; \quad (136)$$

$$D_g = \frac{4S\varepsilon_g}{P_{g0} + P_{gl}}; \quad (137)$$

где P_{gl} — длина границы раздела фаз,

$$P_{gl} = D \sqrt{1 - (2\tilde{h}_l - 1)^2}. \quad (138)$$

Таким образом, чтобы рассчитать градиент давления и расслоенное течение, прежде всего необходимо определить X и Y , используя уравнения (128), (129). Затем, зная

X и Y , из рис. 27 находят h_l и, используя уравнения (132), (133) и (135), рассчитывают периметры области, занимаемой газом и жидкостью, и длину границы раздела фаз. Затем из уравнения (130) определяют истинное объемное газосодержание ε_g и значения периметров и истинного объемного газосодержания используются для расчета с помощью уравнений (136), (137) эквивалентных диаметров соответственно жидкости и газа. Эти значения затем подставляют в уравнения (134) и (135) для получения напряжений трения на стенках, а последние в свою очередь используют для расчета градиента давления с помощью (131).

Имеются некоторые ограничения применимости этого метода для расчета потерь давления, наиболее важным из которых является влияние межфазных волн. При высоких скоростях газа они могут давать значительный вклад в напряжения трения на границе раздела фаз, и тогда основные допущения анализа утрачивают свою силу. Однако доказано, что этот метод имеет большую ценность при рассмотрении переходов из одного режима течения в другой, а также что он дает надежные значения истинного объемного газосодержания и потерь давления при условии, что поверхность раздела фаз не слишком волнистая. Таким образом, этот метод применим в области гладкого расслоенного течения (см. рис. 6). Можно также попытаться использовать его для условий, которые не слишком далеки от условий в этой области потока.

Снарядный режим течения. Случай снарядного режима течения в горизонтальных трубах важен по различным причинам. Прежде всего движение больших элементов жидкости в нижней части трубы при высоких скоростях может привести к значительным вибрационным эффектам, особенно там, где жидкость встречает препятствия в виде, например, клапана или изменения направления течения в изгибе трубы. По этим причинам часто считают, что лучше всего избегать случая снарядного режима течения в горизонтальных трубах. При испарении в режиме горизонтального снарядного течения пробки играют важную роль в управлении коэффициентом теплоотдачи. В [49] анализируется ситуация, при которой снаряды (пробки, или, как их называют, вспененные волны) увлажняют через определенные промежутки времени верхнюю часть трубы, оставляя позади себя жидкую пленку, которая высыхает и испаряется. Если этот процесс приводит к высыханию пленки на верхней части трубы до того, как следующий снаряд проходит вдоль нее, теплоотдача ухудшается.

Механизм снарядного режима течения обсуждается в [50]; последовательность событий, предлагаемая в этой работе, которая приводит к образованию жидкостных пробок, показана на рис. 28. Предполагается, что образование пробок происходит главным образом вблизи входа

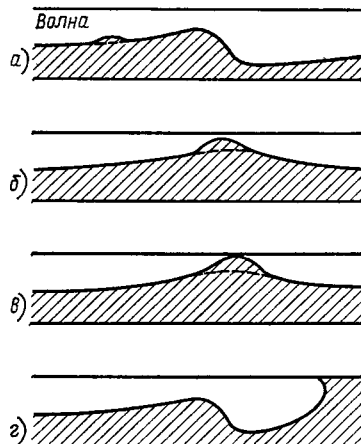


Рис. 28. Механизм образования волнового течения с перемычками [50]

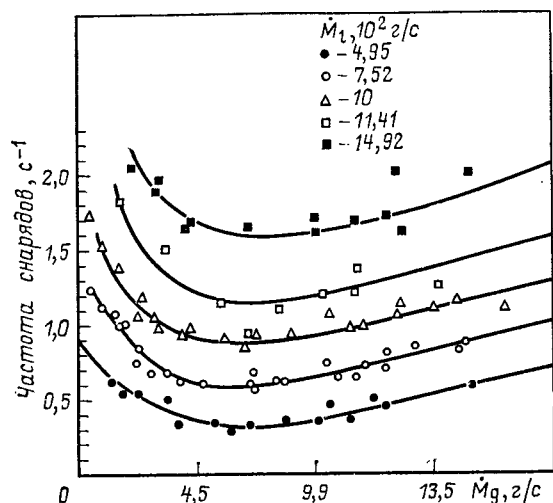


Рис. 29. Частота снарядов в горизонтальном водовоздушном потоке [51]

в канал. Уровень жидкости падает вследствие ухода предыдущего снаряда жидкости (а), но затем восстанавливается, когда следующая порция жидкости входит в канал (б). Однако входящая жидкость замедляется, и возникает увеличение уровня вдоль канала немедленно после входа. Волны растут на поверхности жидкости, и, как показано на рисунке, происходит перекрывание трубы (в). В тот момент, когда жидкость перекрывает трубу, жидкость в перемычке ускоряется до скорости газа, формируя таким образом зарождающиеся снаряды (г). Эти снаряды действуют как совок, который поднимает жидкость из стратифицированного слоя у нижней части канала и ускоряет его до скорости газового снаряда. Наоборот, жидкость за пробкой опускается для перестраивания (утонения) стратифицированного слоя жидкости. Процесс повторяется, и образуется последовательность газовых пробок, проходящих вдоль канала. Частота прохождения снарядов увеличивается с ростом скорости потока жидкости и проходит через минимум с увеличением скорости газа при фиксиро-

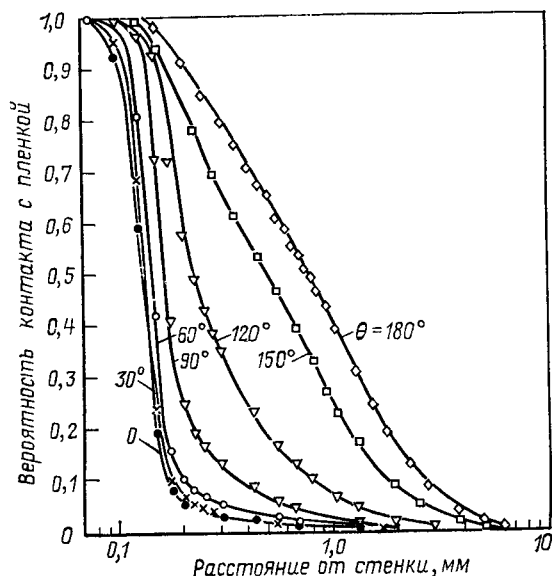


Рис. 30. Вероятностное распределение толщины пленки в горизонтальном водовоздушном кольцевом течении [52]

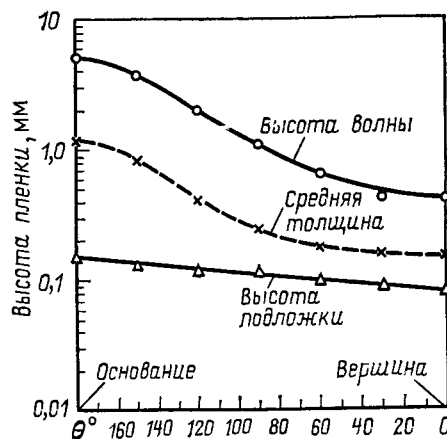


Рис. 31. Данные по минимальной, средней и максимальной толщине пленки в горизонтальном водовоздушном кольцевом течении [52], массовый расход воды равен 0,064, воздуха — 0,051 кг/с

ванной скорости жидкости. Данные по частоте прохождения пузырей, полученные в [51], приведены на рис. 29.

В [50] предложена модель снарядного течения, которая позволяет рассчитать скорость снарядов и градиент давления, если известны частота прохождения снарядов и гидравлический напор жидкости внутри отдельных снарядов. Используя собственные данные для этих параметров, авторы [50] продемонстрировали прекрасное прогнозирование результатов. Главные составляющие градиента давления при снарядном режиме течения связаны с ускорением жидкости, сжимаемой жидкостной пробкой, и с трением на стенке при прохождении снаряда.

Кольцевой режим течения. В горизонтальных кольцевых течениях пленка жидкости асимметрично распределяется вокруг трубы, будучи толще и имея более высокую скорость течения в нижней части трубы. Неравномерность распределения можно проиллюстрировать результатами, представленными в [52] и показанными на рис. 30—32. Толщину пленки измеряли датчиками контакта, которые дают вероятность распределения контакта с пленкой как функцию расстояния от стенки. Средняя толщина пленки соответствует вероятности 0,5; ниже будет показано, что эта вероятность сильно изменяется от верхней образующей трубы ($\theta=0^\circ$) до нижней части трубы ($\theta=180^\circ$). На рис. 31 показаны те же данные, нанесенные для минимальной толщины пленки, средней толщины и высоты волн (максимальная толщина пленки) в зависимости от угла. Это различие в толщинах пленок отражается на скоростях течения пленок (рис. 32). Скорости течения пленок, приведенные на этой диаграмме, измерялись методом разделения пленки с использованием для этой цели двух параллельных ребер, между которыми для определения локальной скорости те-

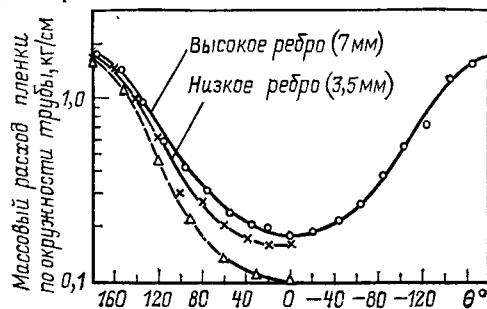


Рис. 32. Изменение массового расхода пленки по окружности трубы в горизонтальном водовоздушном потоке [52]. Массовый расход воды равен 0,064, воздуха — 0,051 кг/с. Штриховая кривая — расчет по измеренным значениям толщины пленки

чения пленки располагалась пористая секция стенки. Результаты слегка различались в зависимости от высоты разделяющих ребер. Однако видна очень большая разница в скоростях пленки вдоль периметра. Утолщение пленки в основании трубы является следствием того, что из-за действия сил тяжести происходит сток жидкости по стенкам трубы, ведущий к более высокой концентрации жидкости у ее основания. Этот процесс стекания пленки должен быть компенсирован (чтобы поддерживать равновесный горизонтальный кольцевой режим течения) с помощью процесса пополнения пленки в верхней части трубы. Для описания такого пополнения предложено несколько механизмов, приведенных ниже.

1. Унос капель, особенно с более толстых пленок у основания трубы, следующий за диффузионным осаждением капель вокруг трубы. Этот механизм исследуется в деталях в [53]. Модель, по-видимому, дает заниженные значения скорости на верхней части трубы и завышает ее у основания. Однако наблюдается качественное согласие данных, рассчитанных по модели с экспериментальными данными.

2. Волны на поверхности пленки у основания трубы становятся больше по амплитуде и проявляют тенденцию к перемещению с более высокими скоростями. Это ведет к искажению картины течения волн, и в [54] предложен механизм «парусного судна», при котором волны выталкиваются вверх вокруг трубы, что приводит к дополнительному переносу жидкости в верхнюю область.

3. В [55] показано, что возмущенные волны, которые проходят вдоль канала, вызывают интенсивное перемешивание жидкости, и это может быть механизмом повторного наполнения (периодически) верхней пленки.

4. В [56] предложена модель траекторий образования и осаждения капель при горизонтальном кольцевом течении. Предполагается, что капли испускаются с жидкой пленки с конечной скоростью. Они ускоряются аксиально потоком газа, но также подвергаются воздействию гравитационных сил. В зависимости от скорости и угла испускания капли распределяются по периметру трубы. С использованием скоростей испускания, измеренных при течении в вертикальных трубах, получено надежное качественное согласие с экспериментальными данными, хотя модель имеет тенденцию к завышению скорости текущей пленки по всему кольцевому периметру, т. е. к занижению доли унесенной жидкости.

Таким образом, моделирование горизонтального кольцевого режима течения в настоящее время характеризуется значительным числом неопределенных обстоятельств. Для их выяснения необходимо проведение дальнейших экспериментальных работ в этой области.

Г. Критические двухфазные потоки. Как и в однофазных течениях, критическую массовую скорость для двухфазного течения, проходящего через систему, можно определить как массовую скорость, соответствующую условию, при котором дальнейшее уменьшение давления вниз по потоку не приводит к увеличению массового расхода. В однофазных системах это условие соответствует состоянию, в котором скорость потока становится равной скорости звука (число Маха $Ma=1$). Взаимосвязь между скоростью звука и критической массовой скоростью в двухфазных системах проявляется менее наглядно, так как скорость звука в этих системах является функцией режима двухфазного течения и звуковой частоты.

Двухфазные потоки могут иметь значительно более низкие значения критической массовой скорости, так как они сочетают (по сравнению с потоками газа) высокую сжимаемость с высокой плотностью. Обычно критическую массовую скорость $\dot{m}_c$ рассчитывают с помощью выражения, которое аналогично соотношению для однофазных потоков,

$$\dot{m}_c = \left(-\frac{\partial p}{\partial v_{TP}} \right)_s, \quad (139)$$

где v_{TP} — удельный объем двухфазной смеси. Наиболее часто используемым допущением является предположение о гомогенности потока, при котором

$$v_{TP} = v_H = \dot{x}_g v_g + (1 - \dot{x}_g) v_l, \quad (140)$$

где $\dot{x}_g$ — расходное массовое газосодержание при критических условиях; v_g и v_l — удельные объемы газа и жидкости соответственно. Примеры применения гомогенной модели течения описаны в [57, 58].

В [59] предложена модель, включающая относительную скорость фаз, в которой v_{TP} определяется на основе уравнения импульса как

$$v_{TP} = v_m = \frac{\dot{x}_g v_g}{\varepsilon_g} + \frac{(1 - \dot{x}_g)^2}{1 - \varepsilon_g} v_l, \quad (141)$$

где ε_g — истинное объемное газосодержание, которое, как предложено в [59], следует рассчитывать по уравнению (53) с коэффициентом скольжения, определяемым следующим образом:

$$S' = \left(\frac{v_g}{v_l} \right)^{1/2}. \quad (142)$$

Автор [60] определил удельный объем для использования в уравнении (139) из уравнения кинетической энергии

$$v_{TP} = v_{KE} = \left[\frac{v_g \dot{x}^3}{\varepsilon_g^3} + \frac{v_l (1 - \dot{x})^3}{(1 - \varepsilon_g)^2} \right]. \quad (143)$$

Там же предложено следующее соотношение для S' , с помощью которого рассчитывается ε_g и используется в уравнении (143),

$$S' = \left(\frac{v_g}{v_l} \right)^{1/3}. \quad (144)$$

При быстром ускорении и движении в направлении к критической секции (неважно, находится ли она в конце трубы или в горловине сопла) очень важным является вопрос о термодинамическом равновесии. В предельном случае можно предположить, что термодинамическое равновесие сохраняется в продолжении всего процесса, и на этом основании предложить гомогенную модель течения или модель течения со скольжением (например, модель Муди). Однако отклонения от термодинамического равновесия весьма значительны, особенно в области очень низких расходных массовых паросодержаний. В предельном приближении не должно происходить никаких изменений фазового состава между местом, расположенным вверх по течению, и горловиной, и это приводит к моделям так называемого замороженного течения. Они могут быть как типа гомогенных моделей, так и моделей течений со скольжением.

Модели замороженного течения пригодны для расчетов критической скорости потока, но менее эффективны при расчетах коэффициента критического давления η (отношение давления в горловине сопла к давлению потока вверх по течению). Одной из наиболее широко используемых моделей для двухфазного критического потока является модель Генри—Фауске [64], согласно которой профиль температур от некоторой точки вверх по потоку до горловины связан с политропным расширением газовой фазы, что позволяет описать процесс массопереноса (испарения) посредством эмпирического выражения. Это дает возможность рассчитать локальное расходное массовое газосодержание в горловине сопла.

На рис. 33 сравниваются различные модели критических течений в зависимости от паросодержания при торможении пароводяного потока при давлении торможения $68,95 \cdot 10^5$ Па. Как будет показано, модели сильно различаются между собой при очень низких паросодержаниях;

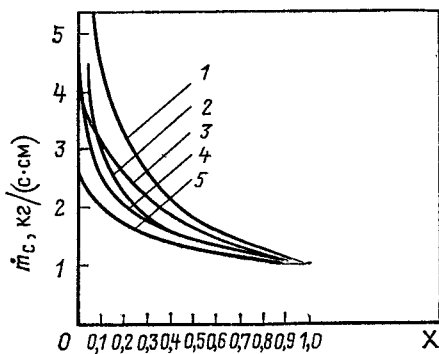


Рис. 33. Сравнение моделей двухфазного пароводяного критического потока [65]:

1 — давление торможения $P=68,95 \cdot 10^5$ Па; 2 — модель полностью замороженного течения; 3 — модель замороженного гомогенного течения; 4 — модель Мудни; 5 — модель Генри — Фауске

именно эта область низкого паросодержания имеет большое значение при рассмотрении возмущений на ядерных установках и химических заводах. По определению, модель Генри — Фауске разработана для описания экспериментальных данных (с таким же расчетом были выбраны выражения для описания массопереноса), и будет показано, что она находится в сравнительно неплохой согласии с моделью гомогенного замороженного течения при паросодержаниях, больших 0,3.

Для сравнительно коротких труб и сопел характерны гипотетические аварии, происходящие во время продувки установок (рис. 33). Совсем другая картина имела бы место для более длинных каналов, где, вероятно, более точными оказались бы различные модели течения со скольжением.

Ниже более детально описаны три модели: гомогенного равновесного течения, гомогенного замороженного течения и модель Генри — Фауске. Первая модель очень часто используется как эталонная для сравнения, вторая модель дает полезный быстрый метод расчета критического потока для сравнения с действительными скоростями потока, чтобы убедиться, что критические условия не были достигнуты, и третья модель дает метод, рекомендуемый для пароводяных потоков.

Модель гомогенного равновесного течения. Критическую массовую скорость рассчитывают из уравнений (139), (140) дифференцированием по частям. Удобно связать критическую массовую скорость с производными, которые можно получить из стандартных таблиц для водяного пара. Особенно удобный вид зависимости для модели гомогенного равновесного течения дан в [62], который имеет вид

$$\dot{m}_c = (1 / \{ [v_{lg}/s_{lg}] ds_l/dp - dv_l/dp \} + \dot{x} \{ [v_{lg}/s_{lg}] ds_{lg}/dp - dv_{lg}/dp \})^{1/2}, \quad (145)$$

где s_l — удельная энтропия жидкой фазы; s_{lg} — удельная энтропия фазового превращения ($s_{lg} = s_g - s_l$); $v_{lg} = v_g - v_l$. В уравнении (145) паросодержания x рассчитывают исходя из энтропии торможения h_0 лежащей выше точки течения и из энтропий жидкой и газовой фаз в горловине (h_l и h_g соответственно) с помощью следующего соотношения:

$$\dot{x} = \frac{h_0 - h_l}{h_g - h_l} = \frac{h_0 - h_l}{h_{lg}}; \quad (146)$$

здесь h_0 определяется выражением

$$h_0 = \dot{x} h_{g0} + (1 - \dot{x}) h_{l0} + \dot{m}_0^2 / (2 \rho_H^2), \quad (147)$$

где $\dot{x}_0$, h_{g0} , h_{l0} и $\dot{m}_0$ — соответственно паросодержание, энтальпия пара, энтальпия жидкости и массовая скорость

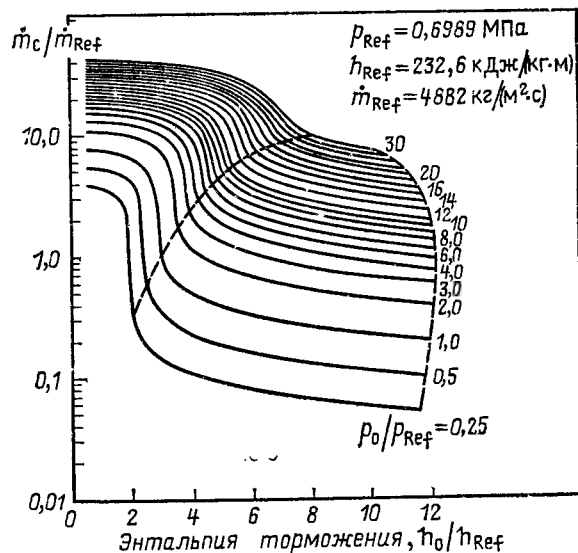


Рис. 34. Критические массовые скорости пароводяного потока, рассчитанные по гомогенной равновесной модели течения согласно [63]

в лежащей выше точке потока; ρ_H — гомогенная плотность, описываемая уравнением (7).

Диаграмма критической массовой скорости как функции энтальпии торможения для пароводяного потока, рассчитанная по модели гомогенного равновесного течения, приведена на рис. 35. Здесь давление торможения p_0 в точке, предшествующей соплу, определяется следующим образом:

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2} \frac{\dot{m}_0^2}{\rho_H}, \quad (148)$$

где p_0 — статическое давление в этой точке.

Модель гомогенного замороженного течения. Уравнения для этой модели получены в [61]. Для случая, когда

$$(1 - \dot{x}_0) v_{l0} \leq 1 \quad (149)$$

(v_{l0} и v_{g0} — удельные объемы жидкости и газа в точке, находящейся выше по течению), результирующее уравнение имеет вид

$$\dot{m}_c = \frac{1}{v} \left[2 \dot{x}_0 p_0 v_{g0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} (1 - \eta^{(\gamma-1)/\gamma}) \right]^{1/2}, \quad (150)$$

где γ — коэффициент изэнтропического расширения, а v (удельный объем двухфазной среды в критической области)

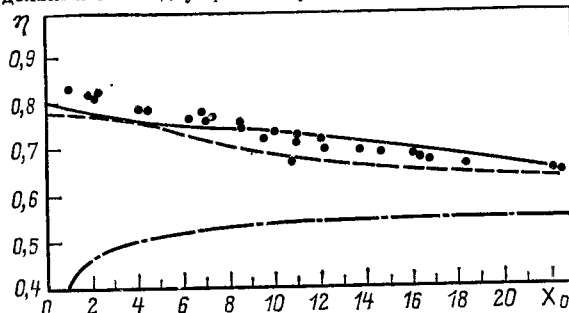


Рис. 35. Сравнение расчетных значений критического отношения давлений для пароводяного потока при давлении 3,4 МПа [61]: сплошная кривая — модель Генри — Фауске; штриховая — гомогенная равновесная модель течения; штрихпунктирная — гомогенная замороженная модель течения

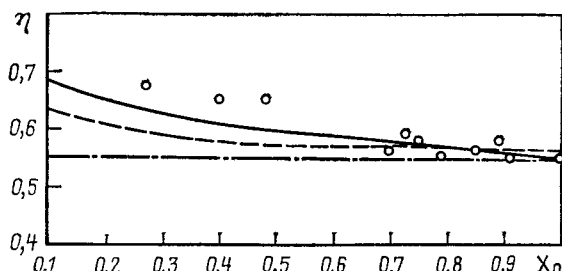


Рис. 36. Сравнение расчетных и экспериментальных значений критического отношения давлений для пароводяного потока при давлении 0,12 МПа [61]: сплошная кривая — модель Генри — Фауске; штриховая — однородная равновесная модель; штрихпунктирная — однородная замороженная

и η (коэффициент критического давления) задаются выражениями

$$v = (1 - \dot{x}_0) v_{t0} + \dot{x}_0 v_{g0} \eta^{-1/\gamma}; \quad \text{ОИП} \quad (151)$$

$$\eta = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma + 1)} \quad (152)$$

Модель Генри — Фауске. На рис. 35—37 модель Генри — Фауске [61] сравнивается с моделью однородного равновесного течения, моделью однородного замороженного течения и экспериментальными данными. Как уже говорилось выше, критическую массовую скорость лучше всего предсказывать, используя модель Генри — Фауске и однородное замороженное течение; модель однородного равновесного течения работает лучше, чем модель однородного замороженного течения для расчета коэффициента критического давления η . Модель Генри — Фауске до некоторой степени громоздка для использования, но если известен коэффициент критического давления η (например, из результатов, аналогичных приведенным на рис. 35 и 36), автор [64] предлагает для расчета $\dot{m}_c$ использовать уравнение

$$\dot{m}_c = (2P_0 (1 - \varepsilon_{g0}) \{ [(1 - \varepsilon_{g0})/\varepsilon_{g0}] (1 - \eta) + [\gamma/(\gamma - 1)] (1 - \eta^{(\gamma-1)/\gamma}) \} / \varepsilon_{g0} v_t [(1 - \varepsilon_{g0})/\varepsilon_{g0} + \eta^{-1/\gamma}]^2)^{1/2}, \quad (153)$$

где ε_{g0} — истинное объемное паросодержание, определенное с помощью однородной модели течения [см. уравнение (55)] при паросодержании, оцениваемом из энтальпии торможения h_0 , и с физическими свойствами, взятыми при P_0 на линии насыщения.

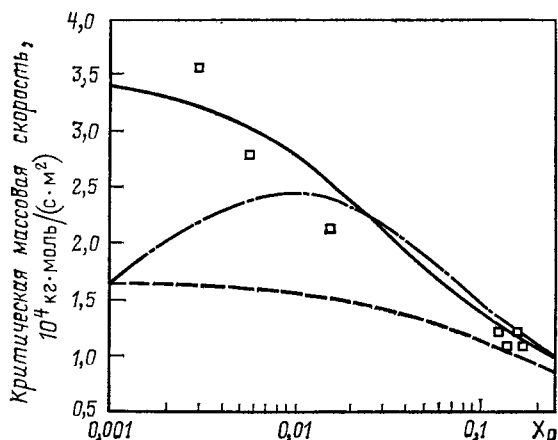


Рис. 37. Сравнение расчетных и экспериментальных значений критической массовой скорости для пароводяного потока при давлении 3,4 МПа [61]. Обозначения те же, что и на рис. 36

2.3.3. Потоки газа с частицами

М. Вебер, У. Стегмайер

А. Принцип пневматической транспортировки. Пневматическая транспортировка имеет очень важное значение для перемещения гранулированных или порошкообразных материалов, особенно на короткие расстояния, и в связи с процессами тепло- и массообмена.

Физические процессы, лежащие в ее основе, весьма разнообразны. Поэтому ниже будут рассмотрены только некоторые аспекты этого явления. Более исчерпывающую трактовку этого принципа транспортировки можно найти в работах [1—6].

Пневматическая транспортировка в вертикальных трубах. Принцип пневматической транспортировки для вертикального подъемного движения можно лучше всего объяснить, используя схему, представленную на рис. 1. Масса твердой частицы F_w и ее сила инерции $M_s dv_s/dt$ должны быть скомпенсированы силой сопротивления F_D и силой, возникающей вследствие действия градиента давления $V_s dp/dl$, которые направлены в сторону, противоположную движению частицы. Чтобы заставить частицу двигаться, скорость текущей среды v_g должна быть больше скорости осаждения твердой частицы w_{s0} (1)

Пневматическая транспортировка в горизонтальных трубах. В горизонтальной трубе связи намного более сложны, так как основное направление движения текущего потока перпендикулярно силе тяжести, действующей на твердые частицы. Ниже перечислены эффекты, компенсирующие силу тяжести.

1. Поперечные силы, вызываемые асимметричностью потока жидкости вблизи стенок трубы вследствие градиента скорости.

2. Сила Магнуса, действующая на вращающиеся частицы.

3. Поперечные силы, порождаемые турбулентным перемешиванием.

4. Выталкивающая сила, минимальная при пневматической транспортировке, но приобретающая огромное значение при гидротранспортировке.

5. Превращение (при определенных условиях) части кинетической энергии осевого движения частиц в кинетическую энергию радиального движения при их столкновении со стенкой трубы.

6. Задерживание материала у стенки при его скольжении вдоль основания трубы (осевший слой).

Эффекты, перечисленные выше, кроме п. 4, из-за их симметрии можно было бы не учитывать, но концентрация частиц в нижней части трубы выше (из-за действия гравитационных сил), в результате чего и появляются силы, направленные вверх.

Пневматическая транспортировка в наклонных трубах. Описанные выше эффекты накладываются друг на друга в случае, когда труба наклонена.

В. Режимы течения. В зависимости от скорости газа, скорости свободного падения единичной частицы, концентрации твердых частиц и положения трубы возникают различные режимы течения. Это можно пояснить на примере вертикальной трубы (рис. 2, 3).

1. Потоки с размытым содержанием твердой фазы существуют при низких относительных массовых расходах

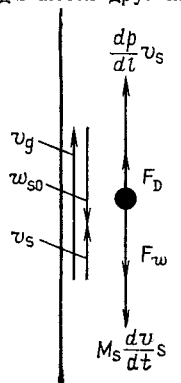


Рис. 1. Баланс сил, действующих на частицу при вертикальной пневмотранспортировке

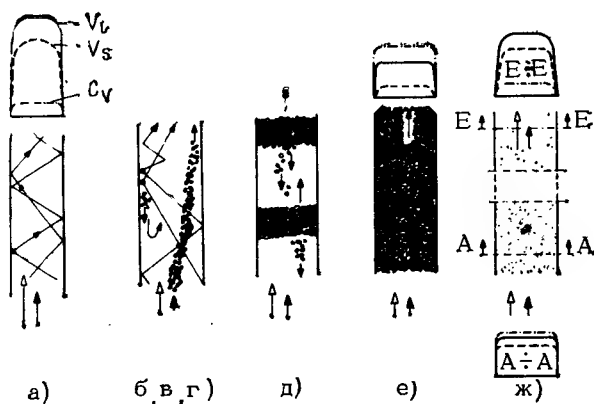


Рис. 2. Режимы течения при вертикальной пневмотранспортировке (см. рис. 3)

($\dot{x} < 10$) и одновременном условии высоких скоростей газа. Распределение концентрации твердых частиц по поперечному сечению трубы почти однородно (рис. 2, а и кривая 3' на рис. 3).

2. Течения со скоплениями частичек наблюдались в опытах с более высокими относительными массовыми расходами ($\dot{x} > 30$) при относительно низких скоростях газа. Распределение твердых частиц неравномерно, характер течения нестационарен; возможна закупорка трубы, если характеристики воздухоудвки нестабильны (см. рис. 2, б—г и рис. 3, б—г).

3. Пробковый (для плотной фазы) режим течения и режим плотноупакованного слоя появляются при низких скоростях газа ($v_g < w_{s0}$) и высоких концентрациях твердых частиц. Обнаружено, что потери давления при таких режимах транспортировки очень велики (см. рис. 2, д, е и рис. 3, д, е).

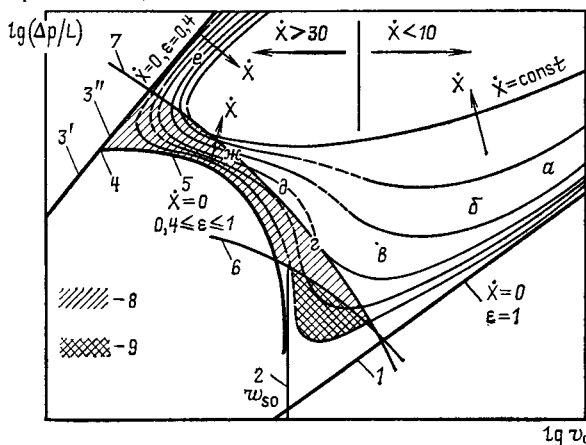


Рис. 3. Схематическое изображение потерь давления для пневмо- и гидротранспортировки средне- и крупнозернистых материалов в вертикальных трубах [2].

1 — течение только жидкой среды; 2 — скорость осаждения единичной частицы; 3' — течение через движущийся слой твердых частиц; 3'' — течение через неподвижный слой частиц; 4 — точка минимальной скорости, псевдооживленный слой; 5 — расширяющийся псевдооживленный слой; 6 — характеристика вентилятора; 7 — характеристика объемного нагнетательного вентилятора, определяющего режим перемещения частиц; 8 — область работы воздухоудвки; 9 — область работы вентилятора; а — гомогенный режим течения; б — гетерогенный режим с размытой твердой фазой; в — агрегативное течение; г — расслоенное течение; д — пробковый (для твердой фазы) режим течения; е — режим плотноупакованного слоя и гидротранспортировка при высокой концентрации твердой фазы; ж — псевдооживленный слой и гидротранспортировка суспензий

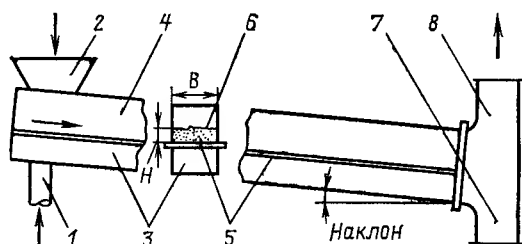


Рис. 4. Схема пневмотранспортиера, в котором взвешенные в воздухе частицы перемещаются под действием сил тяжести: 1 — подача воздуха; 2 — питатель; 3 — канал подачи воздуха; 4 — канал транспортировки; 5 — пористое основание; 6 — транспортируемый материал; 7 — выход транспортируемого материала; 8 — выход воздуха

4. Режим течения в виде суспензии возможен с твердой фазой, состоящей из частиц тонкого помола, которые легко поддаются псевдооживлению. В этом случае можно достигнуть высоких концентраций твердых частиц и низких скоростей (см. рис. 2, ж и рис. 3, ж).

С. Схематическое представление потерь давления. Режимы транспортировки, обсуждавшиеся в п. В, могут быть охарактеризованы соотношением между градиентом давления dp/dl и скоростью текучей среды v_g . Это показано на рис. 3 для вертикальной пневматической транспортировки материала средней и крупной зернистости.

Д. Транспортировка взвешенных в воздухе твердых частиц самотеком. Особый случай пневматической транспортировки реализуется под действием силы тяжести для частиц, взвешенных в воздухе. Он основывается на приведении порошкообразного материала в состояние псевдооживленного слоя при вертикальной аэрации. При обычном наклоне канала от 2 до 6° материал течет под действием сил тяжести в желаемом направлении (рис. 4). Относительно низкий удельный расход энергии (0,5—4 Дж/кг), малый износ конвейерного тракта и небольшая степень истирания вследствие низких скоростей транспортировки (0,5—2 м/с) являются преимуществами таких систем.

Е. Принципы расчета. Определение основных параметров. Определим некоторые параметры, используемые для описания и расчета течений газа с частицами.

Объем текучей компоненты обозначим V_g , общий объем системы газ—твердые частицы $V_g + V_s$. Отношение этих двух объемов является относительным объемом пор или пористостью

$$\varepsilon = V_g / (V_g + V_s). \quad (2)$$

Однако для описания гидротранспортировки широко используется объемная концентрация

$$c_v = 1 - \varepsilon. \quad (3)$$

В практике пневмотранспортировки обычно пользуются относительным массовым расходом $\dot{x}$, который определяется отношением массового расхода твердых частиц к массовому расходу газа,

$$\dot{x} = \frac{\dot{M}_s}{\dot{M}_g} = \frac{(1 - \varepsilon) \rho_s v_s}{\varepsilon \rho_g v_g}. \quad (4)$$

При гидравлической транспортировке обычно используется расходная объемная концентрация

$$c_T = \frac{\dot{V}_s}{\dot{V}_s + \dot{V}_l}, \quad (5)$$

которая является отношением объема твердых частиц, текущих в трубе, к общему объему.

Соотношения для взаимного преобразования определенных выше параметров представлены в табл. 1.

Таблица 1. Преобразования параметров, используемых при описании потоков газа или жидкости с частицами

ϵ	x	c_v	c_T
ϵ	$\frac{1}{1 + x(\rho_{g,l}/\rho_s)(v_{g,l}/v_s)}$	$1 - c_v$	$\frac{1}{1 + [c_T/(1 - c_T)](v_{g,l}/v_s)}$
x	$\frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \frac{v_s}{v_{g,l}} \frac{\rho_s}{\rho_{g,l}}$	$\frac{c_v}{1 - c_v} \frac{v_s}{v_{g,l}} \frac{\rho_s}{\rho_{g,l}}$	$\frac{c_T}{1 - c_T} \frac{\rho_s}{\rho_{g,l}}$
c_v	$1 - \epsilon$	$-$	$\frac{1}{1 + [(1 - c_T)/c_T](v_s/v_{g,l})}$
c_T	$\frac{1}{1 + [\epsilon/(1 - \epsilon)](v_{g,l}/v_s)}$	$\frac{1}{1 + [(1 - c_v)/c_v](v_{g,l}/v_s)}$	$-$

Скорость осаждения. Скорость осаждения частиц является важным параметром и в гидравлической, и в пневматической транспортировке. Ее можно рассчитать из баланса сил, составленного для силы тяжести, сопротивления и выталкивающей силы.

Скорость осаждения одиночной сферической частицы w_{s0} в невозмущенном покое газе без влияния стенок канала определяется следующим образом:

$$w_{s0} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{d_s}{\xi} \frac{\rho_s - \rho_{g,l}}{\rho_{g,l}}} g_n. \quad (6)$$

Коэффициент сопротивления ξ одиночной частицы зависит от числа Рейнольдса

$$Re_s = d_s w_{s0} / \nu. \quad (7)$$

Соотношение между коэффициентом сопротивления ξ и числом Рейнольдса Re_s можно представить в виде эмпирических уравнений; примеры приведены в табл. 2. Для чисел Рейнольдса, меньших $2 \cdot 10^4$, такое уравнение описывает в неявном виде скорость осаждения частицы w_{s0} .

Таблица 2. Корреляции коэффициента сопротивления одиночных сферических частиц

Уравнение	Интервал чисел Рейнольдса	Источник
$\xi = \frac{24}{Re_s}$	$Re_s \leq 0,2$	[22]
$\xi = \frac{21}{Re_s} + \frac{6}{\sqrt{Re_s}} + 0,28$	$0,1 \leq Re_s \leq 4 \cdot 10^3$	[7]
$\xi = 0,47$	$2 \cdot 10^4 \leq Re_s \leq 10^5$	[7]

Его можно решить итерационными методами. Скорости осаждения единичных сферических частиц в воздухе при стандартных условиях можно взять из рис. 5.

Часто частицы не имеют сферической формы. В этих случаях необходимо учитывать дополнительно коэффициент формы K . Эмпирические коэффициенты можно найти в [8] (а также в ссылках в [8]). В некоторых случаях нужно рассматривать влияние стенок трубы и концентрации твердых частиц. В [9] предлагаются уравнения, которые дают хорошее согласие с экспериментальными результатами.

Отношение скоростей. Согласно соотношениям, приведенным в п. А, скорость твердой фазы в вертикальной

трубе при определенных упрощенных условиях $^1 (v_{g,l}/w_{s0} \leq 10)$ задается следующим образом:

$$v_s = v_{g,l} - w_{s0}. \quad (8)$$

Отсюда можно получить выражение для отношения скоростей

$$v_s/v_{g,l} = 1 - w_{s0}/v_{g,l}. \quad (9)$$

Для горизонтальной транспортировки соотношения имеют более сложный вид. Для крупнозернистых материалов можно использовать уравнение (23).

Потери давления. Градиент давления $\Delta p/l$ вдоль транспортировочной трубы является существенным параметром при конструировании пневмотранспортировочных систем. Перепад давления зависит от множества параметров: шероховатости стенок трубы, длины транспортера, диаметра трубы, плотности и вязкости газа, скорости газа, типа перемещаемого материала, материала трубы, размера и плотности частиц, скорости частиц, наклона трубы, распределения частиц по размерам, электростатических свойств, адгезионной способности, когезионной способности и влажности.

Поэтому во многих случаях необходимо проводить эксперименты в исследовательской установке, так как никакие расчетные формулы не дают достаточно точных результатов. С помощью эмпирических уравнений, приведенных ниже, можно получить только приближенные значения.

При некоторых упрощающих допущениях падение давления складывается из следующих составляющих:

- 1) потери давления Δp_{gl} текучей фазы потока;
- 2) потери давления Δp_s , вызываемые трением твердых частиц;
- 3) потери давления Δp_{sH} , обусловленные массой твердых частиц в негоризонтальной трубе;
- 4) потери давления Δp_{sA} , возникающие вследствие ускорения твердых частиц в начальном участке трубы;
- 5) потери давления Δp_{sB} , вызываемые ускорением твердых частиц после изгибов.

Таким образом,

$$\Delta p = \Delta p_{gl} + \Delta p_s + \Delta p_{sH} + \Delta p_{sA} + \Delta p_{sB}. \quad (10)$$

Согласно [10] это уравнение можно записать для смеси газа с твердыми частицами так:

$$\Delta p = \epsilon(f_g + \dot{x}f_s) \frac{l}{D} \frac{\rho_g}{2} v_g^2 + \dot{x} \frac{v_g}{v_s} \epsilon \rho_g g_n l \sin \delta + \epsilon \dot{x} \rho_g v_g (v_s + \Delta v_s). \quad (11)$$

¹ При более высоких скоростях ($v_{g,l}/w_{s0} > 10$) нельзя пренебрегать влиянием трения вследствие соударений частиц со стенкой и друг с другом. В этих случаях относительную скорость w можно рассчитать на основе менее упрощенных уравнений движения согласно [16], по уравнению (27) или согласно [2].

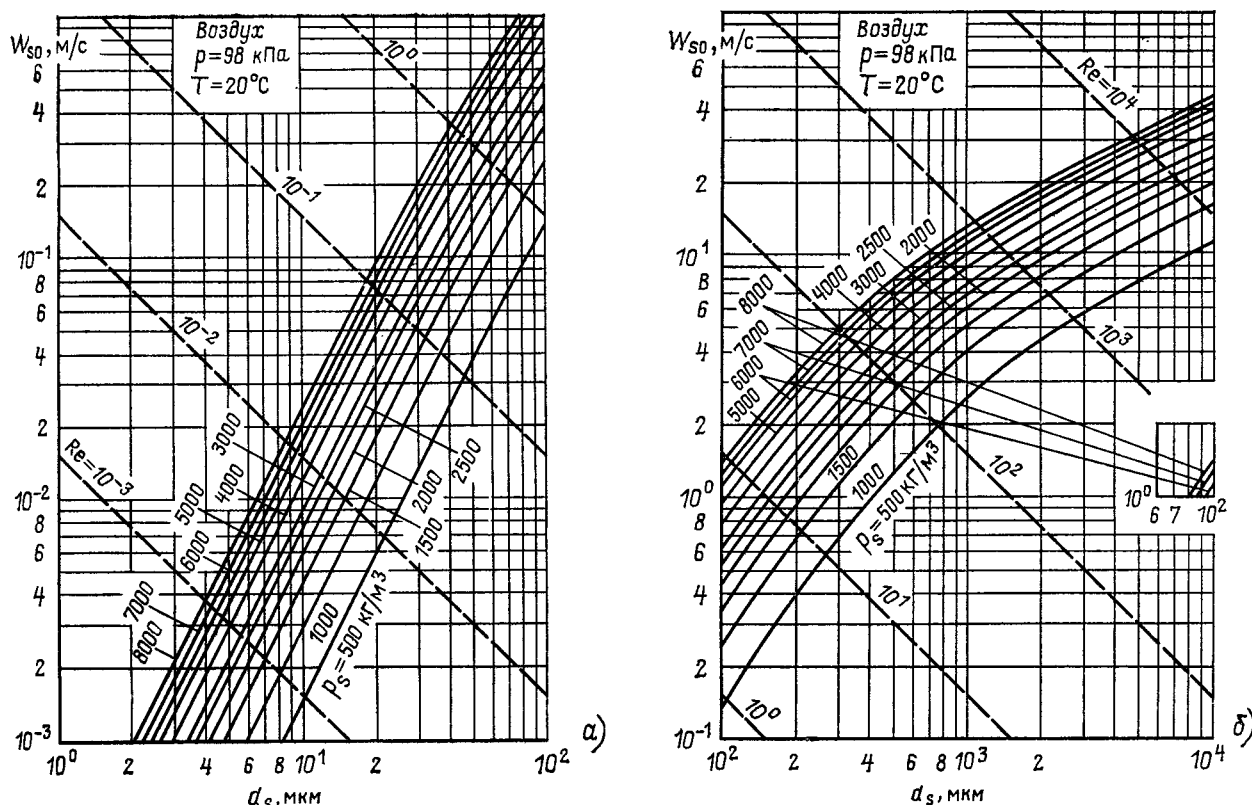


Рис. 5. Скорость осаждения одиночной частицы в воздухе [2] для низких (а) и высоких (б) чисел Re

Скорость газа определяется из массового расхода твердых частиц $\dot{M}_s$, площади поперечного сечения трубы S и выбранного относительного массового расхода x ($v_g = \dot{M}_s / (x \rho_g S v)$). (12)

Для течений с малой концентрацией твердой фазы (наиболее частый случай пневмотранспортировки при $x < 30$) пористость близка к единице ($\varepsilon \approx 1$).

При более высоких относительных массовых расходах ($x > 30$) скорость газа можно рассчитать более точно при помощи уравнения для вертикального потока

$$v_{gv} = \frac{\dot{M}_s}{x \rho_g S} \left(1 + \frac{\rho_g / \rho_s}{1/x - \rho_g \omega_{s0} S / \dot{M}_s} \right). \quad (13)$$

В этом случае пористость определяют из уравнения (12), а скорость твердой фазы из (8). Для горизонтальных пневмотранспортеров при относительных массовых расходах $x > 30$ нужно использовать уравнение (23). При использовании уравнения (12) для расчета числа Фруда при $\varepsilon \approx 1$ ($Fr = v_g^2 / D g_n$) приближенное значение отношения скоростей $(v_g / v_s)^*$ получается с помощью (23). В результате имеем

$$v_{gh} = \frac{\dot{M}_s}{x \rho_g S \{1 / [1 + (v_g / v_s)^* (\rho_g / \rho_s) x]\}}. \quad (14)$$

Получив приближенные значения при $\varepsilon \approx 1$, можно, используя уравнения (14) и (23), с помощью итераций улучшить точность результатов.

Коэффициент трения f_{gl} для потока газа можно описать с помощью многочисленных эмпирических формул. Для примера приведем корреляцию для гладких труб, данную

Блазиусом,

$$f_{gl} = 0,3164 \sqrt[4]{1/Re}, \quad (15)$$

где

$$Re = D v_{gl} / \nu. \quad (16)$$

Коэффициент трения для твердых частиц. Коэффициент трения для твердых частиц f_s подобно перепаду давления Δp зависит от множества параметров. Ниже приведены примеры эмпирических корреляций.

Для коэффициента трения твердой фазы в порошкообразных материалах ($d_s < 150$ мкм) в горизонтальных транспортирующих трубах принята корреляция, которая используется для течений с малыми и большими концентрациями твердой фазы,

$$f_s = \frac{2,1 (Fr_w)^{0,25}}{\dot{x}^{0,3} (d_s/D)^{0,1} Fr}, \quad (17)$$

где

$$Fr_w = \omega_{s0}^2 / (d_s g_n); \quad (18)$$

$$Fr = v_g^2 / (D g_n). \quad (19)$$

На рис. 6 показан комплекс $f_s \dot{x}^{0,3} (d_s/D)^{0,1} (Fr_w)^{-0,25}$ в зависимости от $\sqrt{Fr}$.

Для коэффициента трения твердой фазы при горизонтальной транспортировке крупнозернистых материалов корреляцию f_s можно использовать для материалов с размерами гранул от 0 до 40 мм в горизонтальных трубах [12]

$$f_s = 2,7 \left(\dot{x} + \frac{\rho_s}{\rho_g} \right)^{-1} \frac{D}{d_s} \frac{v_g}{v_s} \left(1 - \frac{v_s}{v_g} \right) \frac{\xi}{K^2}, \quad (20)$$

где K — коэффициент формы;

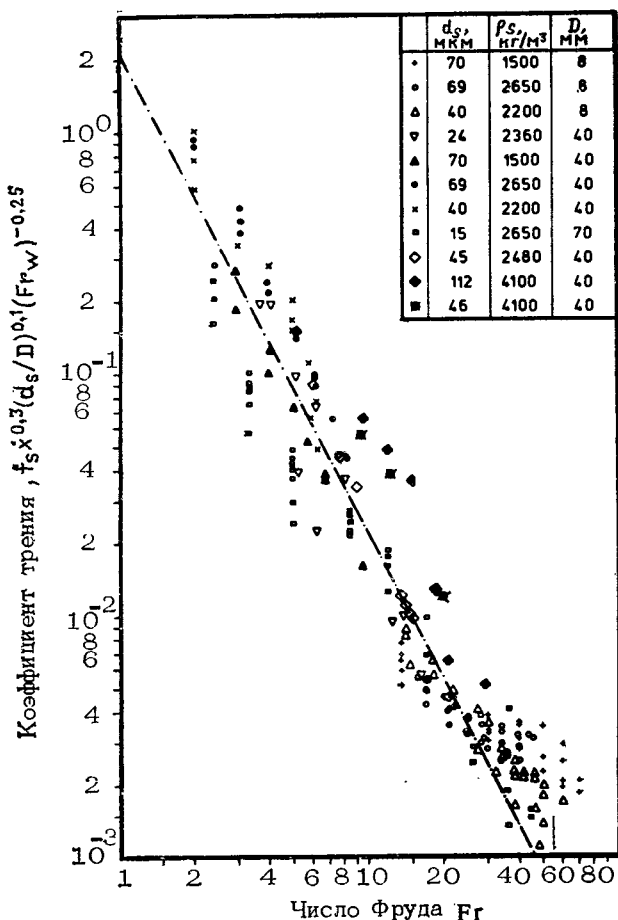


Рис. 6. Зависимость для коэффициента трения частиц [11]

$$\xi = 24/Re_s + 4/\sqrt{Re_s} + 0,4; \quad (21)$$

$$Re_s = d_s(v_g - v_s)/\nu. \quad (22)$$

Уравнение (20) содержит отношение скоростей v_g/v_s , которое можно рассчитать согласно [12],

$$\frac{v_g}{v_s} = 1 + C^* \left(\frac{\rho_s}{\rho_g} - 1 \right)^{2/3} \left(\frac{d_s}{D} \right)^{2/3} \left(1 + \frac{200}{Fr - 100} \right), \quad (23)$$

где числа Фруда [см. (19)]

$$Fr = v_g^2 / (D g_n).$$

Эмпирические значения для множителя C^* составляют 0,014—0,09 (обычно 0,015) в зависимости от транспортируемого материала. На рис. 7 и 8 показаны коэффициент трения f_s и отношение скоростей v_g/v_s .

Коэффициент трения твердых частиц при вертикальной пневмотранспортировке и сравнительно низких относительных массовых расходах ($x < 20$) можно рассчитать с довольно высокой точностью [13]

$$f_s = \frac{1}{1 + 217(1 - \epsilon)} (3,13 \cdot 10^{-5}) \left(\frac{g_n d_s}{\nu^2} \right)^{0,26} \frac{v_s}{v_g} \times \left[\left(\frac{v_{ss}}{v_s} \right)^{0,5} \left(\frac{v_s}{g_n d_s} \right)^{-0,25} \left(\frac{g_n d_s^3}{\nu^2} \right)^{0,16} \left(\frac{D}{d_s} \right) + (1,55 \cdot 10^{-3}) \left(\frac{v_{ss}^2}{g_n d_s} \right)^{0,5} \right]. \quad (24)$$

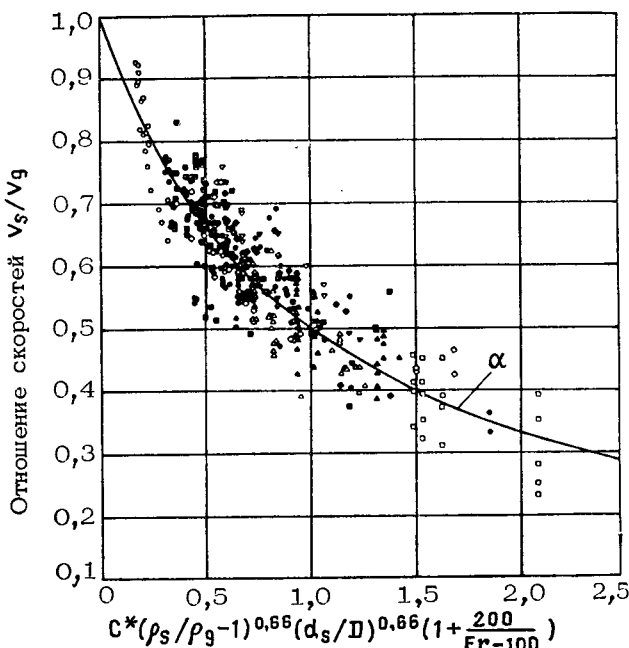


Рис. 7. Отношение скоростей при горизонтальной транспортировке [12]

Здесь v_{ss} — скорость звука в твердом материале. Как видно из рис. 9, точность составляет приблизительно 30%, что лишь немного выше точности, полученной другими авторами. Параметры изменяются следующим образом: $D = 53$ и 80 мм; $0,1 < d_s < 1,07$ мм; $1050 < \rho_s < 8650$ кг/м³. Для простой оценки в некоторых случаях можно использовать соотношение из [14]; в среднем оно дает хорошие результаты, но показывает большие различия при сравнении с экспериментальными результатами в специальных

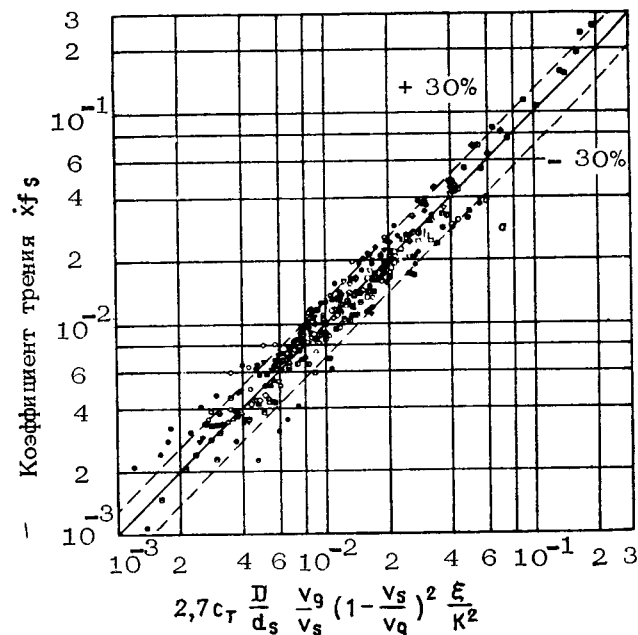


Рис. 8. Коэффициент трения частиц при горизонтальной транспортировке [12]

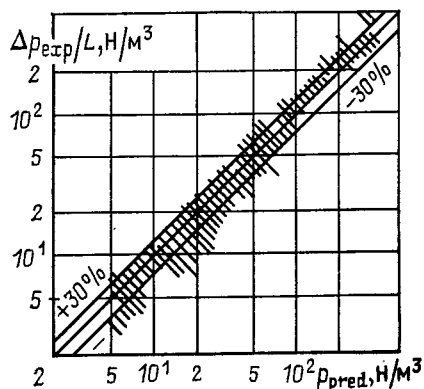


Рис. 9. Сравнение экспериментальных и расчетных данных по потерям давления [13]

случаях

$$f_s = 0,193 v_s^{-1,22} / x, \quad (25)$$

где v_s измеряется в метрах на секунду.

Потери давления в изгибах. Вследствие центробежных сил, действующих на смесь газа с твердыми частицами, текущую в изгибах трубы, происходит сепарация твердого материала из несущего газа. Частицы замедляются благодаря более высокому трению о стенки. В последующих прямых участках трубы потери давления вызваны ускорением твердых частиц.

Потери скорости различны в зависимости от положения изгиба (горизонтальное, горизонтально-вертикальное, вертикально-горизонтальное). Потери давления в изгибах зависят от типа материала и радиуса колена [16].

Исследования потерь давления в изгибах были выполнены в [12, 15—17]. Согласно [16] дополнительные потери давления в канале

$$\Delta p_{sB} = x \rho_g (v_{sr} - v_{s, out}) v_g^2, \quad (26)$$

где v_{sr} — скорость твердых частиц после повторного ускорения. На рис. 10 показаны входные и выходные скорости

для различных типов изгибов. Влияние разветвления изучалось в [18, 19].

Транспортеры с псевдооживленным слоем, перемещающимся под действием силы тяжести. Псевдооживление материала можно рассчитать согласно уравнениям, приведенным в § 2.5.5. Здесь следует упомянуть, что действительная скорость псевдооживления должна быть в 2,5—6 раз больше минимальной.

Массовый расход в транспортере с псевдооживленным слоем, перемещающимся под действием силы тяжести, можно приблизительно определить с помощью формулы [20]

$$\dot{M}_s = \frac{H^{3,5} B^{1,5}}{K_R (1 + 2H/B)^2} [(1 - \epsilon) \rho_s]^3 g_n \sin \delta, \quad (27)$$

где H — высота псевдооживленного слоя; B — его ширина. Эмпирический множитель K_R равняется 15—20 Н²·с/м⁴. Более точный расчет возможен с использованием уравнений и эмпирических коэффициентов, приведенных в [21].

Пример. В пневматическом транспортирующем устройстве, состоящем из трех вертикальных и одной горизонтальной секции труб (рис. 11), необходимо переместить и одновременно охладить воздухом при комнатной температуре 3600 кг/ч мелкозернистых сферических частиц. Допустим, что относительный массовый расход смеси $x=5$.

$$T=293 \text{ К}; \rho_s=250 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_g=1,2 \text{ кг/м}^3; v_{ss}=3500 \text{ м/с};$$

$$v_g=15,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; d_s=200 \text{ мкм}.$$

Так как потери давления еще неизвестны, этот пример рассчитывается с использованием плотности воздуха при атмосферном давлении (99,8 кПа). Для простоты будем считать, что плотность воздуха и соответствующая кинематическая вязкость постоянны. Для определения установившейся скорости w_{s0} можно использовать диаграмму на рис. 5, б. Для более точного расчета в отдельных случаях плотность и вязкость вдоль транспортной трубы необходимо корректировать, чтобы они более точно соответ-

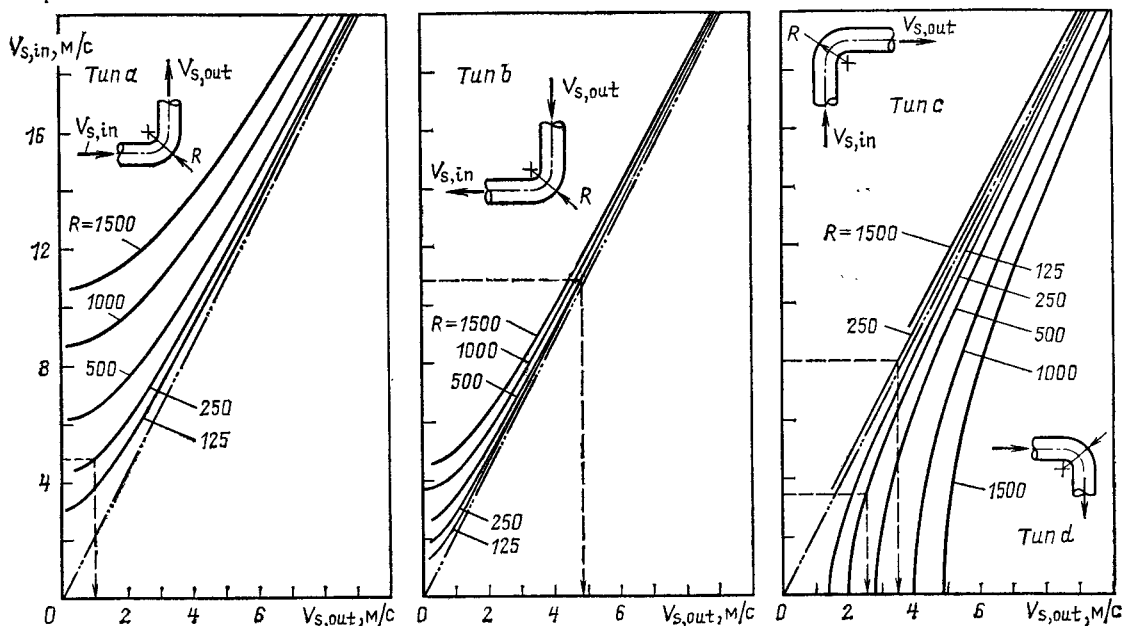


Рис. 10. Расчетные значения скорости на выходе из изгибов [16] для различных радиусов изгиба и скоростей входа (текущая среда — газ, твердые частицы — песок; угол изгиба $\Delta\theta=90^\circ$; механический коэффициент трения $\xi_R=0,5$); пунктирные линии — горизонтальные изгибы произвольного радиуса; сплошные линии — вертикальные изгибы

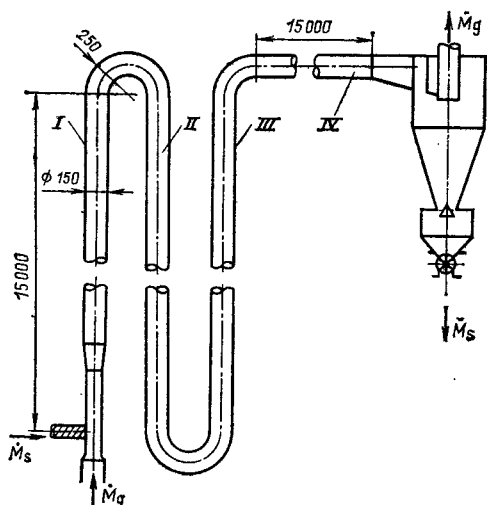


Рис. 11. Схема установки для пневмотранспортировки с одновременным охлаждением твердых частиц (для примера расчета)

вовали действительным условиям в потоке. Плотность и вязкость воздуха изменяются не только вследствие падения давления, но также из-за теплообмена. Установившаяся скорость твердых частиц должна быть определена с использованием уравнений (6), (7) и коэффициента сопротивления ξ из табл. 2. Так как в уравнении (6) коэффициент сопротивления ξ является функцией числа Рейнольдса, расчет обязательно должен быть уточнен.

Процедура расчета. Сначала из рис. 5, б для заданных значений параметров воздуха и твердых частиц определяется установившаяся скорость твердых частиц $w_{so} = 1,4$ м/с. Используя $e \approx 1$ и $D = 0,15$ м, с помощью уравнения (12) находим скорость воздуха $v_g = 9,43$ м/с.

Согласно (16) для этих данных число Рейнольдса $Re = 9,36 \cdot 10^4$, а согласно уравнению (15) коэффициент трения для чистого воздуха $f_g = 0,018$.

Скорость твердых частиц в секции I определяется согласно уравнению (18): $v_{s, I} = 8,03$ м/с.

С использованием уравнения (24) коэффициент трения твердой фазы f_s для секции I трубы с $(1-e)_I = 2,81 \cdot 10^{-3}$ находят из табл. 1: $f_{s, I} = 0,0138 = f_{s, III}$.

Для секции трубы II (опускное течение) коэффициент трения твердых частиц равен [при $v_{s, II} = 10,83$ м/с и $(1-e)_{II} = 2,08 \cdot 10^{-3}$] $f_{s, II} = 0,0159$. Для горизонтальной секции IV из уравнения (17) имеем $f_{s, IV} = 0,2336$.

Используя значение радиуса внешней стенки изгиба трубы $R = 0,25$ м, получаем (см. рис. 10) следующие скорости твердых частиц на входе и выходе для применяемых изгибов:

Изгиб трубы	$v_{s, in}$ м/с	$v_{s, out}$ м/с
I (с и d)	8,03	2,6
II (b и a)	10,83	1,0
III (с)	8,03	3,5

Потери давления. Для секции I, используя приведенные выше данные и уравнения (10) и (11), при $l = 15$ м получаем следующие составляющие потерь давления:

$$\Delta p_g = 0,018 (15,0/0,15) (1,2/2) (9,43)^2 = 0,018 \cdot 5335,5 = 96 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_s = 5 \cdot 0,0138 \cdot 5335,5 = 368 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sH} = 5 (9,43/8,03) \cdot 1,2 \cdot 9,81 \cdot 15 = 1037 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sA} = 5 \cdot 1,2 \cdot 9,43 \cdot 8,03 = 454 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sum \Delta p_I = 1955 \text{ Н/м}^2.$$

Для секции II аналогично имеем:

$$\Delta p_g = 96 \text{ Н/м}^2; \Delta p_s = 5 \cdot 0,0159 \cdot 5335,5 = 424 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_H = -5 (9,43/10,83) \cdot 1,2 \cdot 9,81 \cdot 15 = -769 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sB} = 5 \cdot 1,2 \cdot 9,43 (10,83 - 2,6) = 466 \text{ Н/м}^2 \text{ [см. (26)]};$$

$$\sum \Delta p_{II} = 217 \text{ Н/м}^2.$$

Для секции III:

$$\Delta p_g = 96 \text{ Н/м}^2; \Delta p_s = 368 \text{ Н/м}^2; \Delta p_H = 1037 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sB} = 5 \cdot 1,2 \cdot 9,43 (8,03 - 1) = 398 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sum \Delta p_{III} = 1899 \text{ Н/м}^2.$$

Для секции IV:

$$\Delta p_g = 96 \text{ Н/м}^2; \Delta p_s = 5 \cdot 0,2336 \cdot 5335,5 = 6232 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sB} = 5 \cdot 1,2 \cdot 9,43 (9,43 - 3,5) = 335 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sum \Delta p_{IV} = 6663 \text{ Н/м}^2.$$

Полные потери давления во всех четырех секциях трубы составляют $\Delta p_{tot} = 10\,734 \text{ Н/м}^2$.

2.3.4. Потоки жидкости с частицами

М. Вебер, У. Стегмайер

А. Принцип гидротранспортировки. В противоположность пневмотранспортировке (см. § 2.3.3) гидротранспортировку гранулированных и порошкообразных твердых материалов можно использовать также для транспортировки на значительные расстояния, поскольку несущая жидкость тоже несжимаема. Используемые физические принципы сходны с принципами пневмотранспортировки. Здесь рассмотрены только некоторые специальные объекты, отличные от случая пневмотранспортировки.

Наиболее существенные отличия систем пневмо- и гидротранспортировки состоят в несжимаемости и высокой плотности несущей жидкости. Из-за высокой плотности носителя силы, необходимые для транспортировки твердых частиц, могут быть получены при относительно низких скоростях потока. К тому же силы выталкивания, действующие на частицу в жидкости, частично уравновешиваются силами тяжести. Влияние сил на установившуюся скорость частиц видно из рис. 1 и уравнения (6), § 2.3.3.

В. Режимы течения. Режимы течения в принципе сходны с режимами при пневмотранспортировке. Различия вызваны высокой плотностью жидкости и проявляются в виде более высоких концентраций твердых частиц для гидротранспортировки, более низкими скоростями твердых частиц и слабым проявлением их движения.

При вертикальной транспортировке относительно слаба тенденция к расслоению. Даже для крупнозернистых материалов можно ожидать довольно однородного распределения твердых частиц в трубе до тех пор, пока условия транспортировки хорошо выполняются. Это означает, что скорость потока должна быть намного больше установившейся скорости твердых частиц. Вертикальное течение смеси можно поэтому рассматривать как псевдоомогенное, а условия течения рассчитывать с хорошей точностью.

При горизонтальной транспортировке сила тяжести всегда приводит к расслоению твердых частиц. Поэтому скорость потока должна быть больше определенной критической скорости, при которой осажается единичная гранула. В горизонтальных трубах более или менее сильное расслоение проявляется в зависимости от размера частиц

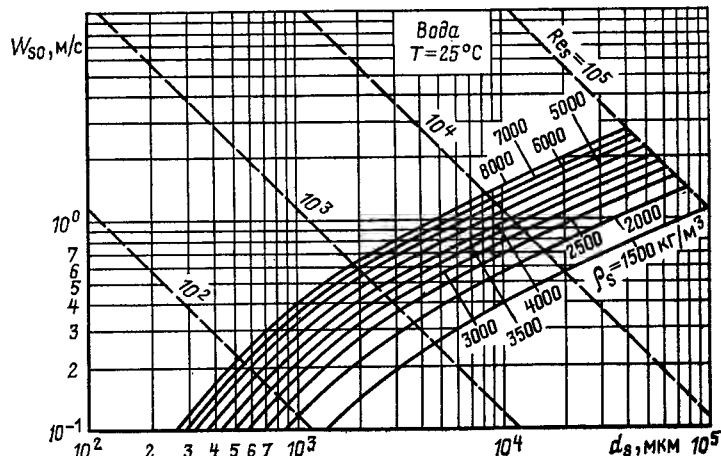
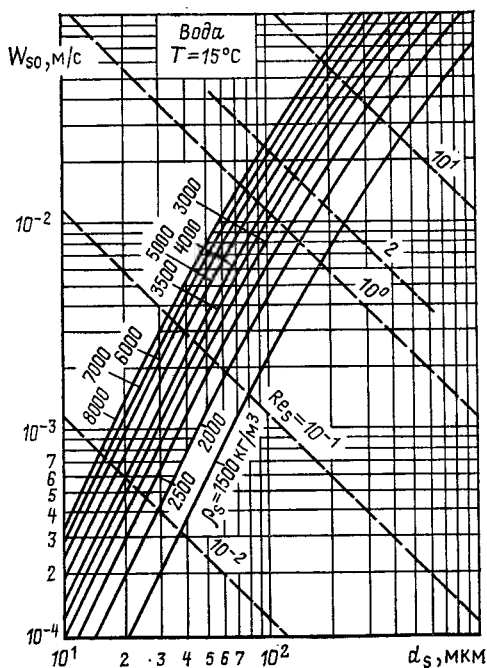


Рис. 1. Скорость оседания единичной частицы в воде [1]

и скорости потока. Расслоение характеризуется определенным распределением концентрации.

С. Режимы течения. Горизонтальная транспортировка. Классификации [2, 3], которые установлены для гидротранспортировки песка, могут быть обобщены. Мелкозернистые гранулированные материалы, для которых характеристическое число Рейнольдса $Re_s < 0,02$, почти однородно перемешаны с несущей жидкостью и могут транспортироваться как гомогенные суспензии до тех пор, пока поток турбулентен.

Для расчета характеристического числа Рейнольдса используются размер частицы, установившаяся скорость и кинематическая вязкость потока. Таким образом, гомогенная суспензия может рассматриваться как жидкость с более высокой плотностью и вязкостью. Только очень мелкие частицы с $Re_s < 10^{-6}$ остаются в покое при однородном распределении, так как они поддерживаются в суспензии броуновским молекулярным движением (коллоидная дисперсия). Более грубые твердые частицы не могут находиться полностью в виде однородной суспензии даже в условиях турбулентности; в них всегда имеется определенная степень расслоения. Этот тип суспензии может существовать при экономически пригодных скоростях транспортировки и называется псевдогомогенной суспензией. Числа Рейнольдса при этом изменяются в интервале $0,1 \leq Re_s \leq 2$. При этих ограничениях, для того чтобы гарантировать равную степень гомогенности для твердых частиц любой плотности, отношение установившейся скорости частиц к скорости жидкости w_{s0}/v_L должно оставаться постоянным. Скорости течения, требуемые для этого условия, можно получить из табл. 1. Для больших чисел Рейнольдса расслоение больше и течение является в большей мере гетерогенным. Это может вести к переносу частиц с помощью скачкообразного или дюнообразного движения. Обычно такие смеси различаются по их реологическим свойствам. В смесях очень мелких твердых частиц с жидкостью при очень высоких концентрациях твердых частиц ($c_v > 35\%$) все более и более проявляется неньютоновское поведение. Для классификации можно использовать табл. 2.

Д. Основные соотношения для расчета потерь давления. Гомогенная и псевдогомогенная транспортировки. При ньютоновском поведении потока, которое осуществ-

Таблица 1. Пределы псевдогомогенных режимов течения

ρ_s/ρ_L	d_s , мм	w_{s0} , м/с	v_L , м/с	ρ_s/ρ_L	d_s , мм	w_{s0} , м/с	v_L , м/с
$Re_s = 2; w_{s0}/v_L = 0,0056$				$Re_s = 0,1; w_{s0}/v_L = 0,00146$			
1,5	231	0,97	1,73	1,5	80	0,147	1,0
2	184	1,25	2,23	2	63	0,186	1,27
2,5	162	1,42	2,53	2,5	55	0,214	1,46
3	147	1,56	2,78	3	49,5	0,236	1,62
4	128	1,8	3,21	4	43,5	0,27	1,85
5	116	1,98	3,53	5	39,5	0,298	2,04
6	108	12	3,78	6	36,5	0,322	2,20
7	101	2,26	4,03	7	34,5	0,34	2,33
8	96	2,38	4,25	8	33	0,36	2,47

Таблица 2. Классификация режимов гидротранспортировки

Характер течения	Реологические свойства	Объемная концентрация, %	Число Рейнольдса Re_s
Гомогенное	Неньютоновские	> 35	$< 0,1$
»	Ньютоновские	< 30	
Псевдогомогенное	Неньютоновские	> 35	$0,1 \leq Re_s \leq 2$
»	Ньютоновские	< 30	
Гетерогенное	»	< 30	> 2

ляется при концентрации твердых частиц $c_v < 0,35$ и турбулентном течении, потери давления можно рассчитать для гомогенных и псевдогомогенных режимов транспортировки так же, как для ньютоновских жидкостей со средней плотностью,

$$\rho_m = c_v \rho_s + (1 - c_v) \rho_l. \quad (1)$$

Потеря давления при горизонтальном и вертикальном течениях составляет

$$\frac{\Delta p}{l} = \left(\frac{\Delta p}{l} \right)_{lh, lv} \frac{\rho_m}{\rho_l}. \quad (2)$$

Это соотношение справедливо для вертикальной и горизонтальной транспортировки и псевдогомогенных жидкостей, его также можно использовать для приближенного расчета вертикальной транспортировки крупнозернистого материала, который является псевдогомогенным по отношению к распределению его твердых частиц. Соответственно необходимо вводить градиент давления чистой жидкости; для горизонтальной транспортировки

$$\left(\frac{\Delta p}{l} \right)_{lh} = f_l \frac{\rho_l}{2} \frac{v_m^2}{D}; \quad (3)$$

для вертикальной транспортировки

$$\left(\frac{\Delta p}{l} \right)_{lh} = f_l \frac{\rho_l}{2} \frac{v_m^2}{D} \pm g n \rho_l. \quad (4)$$

Здесь v_m — скорость смеси,

$$v_m = (\dot{V}_s + \dot{V}_l) / S = c_v v_s + (1 - c_v) v_l; \quad (5)$$

c_v — объемная концентрация твердых частиц.

Скорости твердых частиц и несущей жидкости близки при гомогенных и псевдогомогенных режимах транспортировки ($v_s \approx v_l \approx v_m$). Поэтому расходная концентрация c_T и объемная концентрация c_v также близки ($c_T \approx c_v$). Это не распространяется на вертикальную транспортировку крупнозернистых материалов, так как в этом случае установившейся скоростью частиц пренебречь нельзя (заметно скольжение между твердой фазой и жидкостью). В этом случае скорость твердых частиц

$$v_s = v_l - w_{s0} = w_m - (1 - c_v) w_{s0}. \quad (6)$$

Коэффициент трения f_l для гладких труб можно рассчитать согласно уравнению (12), § 2.3.3.

Существует следующее соотношение между объемной и расходной концентрациями:

$$c_v = c_T \frac{v_m}{v_s} = \frac{1}{1 + [(1 - c_T) / c_T] (v_s / v_s)}, \quad (7)$$

где c_T определяется из уравнения (5), § 2.3.3.

Для более высоких концентраций ($c_v > 5\%$) скорость твердых частиц нужно рассчитывать по следующему уравнению:

$$\frac{v_s}{v_m} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{w_s}{v_m} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{w_s}{v_m} \right)^2 + c_T \frac{w_s}{v_m}}. \quad (8)$$

где w_s — установившаяся скорость, определяемая средней плотностью смеси,

$$w_s = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{d_s \rho_s - \rho_m}{c_w \rho_l} g_n}. \quad (9)$$

Гетерогенный режим горизонтальной транспортировки.

Для гетерогенной горизонтальной гидротранспортировки потери давления можно рассчитать, используя соотношение [2], которое приведено ниже в обобщенном виде для твердых частиц различной плотности,

$$\Phi = \frac{(\Delta p/l) - (\Delta p/l)_l}{(\Delta p/l)_l c_T} = K \left(\frac{gD}{v_m^2} \frac{(\rho_s - \rho_l)/\rho_l}{V \xi} \right)^n, \quad (10)$$

где ξ — коэффициент сопротивления частиц. Автор [2] предлагает использовать $K=83$ и $n=1,5$, при которых была получена хорошая аппроксимация для 310 опытных данных (см. рис. 2, а). Эти измерения были сделаны, однако с использованием почти одинаковых частиц. Для твердых материалов с распределением частиц по размерам, которое наиболее часто встречается на практике, найдены другие значения K и n . Поэтому на рис. 2, б приведены примеры еще нескольких эмпирических расчетов. В случаях, когда размеры частиц сильно различаются и твердые частицы и материал трубы необычны по составу, рекомендуется проводить тестовые испытания. Результаты этих тестов затем должны быть приведены в соответствие с указанным выше уравнением для получения значений K и n для такой специфической комбинации материалов (рис. 2, б).

Критическая скорость, выше которой возможна удовлетворительная транспортировка без осаждения, давая в соответствии с проверкой, проведенной в [2] по

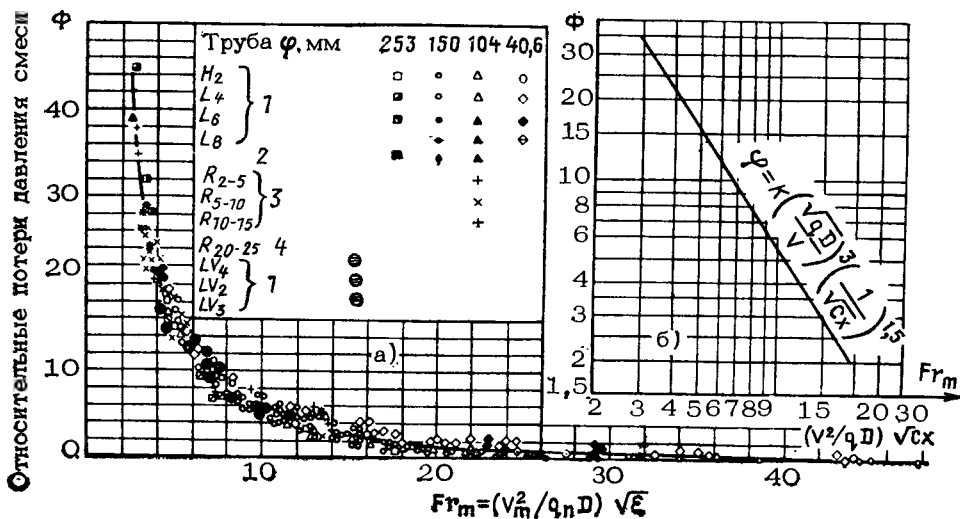
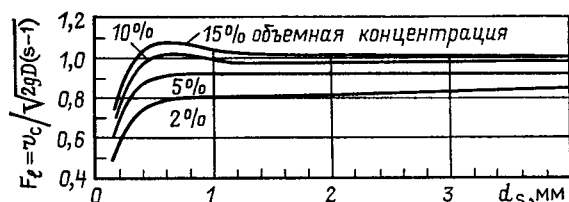


Рис. 2. Зависимость [2] для расчета потерь давления смеси, обусловленных трением [4], $\Phi = [(\Delta p/l) - (\Delta p/l)_l] / ((\Delta p/l)_l c_T)$; $K=176$ и включает в себя величину $[(\rho_s - \rho_l)/\rho_l]^{1.5}$. Характеристика используемого материала приведена на рисунке: 1 — песок; 2 — мелкий гравий; 3 — гравий; 4 — галька

Рис. 3. Критическая скорость гетерогенных смесей [2] ($s = \rho_s / \rho_l$)

следующей формуле:

$$v_c = F_L \sqrt{2gD \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}}. \quad (11)$$

Эта формула подтверждается экспериментами, описанными в [5]. Величина F_L является функцией диаметра частиц, и концентрации и ее значение можно найти из рис. 3.

Потери давления из-за ускорения можно рассчитать аналогично последним членам (1), § 2.3.3. Первоначальное ускорение задается выражением

$$\Delta p_{sA} = \dot{M}_s v_s / s, \quad (12)$$

а повторное ускорение после изгиба — выражением

$$\Delta p_{sB} = \dot{M}_s \Delta v_s / s, \quad (13)$$

где $s = \rho_s / \rho_l$.

Пример. В установке для гидротранспортировки, состоящей из трех вертикальных и одной горизонтальной секций трубы (рис. 4 и 5), нужно переместить $5,36 \cdot 10^3$ кг/ч мелкозернистого сферического гранулированного материала. Расходная концентрация $c_T = 5\%$; $T = 288$ К; $\rho_s = 2500$ кг/м³; $\rho_l = 1000$ кг/м³; $d_s = 1$ мм; $v_l = 10^{-6}$ м²/с; $D = 150$ мм.

Для воды при 288 К установившуюся скорость w_{s0} различных твердых частиц можно получить из рис. 1. Для различных температур воды или различных жидко-

стей установившуюся скорость надо рассчитать с помощью уравнений (6), (7) и табл. 2, § 2.3.3. Для более высоких концентраций необходимо применять уравнение (9).

Процедура расчета. Сначала из рис. 1 для принятых значений параметров и физических свойств воды и твердых частиц определяют установившуюся скорость. Получают $w_{s0} = 0,15$ м/с.

В этом случае при заданном размере частиц осуществляется гетерогенный режим гидротранспортировки, особенно в горизонтальной секции. Скорость смеси задается уравнением (5), § 2.3.3 и простым соотношением

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= \dot{M}_s / \rho_s \\ v_m &= \frac{\dot{M}_s}{s \rho_s c_T} = \frac{10}{0,01767 \cdot 2500 \cdot 0,05} = 4,53 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Кроме того, согласно уравнению (16), § 2.3.3, задается число Рейнольдса $Re = 5,9 \cdot 10^5$, а согласно уравнению (15), § 2.3.3 — коэффициент трения для смеси по Блазиусу $f_L = 0,011$.

Градиент давления смеси в вертикальных секциях I и III с подъемным течением получен из уравнения (2) с использованием градиента давления для воды из уравнения (4) и плотности смеси из уравнения (1). Эти уравнения учитывают влияние трения и веса обеих фаз. Так как установившаяся скорость относительно мала, соотношения $v_s \approx v_l \approx v_m$ и $c_s \approx c_T$ выполняются с хорошим приближением. Плотность смеси можно просто рассчитать

$$\rho_m = 0,05 \cdot 2500 + 0,95 \cdot 1000 = 1075 \text{ кг/м}^3;$$

$$\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_{IV, I} = \left(\frac{\Delta p}{l}\right)_{IV, III} = 0,011 (1000/2) (4,53^2/0,15) + 9,81 \cdot 1000 = 10\,562 \text{ Н/м}^2;$$

$$\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_I = \left(\frac{\Delta p}{l}\right)_{III} = 10\,562 (1075/1000) = 11\,355 \text{ Н/м}^2.$$

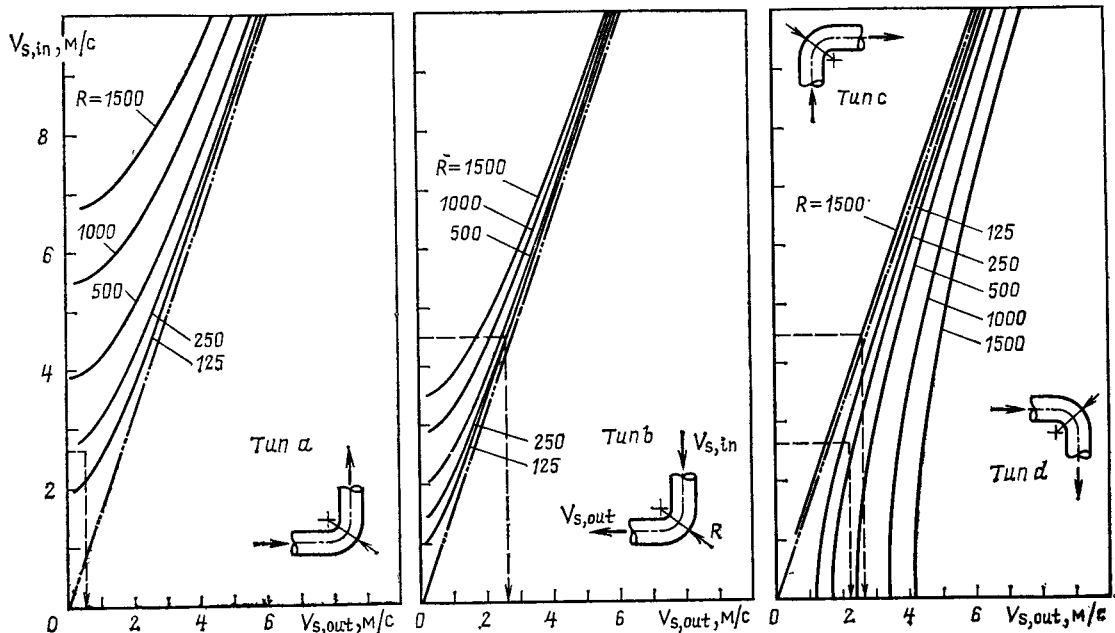


Рис. 4. Расчетные значения скорости выхода из изгибов для различных радиусов изгиба R и скоростей входа. Текущая среда — вода, твердые частицы — песок; угол изгиба $\Delta\delta = 90^\circ$. Механический коэффициент трения $\xi_F = 0,5$; штриховые линии — горизонтальные изгибы произвольного радиуса

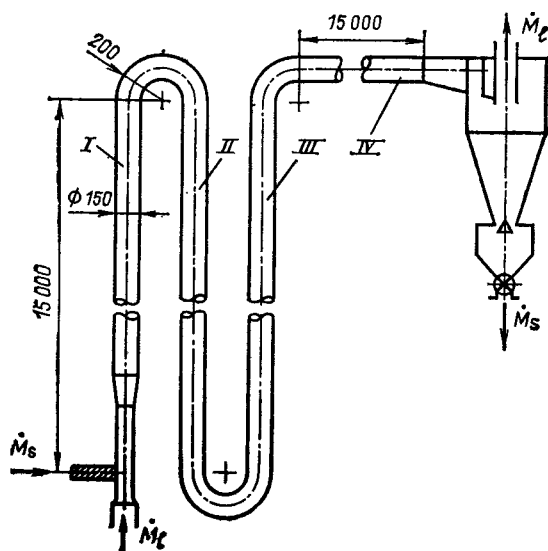


Рис. 5. Схема установки для гидравлической транспортировки (для примера расчета)

Градиент давления для чистой жидкости в секции II задается соотношением (4)

$$\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_{IV, II} = 0,011 (1000/2) (4,53^2/0,15) - 9,81 \cdot 1000 = -9058 \text{ Н/м}^3,$$

а градиент давления смеси

$$\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_{II} = -9058 (1075/1000) = -9737 \text{ Н/м}^3.$$

Для горизонтальной секции IV из уравнения (3) имеем

$$\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_{IV} = 0,011 (1000/2) (4,53^2/0,15) = 752 \text{ Н/м}^3,$$

если $Re_s = 130$ согласно (20), (21), § 2.3.3;

$$\xi = (24/130) + (4/130) + 0,4 = 0,935.$$

Градиент давления получен преобразованием уравнения (10) к виду

$$\left(\frac{\Delta p}{l}\right)_{IV} = 83 \left(\frac{9,81 \cdot 0,15}{4,53} \frac{2500 - 1000}{1000 \sqrt{0,935}} \right)^{1,5} 752 \cdot 0,05 + 752 = 868 \text{ Н/м}^3.$$

Потери давления из-за первоначального ускорения и повторного ускорения после изгиба трубы надо рассчитывать с помощью выражений (12), (13).

При радиусе внешней стенки изгиба $R = 200$ мм из рис. 4 находим следующие скорости твердых частиц на вход- и выходе (значения интерполированы для $R = 200$ мм):

Изгиб трубы	$v_{s, in}$, м/с	$v_{s, out}$, м/с
I ($2 \times 90^\circ$)	4,53	2,2
II ($2 \times 90^\circ$)	4,53	0,5
III ($1 \times 90^\circ$)	4,53	2,6

Потери давления. Для секции I трубы потери давления получены с использованием приведенных выше данных. Составляющие потери давления:

$$(\Delta p_l + \Delta p_s + \Delta p_{sH} + \Delta p_{IH})_I = 11\,355 \cdot 15 = 170 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sA} = 4,53 \cdot 10/0,01767 = 2564 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sum \Delta p_I = 172\,889 \text{ Н/м}^2.$$

Для секции II:

$$(\Delta p_l + \Delta p_s - \Delta p_{sH} - \Delta p_{IH})_{II} = -9737 \cdot 15 = -146\,055 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sB} = 1319 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sum \Delta p_{II} = -144\,736 \text{ Н/м}^2.$$

Для секции III:

$$(\Delta p_l + \Delta p_s + \Delta p_{sH} + \Delta p_{IH})_{III} = 170\,325 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sB} = 2281 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sum \Delta p_{III} = 172\,606 \text{ Н/м}^2.$$

Для секции IV:

$$(\Delta p_l + p_s)_{IV} = 868 \cdot 15 = 13\,020 \text{ Н/м}^2;$$

$$\Delta p_{sB} = 1092 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sum \Delta p_{IV} = 14\,112 \text{ Н/м}^2.$$

Полные потери давления для всех четырех секций трубы $\Delta p_{tot} = 214\,871 \text{ Н/м}^2$.

Раздел 2.4 ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ¹

2.4.1. Основные уравнения

Х. Мартин

Анализ распределения температуры в теле основан на первом законе термодинамики и на законе Фурье для переноса теплоты. Баланс энергии для элементарного объема несжимаемой среды, находящейся в покое, можно представить в виде

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla \cdot \dot{q}). \quad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что внутренняя энергия, а также температура объема увеличиваются, если дивергенция плотности теплового потока отрицательна, т. е. если плотность тепловых потоков, направленных внутрь объема, больше плотности тепловых потоков, направленных из объема.

Дополнительный вклад во внутреннюю энергию, например в результате превращения механической (типа вязкой диссипации), электрической, химической или ядерной энергии, можно учесть добавлением соответствующего члена (источника) к правой части уравнения (1).

Вектор плотности теплового потока можно выразить через градиент температуры с помощью закона Фурье $\dot{q} = -\lambda \nabla T$.

(2)

¹ Пер. с англ. Е. Б. Эйгенсон.

Таблица 1. Операции над векторами в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах (e — единичный вектор)

	(x, y, z)	(r, φ, z)	(r, φ, ψ)
$\nabla \vartheta$	$e_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + e_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + e_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$	$e_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + e_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + e_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$	$e_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + e_\psi \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}$
∇q	$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{q}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{q}_r) + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial \dot{q}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\dot{q}_\psi \sin \psi)$
$\nabla^2 \vartheta$	$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} \right)$
		$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$ $z = z$	$x = r \cos \varphi \sin \psi$ $y = r \sin \varphi \sin \psi$ $z = r \cos \psi$

Направление плотности теплового потока совпадает с направлением температурного градиента, взятого с обратным знаком, если коэффициент теплопроводности не зависит от направления, как это имеет место для анизотропной среды, такой, как кристаллы или дерево.

Комбинируя уравнение баланса энергии (1) и закон Фурье (2), получаем дифференциальное уравнение в частных производных для распределения температур

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla \cdot \lambda \nabla T). \quad (3)$$

При постоянном значении коэффициента теплопроводности λ уравнение (3) можно упростить, вводя коэффициент температуропроводности $\kappa = \lambda / (\rho c_p)$,

$$\partial T / \partial t = \kappa \nabla^2 T. \quad (3a)$$

Различные дифференциальные векторные операторы в уравнениях (1) — (3a) представлены для удобства в табл. 1 в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах.

2.4.2. Стационарная теплопроводность

Х. Мартин

А. Плоские, цилиндрические и сферические стенки без внутренних источников теплоты. Для стационарных систем уравнение (3), § 2.4.1 упрощается

$$(\nabla \cdot \lambda \nabla T) = 0 \quad (1)$$

или

$$\nabla^2 T = 0, \quad (2)$$

если коэффициент теплопроводности λ можно считать постоянным.

Если коэффициент теплопроводности является функцией температуры, но не зависит от направления, то введением новой переменной уравнение (1) можно также представить в виде уравнения Лапласа [см. (2)]

$$T^* = \frac{1}{\lambda_0} \int_{T_0}^T \lambda(T) dT, \quad (3)$$

где T_0 — произвольно выбранная температура отнесения; λ_0 — коэффициент теплопроводности при этой температуре;

$$\nabla^2 T^* = 0. \quad (4)$$

Температурные распределения просто рассчитать с помощью уравнений (1), (2) или (4), если можно найти систему координат (x, y) , в которой одна из координат (например, x) совпадает с направлением вектора плотности теплового потока $\dot{q} = -\lambda \nabla T$.

Для таких одномерных задач уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{dT^*}{dx} \right] = 0, \quad (5)$$

где $A(x)$ — изотермическая площадь, перпендикулярная оси x . Уравнение (5) можно непосредственно проинтегрировать

$$-\lambda(T) A(x) \frac{dT}{dx} = \dot{Q} = \text{const}. \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует, что поток теплоты $\dot{Q} = \dot{q}(X) A(x)$ в стационарной одномерной системе без источников или стоков теплоты не зависит от координаты x .

Из уравнения (6) можно рассчитать тепловые потоки через плоские, цилиндрические и сферические слои с температурами T_1 и T_2 на внутренней и внешней поверхностях слоев (соответственно $x = x_1$ и $x = x_2$, рис. 1)

$$Q = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT \bigg/ \int_{x_1}^{x_2} (dx / A(x)). \quad (7)$$

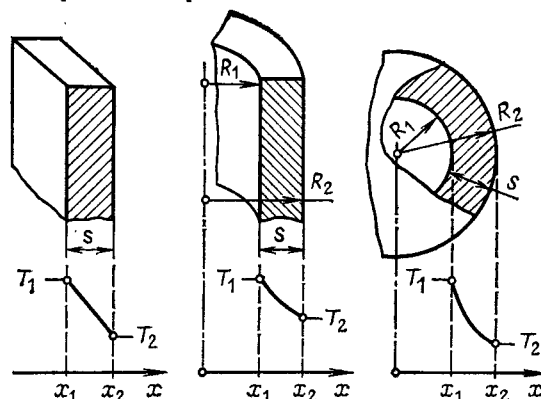


Рис. 1. Стационарная теплопроводность в плоском, цилиндрическом и сферическом слоях

Уравнение (7) можно записать в более удобной форме, если ввести следующие величины: средний коэффициент теплопроводности

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT, \quad (8)$$

толщину стенки

$$s = x_2 - x_1 \quad (9)$$

и среднюю площадь поверхности A_m , определяемую выражением

$$A_m = s \int_{x_1}^{x_2} (dx/A(x)). \quad (10)$$

С учетом уравнений (8) — (10) поток теплоты [см. (7)]

$$\dot{Q} = \frac{\bar{\lambda}}{s} A_m (T_1 - T_2). \quad (11)$$

Средняя площадь поверхности, определяемая уравнением (10),

$$A_m = \begin{cases} A = A_1 = A_2 \text{ для плоского слоя;} \\ \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)} = \frac{2\pi ls}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2\pi R_1 l}{(R_1/s) \ln(1 + s/R_1)} & \text{для цилиндрического слоя;} \\ V \sqrt{A_1 A_2} = 4\pi R_1 R_2 = 4\pi R_1^2 \left(1 + \frac{s}{R_1}\right) & \text{для сферического слоя.} \end{cases} \quad (12)$$

Для цилиндрического слоя A_m определяется как среднелогарифмическая площадь между A_1 и A_2 , тогда как для сферических слоев A_m — их среднегеометрическая величина.

Если толщина слоя s мала по сравнению с внутренним радиусом R_1 ($s \ll R_1$), то A_m можно приближенно рассчитать как среднеарифметическое, т. е.

$$A_m \approx \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \text{ при } s \ll R_1. \quad (13)$$

Для бесконечно вытянутого плоского и цилиндрического слоев тепловые потоки стремятся к нулю, так как толщины стенок стремятся к бесконечности. Это неверно для сферического слоя. При заданном внутреннем радиусе R_1 тепловой поток остается конечной величиной, если s (или R_2) стремится к бесконечности,

$$\begin{aligned} \min \dot{Q}_{\text{сферы}} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\bar{\lambda}}{s} 4\pi R_1 (R_1 + s) (T_1 - T_2); \\ \min Q_{\text{сферы}} &= \frac{\bar{\lambda}}{R_1} A_1 (T_1 - T_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнений (11) и (12) можно также найти изменение температуры внутри слоя при постоянном коэффициенте теплопроводности λ

$$\frac{T(x) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{A_m(x_1, x_2)}{A_m(x_1, x)} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad (15)$$

$$\frac{T(x) - T_1}{T_2 - T_1} = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{для плоского слоя;} \\ \frac{\ln(x/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} & \text{для цилиндрического слоя;} \\ \frac{1 - R_1/x}{1 - R_1/R_2} & \text{для сферического слоя.} \end{cases} \quad (16)$$

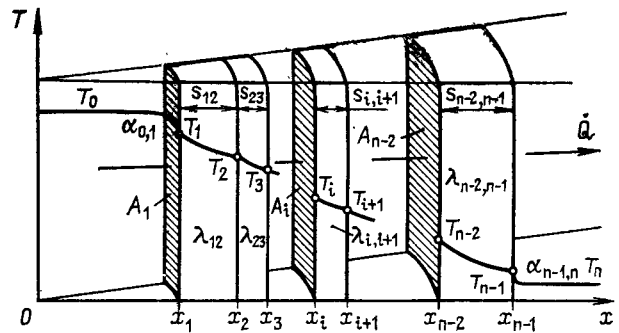


Рис. 2. Стационарная теплопроводность в многослойных стенках

Для коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры, уравнение (16) нужно заменить следующим выражением:

$$\frac{\int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT}{\bar{\lambda} (T_2 - T_1)} = f(x), \quad (17)$$

где $f(x)$ — такая же линейная, логарифмическая или гиперболическая функция, которая стоит в правой части уравнения (16).

Если определить коэффициент переноса теплоты через плоские, цилиндрические или сферические слои для процесса стационарной теплопроводности выражением

$$\alpha = \frac{\dot{Q}}{A_m (T_1 - T_2)} = \frac{\bar{\lambda}}{s}, \quad (18)$$

то соответствующее число Нуссельта

$$Nu = \alpha s \bar{\lambda} \quad (19)$$

всегда равно единице по определению.

Если стенка состоит из $n - 2$ слоев с толщинами $s_{i, i+1}$ и средними коэффициентами теплопроводности $\lambda_{i, i+1}$ (или переноса теплоты $\alpha_{i, i+1}$), то поток теплоты можно рассчитать из уравнения (рис. 2)

$$\dot{Q} = UA (T_0 - T_n), \quad (20)$$

где коэффициент теплопередачи U определяется из соотношения

$$\frac{1}{U} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A}{\alpha_{i, i+1} A_{m, i, i+1}}. \quad (21)$$

В уравнении (21) $\alpha_{0, 1}$ и $\alpha_{n-1, n}$ — конвективные коэффициенты теплоотдачи на внутренней и внешней поверхностях стенки. Соответствующие средние площади поверхностей обозначают $A_{m, 0, 1} = A_1$ и $A_{m, n-1, n} = A_{n-1}$.

Выбор A в уравнениях (20) и (21) произволен. Нет необходимости специально определять A , так как произведение UA не зависит от этого выбора.

Перепад температур на каждом слое $T_i - T_{i+1}$ можно найти из полного температурного напора $T_0 - T_n$ с помощью соотношения

$$T_i - T_{i+1} = \frac{UA}{\alpha_{i, i+1} A_{m, i, i+1}} (T_0 - T_n). \quad (22)$$

В. Поле температур в телах стандартной формы с внутренними источниками теплоты. Превращение различных видов энергии (электрической, химической, ядерной и др.)

внутри твердого тела можно рассматривать как процесс теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

Скорость превращения энергии в объеме (мощность источника теплоты) обозначим $\dot{S}$, Вт/м³. В общем случае $\dot{S}$ может зависеть от температуры и местоположения, и поэтому необходимо начинать с дифференциального уравнения баланса

$$-\frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx} \left[A(x) - \lambda \frac{dT}{dx} \right] = \dot{S}(x, T) \quad (23)$$

для одномерного стационарного процесса теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

Если $\dot{S}$ — функция только местоположения, уравнение (23) можно решить с помощью метода разделения переменных

$$-A(x) \lambda \frac{dT}{dx} = \int \dot{S}(x) A(x) dx + C_1 - \lambda dT = \frac{\int \dot{S}(x) dV + C_1}{A(x)}, \quad (24)$$

где

$$A(x) dx = dV.$$

Для постоянного коэффициента теплопроводности изменение температуры внутри тела определяется выражением

$$T(x) = -\frac{1}{\lambda} \int \left[\frac{\int \dot{S}(x) dV + C_1}{A(x)} \right] dx + C_2, \quad (25)$$

где две константы должны быть определены из граничных условий.

Постоянная скорость превращения энергии, $\dot{S} = \text{const}$, в плоском слое толщиной $2R$ (бесконечной протяженности в двух других направлениях), в бесконечно длинном цилиндре или в сфере радиусом R с поверхностями, на которых поддерживается постоянная температура T_0 , ведет к параболическому профилю температуры внутри тела

$$T(x) - T_0 = \frac{\dot{S} R V}{\lambda A} \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]. \quad (26)$$

Отношение A/V , т. е. площади поверхности к объему, обратно пропорционально радиусу R

$$\frac{A}{V} = \frac{n+1}{R}, \quad n = \begin{cases} 0 & \text{для плоской пластины;} \\ 1 & \text{для цилиндра;} \\ 2 & \text{для сферы.} \end{cases} \quad (27)$$

Если коэффициент переноса теплоты

$$\alpha = \frac{\dot{Q}}{A(\bar{T} - T_0)} = \frac{\dot{S} V}{A(\bar{T} - T_0)},$$

где $\bar{T}$ — среднеинтегральная калорическая температура,

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \int_V T dV \quad (28)$$

(при постоянных физических свойствах $\rho c = \text{const}$), соответствующее число Нуссельта становится равным

$$\text{Nu}_R = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{AR}{V} + 2 = \begin{cases} 3 & \text{для плоской пластины,} \\ 4 & \text{для цилиндра,} \\ 5 & \text{для сферы.} \end{cases} \quad (29)$$

2.4.3. Нестационарный перенос теплоты при скачке температуры

Х. Мартин

А. Одномерные системы. Разложение в ряд решений для температурного поля. Нестационарные распределения температуры всегда можно рассматривать как следствия возмущения первоначально стационарного распределения. В общем случае возмущение происходит из-за изменения состояния окружающей среды в определенный момент времени ($t = t_{in}$). Для удобства примем $t_{in} = 0$. Тогда температурное распределение будет полностью определенным для любого времени $t > 0$, если известно первоначальное распределение¹

$$T(r, 0) = T_I(r) \text{ (начальное условие)} \quad (1)$$

и если состояние окружающей среды задано для любого момента времени после начального (граничные условия). В общем случае граничные условия можно представить в виде

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_B = \dot{q}_B, \quad (2)$$

где dT/dn — составляющая вектора градиента температур в направлении по нормали к внешней поверхности рассматриваемого тела. Плотность теплового потока $\dot{q}_B$, переносимого через поверхность, в свою очередь должна быть определена из распределения температуры окружающей среды. Строго говоря, всю систему уравнений для сопряженных взаимосвязанных температурных полей нужно решать одновременно. Практически эти трудности исключаются при помощи приемлемого определения плотности теплового потока $\dot{q}_B$ более простым идеализированным способом.

Например, предположим, что она пропорциональна разнице температур между поверхностью и окружающей средой (закон Ньютона),

$$\dot{q}_B = \alpha (T_B - T_\infty). \quad (3)$$

Этот вид граничных условий с постоянным коэффициентом теплоотдачи α и температурой окружающей среды, являющейся функцией времени и местоположения, $T_\infty = T_\infty(r, t)$ содержит в себе граничное условие заданной температуры поверхности как специальный случай, при котором внешнее термическое сопротивление поверхности ($1/\alpha$) отсутствует,

$$T_B = T_\infty(r, t). \quad (4)$$

В литературе этот случай называют граничным условием первого рода. Случай, когда плотность теплового потока на границе описывается в виде

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_B = \dot{q}_B(r, t), \quad (5)$$

называют граничным условием второго рода, а уже упоминавшийся случай

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial n} + T \right)_B = T_\infty(r, t) \quad (6)$$

[из уравнений (2), (3)] — граничным условием третьего рода.

Для тел простой формы в учебниках по теплопроводности [1—4] можно найти множество аналитических решений уравнения (3а), § 2.4.1 с различными видами

¹ r — вектор пространственных координат, например $r = (x, y, z)$ в прямоугольных координатах.

начальных и граничных условий. Некоторые из самых простых и часто встречающихся решений рассмотрены ниже. Многие задачи можно решить, по крайней мере приблизительно, предполагая, что тепловой поток распространяется только в одном направлении, например в направлении x , в прямоугольных координатах, если плоскости $x = \text{const}$ изотермические, или в направлении r в цилиндрических и сферических координатах, если цилиндрические или сферические поверхности $r = \text{const}$ изотермичны. В этих случаях уравнение (3а), § 2.4.1 можно представить (см. табл. 1, § 2.4.1) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{для плоского поля температур } T(x, t); \quad (7a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{для цилиндрически симметричного поля температур } T(r, t); \quad (7б)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{для сферически симметричного поля температур } T(r, t). \quad (7в)$$

Суммируя, можно записать выражение для плотности одномерного теплового потока (при постоянном коэффициенте теплопроводности¹) в общем виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (7)$$

где $n=0, 1, 2$ для трех главных систем координат. Самые простые тела, относящиеся к этим одномерным температурным полям, описаны ниже.

$$1. -L \leq x \leq L; -\infty < y; z < \infty.$$

Плоский слой толщиной $2L$, имеющий бесконечную протяженность в направлениях y и z (назовем его пластиной).

$$2. 0 \leq r \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; -\infty < z < \infty.$$

Круглый цилиндр диаметром $2R$, имеющий бесконечную протяженность в направлении z (цилиндр).

$$3. 0 \leq r \leq R; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \psi \leq \pi.$$

Сфера диаметром $2R$.

Начальные и граничные условия можно выбрать в виде

$$T(x, 0) = T_I = \text{const} \quad (8)$$

и

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} + T \right)_B = \begin{cases} T_I & \text{для } t \leq 0; \\ T_\infty & \text{для } t > 0, \end{cases} \quad (9)$$

т. е. внезапное скачкообразное изменение температуры окружающей среды от постоянной начальной температуры T_I до постоянной температуры T_∞ для всех моментов времени, кроме начального.

Одномерное уравнение для температурного поля (7) и начальные и граничные условия (8) и (9) запишем в безразмерном виде, вводя новые переменные и параметры: безразмерную температуру

$$T^+ = (T(x, t) - T_\infty) / (T_I - T_\infty); \quad (10)$$

безразмерное рассеяние от центра симметрии

$$x^+ = x/L \quad (\text{или } r/R); \quad (11)$$

безразмерное время (числа Фурье)

$$t^+ = \kappa t / L^2 \quad \left(\text{или } \frac{\kappa t}{R^2} \right); \quad (12)$$

¹ Правильнее при постоянном коэффициенте теплопроводности. — Прим. науч. ред.

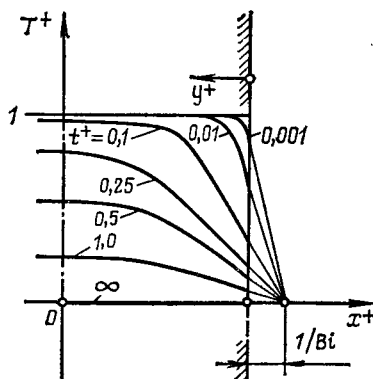


Рис. 1. Распределение температур в пластине. Граничные условия третьего рода (рассчитано для $Bi=5$)

отношение внутреннего термического сопротивления R/λ к внешнему термическому сопротивлению теплоотдаче $1/\alpha$, или число Био

$$Bi = \alpha L / \lambda \quad (\text{или } \alpha R / \lambda). \quad (13)$$

Безразмерное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} = \frac{1}{x^{+n}} \frac{\partial}{\partial x^+} \left(x^{+n} \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right) \quad \begin{aligned} &\text{для пластины } n=0, \\ &\text{для цилиндра } n=1, \\ &\text{для сферы } n=2. \end{aligned} \quad (14)$$

Запишем начальное условие

$$T^+(x^+, 0) = 1; \quad (15)$$

граничные условия имеют следующий вид:

$$\left(\frac{1}{Bi} \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + T^+ \right)_{x^+=1} = 0 \quad \text{для } t^+ > 0; \quad (16a)$$

$$\left(\frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right)_{x^+=0} = 0 \quad (\text{из условия симметрии}). \quad (16б)$$

При этом нормализованном представлении нет никакой разницы, нагревается ли тело ($T_\infty > T_I$) или охлаждается ($T_\infty < T_I$). В каждом случае безразмерная температура T^+ [см. уравнение (10)] изменяется от 1 (при $t^+=0$) до 0 (при $t^+ \rightarrow \infty$).

На рис. 1 приведен пример нестационарного распределения температуры для условий, описываемых уравнениями (14) и (16). Следует заметить, что касательные к температурным кривым у поверхности тела ($x^+=1$) пересекаются в одной точке. Это хорошо видно из граничных условий [см. (16a)]. Запишем координаты точки пересечения (рис. 1)

$$T^+ = 0; \quad x^+ = 1 + \frac{1}{Bi}.$$

Эта точка расположена ближе к поверхности ($x^+=1$), когда отношение внешнего сопротивления $1/Bi$ уменьшается, приходя в пределе к граничным условиям первого рода при $1/Bi \rightarrow 0$. В этом случае изменение температуры внутри тела является максимально возможным.

Пример. Рассмотрим охлаждение или нагревание большого тела из материала с плохим коэффициентом теплопроводности и высоким коэффициентом теплоотдачи на внешней границе (это имеет место при испарении или конденсации на поверхности тела).

Однако, если отношение $1/Bi$ растет, точка пересечения касательных к температурным кривым на границах отодвигается от поверхности. В целом температурные кривые внутри тела все более выравниваются. Максимальная разница температур, имеющая место внутри тела $\{\max[T^+(x^+=0) - T^+(x^+=1)] = \Delta T_{\text{max}}^+\}$, будет мень-

ше, чем $Bi/(1+Bi)$, что можно оценить с помощью простого геометрического соображения. Если числа Био меньше 0,1, температуры центра и поверхности различаются меньше, чем на 9% полного температурного напора ($T_I - T_\infty$).

Охлаждение или нагрев небольшого тела из достаточно теплопроводного материала, такого, как металл, в неподвижном газе также относится к задачам подобного типа.

Для коротких времен t^+ изменение температуры чувствуется только в маленькой зоне вблизи поверхности тела (рис. 1). Можно сказать, что поле температур является полем типа пограничного слоя. Так как граничные условия по другую сторону тела не имеют никакого влияния на поле температур, тело можно рассматривать как полуграничное. Более удобно использовать новую координату длины y с точкой начала у поверхности и направлением, противоположным x ,

$$y = L - x \text{ или } R - r. \quad (17)$$

Так как в этой задаче нет никакого характеристического линейного отрезка, имеющего конечный размер, для обезразмеривания переменных и параметров можно воспользоваться величиной $\sqrt{\lambda t}$, которая имеет размерность длины

$$y^+ = \frac{y}{2\sqrt{\lambda t}} \left(\frac{1-x^+}{2\sqrt{t^+}} \right); \quad (18)$$

$$Bi^* = \frac{\alpha \sqrt{\lambda t}}{\lambda} (Bi \sqrt{t^+}). \quad (19)$$

Распределение температур $T^+(y^+, Bi^*)$ представим в виде [1]

$$T^+ = \operatorname{erf} y^+ + e^{-y^{+2}} F(y^+ + Bi^*), \quad (20)$$

где

$$F(z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(z). \quad (21)$$

Определения:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi;$$

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z);$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0; \operatorname{erf}(\infty) = 1; \operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z).$$

Разложения в ряд:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!};$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

Асимптотическое разложение (для больших значений z)

$$e^{z^2} \operatorname{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} z} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N (-1)^n \times \right. \\ \left. \times \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2z^2)^n} + R_N \right\};$$

$$|R_N| < |(N\text{-го члена разложения})|.$$

Уравнение (20) является строгим решением для полуграничного тела. Для тел конечной толщины $2L$ (или $2R$) необходимо рассмотреть асимптотическое уравнение для малых t^+ .

Из уравнения (20) получаем температуру поверхности $T_B^+ = T^+(y^+ = 0)$

$$T_B^+ = F(Bi^*) = e^{Bi^{*2}} \operatorname{erfc}(Bi^*). \quad (22)$$

Для больших Bi^* [или $y^+ + Bi^*$ в уравнении (20)] можно воспользоваться асимптотическим разложением функции $F(z)$, которое является правильным для больших значений z .

Температуру поверхности представим в виде

$$T_B^+ \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{Bi^*} \left(\text{погрешность} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2Bi^{*3}} \right). \quad (23)$$

Для $Bi^* \rightarrow \infty$, $T_B = 0$, т. е. граничные условия становятся граничными условиями первого рода, и уравнение (20) преобразуется к виду

$$T^+ = \operatorname{erf}(y^+) (Bi^* \rightarrow \infty). \quad (24)$$

Мгновенное значение плотности теплового потока $\dot{q}_t$ через поверхность можно получить из уравнений (23), (24)

$$\dot{q}_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda t}} (T_I - T_\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\lambda \rho c}}{\sqrt{t}} (T_I - T_\infty). \quad (25)$$

Итак, для малых времен плотность теплового потока уменьшается как $1/\sqrt{t}$ и пропорциональна величине $\sqrt{\lambda \rho c}$, которую иногда называют коэффициентом теплового восприятия.

Среднеинтегральные значения плотности теплового потока, осредненные по интервалу времени от $t=0$ до $t>0$, представляют собой удвоенное мгновенное значение в то же самое время t

$$\dot{q} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda t}} (T_I - T_\infty). \quad (25a)$$

Для достаточно большого времени t^+ профили температур внутри тела конечной толщины становятся подобными друг другу (см. рис. 1). Их можно представить с помощью одной и той же функции пространственной координаты $f(x^+)$, умноженной на масштабный множитель $g(t^+)$, который является уменьшающейся функцией времени

$$T^+ = g(t^+) f(x^+). \quad (26)$$

При подстановке этой подобранной функции в уравнение (14) дифференциальное уравнение в частных производных преобразуется в два обыкновенных дифференциальных уравнения для $g(t^+)$ и $f(x^+)$ соответственно, причем функция времени

$$g(t^+) = e^{-m^2 t^+}. \quad (27)$$

Здесь m — константа, определяемая из граничных условий.

Вид пространственной функции зависит от формы тела (последняя колонка в табл. 1). Конечно, невозможно описать температурное поле для коротких времен, особенно при прямоугольном начальном распределении температуры, при помощи одной из этих кривых типа параболы. Так как имеется бесконечное число значений m_i , которые удовлетворяют граничным условиям (см. первую колонку

в табл. 1), любая из функций $T_i^+ = C_i f(m_i^+) e^{-m_i^2 t^+}$ является решением уравнения (14), и из-за линейности этого уравнения сумма этих функций $\sum T_i^+$ является также его решением. Неизвестные коэффициенты C_i могут быть определены, чтобы получить приближение типа наименьших квадратов к начальному распределению температуры при помощи конечного ряда $\sum C_i(m_i) f(m_i x^+)$ с погрешностями, приближающимися к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Таблица 1. Распределение температур для одномерного переноса теплоты в пластине, цилиндре и сфере *

Форма тела	m_i	$C_i(m_i)$	$D_i(m_i)$	$f(m_i)\xi$
Пластина	$\frac{\alpha X}{\lambda} \frac{\cos m_i}{\sin m_i}$	$2 \frac{\sin m_i}{m_i + \sin m_i \cos m_i}$	$1 \frac{\sin m_i}{m_i}$	$\cos\left(m_i \frac{x}{X}\right)$
Цилиндр	$\frac{\alpha R}{\lambda} \frac{J_0(m_i)}{J_1(m_i)}$	$2 \frac{J_1(m_i)}{m_i [J_0^2(m_i) + J_1^2(m_i)]}$	$2 \frac{J_1(m_i)}{m_i}$	$J_0\left(m_i \frac{r}{R}\right)$
Сфера	$\left(1 - \frac{\alpha R}{\lambda}\right) \frac{\sin m_i}{\cos m_i}$	$2 \frac{\sin m_i - m_i \cos m_i}{m_i - \sin m_i \cos m_i}$	$3 \frac{\sin m_i - m_i \cos m_i}{m_i^3}$	$\frac{\sin [m_i (r/R)]}{m_i (r/R)}$

* Таблицы и графики функций Бесселя J_0 и J_1 можно найти в [7, 8].

Так называемые собственные значения m_i являются корнями трансцендентных уравнений, приведенных в первом столбце табл. 1. Их можно определить графически или с помощью итераций.

В табл. 1 приведено распределение температур для одномерного теплового потока в пластине, цилиндре и сфере после скачкообразного изменения температуры окружающей среды от T_l (постоянная начальная температура тела) до постоянного значения T_∞ при заданном постоянном коэффициенте теплоотдачи α (граничные условия третьего рода)

$$T^+ = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(m_i) f(m_i \xi) e^{-m_i^2 t^+}; \quad (28)$$

$$\bar{T}^+ = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(m_i) D_i(m_i) e^{-m_i^2 t^+}. \quad (29)$$

В табл. 2 приведены первые четыре корня (от m_1 до m_4) для пластины, цилиндра и сферы в зависимости от значения числа Био. Последующие значения m_i и m_{i+1} отличаются на $\Delta m_i = m_{i+1} - m_i$, причем $\Delta m_i \rightarrow \pi$ для

больших номеров i . Четвертое собственное значение всегда больше (или равно) 3π , и поэтому четвертый член ряда

(28) содержит масштабный множитель $e^{-m_4^2 t^+}$, который становится очень мал, если промежуток времени не слишком мал. Этот множитель меньше $5 \cdot 10^{-3}$ для $t^+ = 0,06$. Поэтому часто достаточно учесть первые три члена ряда (если $t^+ > 0,06$) и только первый член ряда, если $t^+ > 0,6$. Рисунки 2—4 показывают безразмерные температуры центра и поверхности T_C^+ и T_B^+ [рассчитанные с помощью уравнения (28) при $x^+ = 0$ и $x^+ = 1$] и безразмерную среднюю температуру $\bar{T}^+$ согласно уравнению (29). Последняя связана с тепловым потоком $\bar{Q}$, передаваемым через поверхность за время от $t=0$ до t , равного

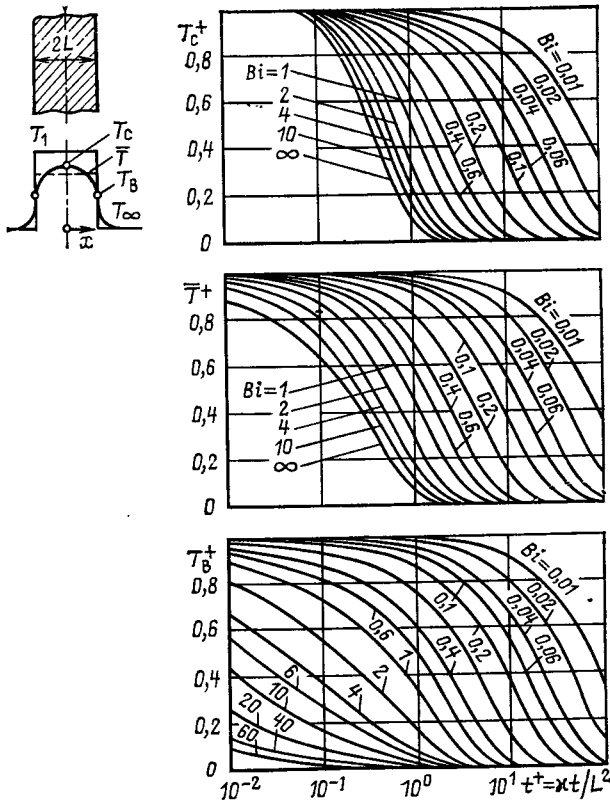
$$(1 - \bar{T}^+) = \frac{T_l - \bar{T}}{T_l - T_\infty} = \frac{\bar{Q}}{\rho c V (T_l - T_\infty)}, \quad (30)$$

и определяется выражением

$$\bar{T} = \frac{\iiint_V (\rho c T) dV}{\iiint_V (\rho c) dV}. \quad (31)$$

Таблица 2. Первые четыре корня m_i трансцендентных уравнений, приведенных в табл. 1

Bi	Пластина				Цилиндр				Сфера			
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_1	m_2	m_3	m_4	m_1	m_2	m_3	m_4
0	0.000	π	2π	3π	0.000	3.832	7.016	10.174	0.000	4.493	7.725	10.904
0.001	0.032	3.142	6.283	9.425	0.045	3.832	7.016	10.174	0.055	4.494	7.725	10.904
0.002	0.044	3.142	6.284	9.425	0.063	3.832	7.016	10.174	0.077	4.494	7.725	10.904
0.005	0.071	3.143	6.284	9.425	0.100	3.833	7.016	10.174	0.122	4.495	7.726	10.905
0.01	0.100	3.145	6.285	9.426	0.141	3.834	7.017	10.175	0.173	4.496	7.727	10.905
0.02	0.141	3.148	6.286	9.427	0.200	3.837	7.019	10.176	0.242	4.498	7.728	10.906
0.05	0.222	3.157	6.291	9.430	0.314	3.845	7.023	10.178	0.385	4.504	7.732	10.908
0.1	0.311	3.173	6.299	9.435	0.442	3.858	7.030	10.183	0.542	4.516	7.739	10.913
0.2	0.433	3.204	6.315	9.446	0.617	3.884	7.044	10.193	0.759	4.538	7.761	10.923
0.5	0.653	3.292	6.362	9.477	0.941	3.959	7.086	10.222	1.166	4.604	7.790	10.950
1.0	0.861	3.426	6.437	9.529	1.256	4.079	7.156	10.271	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$
2.0	1.079	3.644	6.578	9.630	1.599	4.292	7.288	10.366	2.030	4.913	7.979	11.085
5.0	1.314	4.034	6.910	9.893	1.990	4.713	7.617	10.622	2.569	5.354	8.303	11.335
10	1.428	4.305	7.229	10.200	2.180	5.034	7.957	10.936	2.836	5.717	8.659	11.658
20	1.498	4.491	7.495	10.513	2.288	5.257	8.253	11.268	2.986	5.978	8.983	12.003
50	1.536	4.619	7.703	10.783	2.357	5.411	8.484	11.562	3.079	6.158	9.239	12.320
∞	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$	2.405	5.520	8.653	11.792	π	2π	3π	4π


 Рис. 2. Безразмерные температура в центре, средняя температура и температура поверхности пластины для различных чисел Bi

При постоянных значениях ρc и плотности одномерного теплового потока среднюю температуру можно представить в безразмерном виде для пластины, цилиндра и сферы ($n=0, 1, 2$)

$$T^+ = (n+1) \int_0^1 T^+(x^+) x^{+n} dx^+. \quad (32)$$

Из этого выражения получены функции $D_i(m_i)$ (см. табл. 1). Для достаточно длительных времен t^+ первая из этих функций дает отношение $\bar{T}^+/T_c^+$

$$D_1(m_1) = \frac{\bar{T}^+}{T_c^+} \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (33)$$

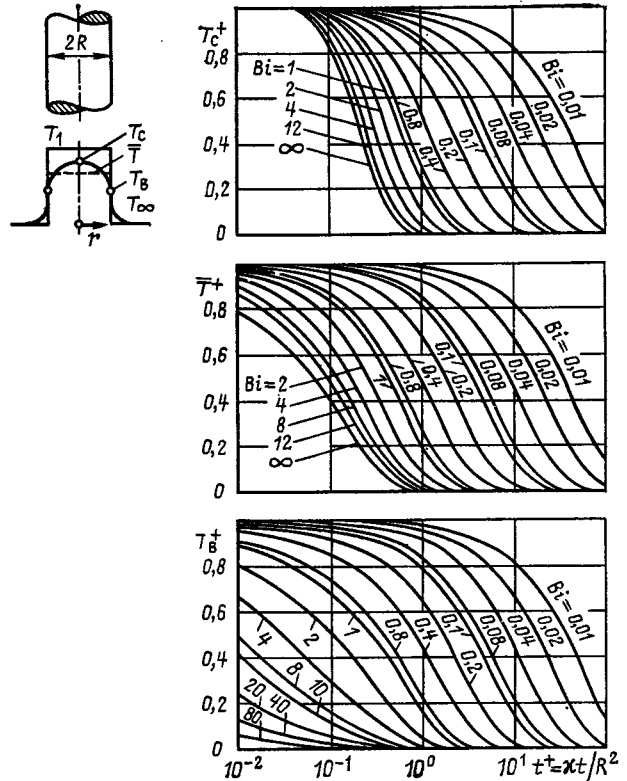
Если число Био стремится к нулю, ряды в уравнениях (28) и (29) сокращаются до одного члена

$$\lim_{Bi \rightarrow 0} T^+ = \lim_{Bi \rightarrow 0} \bar{T}^+ = \lim_{Bi \rightarrow 0} e^{-(n+1)Bi t^+} = 1. \quad (34)$$

Это асимптотическое решение можно использовать как аппроксимацию для малых чисел Bi ($Bi < 0,05$)

$$T^+ \approx e^{-(n+1)Bi t^+}. \quad (35)$$

То же самое выражение можно получить непосредственно, предполагая, что тело является совершенным проводником (или хорошо перемешиваемой жидкостью). Можно видеть, что $(n+1) = AX/V$ и $Bi t^+ = (\lambda X/\lambda)(\kappa t/X^2) = \alpha t/(\rho c X)$,


 Рис. 3. Безразмерные температура в центре, средняя температура и температура поверхности цилиндра для различных чисел Bi

уравнение (35) не зависит от λ^1

$$T^+ \approx e^{-(\alpha A/\rho c V)t} \text{ при } \frac{\alpha X}{\lambda} < 0,05. \quad (36)$$

В другом предельном случае, когда $Bi \rightarrow \infty$ (граничные условия первого рода), первый член рядов (28) и (29) для больших значений t^+ ($t^+ > 0,3$) и $Bi \rightarrow \infty$ (см. табл. 1 и 2) имеют следующий вид:

$$T^+ \approx \frac{\Phi}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\chi}{L}\right) e^{-(\pi/2)^2 (\kappa t/L^2)}; \quad (37)$$

$$\bar{T}^+ \approx \frac{2}{(\pi/2)^2} e^{-(\pi/2)^2 (\kappa T/L^2)}; \quad (38)$$

для цилиндра

$$T^+ \approx 1,613 J_0\left(2,405 \frac{r}{R}\right) e^{-(2,405)^2 (\kappa t/R^2)}; \quad (39)$$

$$\bar{T}^+ \approx \frac{4}{(2,405)^2} e^{-(2,405)^2 (\kappa t/R^2)}; \quad (40)$$

для сферы

$$T^+ \approx 2 \frac{\sin(\pi r/R)}{(\pi r/R)} e^{-\pi^2 (\kappa t/R^2)}; \quad (41)$$

$$\bar{T}^+ \approx \frac{6}{\pi^2} e^{-\pi^2 (\kappa t/R^2)}. \quad (42)$$

Относительные погрешности этих асимптотических решений для больших времен меньше 1%, если $t^+ > 0,3$ [5].

¹ В формуле вместо полуширины L пластины или радиуса R цилиндра или сферы стоит X .

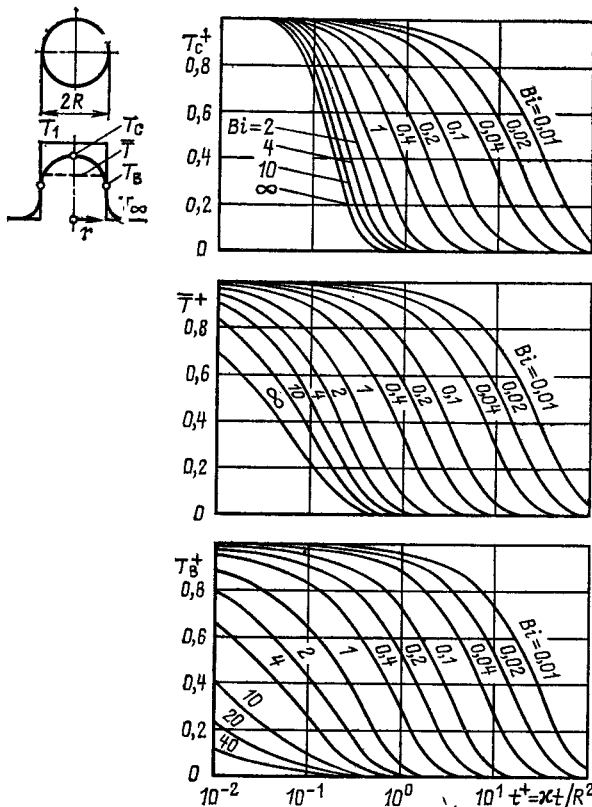


Рис. 4. Безразмерная температура в центре, средняя температура и температура поверхности сферы для различных чисел Bi

Из этих уравнений можно определить плотность тепловых потоков через поверхность при $t^+ > 0,3$ и $Bi \rightarrow \infty$: для пластины

$$\dot{q} = 2 \frac{\lambda}{L} (T_I - T_\infty) e^{-(\pi/2)^2 t^+} = \frac{\pi^2}{4} \frac{\lambda}{L} (\bar{T} - T_\infty); \quad (43)$$

для цилиндра

$$\dot{q} = 2 \frac{\lambda}{R} (T_I - T_\infty) e^{-(2,405)^2 t^+} = \frac{(2,405)^2}{2} \frac{\lambda}{R} (\bar{T} - T_\infty); \quad (44)$$

для сферы

$$\dot{q} = 2 \frac{\lambda}{R} (T_I - T_\infty) e^{-\pi^2 t^+} = \frac{\pi^2}{3} \frac{\lambda}{R} (\bar{T} - T_\infty). \quad (45)$$

В общем случае расчет распределений температур или плотности тепловых потоков включает в себя оценку бесконечного ряда [см. (28) и (29)].

Некоторые предельные случаи можно рассчитать намного проще с учетом асимптотических решений [см. уравнение (20) — (25а) для $t^+ \rightarrow 0$; (37) — (45) для $t^+ \rightarrow \infty$ и (34) — (36) для $Bi \rightarrow 0$].

Применение метода коэффициентов переноса теплоты к процессам нестационарной теплопроводности. Для того чтобы упростить расчеты процессов нестационарной теплопроводности во всей области переменных ($0 < t^+ < \infty$; $0 < Bi < \infty$), можно применить метод, который хорошо опробован в расчете стационарного конвективного теплообмена в жидкостях, движущихся в каналах. В стационарных задачах этого типа обычно определяют коэффициент теплоотдачи, зависящий от расстояния, которое проходит жидкость, и от ее скорости. С другой точки

зрения можно сказать, что они зависят от времени пребывания в канале элемента жидкости. Аналогично этому можно использовать коэффициент переноса теплоты α_i для расчета нестационарных процессов теплопроводности [6]. Ясно, что эти α_i должны зависеть от времени. Определяя мгновенные значения $\alpha_{i,t}$ через разность средней температуры поверхности, получаем

$$\dot{Q}_{B,t} = \alpha_{i,t} A [\bar{T}(t) - T_B(t)]. \quad (46)$$

Тот же самый поток теплоты можно выразить через разность температур на границе тела и в окружающей среде

$$\dot{Q}_{B,t} = \alpha A [T_B(t) - T_\infty]. \quad (47)$$

Введя коэффициент теплопередачи U_t

$$\frac{1}{U_t(t)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_{i,t}(t)}, \quad (48)$$

исключим из уравнений (46) и (47) температуру поверхности T_B

$$\dot{Q}_{B,t} = U_t(t) A [\bar{T}(t) - T_\infty]. \quad (49)$$

Комбинируя это выражение с балансом энергии

$$\dot{Q}_{B,t} = -\rho c V \frac{d\bar{T}}{dt}, \quad (50)$$

получаем

$$\int \frac{d\bar{T}}{\bar{T} - T_\infty} = -\frac{A}{\rho c V} \int U_t(t) dt. \quad (51)$$

При интегрировании уравнения (51) получаем экспоненциальное затухание температуры со временем

$$\frac{\bar{T}(t) - T_\infty}{T_I - T_\infty} = \exp \left[-\frac{U(t) A t}{\rho c V} \right]; \quad (52)$$

$$U(t) = \frac{1}{t} \int_0^t U_t(t) dt. \quad (53)$$

В принципе этот средний коэффициент теплопередачи можно определить точно из уравнений (28) и (29). Однако это не имеет смысла, так как его подстановка в уравнение (52) в результате снова приведет к уравнению (29).

Чтобы упростить расчет, определим значение α_i для предельного случая $Bi \rightarrow \infty$ ($1/\alpha \rightarrow 0$) и допустим, что он не зависит от коэффициента теплоотдачи α . Коэффициент теплопередачи U будет точным в этом предельном случае. В другом предельном случае ($Bi \rightarrow 0$) он также определяется точно, содержится или нет в этот раз допущение о независимости величин [см. уравнение (48)].

Значение среднеинтегральной величины коэффициента переноса теплоты для малого времени ($t^+ \rightarrow 0$) можно найти из уравнения (25а) при $\bar{T} \approx T_I$

$$\alpha_{i,0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa t}} \quad \text{при } t^+ \rightarrow 0. \quad (54)$$

Для больших времен $t^+ \rightarrow \infty$ из уравнений (43) — (45) имеем:

$$\alpha_{i,\infty} = \frac{\pi^2}{4} \frac{\lambda}{L}; \quad (55)$$

для цилиндра

$$\alpha_{i,\infty} = \frac{(2,405)^2}{2} \frac{\lambda}{R}; \quad (56)$$

для сферы

$$z_{i, \infty} = \frac{\pi^2}{3} \frac{\lambda}{R}. \quad (57)$$

Хорошую аппроксимацию для всего интервала времени можно получить при помощи следующей интерполяционной формулы:

$$\alpha_i(t) \approx [\alpha_{i, \infty}^2 + \alpha_{i, 0}^2(t)]^{1/2}. \quad (58)$$

Введя безразмерные величины, определяемые уравнениями (10), (12) и (13), и безразмерный коэффициент переноса теплоты

$$Nu_i = \alpha_i R / \lambda, \quad (59)$$

приведем уравнение (52) к виду

$$\bar{T}^+ \approx \exp \left[-a_v^+ \frac{t^+}{(1/Bi) + 1/Nu_i(t^+)} \right];$$

$$Nu_i(t^+) \approx \left[Nu_{i, \infty}^2 + \frac{4}{\pi} \frac{1}{t^+} \right]^{1/2}, \quad (60)$$

где $a_v^+ = A \cdot X / V$ и значения a_v^+ и $Nu_{i, \infty}$ определены ниже:

Форма	a_v^+	$Nu_{i, \infty}$	C_{∞}
Пластина	1	2,467	$(\pi/2)^2$
Цилиндр	2	2,892	$(2,405)^2/2$
Сфера	3	3,290	$\pi^2/3$

Эта аппроксимация довольно точна для большинства инженерных расчетов (это можно видеть из сравнения с кривыми на рис. 3, 6 и 9).

Из более строгих решений находим, что α_i не зависят от коэффициента теплоотдачи α . Числа Нуссельта $Nu_{i, \infty}$ являются функциями Bi и изменяются между значениями C_{∞} , данными в уравнении (60) $Bi \rightarrow \infty$ и значениями

$$\lim_{Bi \rightarrow \infty} Nu_{i, \infty} = a_v^+ + 2 \quad (61)$$

в другом предельном случае [ср. с уравнением (29), § 2.4.2].

Следующая эмпирическая формула объясняет эту функциональную связь между величиной α_i и коэффициентом теплоотдачи α

$$Nu_{i, \infty}(Bi) \approx C_{\infty} \frac{(a_v^+ + 2) + Bi}{C_{\infty} + Bi}. \quad (62)$$

Если она используется в уравнении (60), точность аппроксимации становится даже выше, особенно в интервале промежуточных чисел Био.

Уравнения (60) — (62) можно также использовать для расчета времени, требуемого для нагрева или охлаждения тела от начальной температуры T_I до средней температуры $\bar{T}$,

$$t^+ = \frac{1}{a_v^+} \left[\frac{1}{Bi} + \frac{1}{Nu_i(t^+)} \right] \ln \frac{T_I - T_{\infty}}{\bar{T} - T_{\infty}}. \quad (63)$$

Уравнение (63) нужно решать с помощью итераций, так как правая сторона уравнения зависит от времени $[Nu_i(t^+)]$. Если начинать с $Nu_i^{(0)}(t^+) = Nu_{i, \infty}$ в качестве первого приближения, решение быстро сходится.

Чтобы достигнуть той же самой температуры в центре тела, требуется дополнительное время Δt_c^+

$$T_c^+(t^+ + \Delta t_c^+) = \bar{T}^+(t^+). \quad (64)$$

Оказывается, что это временное запаздывание между средней температурой и температурой центра почти не зависит от числа Био и времени

$$\Delta t_c^+ \approx \begin{cases} 1/6 - \text{пластина;} \\ 1/8 - \text{цилиндр;} \\ 1/10 - \text{сфера.} \end{cases} \quad (65)$$

Для очень больших чисел Био ($Bi \rightarrow \infty$) Δt_c^+ принимает следующие значения: 0,183; 0,145; 0,121 соответственно вместо 0,167; 0,125; 0,1 согласно уравнению (65). Для очень коротких отрезков времени ($t^+ \ll \Delta t_c^+$) температуры центра T_c^+ , рассчитанные с помощью (64), (65), превышают точные значения.

Численные методы. При более сложных граничных условиях или геометрических формах часто очень трудно или даже невозможно найти аналитическое решение. Такие задачи могут быть решены численными методами. Ниже приведен пример очень простого явного конечно-разностного метода. Для более тонких численных методов, таких, как неявный конечно-разностный метод (FD) или метод конечных элементов (FE), читателю следует обратиться к учебникам по численным методам [9—13].

Чтобы в принципе проиллюстрировать этот метод, начнем с дифференциального одномерного уравнения теплопроводности [см. (7)]

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{n}{x} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (66)$$

(метод довольно просто можно обобщить на решение многомерных задач).

Используя следующие простые аппроксимации для производных по времени и координате в уравнении (66)

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{I+1, K} - T_{I, K}}{\Delta t}; \quad (67)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{I, K+1} - T_{I, K-1}}{2\Delta x}; \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{(T_{I, K+1} - T_{I, K}) - (T_{I, K} - T_{I, K-1})}{(\Delta x)^2}, \quad (69)$$

где индексы I и K относятся к определенным значениям времени $t_{I+1} = t_I + \Delta t$ и координаты $x_{K+1} = x_K + \Delta x$, получаем алгебраическое уравнение для температуры $T_{I+1, K}$, которая является функцией $T_{I, K}$, $T_{I, K-1}$ и $T_{I, K+1}$,

$$T_{I+1, K} \approx M \left[T_{I, K-1} \left(1 - \frac{n}{2} \frac{\Delta x}{x_K} \right) + T_{I, K+1} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{\Delta x}{x_K} \right) \right] + (1 - 2M) T_{I, K}. \quad (70)$$

В уравнении (70) M — обозначение для числа Фурье, образованного с помощью Δt и Δx ,

$$M = \kappa \Delta t / (\Delta x)^2.$$

Для обеспечения устойчивости численного решения необходимо, чтобы M было меньше или равно 1/2. Для $M > 1/2$ коэффициент $T_{I, K}$ в уравнении (70) стал бы отрицательным, приводя к физически абсурдному результату: чем выше была бы температура $T_{I, K}$, тем более низкой стала бы она через временной интервал Δt .

Следуя [14, 15], можно использовать значения $M = 1/2$ для получения крайне простого конечно-разностного метода. Тогда в прямоугольных координатах ($n=0$) уравнение (70) принимает вид

$$T_{I+1, K} \approx \frac{1}{2} (T_{I, K-1} + T_{I, K+1}). \quad (71)$$

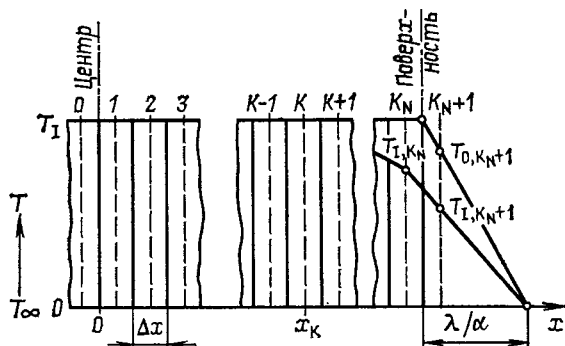


Рис. 5. Разбиение тела на слои для конечно-разностного метода расчета

Новая температура $T_{I+1,K}$ в сечении x_K находится простым вычислением среднеарифметического температур для примыкающих сечений x_{K-1} и x_{K+1} в момент времени t_I .

В случае двух или трех прямоугольных пространственных координат (x_K, y_L), (x_K, y_L, z_M), выбирая $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, получаем

$$T_{I+1,KL} \approx M(T_{I,K-1,L} + T_{I,K+1,L} + T_{I,K,L-1} + T_{I,K,L+1}) + (1-4M)T_{I,K,L}; \quad (73)$$

$$T_{I+1,K,L,M} \approx M(T_{I,K-1,L,M} + T_{I,K+1,L,M} + T_{I,K,L-1,M} + T_{I,K,L+1,M} + T_{I,K,L,M-1} + T_{I,K,L,M+1}) + (1-6M)T_{I,K,L,M}. \quad (74)$$

причем для обеспечения устойчивости соответственно $M \leq 1/4$ и $M \leq 1/6$.

Чтобы показать применение метода конечных разностей, рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение (70) в прямоугольных ($n=0$), цилиндрических ($n=1$) или сферических ($n=2$) координатах, принимая для простоты $M=1/2$.

Разделим тело (пластину, цилиндр, сферу или полые цилиндр и сферу) на K_N слоев толщиной Δx (рис. 5). Центральная линия самого глубоко лежащего внутри тела слоя не должна совпадать с осью полной сферы или цилиндра [для $x_K=0$ уравнение (70) использовать нельзя]. Для K слоев, как показано на рис. 5, координата центральной линии K -го слоя

$$x_K = \Delta x (K-0,5), \quad (75)$$

а Δx связано с радиусом R (или полутолщиной L) и полным числом слоев K_N соотношением

$$\Delta x = R/K_N. \quad (76)$$

Для учета граничных условий необходимы дополнительные слои с номером $K=0$ ($\Delta x/2$ налево от центра) и K_N+1 ($\Delta x/2$ наружу от поверхности).

Считая плотность теплового потока в центре равной нулю (из-за симметрии) и задавая граничные условия третьего рода на поверхности (16), получаем

$$T_{I,0} = T_{I,1} \text{ (условия симметрии);} \quad (77)$$

$$-\lambda \frac{T_{I,K_N+1} - T_{I,K_N}}{\Delta x} = \alpha (T_{I,K_N+1/2} - T_\infty). \quad (78)$$

Для первого шага ($I=0$) плотность теплового потока на поверхности имеет вид

$$-\lambda \frac{T_{0,K_N+1} - T_{0,K_N+1/2}}{\Delta x/2} = \alpha (T_{0,K_N+1/2} - T_\infty). \quad (79)$$

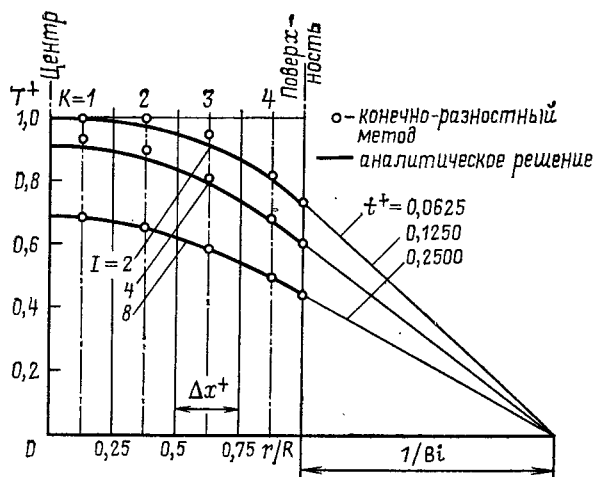


Рис. 6. Сравнение результатов расчетов изменения температур в сфере численным и аналитическим методами

Используя безразмерные температуры T^+ [см. (10)] с $T_\infty^+=0$ и представляя температуру поверхности $T_{K_N+1/2}$ (которая не встречается в разностной схеме) как среднее арифметическое температур T_{K_N} и T_{K_N+1} , запишем граничные условия в виде

$$T_{0,K_N+1}^+ = T_{0,K_N+1/2}^+ \left(1 + \frac{\alpha \Delta x}{2\lambda}\right) \text{ для первого шага} \quad (I=0); \quad (80)$$

$$T_{I,K_N+1}^+ = T_{I,K_N}^+ \frac{1 - \alpha \Delta x / 2\lambda}{1 + \alpha \Delta x / 2\lambda} \text{ для всех последующих шагов } (I > 0). \quad (81)$$

С помощью уравнения (76) комплекс $\alpha \Delta x / (2\lambda)$ можно представить в виде

$$\frac{\alpha \Delta x}{2\lambda} = \frac{\alpha R}{\lambda} \frac{1}{2K_N} = \frac{Bi}{2K_N}. \quad (82)$$

Из уравнений (70) и (75) — (82) получаем

$$T_{I+1,K}^+ = \frac{(2K-1-n)T_{I,K-1}^+ + (2K-1+n)T_{I,K+1}^+}{2(2K-1)}; \quad (83)$$

$$T_{I,0}^+ = T_{I,1}^+; \quad (84)$$

$$T_{I,K_N+1}^+ = \begin{cases} T_{0,K_N+1/2}^+ \frac{2K_N - Bi}{2K_N} & \text{при } I=0; \\ T_{I,K_N}^+ \frac{2K_N - Bi}{2K_N + Bi} & \text{при } I > 0. \end{cases} \quad (85)$$

$$T_{I,K_N+1}^+ = \begin{cases} T_{0,K_N+1/2}^+ \frac{2K_N - Bi}{2K_N} & \text{при } I=0; \\ T_{I,K_N}^+ \frac{2K_N - Bi}{2K_N + Bi} & \text{при } I > 0. \end{cases} \quad (86)$$

Пример. Рассмотрим охлаждение (или нагревание) сферы ($n=2$) с постоянной начальной температурой ($T_{0,K}^+=1$), постоянной температурой окружающей среды ($T_\infty^+=0$) и числом Био $Bi=1$.

Необходимо знать распределение температуры в сфере в момент времени $t^+=0,25$. При выборе относительно глубокого разбиения сферы только на четыре слоя ($\Delta x^+ = \Delta x/R = 1/4$) к шагу по безразмерному времени добавляется $\Delta t^+ = \frac{1}{2}(\Delta x^+)^2 = \frac{1}{32}$. Необходимо взять во

семь шагов по времени, чтобы достигнуть $t^+=0,25$ ($t^+=8\Delta t^+=0,25$). Результаты расчета даны в табулированной форме в табл. 3.

Таблица 3. Расчет нестационарного температурного поля в шаре конечно-разностным методом для $K=0 \div 3$ в центре и $K > 4$ на поверхности

K	0	1	2	3	$K_N=4$	$K_N+1=5$	$K_{N+1/2}$
$T_{(1),K}$	$T_{I,1}$	$\frac{-T_{I,0} + 3T_{I,2}}{2}$	$\frac{T_{I,1} + 5T_{I,3}}{6}$	$\frac{3T_{I,2} + 7T_{I,4}}{10}$	$\frac{5T_{I,3} + 9T_{I,5}}{14}$	$\frac{7}{9}T_{I,4}$	$\frac{T_{I,4} + T_{I,5}}{2}$
$I=0$	1	1	1	1	1	0,875 ^a	1
1	1	1	1	1	0,920	0,715	0,818
2	1	1	1	0,944	0,817	0,635	0,726
3	1	1	0,953	0,872	0,745	0,580	0,662
4	0,930	0,930	0,893	0,807	0,684	0,532	0,608
5	0,875	0,875	0,827	0,747	0,630	0,490	0,560
6	0,803	0,803	0,768	0,689	0,582	0,453	0,517
7	0,751	0,751	0,708	0,638	0,537	0,418	0,478
8	0,687	0,687	0,657	0,588	0,497	0,386	0,441

^a $T_{0,K_{N+1/2}}$

Выражения (83) — (86) используются для получения температур в момент времени $t^+ = I\Delta t^+$ при сечении $x_K^+ = (K-0,5)/K_N$. Температуру поверхности $T_{I,K_N+1/2}$ рассчитывают как среднеарифметическое температур в центре самого дальнего от середины слоя $T_{I,K_N}(\Delta x/2$ под поверхностью) и (фиктивной) температуры $T_{I,K_N+1}(\Delta x/2$ вне поверхности). На рис. 6 показаны результаты численного расчета для $I=2, 4$ и 8 ($t^+=0,0625; 0,125$ и $0,25$) и приведены кривые, рассчитанные по точному аналитическому решению [см. уравнение (28)]. Согласие между численным и аналитическим результатами расчета весьма хорошее (отклонения меньше 2% для $I=8$).

В. Многомерные системы. Решение уравнения (3а), § 2.4.1 для некоторых многомерных систем можно найти простым перемножением соответствующих одномерных решений, например поле температур $T^+(x, y, z, t)$ в декартовых координатах при начальных условиях

$$T^+(x, y, z, 0) = 1 \quad (87)$$

и граничных условиях третьего рода

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha_1} \frac{\partial T^+}{\partial x} \pm T^+ \right)_{x=\pm X} = 0; \quad \left(\frac{\lambda}{\alpha_2} \frac{\partial T^+}{\partial y} \pm T^+ \right)_{y=\pm Y} = 0; \quad \left(\frac{\lambda}{\alpha_3} \frac{\partial T^+}{\partial z} \pm T^+ \right)_{z=\pm Z} = 0 \quad (88)$$

задается выражением

$$T^+(x, y, z, t) = T_1^+(x, t) T_2^+(y, t) T_3^+(z, t), \quad (89)$$

где T_1^+, T_2^+ и T_3^+ — решения соответствующих одномерных задач с теми же самыми начальными и граничными условиями. Примеры систем такого типа могут быть следующими.

1. Для четверти пространства $x>0; y>0; -\infty < z < \infty$ (двумерный прямоугольный угол) с начальной температурой, равной единице, и температурой поверхности, равной нулю ($\lambda/\alpha \rightarrow 0$), решение имеет вид

$$T^+(x, y, t) = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (90)$$

[см. уравнение (20) с $Bi \rightarrow \infty$ для соответствующих одномерных задач, полуограниченного тела или полупространства].

2. Для половины от четверти пространства (октант) $x>0; y>0; z>0$ (трехмерный прямоугольный угол с начальной температурой, равной единице, и нулевой температурой на поверхности) решение имеет вид

$$T^+(x, y, z, t) = \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \operatorname{erf} \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}. \quad (91)$$

3. Для бесконечно длинного стержня с прямоугольным поперечным сечением $-X < x < X; -Y < y < Y; -\infty < z < \infty$ при граничных условиях третьего рода решение имеет вид

$$T^+(x, y, t) = T_1^+(x, t) T_2^+(y, t), \quad (92)$$

где $T_1^+(x, t)$ задается уравнением (28) (пластина толщиной $2X$), а $T_2^+(y, t)$ — уравнением (28) (пластина толщиной $2Y$).

4. Для прямоугольного параллелепипеда $-X < x < X; -Y < y < Y; -Z < z < Z$ при граничных условиях третьего рода решение имеет вид

$$T^+(x, y, z, t) = T_1^+(x, t) T_2^+(y, t) T_3^+(z, t), \quad (93)$$

где T_1^+, T_2^+, T_3^+ задаются уравнением (28) (пластины толщиной $2X, 2Y$ или $2Z$).

5. В цилиндрических координатах поле температур в ограниченном цилиндре ($0 \leq r < R; -Z < z < Z$) $T^+(r, z, t)$ при единичной начальной температуре

$$T^+(r, z, 0) = 1 \quad (94)$$

и граничных условиях третьего рода

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha_1} \frac{\partial T^+}{\partial r} \pm T^+ \right)_{r=R} = 0; \quad (95)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha_2} \frac{\partial T^+}{\partial z} \pm T^+ \right)_{z=\pm Z} = 0 \quad (96)$$

задается выражением

$$T^+(r, z, t) = T_1^+(r, t) T_2^+(z, t). \quad (97)$$

Здесь $T_1^+(r, t)$ определяется уравнением (28) (бесконечный цилиндр радиусом R), а $T_2^+(z, t)$ — уравнением (28) (пластина толщиной $2Z$).

Простое перемножение одномерных решений для получения решений задач многомерных систем дает также правильные результаты по средней температуре $\bar{T}$; по-

этому этот метод также можно использовать для решения приближенного уравнения (60).

Пример. Твердый пищевой продукт [коэффициент температуропроводности $\kappa = 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,6 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$] в тонкостенной цилиндрической консервной банке диаметром $D = 2R = 100 \text{ мм}$ и высотой $H = 2Z = 50 \text{ мм}$ необходимо стерилизовать в горячей водяной ванне при $T = 150^\circ \text{C}$ (под давлением). Пусть коэффициент теплоотдачи от горячей воды к поверхности жестяной банки $\alpha = 600 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Какое время необходимо, чтобы нагреть пищевой продукт от его начальной температуры 20°C до средней температуры $T = 100^\circ \text{C}$?

Из уравнения (97) имеем

$$\bar{T}_1^+ = \bar{T}_1^+ \bar{T}_2^+,$$

где

$$\bar{T}_1^+ = \bar{T} + \left(\frac{\kappa t}{R^2}, \frac{\alpha R}{\lambda} \right) \text{ для бесконечного цилиндра};$$

$$\bar{T}_2^+ = \bar{T} + \left(\frac{\kappa t}{Z^2}, \frac{\alpha Z}{\lambda} \right) \text{ для пластины толщиной } 2Z.$$

Так как необходимо определить время, решение задачи с использованием уравнения (29) или рис. 3 и 6 можно найти только с помощью итераций. Уравнение (60) также нельзя явно решить непосредственно для определения времени. Однако требуемые итерации просты и могут быть выполнены в течение нескольких минут с помощью карманного калькулятора.

С учетом $e^a e^b = e^{a+b}$ из (60) и (97) имеем

$$\bar{T}^+ = \exp \left\{ - \frac{t_z^+}{(1/\text{Bi}_Z) + [1/\text{Nu}_{iZ}(t_z^+)]} - \frac{2t_R^+}{(1/\text{Bi}_R) + [1/\text{Nu}_{iR}(t_R^+)]} \right\}. \quad (98)$$

Взяв логарифм и представив t_R^+ в виде

$$t_R^+ = \frac{\kappa t}{R^2} = \left(\frac{Z}{R} \right)^2 \frac{\kappa t}{Z^2} = \left(\frac{H}{D} \right)^2 t_z^+, \quad (99)$$

получим неявное уравнение для времени нагрева (или охлаждения)

$$t_z^+ = \ln \left(\frac{1}{\bar{T}^+} \right) \left\{ \frac{1}{(1/\text{Bi}_Z) + [\text{Nu}_{iZ}^2 + (4/\pi)(1/t_z^+)]^{-1/2}} + \frac{2(H/D)^2}{(1/\text{Bi}_R) + [\text{Nu}_{iR}^2 + (4/\pi)(D/H)^2(1/t_z^+)]^{-1/2}} \right\}^{-1}. \quad (100)$$

Подставляя заданные значения, получаем

$$\bar{T}^+ = \frac{100 - 150}{20 - 150} = \frac{5}{13};$$

$$\frac{H}{D} = 0,5; \quad \text{Bi}_Z = \frac{600(25 \cdot 10^{-3})}{0,6} = 25; \quad \text{Bi}_R = 50;$$

$$\text{Nu}_{iZ}^2 = 6,326; \quad \text{Nu}_{iR}^2 = 8,718; \quad \text{из уравнения (62)}$$

$$t_z^+ = \ln \frac{13}{5} \left\{ \frac{1}{0,04 + [6,326 + (4/\pi)(1/t_z^+)]^{-1/2}} + \frac{0,5}{0,02 + [8,718 + (16/\pi)(1/t_z^+)]^{-1/2}} \right\}^{-1}.$$

Уравнение просто решается с использованием результатов правой части уравнения $1/t_z^+ = 0$ ($\text{Nu}_i = \text{Nu}_\infty$) в качестве начального значения для итераций, а именно:

$t_z^{(0)} = 0,26$ и округленное до 0,2 и рассчитанное повторно, дает

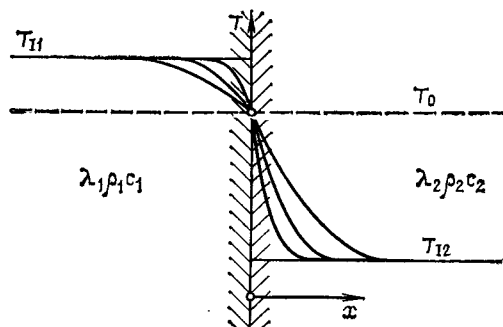


Рис. 7. Сопряженные поля температур для двух полуограниченных контактирующих тел

$t_z^{(1)} = 0,167$, которое при округлении до 0,16 и рассчитанное вновь дает

$t_z^{(2)} = 0,1565$. Это значение при округлении до 0,156 и рассчитанное вновь дает

$t_z^{(3)} = 0,1553$, что позволяет после округления до 0,155 и пересчета получить

$t_z^{(4)} = 0,1550$.

Из этого результата по определению t^+ можно найти время, необходимое для нагрева пищевого продукта в жестяной консервной банке,

$$t = \frac{Z^2}{\kappa} t_z^+ = \frac{(25)^2}{0,16} \cdot 0,155 \text{ с} = 605 \text{ с} \approx 10 \text{ мин.}$$

Проверка этого результата с помощью более строгих аналитических решений (или диаграмм) показывает, что времени, рассчитанного приближенным способом, достаточно, чтобы нагреть консервы до средней температуры около 105°C (вместо 100°C).

Оказывается, что это приемлемое приближение, если учесть неопределенности, закладываемые во входные данные задачи (физические свойства пищевых продуктов, коэффициент теплопроводности и т. д.).

С. Сопряженные температурные поля. Установить с достаточной точностью граничные условия непосредственно на поверхности каждого из находящихся в контакте гомогенных тел не всегда можно, если рассматриваемая область содержит несколько тел с различными физическими свойствами λ, ρ, c . Считая эти свойства постоянными внутри каждого тела, получаем, что уравнение (3а), § 2.4.1 справедливо для каждого тела в отдельности. На границе раздела тел i и $i+1$ температурные поля связаны следующими условиями:

$$T_i = T_{i+1}; \quad (101)$$

$$\lambda_i \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_i = \lambda_{i+1} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{i+1}. \quad (102)$$

Условие (101) не обязательно выполняется на границах раздела реальных твердых тел. Неполный контакт из-за шероховатости поверхности, оксидных пленок или сорбционных слоев может приводить в результате к возникновению дополнительных контактных сопротивлений (см. § 2.4.6).

Простым примером сопряженных температурных полей является температурное поле находящихся в контакте двух полуограниченных тел с различными начальными температурами T_{11} и T_{12} [плоскость $x=0$ — граница раздела (рис. 7)]. Решение имеет вид

$$\frac{T_1 - T_0}{T_{11} - T_0} = -\text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \text{ для } x < 0; \quad (103)$$

$$\frac{T_2 - T_0}{T_{12} - T_0} = +\text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}} \text{ для } x > 0. \quad (104)$$

Температура контакта $T_1(x=0)=T_2(x=0)=T_0$ найдена из этих уравнений с учетом условий на границе раздела (102)

$$T_0 = \frac{T_{I1} + [\sqrt{(\lambda \rho c)_2} / \sqrt{(\lambda \rho c)_1}] T_{I2}}{1 + [\sqrt{(\lambda \rho c)_2} / \sqrt{(\lambda \rho c)_1}]} \quad (105)$$

Температура контакта зависит от величины $\sqrt{\lambda \rho c}$. Она всегда ближе к начальной температуре тела с более высокими значениями $\lambda \rho c$. Максимальные разности температур $T_{I1}-T_0$ и T_0-T_{I2} в телах обратно пропорциональны этой величине

$$\frac{T_{I1}-T_0}{T_0-T_{I2}} = \frac{\sqrt{(\lambda \rho c)_2}}{\sqrt{(\lambda \rho c)_1}} \quad (105a)$$

Поэтому кажется, что дерево теплее (холоднее), чем металл, когда прикасаешься рукой, если оба материала имеют одну и ту же температуру, которая ниже (выше) температуры руки.

Другие примеры сопряженных температурных полей в многослойных плоских стенках или в телах, находящихся в контакте с хорошо перемешиваемой жидкостью конечного объема, можно найти в [1, 2]. Лучшим способом нахождения аналитических решений таких задач является метод преобразования Лапласа.

2.4.4. Плавление и отвердевание

Х. Мартин

Если температура внутри тела проходит точку плавления T_P (индекс P указывает на фазовое превращение), изотермическая поверхность $T=T_P$ подразделяет тело на две области, находящиеся в разных фазовых состояниях и обладающих разными физическими свойствами. Температурные поля в обеих фазах сопряжены (см. п. С, § 2.4.3). Кроме того, положение границы раздела фаз может изменяться со временем. Точные аналитические решения для этих задач известны только для некоторых простых специальных случаев [1]. Для практического применения часто достаточно знать только время, требуемое для полного отвердевания или плавления тела менее интересны подробности, касающиеся поля температур.

Время затвердевания можно рассчитать с помощью простого приближенного метода, если изменение энтальпии твердого слоя мало по сравнению со скрытой энтальпией затвердевания (рис. 1). Предполагается, что жидкость 1 находится в начальный момент времени при температуре фазового превращения T_P .

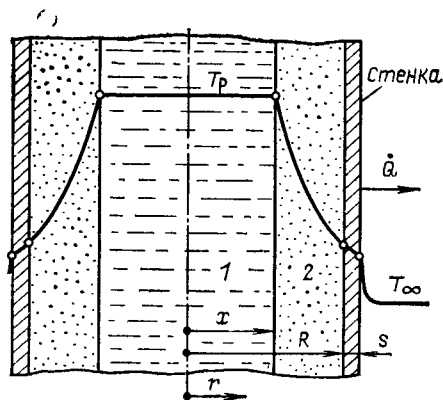


Рис. 1. Отвердевание (плавление) тел простой формы

Баланс энергии для этой системы представим в виде

$$-\dot{Q} \approx \rho_1 \Delta h_{12} \frac{dV_1(x)}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad (1)$$

где x обозначает положение, dx/dt — скорость движения границы раздела жидкости и твердого тела.

Изменение энтальпии в твердом слое 2 в этом уравнении пренебрежимо мало; об этом уже говорилось выше $[c_{P2}(T_P - T_\infty) \ll \Delta h_{12}]$. В этом случае профили температур в твердом слое всегда подобны профилям температур в стационарных процессах теплопроводности [см. уравнение (16), § 2.4.2]. Поток теплоты можно записать в виде

$$\dot{Q} = UA(T_P - T_\infty), \quad (2)$$

где

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{\alpha_i(x)} + \left(\frac{s}{\lambda}\right)_{\text{wall}} + \frac{1}{\alpha_{\text{outside}}} \quad (3)$$

или

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{\alpha_i(x)} + \frac{1}{U_0}.$$

Термическое сопротивление $1/\alpha_i$ как функция положения границы раздела фаз принимает вид

$$\frac{1}{\alpha_i(x)} = \begin{cases} \frac{R}{\lambda_2} \left(1 - \frac{x}{R}\right) & \text{для пластины;} \end{cases} \quad (4a)$$

$$\frac{1}{\alpha_i(x)} = \begin{cases} \frac{R}{\lambda_2} \ln \frac{R}{x} & \text{для цилиндра;} \end{cases} \quad (4b)$$

$$\frac{1}{\alpha_i(x)} = \begin{cases} \frac{R}{\lambda_2} \left(\frac{R}{x} - 1\right) & \text{для сферы.} \end{cases} \quad (4b)$$

Из уравнений (1) — (4) находим зависимость для скорости движения границы раздела фаз dx/dt , которую можно записать в безразмерном виде,

$$\frac{1}{\text{Ph}} = - \left[\frac{1}{\text{Bi}} + \frac{1}{\text{Nu}(x^+)} \right] x^{+n} \frac{dx^+}{dt^+}. \quad (5)$$

Безразмерные величины, входящие в (5), определены ниже. Число фазового перехода

$$\text{Ph} = \frac{\rho_1 \Delta h_{12}}{\rho_2 c P_2 (T_P - T_\infty)}; \quad (6)$$

число Био

$$\text{Bi} = \frac{U_0 R}{\lambda_2}; \quad (7)$$

безразмерное местоположение границы раздела

$$x^+ = x/R; \quad (8)$$

безразмерное время (число Фурье)

$$t^+ = \frac{\lambda_2 t}{\rho_2 c P_2 R^2}; \quad (9)$$

безразмерное сопротивление слоя $1/\text{Nu}(x^+)$ следует из уравнений (4a) — (4b)

$$\frac{1}{\text{Nu}(x^+)} = \begin{cases} 1 - x^+, & n=0 \text{ для пластины;} \end{cases} \quad (10a)$$

$$\frac{1}{\text{Nu}(x^+)} = \begin{cases} -\ln(x^+), & n=1 \text{ для цилиндра;} \end{cases} \quad (10b)$$

$$\frac{1}{\text{Nu}(x^+)} = \begin{cases} \frac{1}{x^+} - 1 & n=2 \text{ для сферы.} \end{cases} \quad (10b)$$

Объединяя уравнения (5) с (10a) — (10b), в предельных случаях $x^+=1$ и $x^+=0$ получаем время затвердевания t_s^+ .

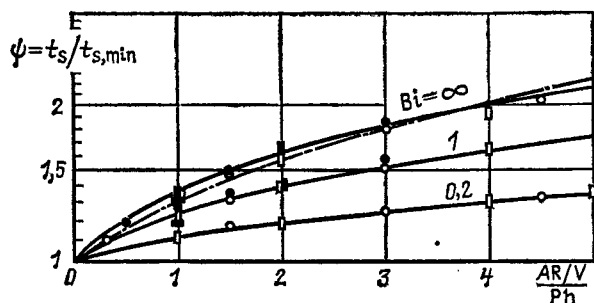


Рис. 2. Поправка для расчета реальных времен отвердевания по минимальным значениям, полученным согласно уравнению (11) квазистатического решения: штрихпунктирная кривая — решение Ньюмена для пластины $Bi = \infty$; сплошные кривые — эмпирическая аппроксимация уравнения (15); темные точки — численные данные Линга для пластины, цилиндра и сферы соответственно; светлые — численные данные

Так как мы пренебрегаем изменением энтальпии стенки, этот расчет дает минимальное время затвердевания $t_{s,min}^+$ (квазистатическое решение)

$$t_{s,min}^+ = \frac{Ph}{2(n+1)} \left(1 + \frac{2}{Bi} \right). \quad (11)$$

Этот же метод расчета можно использовать для плавления (индекс 1 для твердой фазы, индекс 2 — для жидкости), если в слое жидкости нет естественной конвекции.

Действительное время затвердевания всегда больше $t_{s,min}$. Его можно рассчитать, используя соотношение

$$t_s = \psi(Ph, Bi, n) t_{s,min}. \quad (12)$$

Функцию ψ можно определить из точного аналитического решения только при $n=0$ (пластина) и $Bi = \infty$ [1]

$$\psi(Ph, \infty, 0) = \frac{1}{2Phv^2}, \quad (13)$$

где v находят из соотношения

$$1/Ph = \sqrt{\pi} v e^{v^2} \operatorname{erf} v. \quad (14)$$

Значения ψ для других n и Bi можно найти только с помощью численных расчетов (конечно-разностный метод). Если мы построим зависимость результатов численных расчетов для пластины [16], цилиндра и сферы [16, 17] в виде функции ψ от $(n+1)/Ph$ при $n+1 = AR/V$, то увидим, что все эти геометрические тела можно описать одной кривой с достаточной степенью точности (рис. 2). На рис. 2 штрихпунктирной линией показано решение уравнений (13) и (14).

Сплошные линии описываются эмпирически уравнением

$$\psi\left(\frac{AR/V}{Ph}, Bi\right) \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Bi}{1+Bi} \right)^{2/3} \times \left(\sqrt{1 + 2 \frac{AR/V}{Ph}} - 1 \right). \quad (15)$$

Погрешность при использовании уравнения (15) составляет меньше $\pm 5\%$ по сравнению с решением (13), (14) для $0 < 1/Ph < 6$.

Время затвердевания, рассчитанное по уравнению (12) и с использованием (11) и (15), находится в очень хорошем согласии с численными расчетами [17] для цилиндров и сфер.

Пример. Для замерзающей воды с температурой охлаждающей среды $T = -18^\circ\text{C}$ число фазового перехода

$$Ph = \frac{(1000 \text{ кг/м}^3) (333 \text{ кДж/кг})}{(917 \text{ кг/м}^3) [2,05 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{K)}] [0 - (-18)] \text{ K}} = 9,84.$$

Отсюда находим $1/Ph = 0,102$. Поэтому время замерзания можно рассчитать по уравнению (11). Поправка ψ дает меньше 10% для цилиндра и меньше 5% для пластины при $Bi \rightarrow \infty$. Время, требуемое, чтобы заморозить пластину толщиной X (с высоким коэффициентом теплоотдачи на одной стороне),

$$t_s, \min(Bi \rightarrow \infty) = \frac{\rho_2 c_{p2}}{\lambda_2} \frac{\rho_1 \Delta h_{i2}}{\rho_2 c_{p2} (T_P - T_\infty)} \frac{1}{2} X^2.$$

Подставляя сюда приведенные выше значения физических свойств и температуры, получаем

$$t_s, \min = 4,2 X^2 \text{ для } T_\infty = -18^\circ\text{C}, U_0 \gg \lambda_2 X,$$

где X измерено в миллиметрах, t_s в секундах. Итак, для слоя толщиной 10 мм требуется по крайней мере 7 мин (420 с) для отвердевания. Однако образование 100 мм слоя льда занимает около 12 ч ($4,2 \cdot 10^4$ с).

Можно показать, что числа фазового перехода Ph для металлов значительно меньше. Согласно [18] при T_∞ (или $T_{\text{wall}} = 80^\circ\text{C}$: эти числа равны:

Металл	Ph	1/Ph	Металл	Ph	1/Ph
Олово	1,54	0,65	Никель	0,35	2,86
Цинк	0,77	1,30	Сталь (0,1% C)	0,33	3,03

В этих случаях поправки ψ для минимального времени затвердевания могут быть значительно больше. Однако из-за высокой теплопроводности металлов число Био зачастую бывает очень низким и время затвердевания при этом стремится к своему минимальному значению.

2.4.5. Периодические изменения температуры

Х. Мартин

Другим тепловым граничным условием, которое часто наблюдается как в естественных, так и в инженерных системах, является периодическое изменение температуры окружающей среды. Дневные и сезонные изменения интенсивности солнечной радиации на почве или зданиях, периодические изменения температуры в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания, включение и выключение температурного контроля термостатов и периодические тепловые потоки в регенераторах — вот примеры граничных условий этого рода.

Периодическое изменение температуры окружающей среды можно представить в виде простого гармонического колебания около среднего значения $\bar{T}$ с амплитудой

$$T_{\infty, \max} - \bar{T} \\ T_{\infty}(t) = \bar{T} + (T_{\infty, \max} - \bar{T}) \sin(\omega t). \quad (1)$$

Если это граничное условие сохраняется в продолжение достаточно большого числа периодов ($t_P = 2\pi/\omega \gg t_P$, температуры внутри тела также начинают испытывать периодические изменения

$$T(x, t) = \bar{T} + (T_{\infty, \max} - \bar{T}) \hat{A}(x) \sin[\omega t + \varphi(x)]. \quad (2)$$

Амплитуда $\hat{A}$ и фаза φ этих постоянных температурных колебаний являются функциями безразмерной координаты x^+ , числа Био и модуля M

$$M = \left(\frac{\omega}{2\kappa} R^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\left(\frac{\pi \rho c_P}{t \rho \lambda} \right)} R, \quad (3)$$

который представляет собой квадратный корень из обратного числа Фурье, построенного при помощи $t_P/\pi = 2/\omega$ в качестве характерного времени. При низких значениях M , т. е. при медленных изменениях температуры окру-

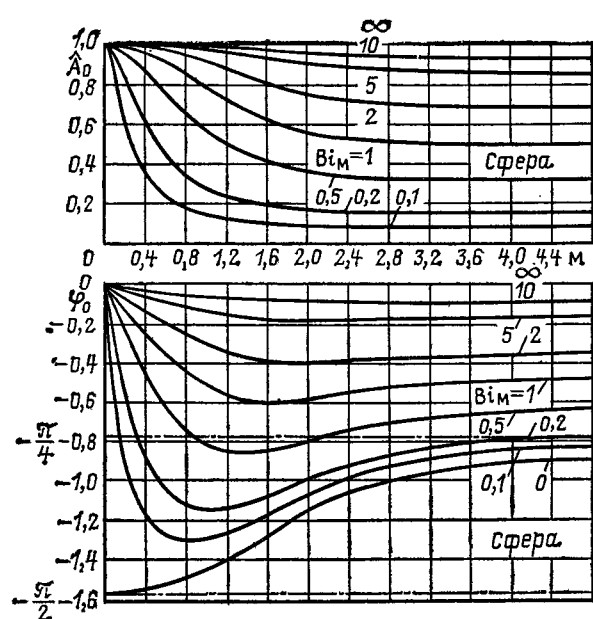
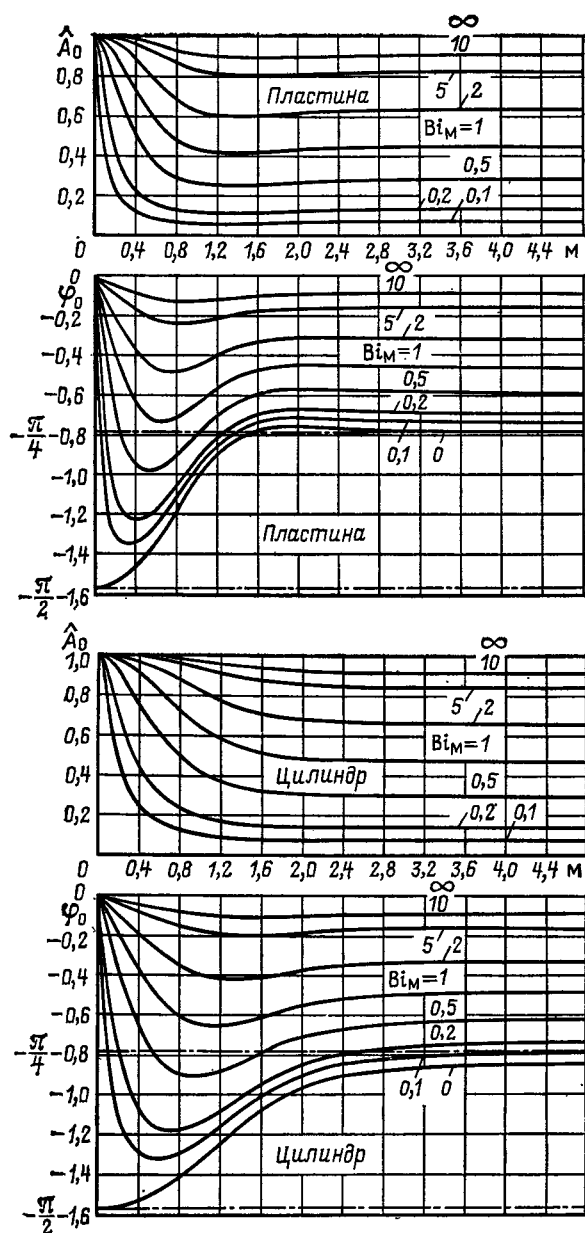


Рис. 1. Амплитуда и фаза установившихся колебаний температуры у поверхности пластины, цилиндра и сферы для различных чисел Bi

$$\varphi(x^+, M, Bi) = \arctg \left(\frac{F_I G_R - F_R G_I}{F_R G_R + F_I G_I} \right). \quad (5)$$

Значения символов F_R , $F_I G_R$ и G_I приведены в табл. 1.

На рис. 1 приведены зависимости амплитуд и фаз на поверхности $x^+=1$ от M , параметрами выбрано число $Bi_M = Bi/M = (\alpha/\lambda) \sqrt{2\kappa/\omega}$.

На рис. 2 и 3 приведены $\hat{A}_c$ и φ_c , амплитуды и фазы в центре тела.

Для больших значений Mx^+ стремится к полуграниченному телу, уравнения (4) и (5) можно переписать в более простой форме, если ввести новую координату

$$\eta = M(1-x^+) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{2\kappa}\right)} y \quad (6)$$

($y=0$ на поверхности),

$$\hat{A}(\eta, Bi_M) = \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{1+2/Bi_M+2/Bi_M^2}}; \quad (7)$$

$$\varphi(\eta, Bi_M) = -\left(\eta + \arctg \frac{1}{1+Bi_M}\right). \quad (8)$$

При граничном условии (1) направление теплового потока изменяется после каждого полупериода. Мгновенная плотность теплового потока, так же как температура, следует гармоническим колебаниям. Интегрирование по

жающей среды (длинный период $t_p \gg \pi R^2/\kappa$), амплитуда $\hat{A}$ близко приближается к единице, фаза — к нулю (фазовые задержки отсутствуют).

При больших M , т. е. при быстрых изменениях температуры окружающей среды, амплитуда A уменьшается от поверхности ($x^+=1$) по направлению к центру тела ($x^+=0$). В том же направлении увеличивается отрицательная фаза колебания (по ее абсолютному значению). Для достаточно больших значений M только маленький слой вблизи поверхности тела следует за колебаниями внешней среды.

Для пластины, цилиндра и сферы можно дать в обобщенном виде аналитические выражения для амплитуды и фазы

$$\hat{A}(x^+, M, Bi) = \left[\frac{F_R^2(Mx^+) + F_I^2(Mx^+)}{G_R^2(M, Bi) + G_I^2(M, Bi)} \right]^{1/2}; \quad (4)$$

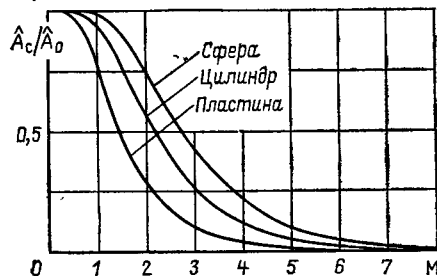


Рис. 2. Амплитуды колебания в центре тела

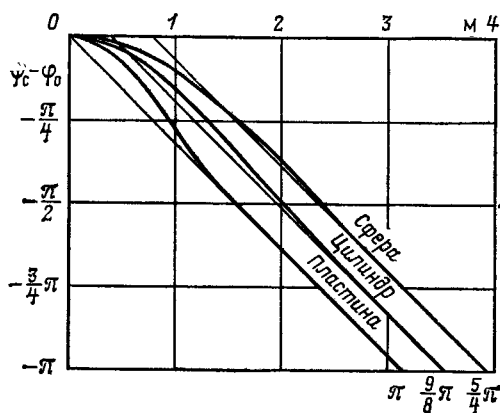


Рис. 3. Фазы колебания в центре тела

всему полупериоду дает количество теплоты, которое запасается в течение этого временного интервала в виде внутренней энергии тела и отдается окружающей среде в течение следующего полупериода,

$$Q_{t_{p/2}} = \int_{t=0}^{t_{p/2}} \dot{Q}(t) dt. \quad (9)$$

После некоторых алгебраических преобразований находим количество теплоты¹

$$Q_{t_{p/2}} = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{\kappa t_p}} \sqrt{\frac{(F'_R)^2 + (F'_I)^2}{G_R^2 + G_I^2}} A \frac{2}{\pi} \times (T_{\infty, \max} - \bar{T}) \frac{t_p}{2}. \quad (10)$$

Коэффициент теплопередачи U находим из выражения

$$Q_{t_{p/2}} = U t_{p/2} A \Delta \bar{T} \frac{t_p}{2}. \quad (11)$$

¹ $F'_R = [dF_R(Mx^+) / d(Mx^+)]_{x^+=1}$ и $F'_I = [dF_I(Mx^+) / d(Mx^+)]_{x^+=1}$ (см. табл. 1).

Здесь $\Delta \bar{T}$ — осредненная по времени разность температур, полученная при интегрировании уравнения (1),

$$\Delta \bar{T} = \frac{1}{t_{p/2}} \int_0^{t_{p/2}} [T_{\infty}(t) - \bar{T}] dt = \frac{2}{\pi} (T_{\infty, \max} - \bar{T}). \quad (12)$$

Коэффициент теплопередачи находим, сравнивая уравнения (10) и (11),

$$U t_{p/2} = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{\kappa t_p}} \sqrt{\frac{(F'_R)^2 + (F'_I)^2}{G_R^2 + G_I^2}}. \quad (13)$$

Второй квадратный корень в правой части уравнения (13) является функцией M и Bi_M (см. табл. 1).

Для низких значений Bi_M эта функция асимптотически приближается к самим значениям Bi_M и коэффициент теплопередачи $U t_{p/2}$ стремится к значению коэффициента теплоотдачи (внутренним сопротивлением тела пренебрегаем)

$$\lim_{Bi_M \rightarrow 0} U t_{p/2} = \alpha. \quad (14)$$

В другом предельном случае (при $Bi_M \rightarrow \infty$) $U t_{p/2}$ стремится к значению коэффициента переноса теплоты α_i , который можно представить в безразмерном виде с использованием $\sqrt{\kappa t_p / \pi}$ в качестве характерной длины,

$$\lim_{Bi_M \rightarrow \infty} \frac{U t_{p/2}}{\lambda} \sqrt{\frac{\kappa t_p}{\pi}} = \frac{\alpha_i}{\lambda} \sqrt{\frac{\kappa t_p}{\pi}} = \sqrt{\frac{(F'_R)^2 + (F'_I)^2}{F_R^2 + F_I^2}}. \quad (15)$$

На рис. 4 приведена зависимость

$$Nu_{i, M} = \frac{\alpha_i}{\lambda} \sqrt{\frac{\kappa t_p}{\pi}} = \alpha_i \sqrt{\frac{t_p}{\pi \lambda \rho c}} \quad (16)$$

от M для пластины, цилиндра и сферы. Для больших значений M величина $Nu_{i, M}$ стремится к постоянному значению

$$\lim_{M \rightarrow \infty} Nu_{i, M} = \sqrt{2}, \quad (17)$$

тогда как для малых значений M величина $Nu_{i, M}$ становится прямо пропорциональна M ,

$$\lim_{M \rightarrow 0} \left(\frac{Nu_{i, M}}{M} \right) \frac{V}{AR} = \begin{cases} 2 & \text{для пластины;} \\ 1 & \text{для цилиндра;} \\ 2/3 & \text{для сферы.} \end{cases} \quad (18)$$

Таблица 1. Периодическое изменение температуры: функции для расчета амплитуды и фазы стационарных осцилляций в пластине, цилиндре и сфере соответственно (таблицы и графики функций ber и bei — функции Кельвина можно найти в [7, 8])

$F_R(M\xi)$	$\cosh(M\xi) \cos(M\xi)$	$\text{ber}(\sqrt{2}M\xi)$	$\frac{\sinh(M\xi)}{\xi} \cos(M\xi)$
$F_I(M\xi)$	$\sinh(M\xi) \sin(M\xi)$	$\text{bei}(\sqrt{2}M\xi)$	$\cosh(M\xi) \frac{\sin(M\xi)}{\xi}$
$\left. \frac{dF_R}{d(M\xi)} \right _{\xi=1}$	$\sinh M \cos M - \cosh M \sin M$	$\text{ber}_1(\sqrt{2}M) + \text{bei}_1(\sqrt{2}M) [= \sqrt{2} \text{ber}'(\sqrt{2}M)]$	$\left(\cosh M - \frac{\sinh M}{M} \right) \cos M - \sinh M \sin M$
$\left. \frac{dF_I}{d(M\xi)} \right _{\xi=1}$	$\cosh M \sin M + \sinh M \cos M$	$\text{bei}_1(\sqrt{2}M) - \text{ber}_1(\sqrt{2}M) [= \sqrt{2} \text{bei}'(\sqrt{2}M)]$	$\sinh M \sin M + \left(\cos M - \frac{\sin M}{M} \right) \cosh M$
$G_R(M, Bi) \equiv \left[F_R(M\xi) + \frac{M}{Bi} \frac{dF_R}{d(M\xi)} \right]_{\xi=1}$		$G_I(M, Bi) \equiv \left[F_I(M\xi) + \frac{M}{Bi} \frac{dF_I}{d(M\xi)} \right]_{\xi=1}$	

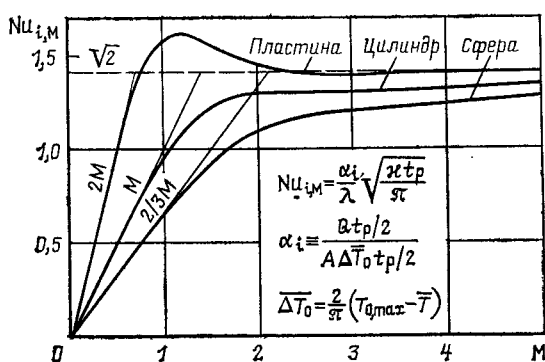


Рис. 4. Числа Нуссельта, рассчитываемые по коэффициенту переноса теплоты α_i внутри тела при установившихся колебаниях температуры

Для пластины $Nu_{i,M}$ имеет максимум при $M \approx 1,2$. Для данного периода t_p существует определенная толщина стенки $2X_M = 1,2 = \sqrt{\kappa t_p / \pi}$ с максимальной емкостью накопления теплоты. Эта толщина составляет около 80 мм для периода $t_p = 2$ ч и огнеупорного кирпича с $\kappa = 16 \cdot 10^{-4}$ м²/ч (см. [19]).

На практике периодические граничные условия будут отличаться от простого гармонического колебания, описываемого уравнением (1). В любом случае их можно представить на основе Фурье-анализа в виде суммы гармонических колебаний. Тогда уравнения (2) — (5) применяются для каждой гармоники разложения Фурье и результирующее изменение температуры находят сложением этих частных решений.

2.4.6. Термическое контактное сопротивление

Т. Ф. Ирвайн мл.

А. Введение. Когда две поверхности находятся в контакте (рис. 1), они остаются разделенными из-за шероховатостей поверхности. Газ или жидкость также могут заполнять пространство между поверхностями, и если текущая в промежутке жидкость имеет более низкую теплопроводность, чем материал поверхности, возникает контактное сопротивление.

На рис. 1 показано также температурное распределение, которое встречается, когда причиной большого температурного градиента через маленький зазор, разделяющий два граничных тела, является контактное сопротивление.

Ниже перечислены факторы, от которых зависит контактное сопротивление:

- 1) давление, с которым поверхности прижимаются друг к другу;
- 2) теплопроводность среды в зазоре (для жидкости);
- 3) теплопроводность газа, находящегося в промежутке между телами, а также характеристики, которые обуславливают дополнительный теплообмен излучением между поверхностями;
- 4) шероховатость поверхности;
- 5) твердость элементов шероховатости на поверхности, которая определяет деформации, возникающие под действием приложенного давления;
- 6) средняя температура у границы раздела тел;
- 7) при низких давлениях отношение средней длины свободного пробега молекул газа к расстоянию, разделяющему два тела.

Таким образом, физическая ситуация сложна, и на разработку общего подхода, который будет удобным и

практичным для инженерных расчетов, нужно затратить много усилий.

В. Термическое контактное сопротивление. Для описания термических условий на границе раздела полезно знать U_i — термическую проводимость контакта, которая определяется из соотношения $q = U_i \Delta T_i$. (1)

Автор [1] проанализировал большое число экспериментов, описанных в литературе. Изучались контакты следующих материалов: железо, сталь, нержавеющая сталь, алюминий, латунь, бронза, орудийная бронза, уран. В качестве среды, находящейся в зазоре, рассматривались воздух, аргон, гелий, вода, глицерин, смазочное масло и парафин. Интервал термической проводимости контакта составлял от 340 до 230 000 Вт/(м²·К), давления контакта изменялись от 0,017 до 138 МПа, средние температуры контакта от 27 до 316 °С, коэффициент теплопроводности материалов от 22 до 216 Вт/(м·К), коэффициенты теплопроводности среды в зазоре изменялись от 0,017 до 0,62 Вт/(м·К) твердость по Мейеру — от 68,9 до 2400 МПа и средняя шероховатость поверхности от 0,08 до 838 мкм. Корреляция, полученная в [1], приведена на рис. 2.

Термическая проводимость в месте контакта включена в число Нуссельта, отложенного по оси ординат, в которое также входят эффективная толщина зазора l и эквивалентный коэффициент теплопроводности среды λ_f , находящейся в зазоре. На оси абсцисс отложено отношение безразмерной величины зазора B к безразмерному коэффициенту теплопроводности K . Параметром на рисунке является безразмерное сжатие C .

Так как все величины, используемые на рис. 2, безразмерны, для расчета термической контактной проводимости можно использовать любой согласованный набор единиц измерения.

Для того чтобы с помощью рис. 2 рассчитать термическую проводимость контакта, следует установить или оценить следующие величины:

- 1) материал двух поверхностей;
- 2) род среды, находящейся в зазоре;
- 3) температуры на границе раздела тел T_1, T_2 ;
- 4) среднеквадратичное значение RMS шероховатости поверхностей (l_1, l_2);
- 5) среднюю температуру контакта $\bar{T}_i = (T_1 + T_2)/2$;
- 6) давление контакта P ;
- 7) твердость по Мейеру M ;
- 8) полную площадь поверхности A , находящуюся в контакте (одна сторона);
- 9) полную излучательную способность обеих поверхностей ϵ_1, ϵ_2 , если среда в зазоре прозрачна для теплового излучения;
- 10) коэффициенты теплопроводности материалов поверхностей λ_1, λ_2 .

Соотношения для расчета величин, приведенных на рис. 2, даны ниже.

Безразмерное сжатие C

$$C = (P/M)^{1/2}, \quad (2)$$

где P — постоянное давление; M — твердость по Мейеру более мягкой поверхности. Информация о твердости по Мейеру, применяющаяся в этих расчетах, детально обсуждается в [3], где рассмотрены влияние длительности воздействия приложенного давления и средней температуры на границе раздела тел на значение, используемое для расчета M .

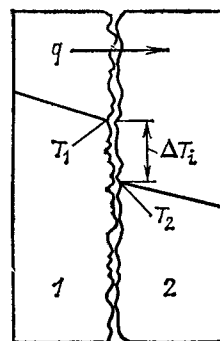


Рис. 1. Контакт двух тел

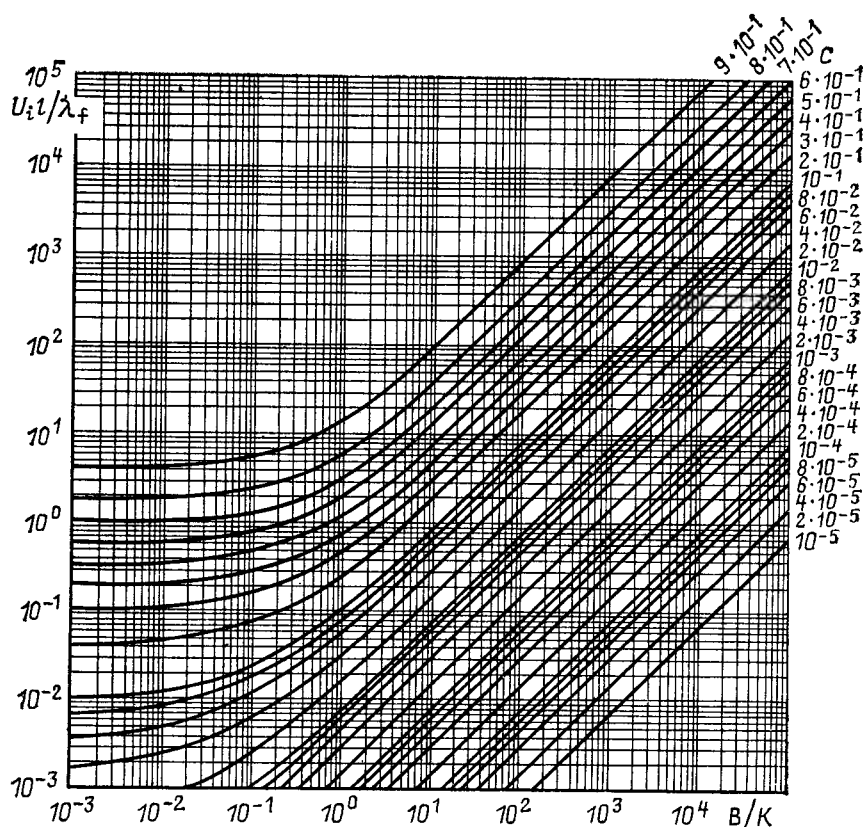


Рис. 2. Зависимость для расчета термической контактной проводимости (согласно [2])

В качестве первой аппроксимации, когда не учитывается влияние времени и температуры, можно использовать значения, приведенные в табл. 1 [3].

Толщина зазора l . Если l_1 и l_2 — среднеквадратичные значения шероховатости поверхности в микронах, то

$$l = 3,56(l_1 + l_2), \text{ если } l_1 + l_2 < 7 \text{ мкм}; \quad (3)$$

$$l = 0,46(l_1 + l_2), \text{ если } l_1 + l_2 > 7 \text{ мкм}. \quad (4)$$

Безразмерный зазор B . Величину B можно рассчитать, зная безразмерное сжатие и толщину зазора, с помощью следующего соотношения:

$$B = 0,335 C^{0,315} (A^{118} / \rho_0^{137}), \quad (5)$$

где A — полная площадь поверхности контакта (одна сторона).

Эквивалентный коэффициент теплопроводности λ_f . Если в зазоре между телами находится жидкость,

Таблица 1. Твердость по Мейеру некоторых материалов

Материал	М. 10^3 МПа
Стальное литье	3,52
Малоуглеродистая сталь	1,64
Латунь	1,18
Алюминий	1,04
Чистый алюминий	0,32

то

$$\lambda_f = \lambda_0. \quad (6)$$

Если в зазоре находится газ, прозрачный для теплового излучения, и если отношение среднего значения свободного пробега молекул l_0 к толщине зазора меньше 0,1, то

$$\lambda_f = \lambda_0 + \frac{4\sigma l e_1 e_2 \bar{T}_i^3}{e_1 + e_2 - e_1 e_2}, \quad (7)$$

где $\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) (постоянная Стефана — Больцмана).

Замечание. Случай $l_0/l > 0,1$ рассмотрен в работе [1]. Если излучательные способности поверхностей e_1 и e_2 не известны, следует предположить, что они равны единице, чтобы получить контакт максимальной термической проводимости. Минимальную термическую проводимость можно получить, предположив, что $\lambda_f = \lambda_0$.

Безразмерный коэффициент теплопроводности

$$K = \lambda_f (\lambda_1 + \lambda_2) / (2\lambda_1 \lambda_2), \quad (8)$$

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности твердых тел, находящихся в контакте; их можно оценить, зная среднюю температуру зазора $\bar{T}_i$.

Когда все упомянутые выше величины определены, рассчитывают значение отношения B/K . На рис. 2 на оси абсцисс находится точка, соответствующая этому значению. Затем, используя в качестве параметра на рисунке соответствующее значение C , с ординаты считывается величина $U_i l / \lambda_f$, зная которую, можно рассчитать тепловую проводимость контакта. Ниже этот метод проиллюстрирован численным примером.

С. Численный пример

Данные

1. Материалы — алюминий — алюминий.
 2. Среда в зазоре — воздух.
 3. Температура на границе раздела тел (оценка): $T_1 = 80^\circ\text{C}$; $T_2 = 66^\circ\text{C}$.
 4. Среднеквадратичная шероховатость $l_1 = l_2 = 1,65$ мкм.
 5. Средняя температура контакта $\bar{T}_i = 73^\circ\text{C}$.
 6. Давление в месте контакта $P = 0,7$ МПа.
 7. Твердость по Мейеру (см. табл. 1) $M = 1,04 \cdot 10^3$ МПа.
 8. Площадь поверхности контакта $A = 6,45$ см² = $6,45 \cdot 10^{-4}$ м².
 9. Излучательная способность алюминия $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,05$.
- Расчет
Безразмерное сжатие C
Из уравнения (2)

$$C = \left(\frac{P}{M} \right)^{1/2} = \left(\frac{0,7}{1,04 \cdot 10^3} \right)^{1/2} = 2,6 \cdot 10^{-2}.$$

Толщина зазора l

Так как $l_1 + l_2 = 3,3 < 7$ мкм, согласно уравнению (3)
 $l = 3,56 (3,3 \cdot 10^{-6}) = 1,17 \cdot 10^{-5}$ м.

Безразмерный зазор B

Из уравнения (5)

$$B = 0,335 C^{0,315} (A^{1/2}/l)^{0,137} = 0,335 (2,6 \cdot 10^{-2})^{0,315} [(6,45 \cdot 10^{-4})^{1/2}/1,17 \cdot 10^{-5}]^{0,137} = 1,25 \cdot 10^{-2}.$$

Эквивалентный коэффициент теплопроводности λ_f При $T = 73^\circ\text{C}$ $\lambda_0 = 0,029$ Вт/(м·К). Тогда из уравнения (7)

$$\lambda_f = 0,029 + \frac{4 (5,669 \cdot 10^{-8}) \cdot 0,05 \cdot 0,05 \cdot (346)^3}{0,0975} = 0,029 + 2,8 \cdot 10^{-6} = 0,029 \text{ Вт/(м·К)}.$$

Безразмерный коэффициент теплопроводности K
 Для алюминия при 73°C $\lambda_1 = \lambda_2 = 138,5$ Вт/(м·К).
 Тогда из уравнения (8)

$$K = \frac{0,029 \cdot 277}{2 \cdot 138,5 \cdot 138,5} = 2,1 \cdot 10^{-4}.$$

Поэтому соответствующие переменные (см. рис. 2) имеют значения $B/K = 59,5$; $C = 2,6 \cdot 10^{-2}$.

Из рис. 2 имеем

$$U_i/\lambda_f = 1,2,$$

откуда

$$U_i = \frac{1,2 \cdot 0,029}{1,17 \cdot 10^{-5}} = 2974 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Д. Обсуждение. Выше изложен метод оценки термической проводимости контакта для случаев, которые часто встречаются на практике. Из-за модели, выбранной в [1], и разброса экспериментальных данных, на которых она основывается, можно ожидать, что средняя разница между реальными и рассчитанными значениями тепловых проводимостей в месте контакта может достигать приблизительно 25%. Однако для произвольного единичного расчета данные могут различаться в 2 раза.

Известны отдельные работы, в которых описываются другие случаи термического сопротивления в месте контакта: контактные сопротивления между тонкими расщепленными пластинами [4, 5]; для слоев, которые скрепляются болтами или заклепками [6]; для поверхностей, контактирующих в вакууме [7, 8].

Раздел 2.5

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ОДНОФАЗНОЙ КОНВЕКЦИИ¹

2.5.1. Вынужденная конвекция в каналах

В. Гнилинский

А. Введение. При движении жидкостей с малыми скоростями отдельные их частицы движутся упорядоченно вдоль параллельных линий. Такой тип течения называется ламинарным. Если на входе в канал профиль скорости однороден, то по мере движения жидкости вниз по трубе профиль изменяется. На достаточном удалении от входа форма профиля перестает изменяться. Так, при течении в трубе или между параллельными пластинами форма профиля скорости становится параболической.

По мере увеличения скорости движения жидкость перестает двигаться вдоль параллельных линий, появляются вихри, приводящие к полному перемешиванию жидкости. Такой тип течения называется турбулентным. Число Рейнольдса, при котором происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному, называется критическим. Критическое значение числа Рейнольдса в трубах изменяется в пределах 2100—2300. В протяженных прямоугольных и кольцевых каналах переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при числе Рейнольдса около 2100, если рассчитывать его по характерному геометрическому размеру, равному гидравлическому диаметру канала.

При числах $Re > 10^4$ течение является полностью

турбулентным. В пределах между нижним и верхним граничными числами Рейнольдса лежит зона переходного течения (от ламинарного к турбулентному). На граничные значения чисел Рейнольдса оказывают влияние форма входа, начальные возмущения в жидкости, шероховатость стенок канала и другие факторы.

Если температура стенок канала отлична от температуры жидкости, между стенкой и жидкостью происходит обмен теплотой и по мере движения в жидкости развивается профиль температуры. На достаточном удалении от начала обогрева или охлаждения профиль температуры становится полностью развитым, вследствие чего постоянным становится и коэффициент теплоотдачи. Интенсивность теплоотдачи всегда выше при турбулентном течении.

В. Определение коэффициента теплоотдачи. Теплоотдачу между стенкой канала и жидкостью, движущейся относительно стенки, можно рассчитать в любом сечении канала, используя местный коэффициент теплоотдачи, определяемый следующим образом:

$$\alpha_x = \dot{q}_x / (T_w - T_b)_x. \quad (1)$$

Локальный коэффициент теплоотдачи необходим для расчета аксиального изменения температуры стенки или теплового потока. В инженерных задачах часто более важно рассчитать общее количество теплоты, передаваемой на участке канала или во всем канале, используя средний коэффициент теплоотдачи, определяемый

¹ Пер. с англ. Н. В. Медведской.

следующим образом:

$$\alpha = \dot{q} / \Delta T_{LM}. \quad (2)$$

Здесь средний логарифмический температурный напор

$$\Delta T_{LM} = \frac{(T_w - T_{b, in}) - (T_w - T_{b, out})}{\ln [(T_w - T_{b, in}) / (T_w - T_{b, out})]}, \quad (3)$$

где $T_{b, in}$, $T_{b, out}$ — среднemasовые температуры жидкости соответственно на входе и выходе; T_w — температура стенки канала. Значение $T_{b, out}$ можно рассчитать с помощью следующего соотношения:

$$T_{b, out} = T_{b, in} + \dot{Q} / (\dot{M} c_p). \quad (4)$$

С. Теплообмен при ламинарном течении. Задачи, связанные с гидродинамикой и теплообменом при ламинарном течении, являлись предметом аналитических исследований в течение многих лет. В [1] собраны имеющиеся в литературе аналитические решения задач теплообмена при ламинарной вынужденной конвекции жидкости в круглых и некруглых трубах при различных граничных условиях. Поэтому в последующих разделах представлены только наиболее интересные с инженерной точки зрения решения.

Гладкие прямые трубы. 1. *Гидродинамическое развитое течение жидкости в термическом начальном участке.* Хорошо известная задача Гретца — Нуссельта о теплоотдаче при течении несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами в круглой трубе, с постоянной по длине температурой стенки и полностью развитым ламинарным профилем скорости решалась численно несколькими авторами. Для локальных чисел Нуссельта получены две зависимости

$$Nu_{xT} = 1,077 \sqrt[3]{Pe \frac{d}{x}} \quad \text{для } Pe \frac{d}{x} > 10^3; \quad (5)$$

$$Nu_{xT} = 3,66 \quad \text{для } Pe \frac{d}{x} < 10^3. \quad (6)$$

Соотношения для средних чисел Нуссельта в трубе длиной L имеют вид

$$Nu_T = 1,61 \sqrt[3]{Pe \frac{d}{L}} \quad \text{для } Pe \frac{d}{L} > 10^3; \quad (7)$$

$$Nu_T = 3,66 \quad \text{для } Pe \frac{d}{L} < 10^3. \quad (8)$$

Наложение двух решений для средних чисел Нуссельта, полученных в [2], дает достаточно хорошие результаты для большинства инженерных задач. Это соотношение имеет вид

$$Nu_T = \sqrt[3]{3,66^3 + 1,61^3 Pe \frac{d}{L}}. \quad (9)$$

Результаты, полученные с помощью уравнения (9), несколько отличаются от уравнения, полученного в [3],

$$Nu_T = 3,66 + \frac{0,19 [Pe (d/L)]^{0,8}}{1 + 0,117 [Pe (d/L)]^{0,467}}. \quad (10)$$

Зависимости (9) и (10) можно использовать при ламинарном течении газов и жидкостей в диапазоне $Pe (d/L)$ от 0,1 до 10^4 . При $Pe (d/L) < 0,1$ необходимо принимать во внимание влияние продольной теплопроводности. Значения входящих в эти соотношения параметров, описывающих физические свойства, определяются по средней температуре жидкости

$$T_b = (T_{b, in} + T_{b, out}) / 2. \quad (11)$$

Задача для заданного постоянного теплового потока на стенке рассмотрена в [1]. Для локальных чисел Нус-

сельта получены следующие зависимости:

$$Nu_{xH} = 1,302 \sqrt[3]{Pe \frac{d}{L}} \quad \text{для } Pe \frac{d}{L} > 10^4; \quad (12)$$

$$Nu_{xH} = 4,36 \quad \text{для } Pe \frac{d}{L} < 10^4. \quad (13)$$

Соотношения для средних чисел Нуссельта имеют вид

$$Nu_H = 1,953 \sqrt[3]{Pe \frac{d}{L}} \quad \text{для } Pe \frac{d}{L} > 10^3; \quad (14)$$

$$Nu_H = 4,36 \quad \text{для } Pe \frac{d}{L} < 10^3. \quad (15)$$

2. *Гидродинамически развивающееся течение в термическом начальном участке (гидродинамический и термический начальный участок).* Ламинарное течение развивается очень быстро. Только в очень коротких трубах ($d/L > 0,1$) и в зависимости от числа Прандтля средние числа Нуссельта для термически и гидродинамически развивающегося течения отличаются от значений, рассчитанных с помощью уравнений (9) и (10). В [1] приведены численные значения средних значений чисел Нуссельта для этой области. Для случая течения в коротких трубах эти числа описываются уравнением, полученным в [4] для термически и гидродинамически развивающегося течения на плоской пластине. Преобразуя это уравнение для течения в трубе, получаем

$$Nu = 0,664 \frac{1}{\sqrt[6]{Pr}} \sqrt[3]{Pe \frac{d}{L}}. \quad (16)$$

Для инженерных целей рекомендуется использовать любое из уравнений (9), (10) или (16) в коротких трубах для расчета теплообмена, дающих более высокие числа Нуссельта.

Параллельные пластины. Канал, образованный параллельными пластинами, является предельным случаем прямоугольных и концентрических кольцевых каналов. Аналитические решения для этих каналов и большого набора граничных условий содержатся в [1], и ниже рассмотрены лишь несколько простых случаев.

1. *Гидродинамически развитое течение в начальном термическом участке.* Теплообмен при полностью развитом ламинарном течении жидкости с постоянными физическими свойствами в канале, образованном параллельными пластинами, температура стенок которых постоянна, можно рассчитывать с помощью приведенных ниже соотношений.

Для локальных чисел Нуссельта $Nu = \alpha s / \lambda$, где s — расстояние между пластинами, справедливы следующие зависимости:

$$Nu_{xT} = 0,979 \sqrt[3]{Pe \frac{s}{x}} \quad \text{для } Pe \frac{s}{x} > 10^3; \quad (17)$$

$$Nu_{xT} = 3,78 \quad \text{для } Pe \frac{s}{x} < 10^3. \quad (18)$$

Средние значения чисел Нуссельта в каналах длиной L определяются следующим образом:

$$Nu_T = 1,468 \sqrt[3]{Pe \frac{s}{L}} \quad \text{для } Pe \frac{s}{L} > 10^3; \quad (19)$$

$$Nu_T = 3,78 \quad \text{для } Pe \frac{s}{L} < 10^3. \quad (20)$$

Соотношения для граничных условий второго рода постоянных и равных значений плотности теплового потока на обеих стенках имеют вид

$$Nu_{xH} = 1,18 \sqrt[3]{Pe \frac{s}{x}} \quad \text{для } Pe \frac{s}{x} > 10^4; \quad (21)$$

$$Nu_{xH} = 4,12 \quad \text{для } Pe \frac{s}{x} < 10^4. \quad (22)$$

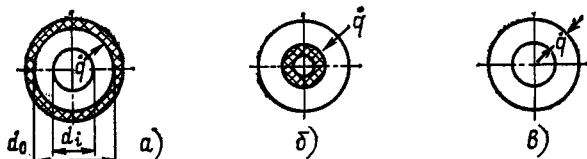


Рис. 1. Граничные условия для течения в концентрическом кольцевом канале

Зависимости для средних чисел Нуссельта в каналах длиной L имеют следующий вид:

$$Nu_H = 1,775 \sqrt[3]{Pe \frac{s}{L}} \quad \text{для } Pe \frac{s}{L} > 10^3; \quad (23)$$

$$Nu_H = 4,12 \quad \text{для } Pe \frac{s}{L} < 10^3. \quad (24)$$

2. Гидродинамически развивающееся течение в начальном термическом участке. Решение дифференциального уравнения для случая течения в канале между параллельными пластинами с постоянной температурой стенок, полученное в [4], дает зависимость для расчета чисел Nu в коротких трубах длиной L . Средние числа Нуссельта описываются соотношением

$$Nu_T = \frac{0,664}{\sqrt[6]{Pr}} \sqrt[3]{Pe \frac{s}{L}}, \quad Pe \frac{s}{L} > 10^3. \quad (25)$$

Область применения (25) лежит в пределах $0,5 < Pr < 500$.

В [5] получено следующее уравнение для определения средних чисел Nu в задаче о теплообмене в термическом начальном участке при развивающемся течении в условиях постоянной температуры стенки:

$$Nu_T = 3,78 + \frac{0,0156 [Pe (s/L)]^{1,14}}{1 + 0,058 [Pe (s/L)]^{0,64} Pr^{0,17}}. \quad (26)$$

Это эмпирическое уравнение справедливо для любых $Pe (s/L)$ и $0,1 < Pr < 10^3$.

Концентрические кольцевые каналы. Простейшим типом теплообменника с двумя теплоносителями является теплообменник, изготовленный из двух концентрических круглых труб. Одна жидкость течет во внутренней трубе, другая — в кольцевом зазоре между трубами. Теплота может передаваться либо от одной, либо от обеих стенок кольцевого канала. На рис. 1 приведены три типа различных граничных условий, которые рассматриваются здесь. Теплота может передаваться от внутренней стенки, в то время как внешняя — теплоизолирована (рис. 1, а, индекс i), от наружной стенки при теплоизолированной внутренней (рис. 1, б, индекс 0) или от обеих стенок зазора (рис. 1, в, индекс b).

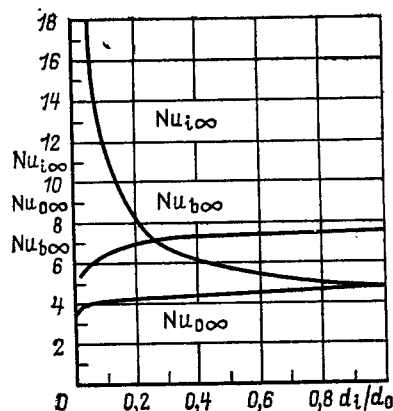
Коэффициенты теплоотдачи в кольцевом канале зависят от отношения диаметров d_i/d_0 , которое определяет форму профиля скорости. По мере уменьшения этого отношения максимум профиля скорости в кольцевом канале приближается к внутренней стенке канала. Предельным является случай $d_i/d_0 = 0$, соответствующий течению в круглом канале с бесконечно тонкой проволокой в центре [1]. Другим предельным случаем кольцевого канала $d_i/d_0 = 1$ является канал, образованный параллельными пластинами. Характерной длиной, используемой для расчета чисел Nu , Re и Pe , является гидравлический диаметр кольцевого канала

$$d_h = d_0 - d_i, \quad (27)$$

где d_0 — внутренний диаметр наружной трубы; d_i — наружный диаметр внутренней трубы.

Для тепловых граничных условий при постоянной температуре стенки в (6) получена модификация зави-

Рис. 2. Зависимость числа Nu от d_i/d_0 для ламинарного течения при трех типах граничных условий



симости (10), основанная на зависимости, приведенной в [3]. В соответствии с ней число Нуссельта для полностью развитого ламинарного течения

$$Nu_T = Nu_\infty + f \left(\frac{d_i}{d_0} \right) \frac{0,19 [Pe (d_h/L)]^{0,8}}{1 + 0,117 [Pe (d_h/L)]^{0,467}}. \quad (28)$$

Это соотношение применимо для ламинарного течения ($Re < 2300$) при $0,1 < Pr < 10^3$; $0 < d_i/d_0 < 1$. Числа $Nu = \alpha d_h / \lambda$; число $Pe = u d_h / \nu$. Значение Nu_∞ соответствует числу Nu на большом удалении от входа в канал ($L \rightarrow \infty$).

На рис. 2 представлена зависимость распределения чисел Nu от d_i/d_0 для трех типов граничных условий. В [7] получены приближенные аппроксимационные выражения для трех кривых, изображенных на рис. 2,

$$Nu_{i\infty} = 3,66 + 1,2 \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{-0,8}; \quad (29)$$

$$Nu_{0\infty} = 3,66 + 1,2 \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{0,5}; \quad (30)$$

$$Nu_{b\infty} = 3,66 + \left[4 - \frac{0,102}{(d_i/d_0) + 0,2} \right] \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{0,04}. \quad (31)$$

Функция $f(d_i/d_0)$ согласно [6] имеет вид

$$f(d_i/d_0) = 1 + 0,14 \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{0,5}; \quad (32)$$

$$f(d_i/d_0) = 1 + 0,14 \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{1/3}; \quad (33)$$

$$f(d_i/d_0) = 1 + 0,14 \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^{0,1}. \quad (34)$$

В [1] приведены значения чисел Нуссельта для других видов тепловых и гидродинамических условий.

Факторы, влияющие на коэффициент теплоотдачи.

1. *Переменные физические свойства.* Эксперименты, проведенные различными авторами [8—10] с воздухом, водородом и гелием при температурных факторах (отношениях среднemasовой температуры к температуре стенки) $0,5 < T_b/T_w < 2,0$, показали, что для газов влияние радиального изменения свойств на коэффициент теплоотдачи не превышает 10%.

Переменные физические свойства оказывают заметное влияние на коэффициенты теплоотдачи при течении жидкостей. Вследствие зависимости вязкости от температуры скорость жидкости вблизи стенки при нагревании увеличивается, а при охлаждении уменьшается. Перестройка профиля скорости определяет отличие коэффициентов теплоотдачи от значений, рассчитываемых по уравнениям, приведенным выше. В [11] дано обобщение экспериментальных результатов, полученных при течении в трубах жидкостей с отношением значений коэф-

коэффициентов вязкости $0,004 < \eta_b / \eta_w < 20$. Для расчета теплоотдачи с использованием зависимостей для Nu , приведенных выше, предложено следующее уравнение:

$$Nu_c = Nu (\eta_b / \eta_w)^{0,14}. \quad (35)$$

Динамическая вязкость η_b определяется по среднemasсовой температуре жидкости T_b , η_w — по температуре стенки T_w .

2. Свободная конвекция. Влияние свободной конвекции может увеличивать интенсивность теплоотдачи в 3—4 раза по сравнению со случаем чистой вынужденной конвекции. Этот вопрос детально обсуждается в § 2.5.10. Степень влияния свободной конвекции зависит от большого числа факторов, в том числе и от разности температуры стенки и среднemasсовой температуры жидкости, диаметра трубы, ориентации трубы в поле силы тяжести (горизонтальная или вертикальная), коэффициента объемного расширения и скорости потока.

В литературе имеется несколько методик, созданных для учета влияния свободной конвекции. Поскольку в настоящее время нет достаточного объема систематических экспериментальных данных для проверки полученных теоретически соотношений для расчета чисел Nu , приведенной ниже зависимостью следует пользоваться с осторожностью. В [12] приведено теоретическое соотношение

$$Nu = 1,61 \left[Pe \frac{d}{L} + 0,091 AF_1 \left(Gr_w Pr_w \frac{d}{L} \right)^{0,75} \right]^{1/3}. \quad (36)$$

Для случаев совместного влияния сил вынужденной и свободной конвекций при подъемном течении в вертикальной трубе $A=+1$, и противоположного влияния при опускном течении в вертикальной трубе $A=-1$. Противоположное влияние сил вынужденной и свободной конвекций наблюдается при подъемном течении в охлаждаемых каналах или при опускном течении — в обогреваемых. Уравнение (36) можно использовать при значениях параметра $(T_w - T_{b, in}) / (T_w - T_{b, out}) < 3$. Числа Прандтля Pr_w и Грасгофа Gr_w рассчитывают по значениям параметров физических свойств, определенным по температуре стенки,

$$Gr_w = \frac{g \zeta_w d^3 (T_w - T_{b, in})}{\nu_w^2}, \quad (37)$$

где ζ_w — коэффициент объемного расширения; $T_w - T_{b, in}$ — разность температур на входе в трубу. В соотношении (36) F_1 является функцией отношения

$$Nu / (1/4) Re (d/L)$$

(рис. 3). Наиболее полное обсуждение этой задачи приведено в [13] и § 2.5.10.

Д. Теплообмен при турбулентном течении. Переход к турбулентному течению в каналах начинается при числе $Re=2300$. Течение становится полностью турбулентным при $5 \cdot 10^4 < Re < 10^6$ в зависимости от степени турбулент-

ности потока на входе и формы входного сечения. Соотношения для расчета чисел Nu при полностью развитом турбулентном течении получены во многих работах в виде функций типа

$$Nu = A Re^m Pr^n f(d/L). \quad (38)$$

Значения коэффициента A и показателей степени m и n различны в зависимости от тех экспериментальных данных, на которых основывались обобщения.

Измерения коэффициентов теплоотдачи при граничных условиях первого ($T_w = \text{const}$) и второго ($q_w = \text{const}$) родов показали, что отличие в значениях коэффициентов теплоотдачи не существенно. Поэтому уравнения, приведенные ниже, можно использовать независимо от тепловых граничных условий.

Гладкие прямые трубы. Сравнение большого числа экспериментальных данных по теплоотдаче с известными в литературе корреляционными уравнениями, проведенное в [14], показало, что полуэмпирические уравнения, аналогичные корреляции, предложенной Прандтлем, лучше других описывают экспериментальные данные. Уравнение Прандтля для полностью развитого турбулентного течения имеет вид

$$Nu = \frac{(f/8) Re Pr}{1 + 8,7 \sqrt{f/8} (Pr - 1)}, \quad (39)$$

где f — коэффициент сопротивления трения при турбулентном течении. Для гладких труб f — функция только числа Рейнольдса. Модификации уравнения (39), известные из литературы, можно привести к уравнению

$$Nu = \frac{(f/8) Re Pr}{k_1 + k_2 \sqrt{f/8} (Pr^n - 1)}. \quad (40)$$

В [16] предложены следующие значения: $k_1=1$; $k_2=12,7$; $n=2/3$. Соотношение (40) в области полностью развитого турбулентного течения лучше других зависимостей описывает поведение экспериментальных данных по теплоотдаче. Поскольку уравнение (40) основано на модели полностью развитого турбулентного течения и не учитывает влияния входных эффектов, оно неприменимо в переходной от ламинарного к турбулентному течению области и в области развитого турбулентного течения при низких числах Рейнольдса, $2300 < Re < 5 \cdot 10^4$. В [14] эта зависимость модифицирована заменой Re на $(Re - 1000)$ и введением множителя, полученного в [13] для учета влияния начального участка. Полученное соотношение имеет вид

$$Nu = \frac{f/8 (Re - 1000) Pr}{1 + 12,7 \sqrt{f/8} (Pr^{2/3} - 1) \left[1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{2/3} \right]}. \quad (41)$$

Согласно [18] коэффициент сопротивления трения для турбулентного течения в трубе можно рассчитать, используя соотношение

$$f = (1,82 \lg Re - 1,64)^{-2}. \quad (42)$$

Уравнения (41) и (42) согласуются с большинством экспериментальных данных с точностью 20% [14].

Уравнение (41) рекомендуется применять в следующем диапазоне параметров: $0 < d/L < 1$; $0,6 < Pr < 2000$ и $2300 < Re < 10^6$. Уравнения (9) или (16), в которых есть зависимость от d/L и Pr , дают более высокие, чем уравнение (41), числа Нуссельта в переходной области (рис. 4, $Pr=0,7$). При расчете чисел Нуссельта в переходной области лучше использовать соотношения, дающие более высокие Nu . Для оценки уравнение (41) можно упростить и привести к соотношениям следующего вида: для $0,5 < Pr < 1,5$

$$Nu = 0,0214 (Re^{0,8} - 100) Pr^{0,4} \left[1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{2/3} \right]; \quad (43)$$

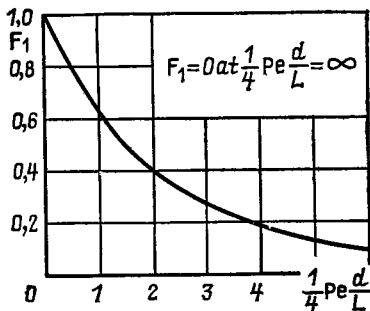


Рис. 3. Функция F_1 в уравнении (36)

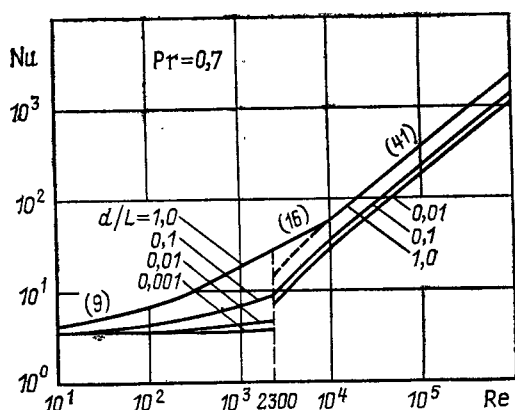


Рис. 4. Изменение чисел Nu согласно соотношениям (9), (16), (41)

для $1,5 < Pr < 500$

$$Nu = 0,012 (Re^{0,87} - 280) Pr^{0,4} \left[1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{2/3} \right]. \quad (44)$$

Концентрические кольцевые каналы. Коэффициенты теплоотдачи при турбулентном течении в концентрических кольцевых каналах зависят не только от чисел Re, Pr и d/L , но и от отношения d_i/d_o , поскольку кольцевые каналы геометрически подобны только в том случае, когда одинаковы отношения диаметров. Кроме того, коэффициенты теплоотдачи зависят от граничных условий, рассмотренных выше и показанных на рис. 1. Теплоотдачу в турбулентном потоке газов и жидкостей в концентрическом канале можно определить, используя модифицированную форму уравнения (41) для турбулентного течения в трубах,

$$Nu_{ann} / Nu_{tube} = f(d_i/d_o), \quad (45)$$

где для расчета Nu, Re и d/L в (41) используется гидравлический диаметр $d_h = d_o - d_i$.

Согласно [19] числа Нуссельта для граничных условий, приведенных на рис. 1, а (теплообмен на внутренней стенке, внешняя теплоизолирована), можно рассчитать, используя соотношение

$$\frac{Nu_i}{Nu_{tube}} = 0,86 \left(\frac{d_i}{d_o} \right)^{-0,16}; \quad (46)$$

для граничных условий, приведенных на рис. 1, б (теплообмен на внешней стенке, внутренняя теплоизолирована), — с помощью соотношения

$$\frac{Nu_o}{Nu_{tube}} = 1 - 0,14 \left(\frac{d_i}{d_o} \right)^{0,6}; \quad (47)$$

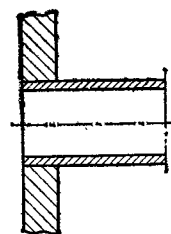
для граничных условий, показанных на рис. 1, в (теплообмен на обеих стенках канала, одинаковые температуры на обеих стенках), — с помощью соотношения, полученного в [6],

$$\frac{Nu_b}{Nu_{tube}} = \frac{0,86 (d_i/d_o)^{0,84} + [1 - 0,14 (d_i/d_o)^{0,6}]}{1 + d_i/d_o}. \quad (48)$$

Гладкие прямые трубы с некруглым поперечным сечением. Числа Нуссельта для гладких прямых каналов некруглого поперечного сечения, по имеющимся в литературе данным, также можно рассчитать с помощью уравнения (41), в котором для расчета Nu, Re и d/L используется значение гидравлического диаметра. Гидравлический диаметр определяется согласно выражению

$$d_h = 4S/P, \quad (49)$$

Рис. 5. Труба, вмонтированная в опорную пластину



где S — площадь поперечного сечения; P — смачиваемый периметр канала.

Факторы, влияющие на коэффициент теплоотдачи.

1. Изменение физических свойств. Направление теплового потока (нагрев или охлаждение жидкости) оказывает влияние на теплоотдачу, когда параметры, характеризующие физические свойства, зависят от температуры. Согласно литературным данным, это влияние можно учесть с помощью корректирующего множителя к приведенным выше уравнениям

$$Nu_c = NuK. \quad (50)$$

Для газов изменение свойств с температурой можно приближенно представить в виде простых степенных законов; корректирующий множитель K можно записать в виде

$$K = (T_b/T_w)^n, \quad (51)$$

где T_b — абсолютная среднемассовая температура газа; T_w — абсолютная температура стенки. В (51) показатель степени $n=0$ при охлаждении газа $[(T_b/T_w) > 1]$. При нагреве газа $[(T_b/T_w) < 1]$ показатель степени n для каждого газа различен. В [14] на основе обобщения данных для газов получено $n=0,45$ в диапазоне $0 < T_b/T_w < 0,5$. Согласно имеющимся данным, $n \approx 0,15$ для двуокиси углерода и водяного пара в той же температурной области. В [20] представлена номограмма для учета влияния на теплоотдачу переменных физических свойств газа.

Для жидкостей изменение свойств с температурой можно учитывать с помощью множителя

$$K = (Pr/Pr_w)^{0,11}, \quad (52)$$

где Pr — число Прандтля при среднемассовой температуре жидкости; Pr_w — при температуре стенки. Область применимости уравнения (52) $0,1 < Pr/Pr_w < 10$.

2. Влияние входа в трубу. Уравнение (41) дает средние числа Нуссельта для труб, вмонтированных в поддерживающую пластину без выступов (заподлицо) (рис. 5). Исследование влияния формы входа на локальные числа Нуссельта проведено в [21], [22].

Сравнение с экспериментальными данными. **1. Гладкие прямые трубы.** На рисунках, приведенных ниже, показаны результаты проведенного в [14] сравнения экспериментальных данных с Nu, рассчитанными по (41), в котором учтено влияние переменных физических свойств теплоносителей с помощью коэффициентов (50) — (52). На рис. 6, 7 представлены данные по теплоотдаче для различных газов.

Данные, приведенные на рис. 8, 9, получены при течении в трубах жидкостей. Данные, показанные на рис. 10, 11, получены в [55] для течений жидкостей в коротких трубах. Из рисунков видно (см. также рис. 4), что в переходной области экспериментальные данные лучше всего описываются уравнениями (16) и (9), которые дают более высокие, чем уравнение (41), значения числа Нуссельта.

2. Концентрические кольцевые каналы. Сравнение экспериментальных данных по коэффициентам теплоотдачи, полученным при течении воздуха в концентрических коль-

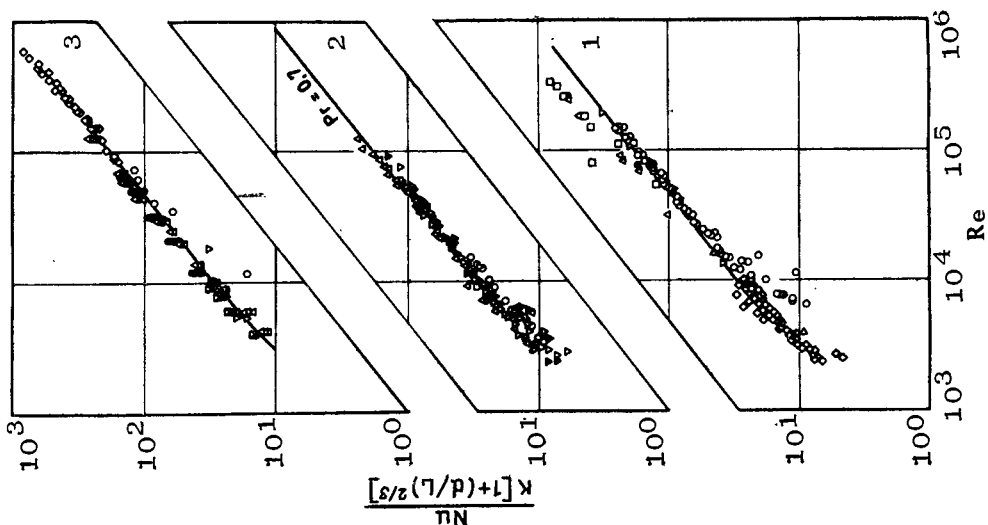


Рис. 7. То же, что и на рис. 6

Author	d/L
Nusselt [23]	0,044 0,037
Chellette [24]	0,0852 0,0476 0,03175 0,02301 0,01905 0,01507
Boelter, Young, [22] Iversen	1,36 0,76 0,109 0,0500
Balakoz [25]	0,02
Kolar [28]	0,001
Delpont [27]	0,001
Kirillev [28] Malyugin	0,014 0,0345 0,0204
Ruppert [29]	0,001
Steicher [30]	0,001

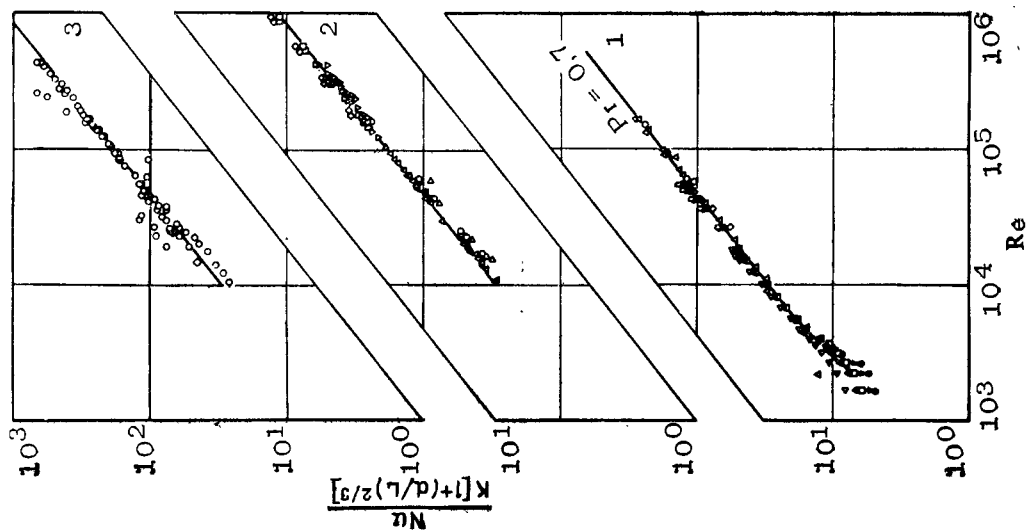


Рис. 8. Сравнение результатов, полученных из (41), с данными различных авторов по теплообмену при течении газа в трубах

Author	d/L
Humble [31]	0,0186
Taylor, [32]	0,0186
Kirchgeiser [33]	0,011
Mikheyev [33]	0,81
Mc Eligott et al. [34]	0,006 0,0120 0,002
Dalle-Denne, Bewditch [35]	0,007 0,004 0,002
Evans, [36]	0,031
Serjent	0,0095
Bernas, [37]	0,012
Jackson	0,01
Perkins, [38]	0,007
Worsoe-Sch	0,0072
Leit'Chuk [39]	0,0072
Dyadyukin	

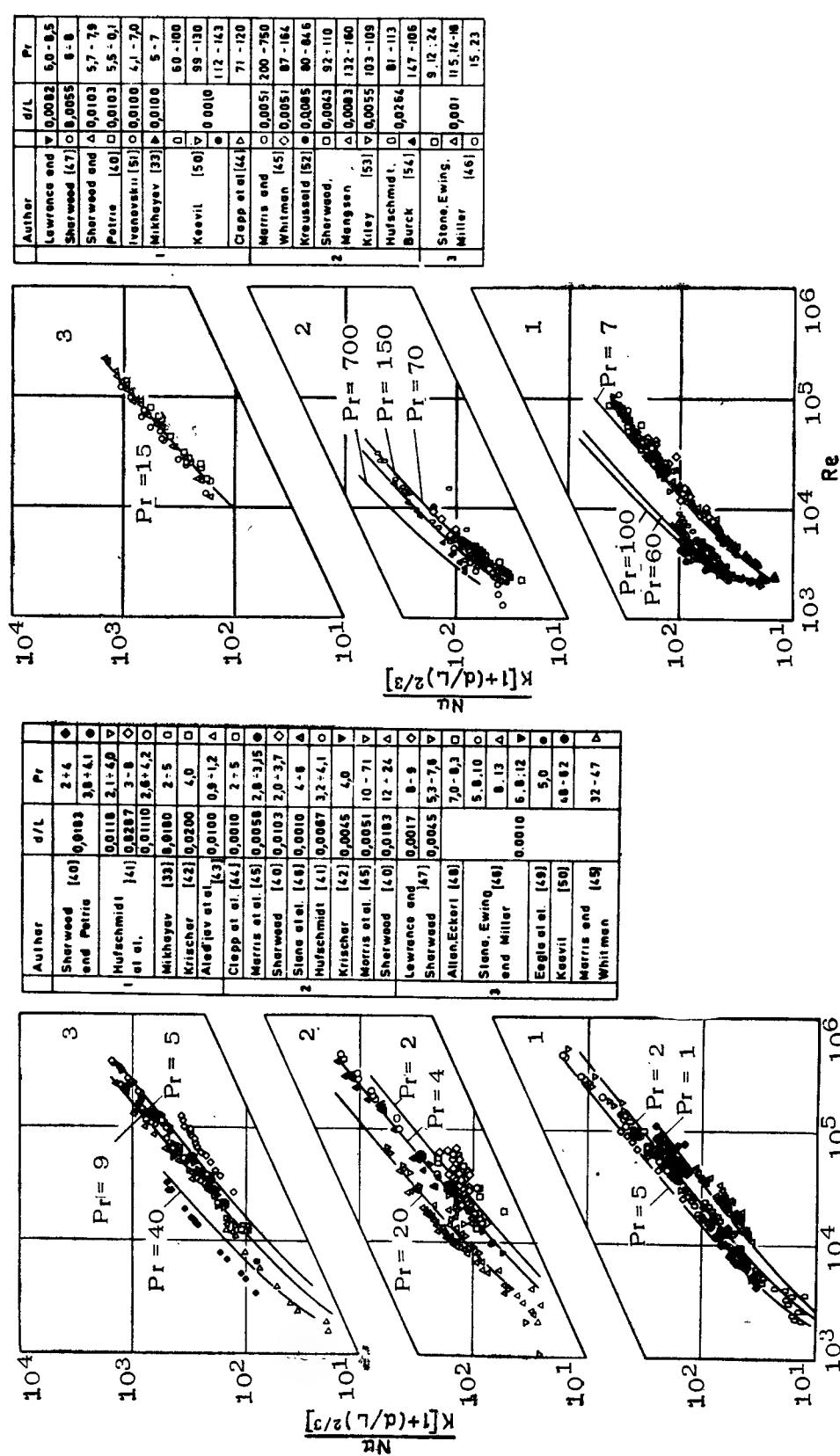


Рис. 9. То же, что и на рис. 8

Рис. 8. Сравнение результатов расчета по (41) с данными, полученными различными авторами, по теплообмену при течении жидкостей в трубах

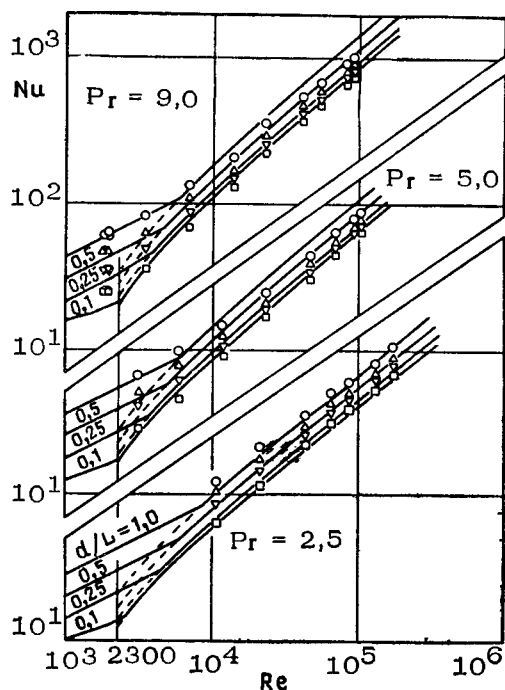


Рис. 10. Сравнение результатов, полученных в [55], по теплообмену при течении жидкости в коротких трубах с результатами, полученными из (9), (16) и (41)

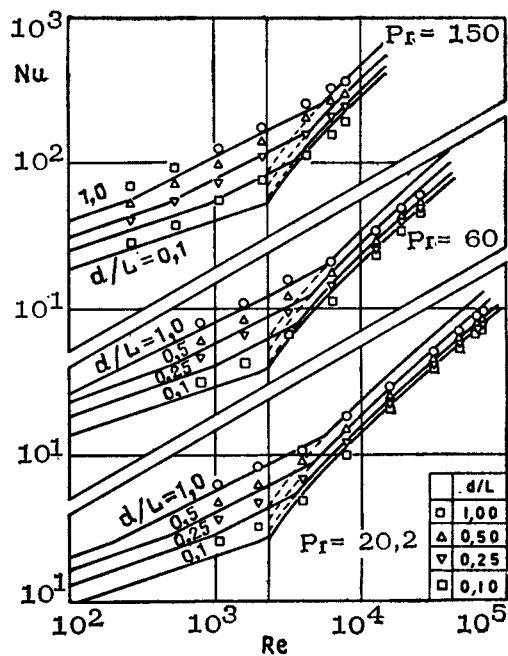


Рис. 11. То же, что и на рис. 10

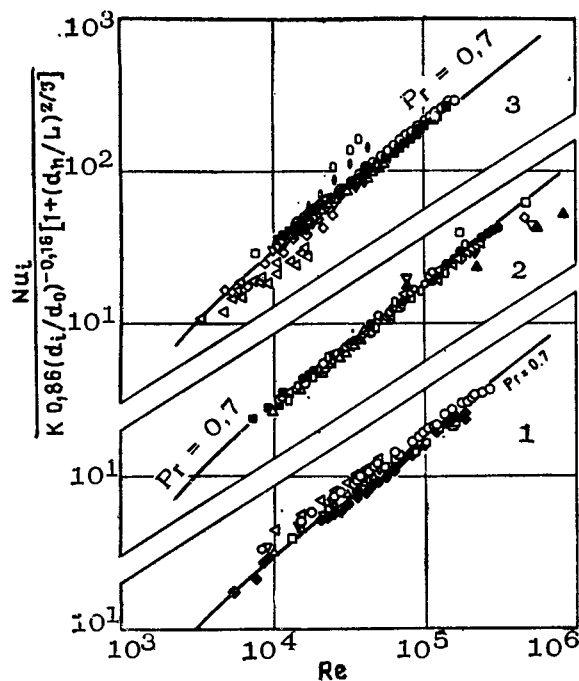


Рис. 12. Сравнение результатов, полученных из (41), с экспериментальными данными некоторых авторов для течения газов в концентрических кольцевых каналах (обогрев внутренней трубы); граничное условие — на рис. 1, а

	Author	d_i/d_o	d_h/L	
1	Leo and Barrow [56]	0,613	0,01	Δ
		0,374	0,016	▽
	Quarmby [57]	0,258	0,019	◊
		0,109	0,016	□
2	Petukhov and Reizen [58]	0,174	0,021	Δ
		0,347	0,022	◊
		0,072	0,001	●
		0,143	0,001	◊
3	Mueller [59]	0,244	0,001	□
		0,546	0,001	□
		0,692	0,001	Δ
		0,0018	0,116	Δ
	Kirschbaum [60]	0,0017	0,052	▽
		0,0008	0,109	□
		0,0013	0,089	◊
		0,79	0,001	■
	Leung et al. [61]	0,50	0,001	▽
		0,375	0,001	Δ
		0,255	0,001	□
		0,192	0,001	◊
	Zorban [62]	0,84	0,003	Δ
		0,70	0,007	Δ
		0,518	0,016	Δ
		0,366	0,030	□

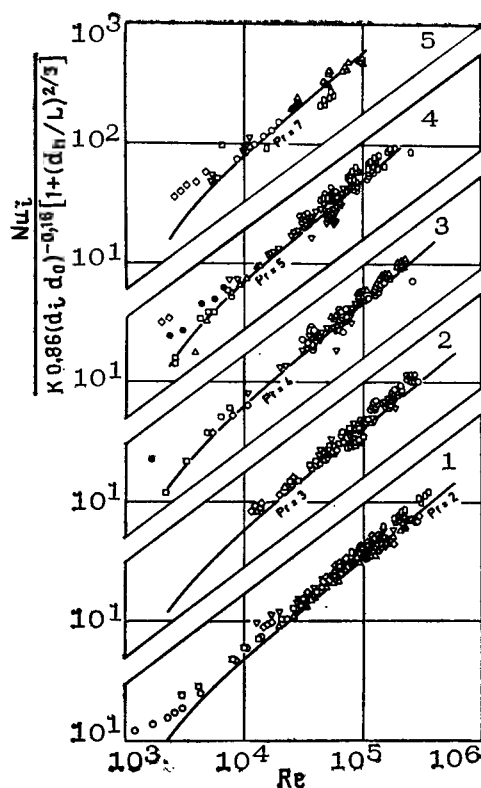


Рис. 13. Сравнение результатов, полученных из (41), с экспериментальными данными некоторых авторов для течения жидкостей в концентрических кольцевых каналах (обогрев внутренней трубы), граничное условие — на рис. 1, а

	Author	d_i/d_o	d_h/L	Pr	
1	Mc Millen and Larson [63]	0,770	0,002	2,4-3,1	○
		0,625	0,004	2,3-2,7	□
	Monrad and Petton [64]	0,625	0,010	2,2	△
		0,417	0,022	2,2-2,4	▽
		0,810	0,001	1,9-3,0	○
2	Stein and Begell [65]	0,681	0,001	2,3-3,0	□
		0,590	0,001	2-3	○
	Mittler et al. [66]	0,745	0,044	3,5	△
	Monrad, Petton [64]	0,417	0,022	3,0-3,2	○
	Stein and Begell [65]	0,810	0,001	3-4	□
3		0,681	0,001	3-4	▽
		0,590	0,001	3-4	○
	Carpenter et al. [67]	0,750	0,002	4,6-4,8	○
	Mc Millen, Larson [63]	0,770	0,002	4,6	•
	Krischer [42]	0,076	0,001	4,3-4,4	□
4		0,810	0,001	4-5	▽
	Stein and Begell [65]	0,681	0,001	4-5	□
		0,590	0,001	4-5	△
	Mc Millen and Larson [63]	0,770	0,002	5-6	•
		0,652	0,004	5-6	○
5	Krischer [42]	0,857	0,001	5-6	□
		0,842	0,001	5-6	△
		0,810	0,001	5-6	▽
	Stein and Begell [65]	0,681	0,001	5-6	○
		0,590	0,001	5-6	□
6	Mc Millen and Larson [63]	0,770	0,002	6-7	□
		0,652	0,004	6-7	○
	Mittler et al. [66]	0,722	0,03	6-7	□
		0,745	0,044	6-7	▽
	Stein and Begell [65]	0,810	0,001	6-7	○
		0,681	0,001	6-7	△

цевых каналах в условиях нагревания внутренней стенки при теплоизолированной внешней, со значениями, рассчитанными по (41), приведены на рис. 12. Для тех же условий (см. рис. 1, а) экспериментальные данные, полученные на воде, представлены на рис. 13. Экспериментальные значения числа Нуссельта отнесены: 1) для учета переменных физических свойств — к параметру K , определяемому согласно (51) и (52); 2) для учета зависи-

мости коэффициента теплоотдачи от длины трубы — к параметру $[1 + (d_h/L)^2/3]$; 3) для формы канала — к параметру $0,86 (d_i/d_o)$.

Экспериментальные данные нескольких авторов для граничных условий (см. рис. 1, б, нагревание внешней трубы, внутренняя — теплоизолирована) приведены на рис. 14. Для учета формы канала и граничных условий числа Nu отнесены к параметру $1-0,14 (d_i/d_o)^{0,8}$.

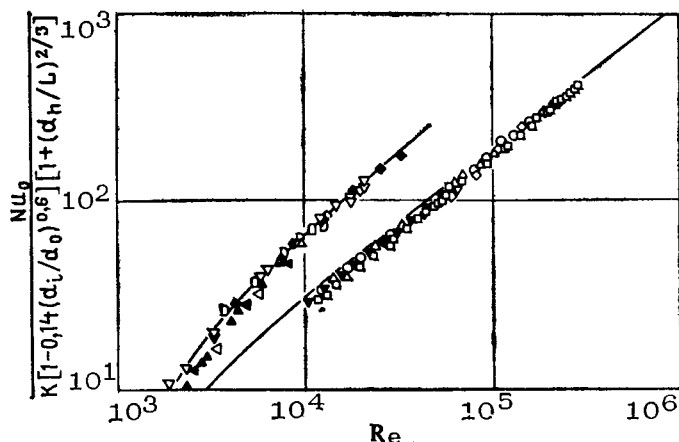


Рис. 14. Сравнение результатов, полученных из (41), с экспериментальными данными некоторых авторов для течения газов и жидкостей в концентрических кольцевых каналах (обогрев наружной трубы), граничные условия — на рис. 1, б

Author	d_h/L	d_i/d_o	Pr	
Petukhov and [58] Roizen	0,001	0,546	0.7	△
		0,692		▽
		0,072		□
		0,143		◇
		0,244		○
Krischer [42]	0,001	0,8	4,3 ÷ 4,6	▲
	0,002	0,6	4,1 ÷ 4,6	▼
	0,003	0,4	4,2 ÷ 4,4	◆
	0,001	0,750	4,15	□
		0,816	4,4 ÷ 4,6	○
		0,885	4,3 ÷ 4,7	◇
		0,920	4,9	◁

2.5.2. Вынужденная конвекция при обтекании погруженных в жидкость тел¹

В. Гилинский

А. Гладкая плоская пластина. Когда жидкость с однородным профилем скорости движется вдоль пластины с удобно обтекаемой передней кромкой, поток около пластины замедляется; в результате формируется ламинарный пограничный слой. Толщина ламинарного пограничного слоя возрастает с ростом расстояния x от передней кромки, пока не достигается критическая длина x_{cr} , начиная с которой наступает переход к турбулентному пограничному слою. Критическая длина определяется критическим числом Рейнольдса $Re_{cr} = ux_{cr}/\nu$, которое зависит, кроме многих других факторов, от степени турбулентности потока и шероховатости пластины. Ниже Re_{cr} полагается равным $5 \cdot 10^5$. Это значение может быть более высоким, если степень турбулентности потока мала, и более низким, если поток имеет высокую степень турбулентности.

На плоской пластине с удобообтекаемой передней кромкой существуют оба типа пограничного слоя, тогда как на пластинах с затупленной или тупой передней кромкой, начиная с передней кромки, развивается только турбулентный пограничный слой. Влияние формы кромки на развитие течения и теплообмена исследовано в [1].

Ламинарный пограничный слой. 1. Постоянная температура стенки. Зависимости для локальных и средних значений чисел Нуссельта получены в [2, 3].

Локальные значения числа Нуссельта $Nu_{x, lam}$ на расстоянии x от передней кромки пластины можно рассчитать, используя следующие соотношения:

$$Nu_{x, lam} = 0,332 \sqrt{Re_x}^3 / \sqrt{Pr}, \quad (1)$$

$$\text{где } Nu_{x, lam} = \frac{\alpha x}{\lambda}; \quad Re_x = \frac{ux}{\nu}.$$

Средние значения числа Нуссельта $Nu_{l, lam}$ для пластины длиной l являются результатом интегрирования уравнения (1)

$$Nu_{l, lam} = 0,664 \sqrt{Re_l}^3 / \sqrt{Pr}. \quad (2)$$

Здесь

$$Nu_{l, lam} = \alpha l / \lambda; \quad Re = ul / \nu.$$

Слабая зависимость множителей 0,332 в (1) и 0,664 в (2) от числа Pr не учитывается. Согласно [1] множитель 0,664 возрастает до 0,703 для $Pr = 1000$.

2. Постоянный тепловой поток на поверхности пластины. Как показано в [4], локальные значения числа Нуссельта на расстоянии x от передней кромки рассчитываются по уравнению

$$Nu_{x, lam} = 0,460 \sqrt{Re_x}^3 / \sqrt{Pr}. \quad (3)$$

Область применимости уравнений (1) и (2) лежит в пределах $Re_x < 10^5$; $Re_l < 10^5$ и $0,6 < Pr < 2000$. Физические свойства определяются по среднemasсовой температуре жидкости T_b .

Турбулентный пограничный слой. Согласно [5] значения чисел Нуссельта при обтекании пластины с постоянной температурой стенки можно рассчитать, используя следующее соотношение:

$$Nu_{turb} = \frac{(\xi/8) Re Pr}{1 + 12,7 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)}, \quad (4)$$

в котором физические свойства определены по температуре жидкости.

Для локальных чисел Нуссельта $Nu_{x, turb}$ в уравнении (4) используется коэффициент сопротивления ξ , рассчитанный по формуле, полученной в [6] для пластин с турбулентным пограничным слоем,

$$\xi/8 = 0,0296 Re_x^{-0,2}. \quad (5)$$

В результате

$$Nu_{x, turb} = \frac{0,0296 Re_x^{0,8} Pr}{1 + 2,185 Re_x^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (6)$$

Область применения уравнения (6) лежит в пределах $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$ и $0,5 < Pr < 2000$.

Для средних чисел Нуссельта $Nu_{l, turb}$ в уравнении (4) используется средний коэффициент сопротивления трения, приведенный в [6],

$$\xi/8 = 0,037 Re_l^{-0,2}, \quad (7)$$

что приводит к соотношению

$$Nu_{l, turb} = \frac{0,037 Re_l^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re_l^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (8)$$

Область применимости уравнения (8) $5 \cdot 10^5 < Re_l < 10^7$ и $0,5 < Pr < 2000$.

Общее корреляционное соотношение для средних коэффициентов теплоотдачи при продольном обтекании плоской пластины. В большинстве практических случаев встречаются пластины с тупой передней кромкой и высокой степенью турбулентности набегающего потока. Вследствие этого на всей длине пластины существует только турбулентный пограничный слой и не наблюдаются резкие изменения чисел Нуссельта от значений, задаваемых (2), до значений, определяемых зависимостью (8). В [7] получена графическая корреляция экспериментальных данных по теплообмену при течении воздуха на плоской пластине при $10^4 < Re_l < 10^6$. Как показано в [8], приведенное ниже соотношение не только хорошо описывает данные [7], но и удовлетворительно согласуется с измеренными значениями коэффициентов теплоотдачи в широком диапазоне чисел Прандтля

$$Nu_{l, 0} = \sqrt{Nu_{l, lam}^2 + Nu_{l, turb}^2}, \quad (9)$$

где число $Nu_{l, lam}$ определено с помощью (2), $Nu_{l, turb}$ — с помощью (8). Зависимость (9) справедлива для средних чисел Nu при $10^4 < Re_l < 10^7$ и $0,5 < Pr < 2000$. Физические свойства жидкости определяются по температуре жидкости T_b .

Зависимость теплоотдачи от длины предвключенного необогреваемого участка пластины. Теплоотдача на пластине зависит не только от расстояния вдоль обогреваемого участка, но и от длины необогреваемого предвключенного участка.

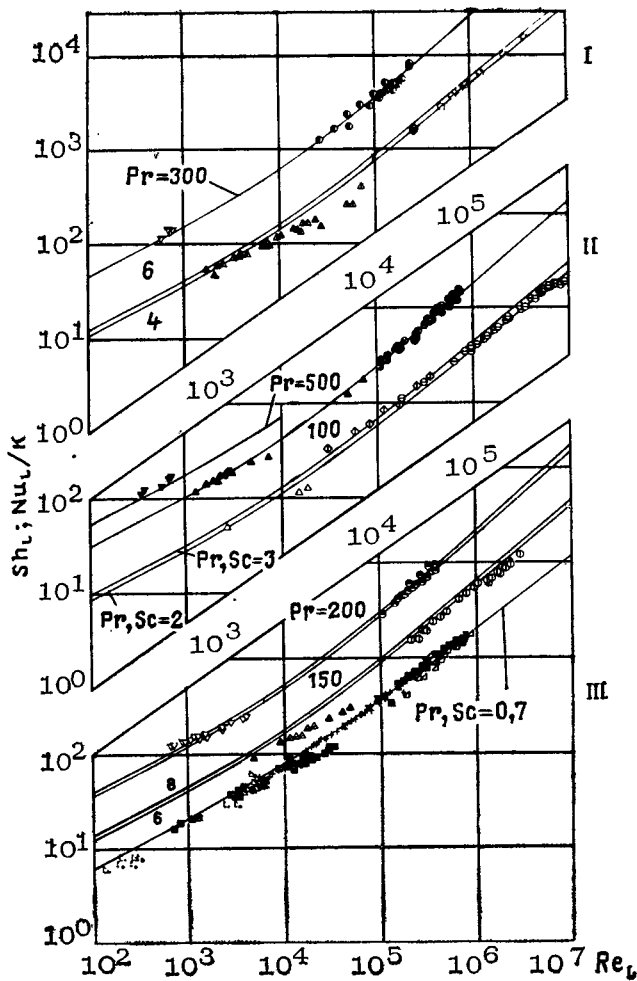
Как показано в [9], влияние необогреваемого предвключенного участка для ламинарного пограничного слоя можно оценить с помощью модификации соотношения (2)

$$Nu_{l, lam} = 0,664 \sqrt{Re_l}^3 / \sqrt{Pr} \frac{[1 - (1 - l_0/l)^{3/4}]^{2/3}}{l_0/l}, \quad (10)$$

где $Nu_{l, lam}$ и Re_l рассчитываются с использованием всей длины пластины l ; l_0 обозначает длину обогреваемого участка пластины. Для турбулентного пограничного слоя согласно [10] этим влиянием можно пренебречь, если числа $Nu_{l, turb}$ и Re_l в уравнении (8) рассчитываются исходя из обогреваемой длины l_0 и если отношение l_0/l изменяется в пределах от 1 до 0,1.

Влияние направления теплового потока. Направление теплового потока, т. е. нагревание или охлаждение пластины, влияет на теплоотдачу в случае зависимости фи-

¹ Пер. с англ. Н. В. Медведкой.



	Pr, Sc	
✕	Jürges [12]	0,7 III
▲	Elias [13]	0,7 III
+	Edwards and Furber [14]	0,7 III
△	Loos [15]	0,7 III
◇	Presser [1]	2,5 II
◆	Lemmert [16]	4,2-4,4 I
■	Žukauskas and Ziugzda [17]	0,7 III
△	Žukauskas and Ziugzda [17]	2,9-3,0 II
△	Žukauskas and Ziugzda [17]	4,3-5,4 I
△	Žukauskas and Ziugzda [17]	7-8,5 III
△	Žukauskas and Ziugzda [17]	99-107 II
▽	Žukauskas and Ziugzda [17]	170-180 III
▽	Žukauskas and Ziugzda [17]	300-400 I
▽	Žukauskas and Ziugzda [17]	490-510 II
■	Žukauskas and Slanciauskas [18]	0,7 III
⊖	Žukauskas and Slanciauskas [18]	2,0-3,0 II
⊙	Žukauskas and Slanciauskas [18]	5,5-5,7 I
⊕	Žukauskas and Slanciauskas [18]	6-7,6 III
⊗	Žukauskas and Slanciauskas [18]	99-105 II
⊗	Žukauskas and Slanciauskas [18]	160-176 III
⊗	Žukauskas and Slanciauskas [18]	280-320 I

Рис. 1. Сравнение результатов, полученных из (9), с данными различных авторов

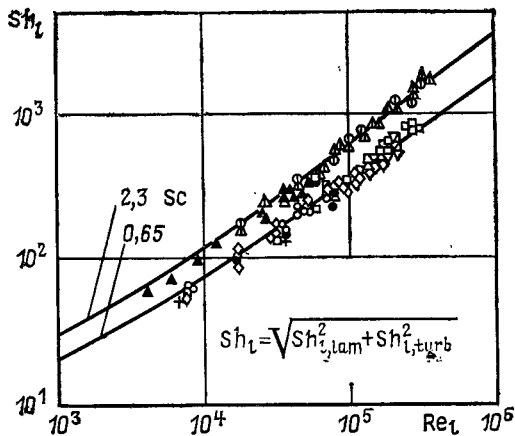


Рис. 2. Сравнение результатов, полученных из (9), с данными [19] для плоской пластины с затупленной передней кромкой

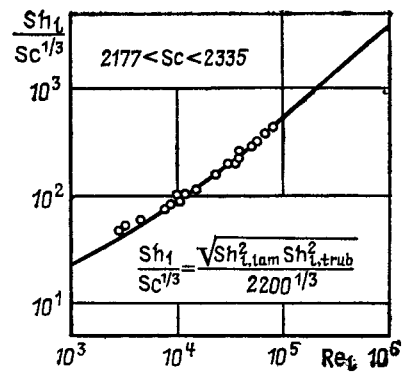


Рис. 3. То же, что и на рис. 2

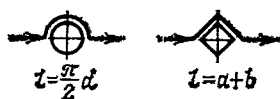


Рис. 4. Определение длины обтекания

зических свойств от температуры. Для жидкостей это влияние можно учесть введением множителя

$$K = K_l = (Pr/Pr_w)^{0,25}, \quad (11)$$

где Pr и Pr_w — числа Прандтля при температуре жидкости и стенки соответственно. Для газов это влияние можно учесть, как показано в [11], с помощью множителя

$$K = K_g = (T_b/T_w)^{0,12}. \quad (12)$$

Здесь T_b и T_w — соответственно абсолютные температуры потока и поверхности пластины. Подставив параметр K , учитывающий влияния направления теплового потока, в (9), получим

$$Nu_l = KNu_{l,0}. \quad (13)$$

Сравнение с экспериментальными данными. Сравнение значений чисел Nu , рассчитанных с помощью (9), с экспериментальными результатами, полученными в [1, 12—18] по коэффициентам тепло- и массообмена при обтекании воздухом и жидкостью плоских пластин, показано на рис. 1. Поскольку существует аналогия между процессами тепло- и массообмена, числа Шервуда Sh_l , полученные в экспериментах по массообмену, также можно использовать для проверки уравнения (9).

В переходной области между ламинарным и турбулентным пограничными слоями данные [17, 18] свидетельствуют о влиянии на числа Nu низкой степени турбулентности набегающего потока. Из результатов по массообмену [19], представленных на рис. 2,3, видно, что для корреляции данных, полученных на пластинах с тупой передней кромкой, можно использовать соотношение (9).

В. Одиночные тела различной формы. В [8] показано, что числа Нуссельта для одиночных тел различной формы, таких, как цилиндры, проволоки или сферы, можно рассчитать с помощью соотношения для плоской пластины, если используемая при расчете чисел Рейнольдса и Нус-

сельта характерная длина является длиной обтекания, предложенной в [7]. Длина обтекания l определена в [20] как отношение общей площади поверхности тела к максимальному периметру l_c в плоскости, перпендикулярной потоку,

$$l = A/l_c. \quad (14)$$

Поскольку минимальные значения чисел Нуссельта для любого трехмерного тела имеют место при числах $Re \rightarrow 0$, уравнение (9) следует переписать в виде

$$Nu_{l,0} = Nu_{l,min} + \sqrt{Nu_{l,1am}^2 + Nu_{l,turb}^2}, \quad (15)$$

где

$$Nu_{l,1am} = 0,664 \sqrt{Re_l^3 / Pr_l};$$

$$Nu_{l,turb} = \frac{0,037 Re_l^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re_l^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)}$$

[соответственно (2) и (8)].

Проволоки, цилиндры, трубы различных профилей. 1. *Общее корреляционное соотношение.* Примеры длины обтекания l показаны на рис. 4. Для длинных цилиндров эта длина определяется согласно (14)

$$l = A/l_c = (\pi d L/2)/L = (\pi/2)d. \quad (16)$$

Значение $Nu_{l,min}$ для длинных цилиндров конечных размеров $Nu_{l,min} \approx 0,3$. Таким образом, зависимость для цилиндра приобретает вид

$$Nu = 0,3 + \sqrt{Nu_{l,1am}^2 + Nu_{l,turb}^2}. \quad (17)$$

Значение $Nu_{l,1am}$ определяется из уравнения (2), $Nu_{l,turb}$ — из уравнения (8). Соотношение (17) рекомендуется использовать в следующем диапазоне чисел Рейнольдса и Прандтля: $1 < Re_l < 10^7$; $0,6 < Pr < 10^3$. В области очень малых чисел Рейнольдса уравнение (2) ($Re_l < 1$) использовать нельзя, так как толщина пограничного слоя не так мала по сравнению с размером тела. В этой области течения Стокса рекомендуется использовать следующее уравнение:

$$Nu_{l,0} = 0,75 \sqrt{Re_l Pr}. \quad (18)$$

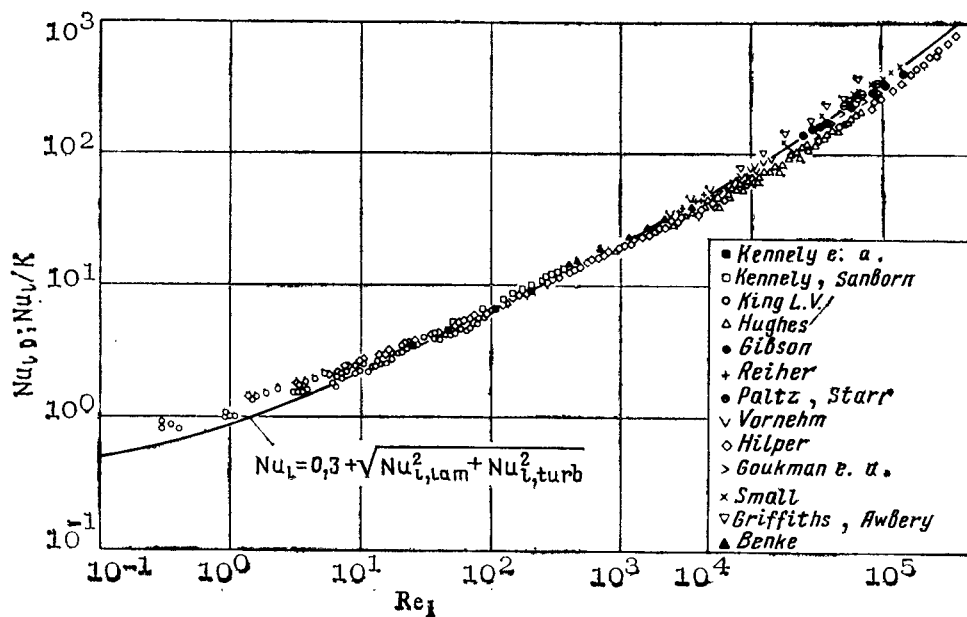


Рис. 5. Сравнение результатов, полученных из (17), с данными различных авторов, полученными при поперечном обтекании цилиндров (согласно [23])

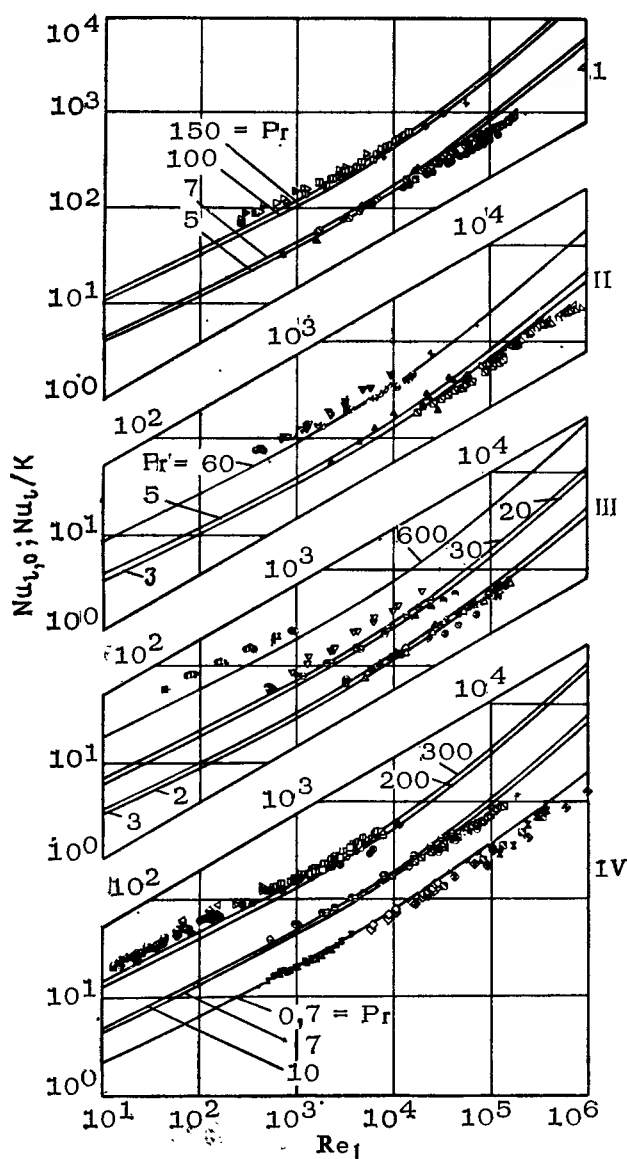


Рис. 6. Сравнение результатов, полученных из (17), с данными различных авторов, полученными для поперечного обтекания цилиндров

	Author	Pr	Part
X	Giedt, W. H. [24]	0,7	IV
◆	Schmidt, E. and Wenner, K. [25]	0,7	IV
□		0,7	IV
◆		0,7	IV
X	Churchill, S. W. and Brier, J. C. [11]	0,7	IV
▲	Lemmert, M. [16]	4,03-4,34	II
●	Fand R. M. [26]	5,8	I
x	Katinas, V. J. et al. [27]	0,7	IV
+		6,24	IV
+		73	II
+		95	I
+		261	IV
△	Perkins, H. C. and Leppert, G. [28]	2,2	III
△		2,4	III
△		2,5	III
△		3,0	III
△		4,6	III
△		5,6	I
△		6,3	I
△		31	III
△		62	III
△		63	III
△		105	I
△		155	I
△		180	IV
△		327	IV
◇	Žukauskas, A. [29]	0,7	IV
◇		3,48	II
◇		5,44	I
◇		7,42	IV
◇		124	I
◇		164	I
◇		216-219	IV
◇		233	IV
◇		280-310	IV
◇		295-317	IV
◇	Daujotas, P. et al. [30]	4,2	II
◇		4,4	II
◇		5,8	I
duct	Reinicke, H. [31]	2,6	III
○		5,3	I
○		9,77	IV
○		21,7	III
○		70	III
○		200	IV
○		600	III
narr			
wide			

2. Цилиндр, помещенный в канал. Характерной скоростью потока при обтекании труб, помещенных в канал, является средняя скорость, полученная интегрированием профиля скорости в поперечном сечении. Она равна скорости в пустом канале, отнесенной к не занятой цилиндром доле поперечного сечения канала,

$$u = u_0 / \psi, \quad (19)$$

где ψ — не занятая цилиндром доля сечения. Если канал имеет высоту l_h ,

$$\psi = 1 - \frac{\pi d}{4l_h}. \quad (20)$$

3. Влияние угла наклона набегающего потока. Если поток наклонен по отношению к оси цилиндра, то числа Нуссельта зависят от угла ϕ . Как видно из следующей

ниже таблицы, числа Nu уменьшаются с уменьшением угла ϕ [22]:

ϕ , град	$Nu_L, \phi / Nu_L$	ϕ , град	$Nu_L, \phi / Nu_L$
90	1,0	50	0,86
80	1,0	40	0,75
70	0,99	30	0,63
60	0,95	20	0,50

4. Сравнение с экспериментальными данными. На рис. 5, 6 приведено сравнение чисел Nu , рассчитанных с помощью соотношения (17), с результатами, полученными различными авторами [23—35], которые систематизировали или измеряли значения коэффициентов тепло- и массоотдачи при обтекании одиночных круглых цилиндров в потоках воздуха и жидкостей. Данные нескольких авторов, полученные для интервала чисел Рей-

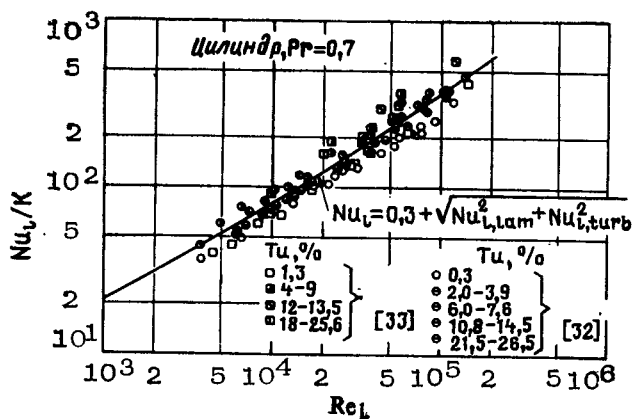


Рис. 7. Влияние степени турбулентности на коэффициент теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндров воздухом

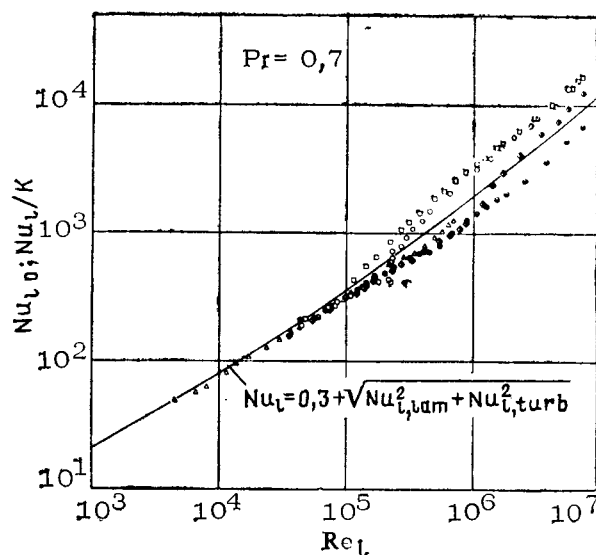


Рис. 8. Влияние шероховатости поверхности на коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндра воздухом: Δ — [34]; $\bullet$ — $k_s/d = 0$; $\diamond$ — $0,75 \cdot 10^{-2}$; $\circ$ — $3,0 \cdot 10^{-2}$; $\square$ — $9,0 \cdot 10^{-2}$ [35].

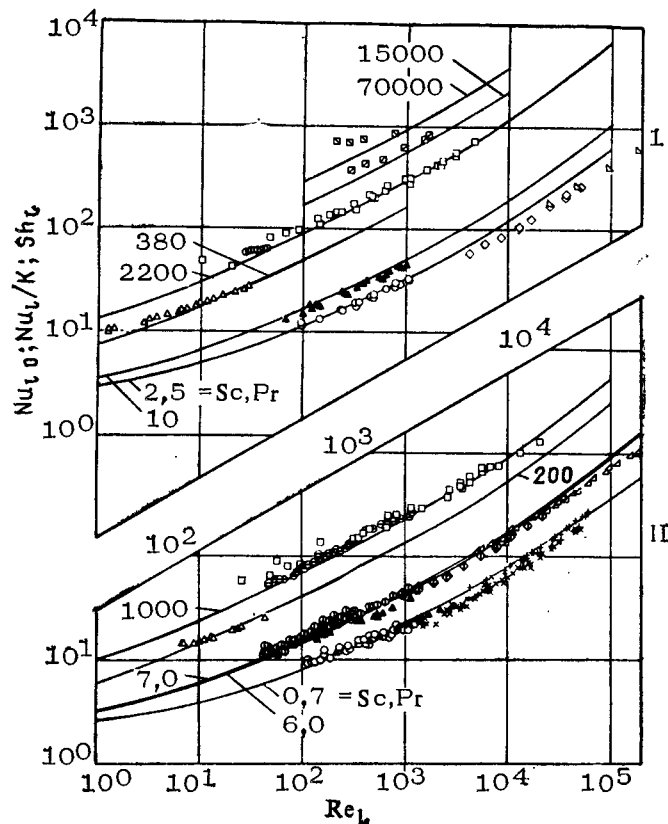
соотношения (14),

$$l = \pi d^2 / (\pi d) = d.$$

(21)

Значение $Nu_{l, \min}$ для одиночной сферы

$$Nu_{l, \min} = 2.$$



	Author	Pr, Sc	Part
x	Barner, H. [38]	0,7	II
+	Lavender, W. J. and Pei, D. C. [39]	0,7	II
o	Rowe, P. N. [40]	2,55	I
o	Claxton, K. T. and Lewis, J. B. [40]	2000-2700	I
o		0,7	II
o		6,2-7,3	II
o		1200-1260	II
Δ	Brown, W. S. [41]	2,13	I
Δ		6,74	II
o	Vliet, G. C. and Leppert, G. [37]	2,7	I
o		6,7-7,2	II
Δ	Kramers, H. [42]	380	I
Δ		10,7	I
Δ		12,6	II
Δ		7,87	II
Δ		213	II
Δ		7,3	II
o	Steinberger, R. L. and Treybal, R. E. [43]	2200	I
o		14970	I
o		69680	I
o		987	II

Рис. 9. Сравнение результатов, полученных из (22), с данными различных авторов для обтекания сферы

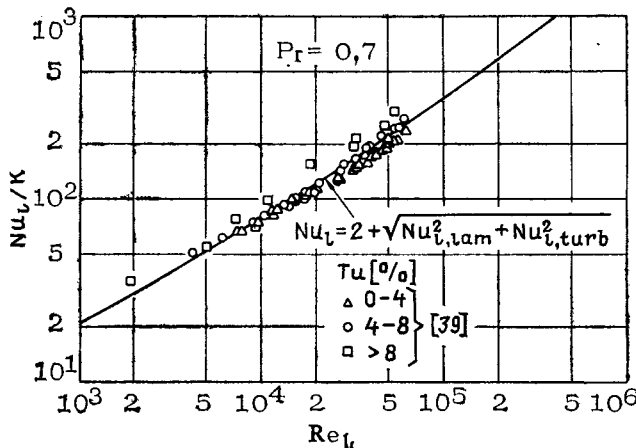


Рис. 10. Влияние степени турбулентности на коэффициент теплоотдачи при обтекании сферы

Это дает с учетом уравнения (15)

$$Nu_{L,0} = 2 + \sqrt{Nu_{L,lam}^2 + Nu_{L,turb}^2} \quad (22)$$

где $Nu_{L,lam}$ определяется с учетом уравнения (2); $Nu_{L,turb}$ — с учетом уравнения (8). Соотношение (22) рекомендуется для чисел $1 < Re_L < 10^5$ и $0,6 < Pr < 10^5$.

В области очень низких чисел Рейнольдса ($Re_L < 1$) уравнение (2) нельзя использовать, так как толщина пограничного слоя сопоставима с диаметром сферы. В этой области (течение Стокса) для расчета чисел Nu на сфере используется соотношение

$$Nu_{L,0} = 1,01 \sqrt[3]{Re_L Pr}. \quad (23)$$

2. *Сфера в ограниченном канале.* Согласно [36, 37] характерная скорость течения при обтекании сферы в канале определяется как отношение скорости в сечении канала без сферы к не занятой сферой доле поперечного сечения канала

$$u = u_0 / \psi,$$

где ψ — не занятая сферой часть сечения. Если канал имеет диаметр D , этот коэффициент

$$\psi = 1 - \frac{2d^2}{3D^2}. \quad (24)$$

3. *Сравнение с экспериментальными данными.* Сопоставление экспериментальных данных по коэффициентам тепло- и массоотдачи для одиночной сферы в потоках воздуха и жидкостей, полученных различными авторами [37—43], с зависимостью (22) показано на рис. 9. Данные нескольких авторов, полученные для области $5 \cdot 10^4 < Re_L < 10^6$, свидетельствуют о влиянии на теплоотдачу низкой степени турбулентности. На рис. 10 представлены результаты работы [39], авторы которой измеряли коэффициенты теплоотдачи при обтекании сферы воздухом при различной степени турбулентности в потоке.

2.5.3. Пучки гладких и оребренных труб

В. Гнилинский, А. Жукаускас, А. Скринска

А. Поперечное обтекание одиночных рядов и пучков труб. *Определение коэффициента теплоотдачи.* Средний коэффициент теплоотдачи α одного ряда труб или пучка

† Пер. с англ. Н. В. Медведской.

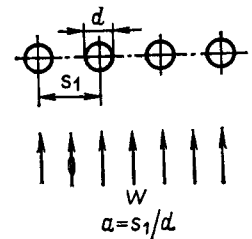


Рис. 1. Расположение труб в одно-рядном пучке

труб определяется соотношением

$$\dot{q} = \alpha \Delta T_{LM},$$

в котором средний логарифмический перепад температуры ΔT_{LM} вычисляется следующим образом:

$$\Delta T_{LM} = \frac{T_{out} - T_{in}}{\ln[(T_w - T_{in})/(T_w - T_{out})]}. \quad (2)$$

Коэффициент теплоотдачи одного ряда труб. Средние числа Нуссельта при поперечном обтекании одного ряда гладких труб можно рассчитывать с использованием соотношения (15), § 2.5.2, предназначенного для расчета чисел Нуссельта при поперечном обтекании одной трубы, но при числах Рейнольдса, определенных согласно

$$Re_{\psi,L} = wL/(\psi\nu), \quad (3)$$

где w — скорость жидкости в свободном от труб поперечном сечении канала.

Характерной скоростью w/ψ является средняя скорость в зазоре между двумя соседними трубами ряда. Доля пустот ψ зависит только от безразмерного поперечного шага $a = s_1/d$ (рис. 1) и определяется следующим образом:

$$\psi = 1 - \pi/(4a). \quad (4)$$

Характерная длина $L = d\pi/2$ является длиной обтекания для одиночной трубы. Свойства жидкости рассчитываются по средней температуре

$$T_b = (T_{in} + T_{out})/2. \quad (5)$$

Из уравнения (15), § 2.5.2 получаем

$$Nu_{0,row} = 0,3 + \sqrt{Nu_{L,lam}^2 + Nu_{L,turb}^2}, \quad (6)$$

где

$$Nu_{L,lam} = 0,664 \sqrt{Re_{\psi,L} Pr^{1/3}}; \quad (7)$$

$$Nu_{L,turb} = \frac{0,037 Re_{\psi,L}^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re_{\psi,L}^{-0,1} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (8)$$

Числа Нуссельта

$$Nu_{L,row} = \alpha L / \lambda, \quad (9)$$

где

$$Nu_{L,row} = Nu_{0,row} K. \quad (10)$$

Коэффициент K учитывает зависимость свойств жидкости от температуры.

Эти соотношения справедливы в следующем диапазоне параметров:

$$10 < Re_{\psi,L} < 10^5; \quad 0,6 < Pr < 10^3. \quad (11)$$

В области $10^4 < Re_{\psi,L} < 10^6$ числа Нуссельта на 40% ниже значений, которые дает уравнение (6). Это отличие вызвано низкой степенью турбулентности потока, которая является следствием его ускорения на входе в ряд труб или на входе в канал из участка, расположенного выше по потоку.

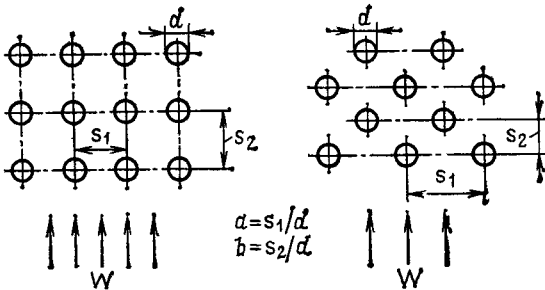


Рис. 2. Расположение труб в коридорном (слева) и шахматном (справа) пучках

Коэффициент теплоотдачи пучков труб. Средние числа Нуссельта при поперечном обтекании пучков гладких труб можно рассчитать с помощью соотношений для средних чисел Нуссельта одиночного ряда труб [1]. Однако при одной и той же скорости значения чисел Нуссельта для ряда труб в пучке выше, чем для одиночного ряда, и зависят от поперечного и продольного шагов пучка. Для пучка труб с десятью и более рядами труб

$$Nu_{0, \text{bank}} = f_A Nu_{0, \text{row}}, \quad (12)$$

где $Nu_{0, \text{row}}$ рассчитывается по уравнению (6), а $Nu_{0, \text{bank}}$ определяется следующим образом:

$$Nu_{0, \text{bank}} = \alpha L / \lambda. \quad (13)$$

Характерная скорость жидкости, используемая для расчета $Re_{\phi, L}$, определяется как средняя скорость в части одиночного ряда пучка на расстоянии в один диаметр трубы. Доля пустот ϕ и коэффициент структуры f_A зависят от безразмерных поперечного $a = s_1/d$ и продольного $b = s_2/d$ шагов пучка труб. Безразмерные шаги a и b коридорного и упорядоченного шахматного пучков показаны на рис. 2. Доля пустот определяется следующими соотношениями:

$$\phi = 1 - \pi/(4a), \text{ если } b \geq 1; \quad (14)$$

$$\phi = 1 - \pi/(4ab), \text{ если } b < 1. \quad (15)$$

Коэффициент структуры для коридорного пучка труб вычисляется с помощью соотношения

$$f_{A, \text{in-line}} = 1 + \frac{0,7}{\phi^{1,5}} \frac{b/a - 0,3}{(b/a \pm 0,7)^2}; \quad (16)$$

для шахматного пучка

$$f_{A, \text{stag}} = 1 + 2/(3b). \quad (17)$$

На рис. 3 представлена зависимость $f_{A, \text{in-line}}$ от a и b , а на рис. 4 — зависимость $f_{A, \text{stag}}$ от b .

Структура частично упорядоченного шахматного пучка труб и шаг $c = s_3/d$ показаны на рис. 5. Коэффициент структуры для частично упорядоченного шахматного пучка труб определяется следующим образом:

$$f_{A, \text{partly stag}} = f_{A, \text{in-line}} \text{ для } c < \frac{1}{4} a \quad (18)$$

$$f_{A, \text{partly stag}} = f_{A, \text{stag}} \text{ для } c \geq \frac{1}{4} a. \quad (19)$$

1. Влияние числа труб в пучке. Коэффициент теплоотдачи увеличивается от первого ряда трубного пучка к пятому и остается неизменным в последующих рядах. При расчете средних чисел Нуссельта для пучка из 10 и более рядов труб нет необходимости учитывать более низкие коэффициенты теплоотдачи первых рядов. Для пучков труб с числом рядов около 10 это влияние необходимо учитывать с помощью следующего уравнения:

$$Nu_{0, \text{bank}} = \frac{1 + (n-1) f_A}{n} Nu_{0, \text{row}}, \quad (20)$$

где n — число рядов труб в пучке.

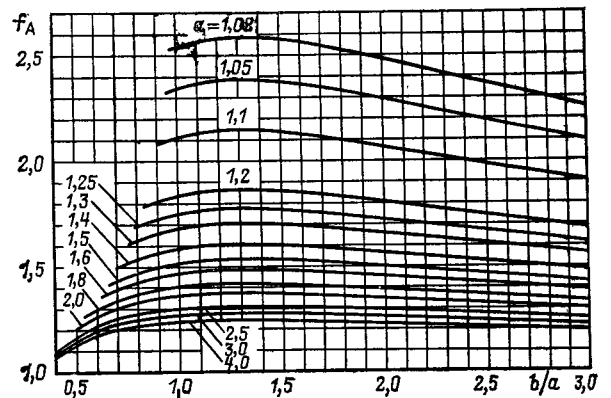


Рис. 3. Структурный коэффициент для коридорного пучка труб

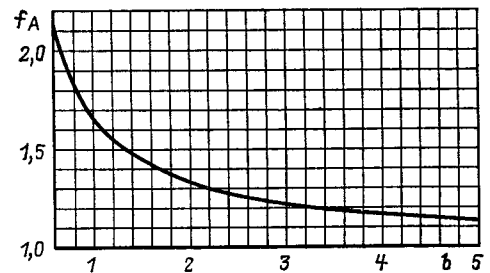


Рис. 4. Структурный коэффициент для шахматного пучка труб

2. Влияние направления теплового потока. Направление теплового потока, т. е. нагревание или охлаждение жидкости, оказывает влияние на теплоотдачу при зависимости свойств жидкости от температуры. Его можно учесть так же, как и для одного ряда труб [см. (10)]. Согласно [2, 3] это влияние для жидкостей можно учесть, введя коэффициент

$$K = K_L = \left(\frac{Pr}{Pr_w} \right)^{0,25}, \quad (21)$$

если $(Pr/Pr_w) > 1$ (нагревание жидкости), или

$$K = K_L = \left(\frac{Pr}{Pr_w} \right)^{0,11}, \quad (22)$$

если $(Pr/Pr_w) < 1$ (охлаждение жидкости). Здесь Pr — число Прандтля при температуре T_b [см. уравнение (5)]; Pr_w — число Прандтля при температуре стенки T_w .

Для газов это влияние можно учесть с помощью множителя, предложенного в [4],

$$K = K_G = (T_b/T_w)^{0,12}. \quad (23)$$

Сравнение с экспериментальными данными. 1. Одиночный ряд труб. На рис. 6 приведено сравнение экспериментальных данных по коэффициентам теплоотдачи

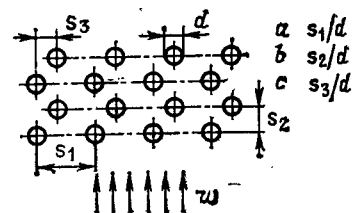


Рис. 5. Расположение труб в частично шахматном пучке труб

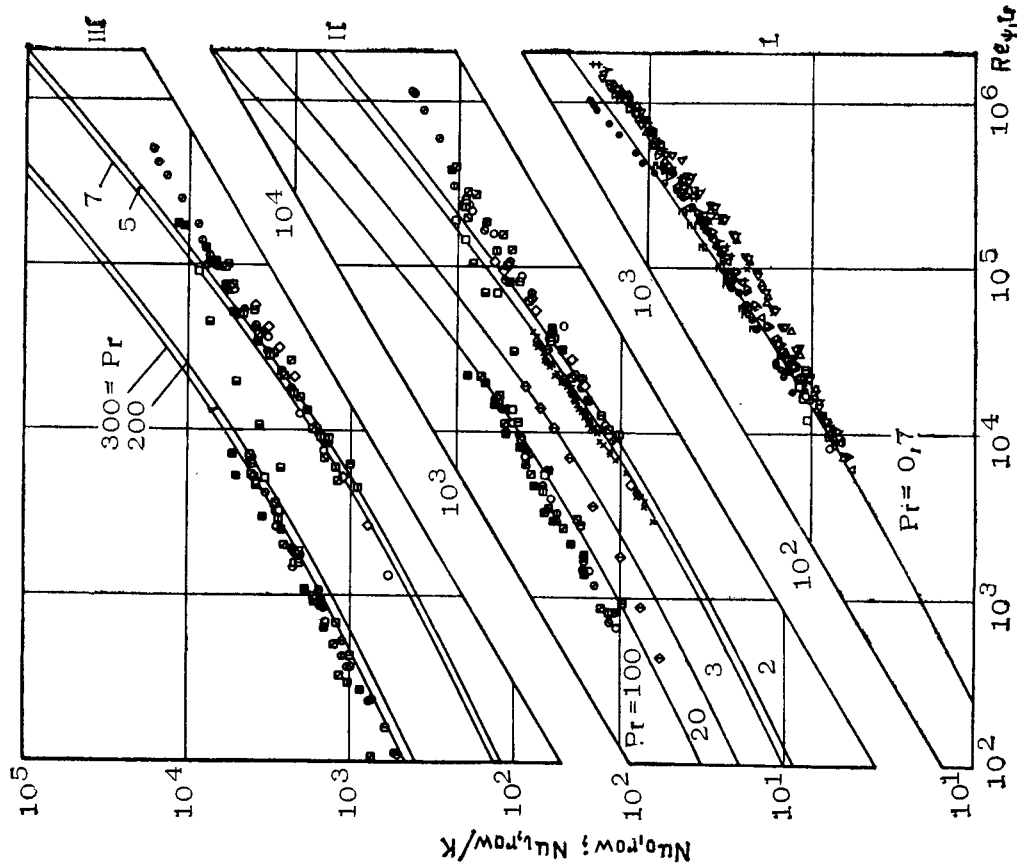
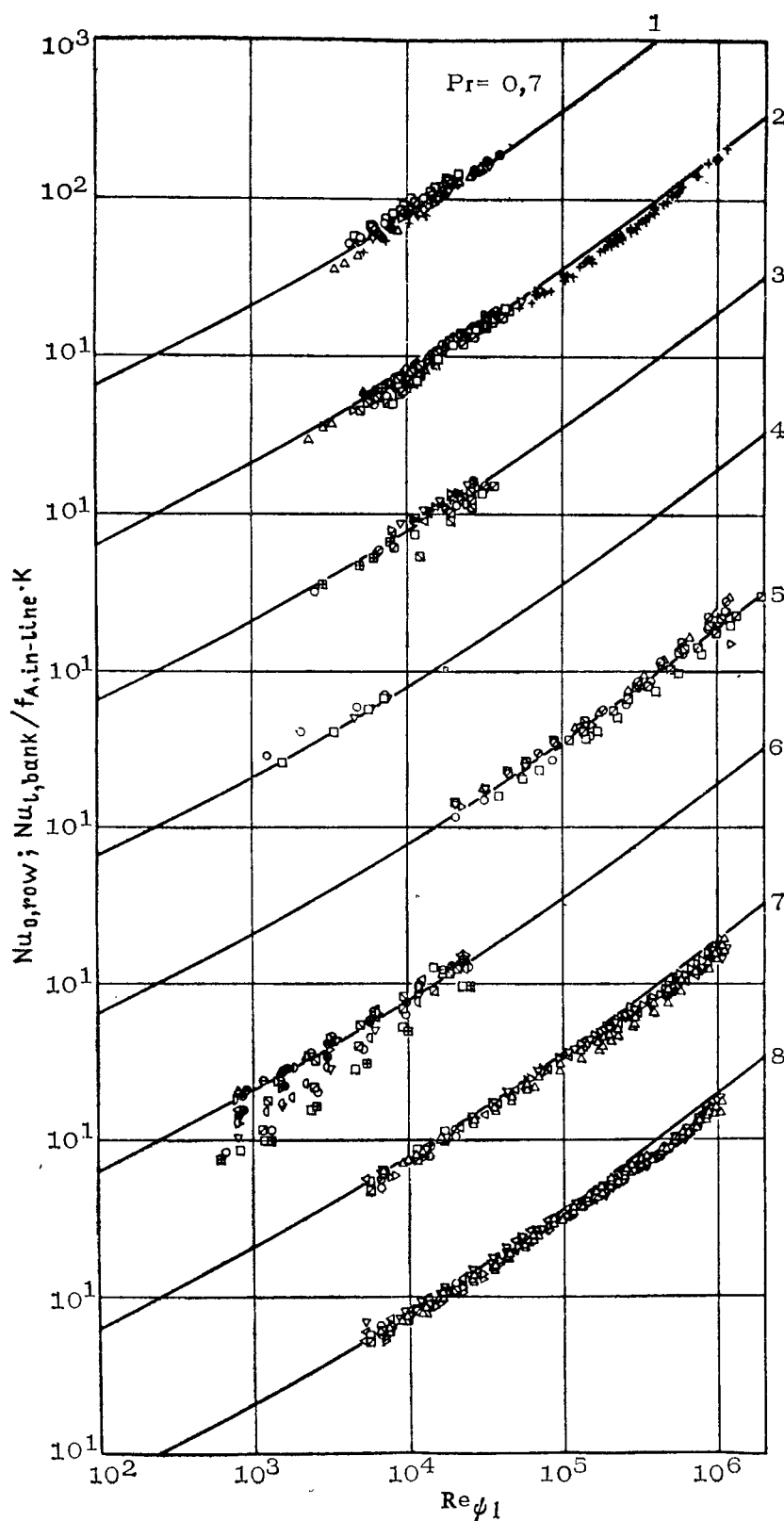


Рис. 6. Коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании жидкостью одного ряда труб или первого ряда пучка

	Author		a	b	I	II	III	IV	V
□			2,63	1,1	0,7	6,7-7,1	2,98		96
▣			2,45	2,0	0,7	6,9-7,0	2,8	270	100
▢			2,0	2,0	0,7	7,5	3,0	210-266	102
▣			1,95	1,3	0,7	6,7-7,6	3,0	280	102
▣			1,65	2,0	0,7	6,9-7,2	2,2-2,9	230-240	99-101
▣			1,3	1,3	0,7	7,0	3,0	230-270	99-101
▣			1,26	2,0	0,7	7,1	3,0	175	85-105
▣			1,05	1,85		7,1-7,5	3,0	230-280	99
○			2,6	1,3	0,7	6,4-7,1	2,9-3,0	230-276	99-101
○			2,6	0,92				195-211	99-100
○			2,1	0,61	0,7	7,5	3,0	230	97
○			1,97	1,3		6,8-7,4	2,9	194-240	97-102
○			1,3	1,13		5,3	2,1		
◇	Reinicke [6]		1,28			4,98	2,5		
◇			1,28			20,2			
×	Smyczek et al. [7]		1,28	1,28			2,66		
+	Stasiulevičius et al. [8]		2,48	1,28	0,7				
+			2,2	1,3	0,7				
+			1,47	1,04	0,7				
+			1,19	0,94	0,7				
△	Nijgeschmidt [9]		3,0		0,7				
△			2,0						
△			1,71						
△			1,5						
●	Scholz [10]		2,06		0,7				



	Author	a	b	c
1	Pierson [11]	1,25	1,25	
		1,25	1,50	
		1,25	2,00	
		1,25	3,00	
		1,50	1,25	
		1,50	1,50	
		1,50	2,00	
		1,50	3,00	
	Huge [12]	1,25	1,25	
2	Pierson [11]	2,00	1,25	
		2,00	1,50	
		2,00	2,00	
		2,00	3,00	
		3,00	1,25	
		3,00	1,50	
	Huge [12]	1,75	2,00	
		1,75	2,00	
	Hammecke et al [13]	2,06	1,38	
3	Žukauskas et al [5]	1,26	2,00	
		1,30	1,30	
		1,30	1,30	
		1,30	2,60	
		1,65	2,00	
		1,65	2,00	
	Isachenko [4]	2,00	2,00	
	Žukauskas et al [5]	2,00	2,00	
		2,45	2,00	
4	Žukauskas et al [5]	2,60	1,30	
		2,63	1,10	
		1,05	1,85	
		1,05	1,85	
		1,05	1,85	
		1,05	1,85	
	Samoška et al [15]	1,26	1,26	
		1,68	1,13	
		1,68	1,70	
		1,68	2,26	
5	Fairchild et al [16]	1,89	1,26	
		1,89	1,89	
		2,52	1,26	
		2,52	1,89	
		1,50	1,00	
		1,50	1,10	
	Nigge-schmidt [9]	1,50	1,25	
		2,00	1,50	
		2,00	1,50	
		3,00	2,00	
6	Fairchild et al [16]	1,50	1,25	
		2,00	1,00	
		2,00	1,10	
		2,00	1,25	
		2,00	2,00	
		4,00	1,00	
	Bressler [17]	4,00	1,25	
		4,00	1,50	
		6,00	2,00	
		6,00	1,10	
7	Fairchild et al [16]	6,00	1,25	
		6,00	1,50	
		1,50	3,00	
		2,00	1,25	
		2,00	1,50	
		3,00	2,00	
	Nigge-schmidt [9]	1,50	1,25	
		1,50	1,50	
		2,00	1,25	
		2,00	2,00	
8	Fairchild et al [16]	2,00	1,50	0,25
		2,00	1,50	0,50
		3,00	2,00	0,38
		3,00	2,00	0,75
	Bressler [17]	1,50	1,25	0,25
		1,50	1,50	0,25
		2,00	1,25	0,25
		2,00	1,25	0,50
		2,00	2,00	0,25
		2,00	2,00	0,50

Рис. 7. Коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании газом коридорных пучков труб

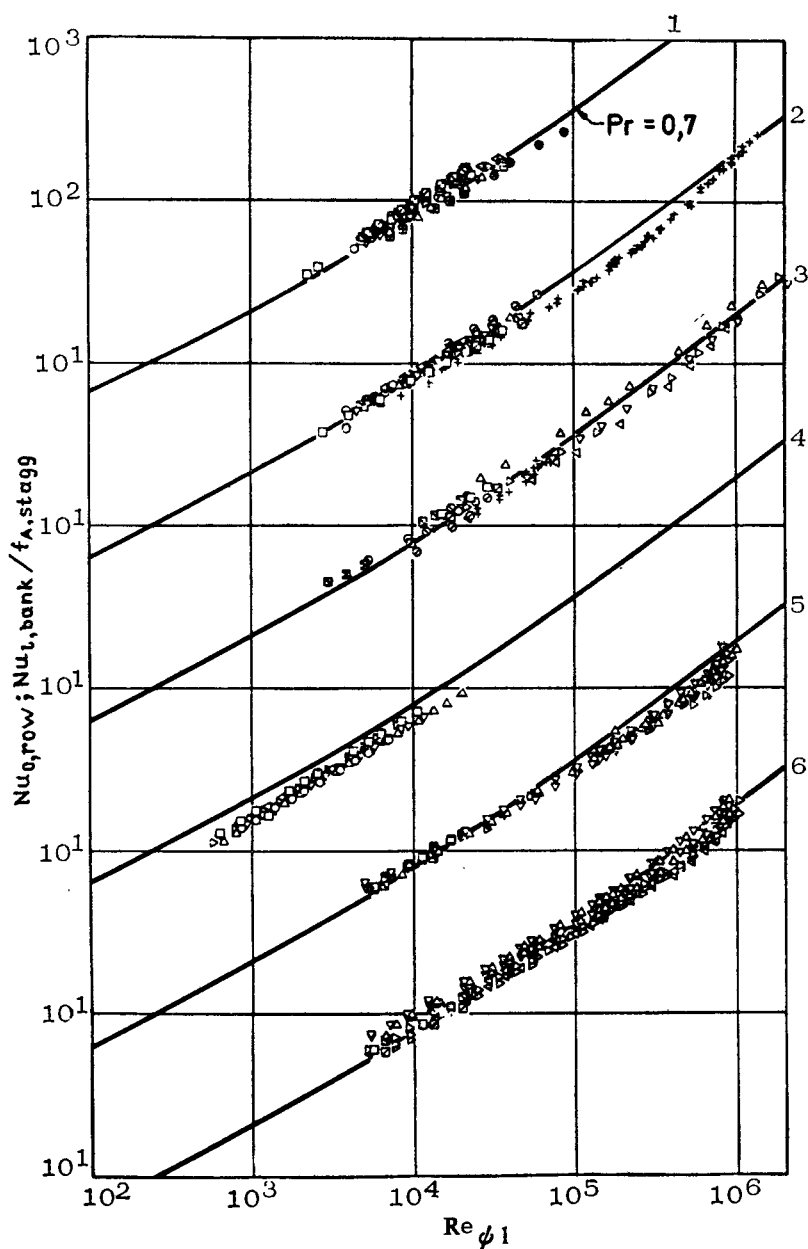


Рис. 8. Коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании газом шахматных пучков труб

для одиночного ряда труб или для первого ряда труб в пучке [5—10] со значениями чисел $Nu_{0,row}$, рассчитанными по уравнению (6). В области $10^3 < Re_{\phi 1} < 5 \cdot 10^4$ большинство экспериментальных данных удовлетворительно согласуется с рассчитанными значениями чисел Нуссельта. В переходной области $Re_{\phi 1} > 5 \cdot 10^4$, когда на коэффициент теплоотдачи влияет степень турбулентности (экспериментальные данные получены на экспериментальных установках с низкой степенью турбулентности), отклонение от уравнения (6) достигает 40%.

2. Пучки труб. На рис. 7—10 числа $Nu_{0,row}$, вычисленные с помощью соотношения (6), сопоставлены с экспериментальными данными, полученными при поперечном обтекании коридорных, полностью и частично упорядоченных шахматных пучков труб газами и жидкостями.

	Author	a	b	c
1	Pierson [11]	1,25	1,25	
		1,25	1,50	
		1,25	2,00	
		1,25	3,00	
		1,50	1,00	
		1,50	1,25	
	Huge [12]	1,50	1,50	
		1,50	2,00	
		1,50	3,00	
		1,25	1,25	
2	Pierson [11]	2,00	1,12	
		2,00	1,25	
		2,00	1,50	
		2,00	2,00	
		3,00	1,50	
		3,00	2,00	
	Huge [12]	2,00	3,00	
		2,00	3,00	
	Hammecke et al. [13]	2,06	1,38	
		2,06	1,38	
3	Zukauskas et al. [5]	1,30	1,30	
		1,30	3,90	
		1,50	1,50	
		1,97	0,99	
		1,97	1,30	
		2,10	0,61	
	Stasiutevičius et al. [8]	2,60	1,30	
		1,19	0,94	
		1,47	1,04	
		2,20	1,30	
4	Kays et al. [19]	2,48	1,28	
		1,30	1,12	
		1,25	1,25	
		1,50	1,00	
		1,50	1,25	
		1,50	1,50	
	Niggeschmidt [9]	2,00	1,00	
		2,50	0,75	
		2,00	1,50	1,00
		3,00	1,50	1,50
5	Bressler [17]	3,00	2,00	1,50
		1,50	1,25	0,75
		1,50	1,50	0,75
		2,00	1,25	1,00
		2,00	2,00	1,00
		2,00	2,00	1,00
	Niggeschmidt [9]	1,50	3,00	0,50
		1,50	3,00	1,00
		2,00	1,50	0,75
		3,00	2,00	1,12
6	Bressler [17]	1,50	1,25	0,50
		2,00	1,25	0,50
		2,00	2,00	0,75
		2,00	2,00	0,75

В. Оребренные трубы. Введение и основные понятия.

При обтекании тел потоком газа часто значение конвективного коэффициента теплоотдачи является достаточно малым. В этом случае термическое сопротивление можно заметно уменьшить с помощью увеличения поверхности или ее оребрения. Развитые поверхности можно подразделить на поверхности с прямыми, кольцевыми ребрами и ребрами в виде небольших цилиндров или шипами. Схематично различные виды ребер показаны на рис. 11.

Понятие эффективности оребрения вводится для того, чтобы упростить расчет теплоотдачи от развитой поверхности. Она определяется как отношение количества теплоты, передаваемой развитой поверхностью $\dot{Q}_a$, к количеству теплоты $\dot{Q}_i$, которая могла бы быть передана,

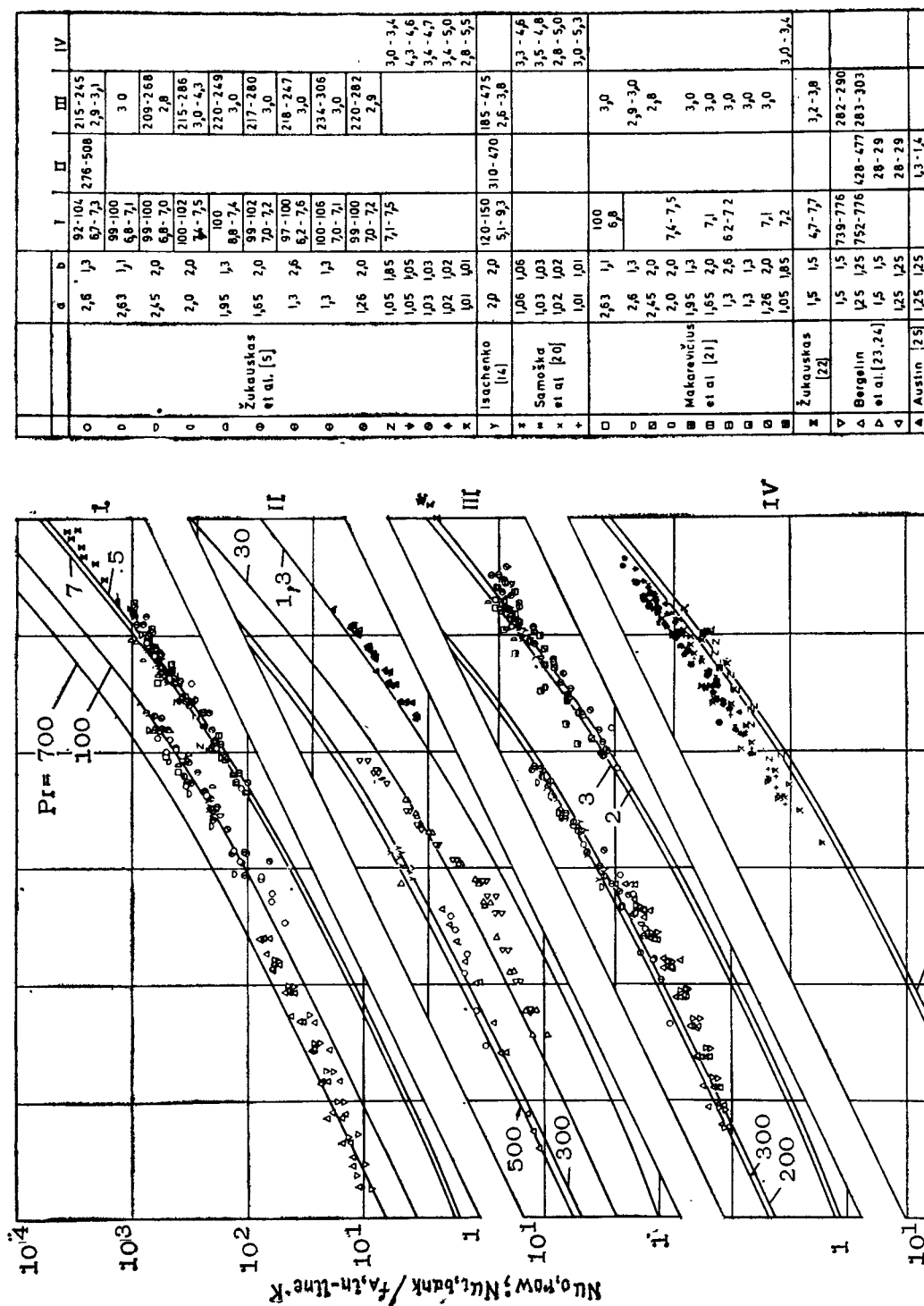


Рис. 8. Коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании жидкостями коридорных пучков труб

	a	b	I	II	III	IV
○	2,8	1,3	92-104 67-73	215-245 276-508	2,9-3,1	
○	2,63	1,1	99-100 68-71	3,0		
○	2,45	2,0	99-100 68-70	209-268 2,8		
○	2,0	2,0	100-102 74-75	215-286 3,0-4,3		
○	1,95	1,3	100 68-74	220-249 3,0		
○	1,65	2,0	99-102 70-72	217-280 3,0		
○	1,3	2,6	97-100 62-78	218-247 3,0		
○	1,3	1,3	100-106 70-71	234-306 3,0		
○	1,26	2,0	99-100 70-72	220-282 2,9		
○	1,05	1,85	71-75			3,0-3,4
○	1,05	1,05				4,3-4,6
○	1,03	1,03				3,4-4,7
○	1,02	1,02				3,4-5,0
○	1,01	1,01				2,8-5,5
○	2,0	2,0	120-150 51-93	185-475 2,8-3,8		
○	1,06	1,06				3,3-4,6
○	1,03	1,03				3,5-4,8
○	1,02	1,02				2,8-5,0
○	1,01	1,01				3,0-5,3
○	2,63	1,1	100 6,8	3,0		
○	2,6	1,3				2,9-3,0
○	2,45	2,0				2,8
○	2,0	2,0	74-75			3,0
○	1,65	2,0	71			3,0
○	1,3	2,6	62-72			3,0
○	1,26	2,0	71			3,0
○	1,05	1,85	72			3,0-3,4
○	1,5	1,5	47-77			3,2-3,8
○	1,5	1,5	719-776			282-290
○	1,25	1,25	752-776			283-303
○	1,5	1,5				28-29
○	1,25	1,25				28-29
○	1,25	1,25				1,3-1,4

	Author	Arrangement		Prandtl number Pr		
		a	b	I	II	III
○		2,6	1,3	97-100		226-300
●				70-71		25-44
●		2,6	0,92	99-100		184-212
●		2,1	1,85	100		222-275
●		2,1	0,61	98-99		231-276
●				74-76		29-34
●		1,97	1,3	99-102		203-225
●				6,7-7,0		29-30
●		1,97	0,99	99-100		231-268
●				71-76		3,0
□	Žukauskas et al. [5]	1,5	1,5	98-103		208-326
□				6,9-7,2		2,9-3,9
□		1,3	3,9	98-100		253-378
□				6,9-7,5		3,0
□		1,3	1,73	95-101		216-363
□				6,7-71		3,0
□		1,3	1,3	100-102		224-337
□				6,8-7,0		2,9-3,0
□		1,3	1,13	5,2-5,4		2,1-2,2
◇	Isachenko [4]	2,0	2,0	125-150	290-465	61-9,5
◇				5,2-5,4		2,9-3,2
▲		1,77	0,88	746-776	446-459	283-296
▲		1,55	1,3	745-788		283-290
▼	Bergelin et al. [23, 24]	1,25	1,08	752-800		290-551
▼					29	
▼		1,5	1,3		29	
▼		1,25	1,08		29	
+	Austin [25]	1,25	1,08		1,2-1,7	

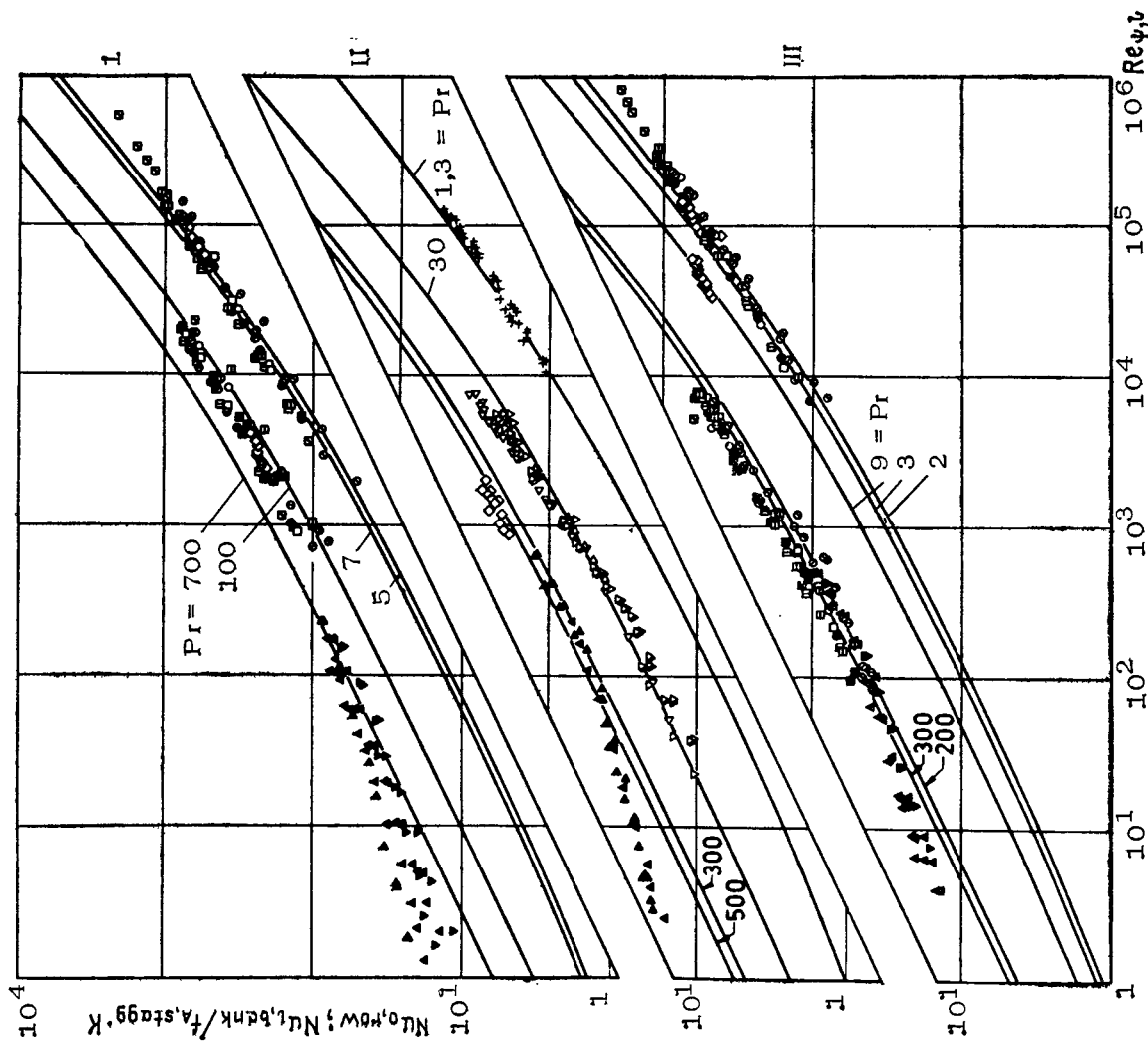


Рис. 10. Коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании жидкостями шахматных пучков труб

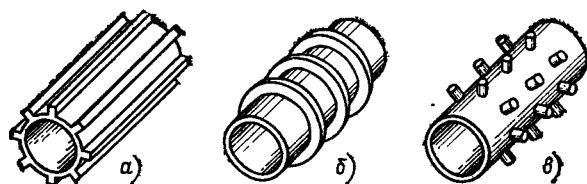


Рис. 11. Типы развитых поверхностей: прямые (а), кольцевые ребра (б), шипы или ребра в виде шипов (в)

если бы сложная поверхность ребра находилась при температуре его основания. Таким образом,

$$\eta_f = \frac{\dot{Q}_a}{\dot{Q}_i} = \frac{\dot{Q}_a}{\alpha_f A_t (T_0 - T_\infty)}, \quad (24)$$

где A_t — площадь развитой поверхности; T_0 — температура по основанию; T_∞ — температура окружающей жидкости.

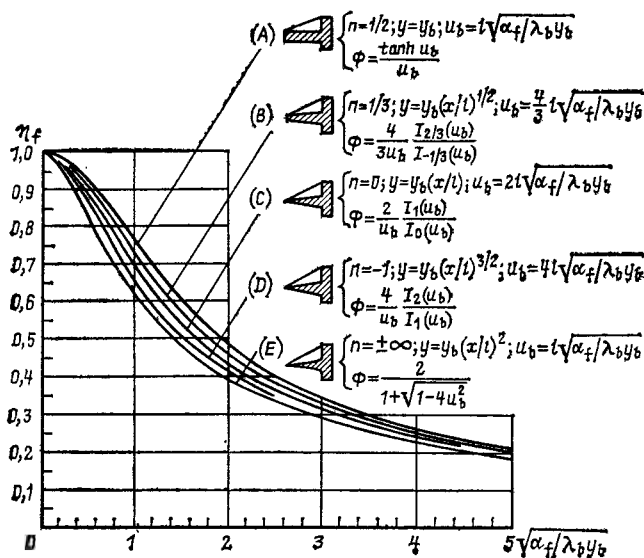


Рис. 12. Характеристики прямых ребер

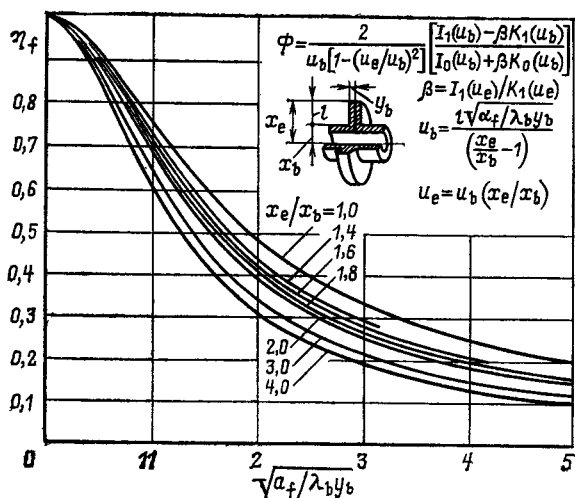


Рис. 13. Характеристики кольцевых ребер прямоугольного сечения

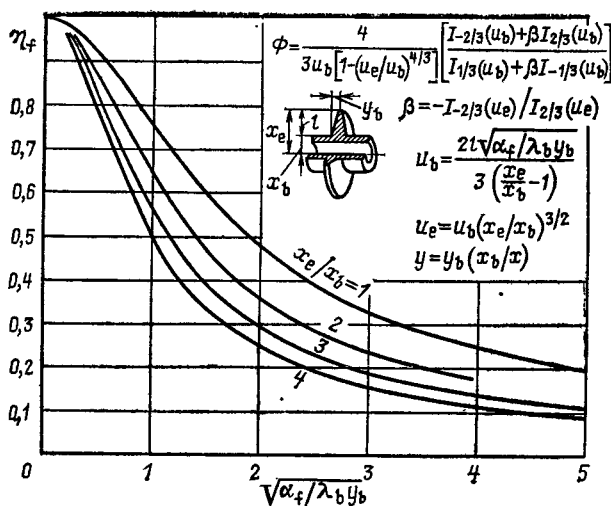


Рис. 14. Характеристики кольцевых ребер треугольного сечения

Эффективность ребер различных типов представлена на рис. 12—15. Эти соотношения получены в предположении, что коэффициент конвективной теплоотдачи постоянен, вектор теплового потока в ребре нормален к поверхности, на которой оно установлено, а свободный конец ребра изолирован.

Последнее предположение может быть точным, если вместо действительного ребра с неизолрованным концом рассматривать фиктивное ребро с изолированным концом, длина которого увеличена на Δl , так чтобы площадь поверхности удлиненного конца была равна площади неизолрованного торца действительного ребра.

Для того чтобы проиллюстрировать сказанное выше, рассмотрим кольцевое ребро прямоугольного профиля толщиной $2y_b$ (рис. 13). Необходимую добавочную длину найдем из соотношения

$$2\pi[(x_e + \Delta l)^2 - x_e^2] = 4y_b \pi x_e,$$

или
 $\Delta l \approx y_b.$

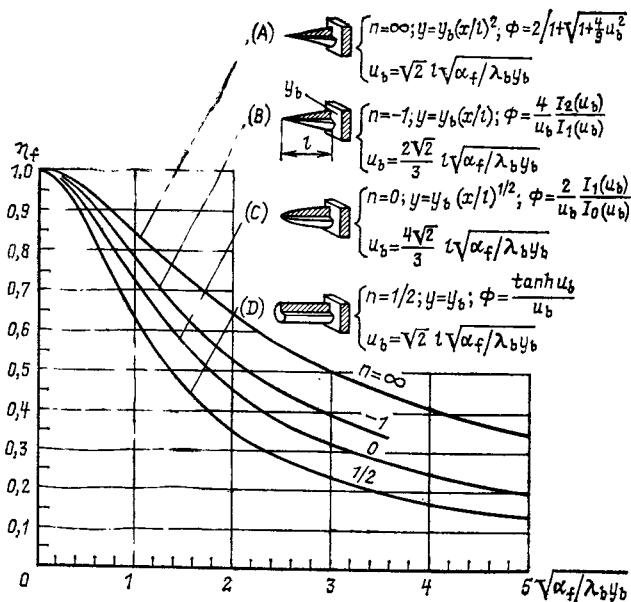


Рис. 15. Характеристики ребер в виде шипов

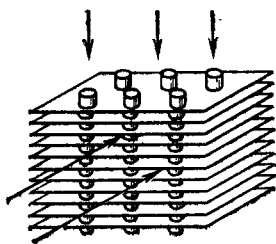


Рис. 16. Теплообменник с воздушным охлаждением

Общий вид теплообменника показан на рис. 16. Однофазная, кипящая или конденсирующаяся жидкость течет внутри трубы, которая омывается потоком газа с наружной поверхности. Для улучшения теплообмена трубы прикреплены к тонким пластинам, как показано на рис. 16. Пластины увеличивают поверхность теплообмена, и их эффективность как ребер можно оценить, используя рис. 17 для коридорного и рис. 18 для шахматного расположения труб.

В большинстве теплообменников можно получить достаточно точные оценки, если предположить, что развитую поверхность теплообмена можно рассматривать как поверхность с прямыми ребрами прямоугольного профиля. Эффективность ребра определяется следующим образом:

$$\eta_f = \frac{tg h (ml)}{ml}, \quad (25)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha_f}{\lambda_f \delta_m}};$$

δ_m — средняя толщина ребра; l — длина эквивалентного прямого ребра.

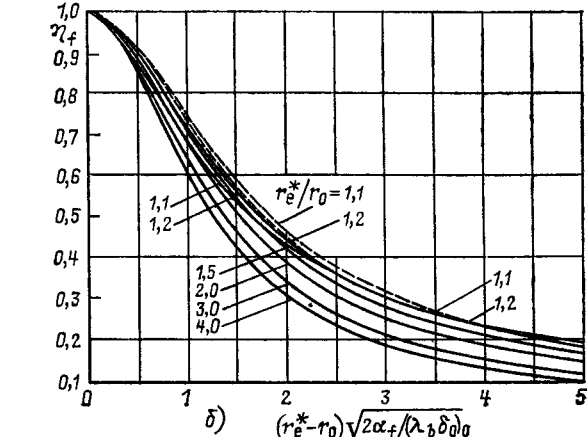
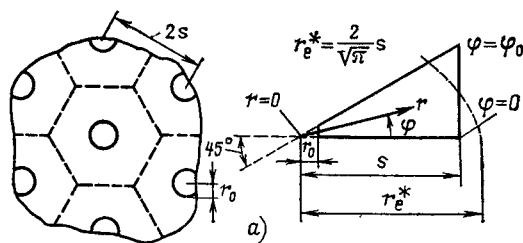


Рис. 18. Координатная система для гексагональных ребер (а) и их характеристики [27] (б). Для сравнения приведена эффективность радиальных ребер прямоугольного профиля (штриховые кривые)

Наиболее подробное обсуждение вопросов, связанных с передачей теплоты от развитых поверхностей теплообмена, представлено в [28].

При расчете общей теплоотдачи от труб с развитой поверхностью необходимо принимать во внимание суммарное количество теплоты, передающееся как непосредственно через сами трубы, так и через развитую поверхность. Для этого вводят понятие поверхностной эффективности

$$\eta = 1 - \frac{A_f}{A_t} (1 - \eta_f), \quad (26)$$

где A_f — площадь поверхности труб; A_t — общая площадь поверхности оребренной трубы.

Общее количество теплоты в теплообменнике с оребренными трубами можно получить, используя следующее соотношение:

$$Q = U_0 A_0 F \Delta T_{LM}, \quad (27)$$

где U_0 — общий коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по диаметру труб у основания ребра, считающихся гладкими; A_0 — площадь поверхности теплообменника, учитывающая эти гладкие трубы с диаметром у основания ребра; F — коэффициент, учитывающий геометрию теплообменника; ΔT_{LM} — среднелогарифмический температурный напор в теплообменнике.

Общий коэффициент теплоотдачи, учитывающий возможные отложения на поверхности обмена, конвективный коэффициент теплоотдачи от труб, термическое сопротивление стенок труб, термическое контактное сопротивление между трубами и развитой поверхностью, термическое сопротивление наружной поверхности трубы с развитой поверхностью, определяется с помощью соотношения

$$\frac{1}{U_0} = R_f + \frac{1}{\alpha_p A_p / A_0} + \frac{\alpha_p}{\lambda_b A_{nb} / A_0} + R_G + \frac{1}{\alpha_f \eta A_t / A_0}, \quad (28)$$

где R_f учитывает возможные отложения или загрязнение поверхности; α_p — коэффициент теплоотдачи внутри труб;

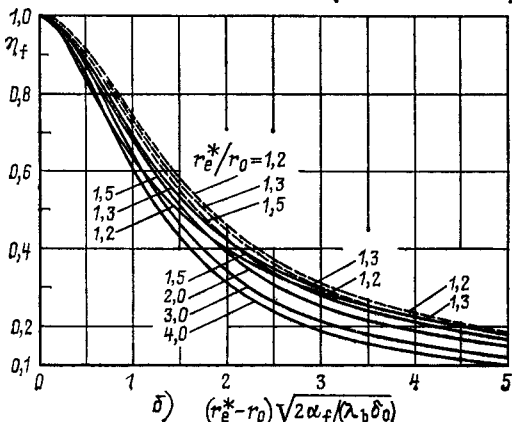
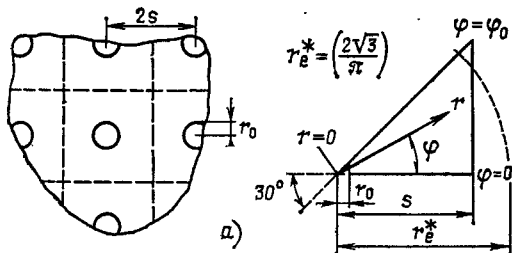


Рис. 17. Координатная система квадратных ребер (а) и их характеристики [27] (б). Для сравнения приведена эффективность радиальных ребер прямоугольного профиля (штриховые кривые)

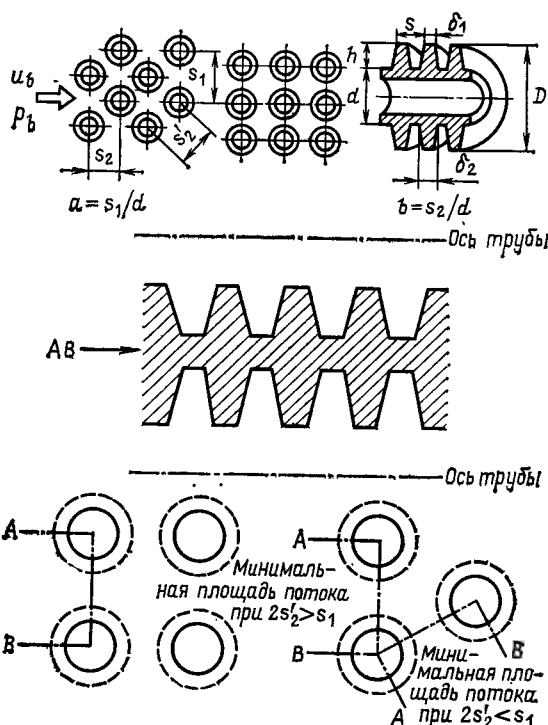


Рис. 19. К определению основных величин для течения в оребренных пучках труб. AB — поперечное сечение (минимальная площадь потока)

A_p — площадь внутренней поверхности труб; a_p — толщина трубы; A_{nb} — средняя площадь поверхности самой трубы, $A_{nb} = (A_0 - A_i) / \ln \frac{A_0}{A_i}$; R_0 — контактное термическое сопротивление между трубой и ребрами; α_f — коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности трубы.

В корреляционных соотношениях, представленных в этом разделе, коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности труб можно определить следующим образом:

$$\alpha_f = \frac{\eta A_t}{A_t - A_f(1 - \eta_f)} \alpha_t, \quad (29)$$

где неравномерность коэффициента теплоотдачи и другие предположения, на которых основываются аналитические решения с целью получения выражения для эффективности ребра, учитываются с помощью эмпирического соотношения [29]

$$\psi = 0,97 - 0,056 u_b. \quad (30)$$

Среднее число Нуссельта

$$Nu = ad/\lambda_f; \quad (31)$$

число Рейнольдса

$$Re = wd/v, \quad (32)$$

где d — диаметр трубы у основания ребра; w — максимальная скорость жидкости в минимальном свободном поперечном сечении оребренного пучка труб (рис. 19). Число Прандтля определяется следующим образом:

$$Pr = v/k. \quad (33)$$

Во всех случаях свойства жидкости вычисляются по средней температуре жидкости, которая определяется соотношением (5).

Теплообмен при поперечном обтекании пучков труб с радиальными высокими ребрами. Интенсивность теплоотдачи в пучках труб зависит от множества факторов, включая геометрию ребер и пучка, число рядов, физические свойства и скорость теплоносителя. Поскольку имеются лишь отдельные расчетные модели для конкретных устройств пучка, проведение конструкторских расчетов обычно затруднено.

1. Коридорное расположение труб. В [33] обобщены результаты численных исследований [30—32] и получено соотношение для расчета теплоотдачи

$$Nu = 0,30 Re^{0,625} \varepsilon^{-0,375} Pr^{0,333}, \quad (34)$$

где $\varepsilon = A_t/A_0$; A_0 — площадь гладких труб; A_t — общая площадь поверхности оребренных труб. Зависимость (34) справедлива в диапазоне параметров $5 < \varepsilon < 12$ и $5 \cdot 10^3 < Re < 10^5$.

2. Шахматное расположение труб. Средние числа Нуссельта при поперечном обтекании газом оребренных труб в пучке можно рассчитать с помощью соотношения

$$Nu = 0,19 \left(\frac{a}{b}\right)^{0,2} \left(\frac{s}{d}\right)^{0,18} \left(\frac{h}{d}\right)^{-0,14} Re^{0,85} Pr^{0,83}, \quad (35)$$

где $a = s_1/d$; $b = s_2/d$; s_1, s_2 — поперечный и продольный шаги пучка; s — шаг оребрения (рис. 19). Это уравнение справедливо в области $10^3 < Re < 2 \cdot 10^4$.

3. Теплоотдача при высоких числах Рейнольдса. Поток газа при высоких давлениях, которые используются для увеличения тепловой эффективности пучков, характеризуются большими числами Рейнольдса.

Результаты [29], полученные для внутренних стержней шахматного пучка труб со спирально-винтовыми ребрами (угол атаки меньше 4°), описываются следующими обобщенными уравнениями:

$$Nu = 0,05 \left(\frac{a}{b}\right)^{0,2} \left(\frac{s}{d}\right)^{0,18} \left(\frac{h}{d}\right)^{-0,14} Re^{0,8} Pr^{0,98} \quad (36)$$

в диапазоне $2 \cdot 10^4 < Re < 2 \cdot 10^5$ и

$$Nu = 0,008 \left(\frac{a}{b}\right)^{0,2} \left(\frac{s}{d}\right)^{0,18} \left(\frac{h}{d}\right)^{-0,14} Re^{0,95} Pr^{0,98} \quad (37)$$

в области $2 \cdot 10^5 < Re < 10^6$. Эти уравнения применимы при следующих значениях параметров: $2,17 < a < 4,13$; $1,27 < b < 2,14$; $0,125 < s/d < 0,28$ и $0,125 < h/d < 0,59$.

В [34] для высоких чисел Re проведено исследование влияния числа Pr на теплоотдачу пучков гладких труб, в результате которого определен показатель степени при числе Pr в (36), равный 0,36. Это значение использовалось в соотношениях (36) и (37) для расчета теплоотдачи в пучках оребренных труб. Числа Нуссельта при обтекании воздухом шахматных пучков труб с высокими числами Рейнольдса можно определить с помощью номограммы, приведенной на рис. 20.

4. Влияние числа пучков оребренных труб на теплоотдачу. Приведенные выше уравнения используются для определения средних коэффициентов теплоотдачи на внутренних рядах стержней. При одном и том же Re числа Нуссельта для одиночной оребренной трубы ниже, чем для внутренней трубы пучка. Как показано в [35, 36], средний коэффициент теплоотдачи пучка оребренных труб близок к значениям коэффициента теплоотдачи для внутренних стержней, когда число стержней больше четырех. Если число стержней меньше четырех, вводится корректирующий множитель, который зависит от характера теплоотдачи, продольного шага пучка и числа Рейнольдса. Интенсивность теплоотдачи на первом ряду стержней приблизительно на 50% меньше, чем на внутренних рядах. В шахматном пучке труб коэффициент теплоотдачи остается неизменным начиная с третьего ряда.

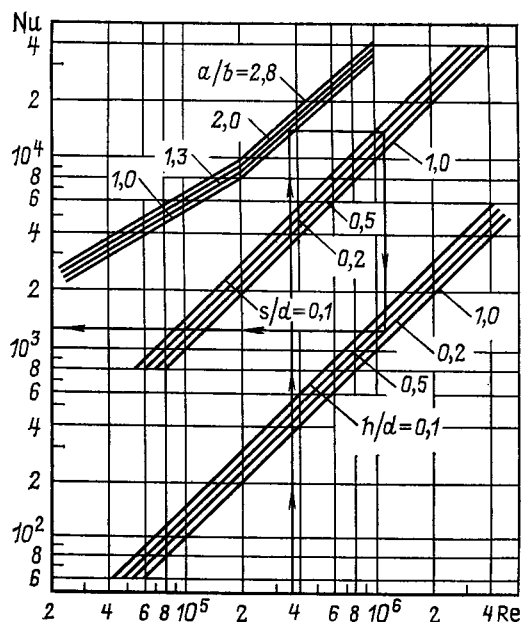


Рис. 20. Номограмма для расчета теплоотдачи в шахматных оребренных пучках труб при обтекании потоком воздуха

Теплообмен при поперечном обтекании пучка труб с низкими радиальными ребрами. Трубы с относительно низкими ребрами широко используются в промышленности. Большинство этих труб имеет 630 и 748 ребер (высотой

1,6 мм) на 1 м длины. Для расчета коэффициента теплоотдачи в теплообменниках с такими трубами в [37, 38] предложено следующее эмпирическое уравнение:

$$Nu' = 0,155 Re^{0,6} Pr^{0,33} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0,14} \quad (38)$$

В этом случае

$$Nu' = \alpha d' / \lambda, \quad Re' = m d' / \eta,$$

где d' — эквивалентный диаметр оребренной трубы, который соответствует внешнему диаметру гладкой трубы с тем же внутренним диаметром и площадью поперечного сечения оребренной трубы (включая ребра); m — массовая скорость; η — динамическая вязкость.

В широкой области чисел Рейнольдса интенсивность теплоотдачи от пучков оребренных труб с низкими ребрами ($d=22,2$; $h=1,4$; $s=1,25$ мм) определена экспериментально в [39]. Получены следующие эмпирические выражения:

$$Nu = 0,0729 Re^{0,74} Pr^{0,36} \quad (39)$$

в области чисел Рейнольдса $5 \cdot 10^3 < Re < 3,5 \cdot 10^4$;

$$Nu = 0,137 Re^{0,68} Pr^{0,36} \quad (40)$$

в области чисел $3,5 \cdot 10^4 < Re < 2,35 \cdot 10^5$;

$$Nu = 0,0511 Re^{0,76} Pr^{0,36} \quad (41)$$

в области чисел $2,35 \cdot 10^5 < Re < 10^6$.

Сравнение с экспериментальными данными. На рис. 21, 22 экспериментальные данные для коридорных и шахматных пучков сравниваются с результатами, полученными из уравнений (34), (35). Точки на этих рисунках не являются экспериментальными, а свидетельствуют о ха-

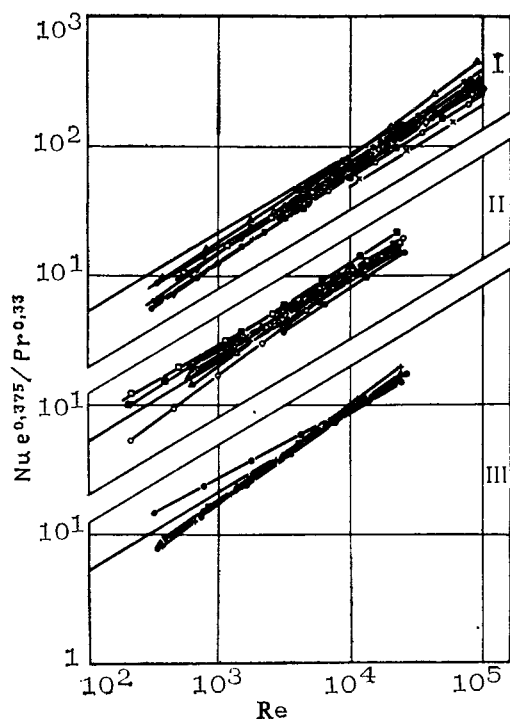


Рис. 21. Коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании газом коридорных пучков оребренных труб

	АВТОР	d_r мм	s_r мм	δ_r мм	h_r мм	s_{1r} мм	s_{2r} мм	ϵ	m	c
I	Brauer [40]	28	11	1,5	2	50,5	50,5	1,41	0,72	0,079
		28	3,5	1,5	2	50,5	50,5	1,22	0,62	0,178
		28	11	1,5	5	54	54	2,19	0,725	0,063
		28	7	1,5	5	50,5	50,5	2,76	0,74	0,066
		28	5,5	1,5	5	53,5	53,5	3,24	0,635	0,114
		28	3,5	1,5	5	50,5	50,5	4,53	0,64	0,075
		28	7	1,5	10	54,5	54,5	5,04	0,74	0,043
		28	11	1,5	15	59	59	5,34	0,765	0,038
		28	3,5	1,5	10	54,9	54,9	6,18	0,67	0,067
		28	7	1,5	15	59	59	7,81	0,69	0,072
		28	5,5	1,5	12,5	57	57	7,83	0,70	0,048
		20	4	0,8	9,5	39	39	8,03	0,675	0,069
		28	3,5	1,5	10	54,5	54,5	9,04	0,67	0,065
		29	3,2	0,4	9,8	50	56	9,23	0,65	0,065
		28	5,5	1,5	15	59	59	9,44	0,675	0,052
		20	4	1	14	49	49	13,0	0,615	0,115
		28	3,5	1,5	15	59	59	14,6	0,615	0,096
II	Hirschberg [31]	15	4	0,3	7	30	30	6,4	0,663	0,098
		15	4	0,3	7	30	30	6,4	0,686	0,088
		15	4	0,3	7	30	60	6,4	0,60	0,212
		15	4	0,3	7	30	60	6,4	0,58	0,280
		15	4	0,3	7	45	45	6,4	0,70	0,089
		15	4	0,3	7	45	45	6,4	0,70	0,093
		15	4	0,3	7	45	60	6,4	0,75	0,059
		15	4	0,3	7	45	60	6,4	0,65	0,144
		15	4	0,3	7	45	60	6,4	0,71	0,087
		15	4	0,3	7	45	60	6,4	0,62	0,195
		15	2	0,3	7	30	30	11,8	0,58	0,212
		15	2	0,3	7	30	30	11,8	0,64	0,138
		15	2	0,3	7	30	30	11,8	0,76	0,038
III	Schmidt [32]	24	3,5	0,53	13	56	52	12,4	0,54	0,287
		24	3,5	0,53	13	56	52	12,4	0,69	0,069
		24	3,5	0,53	13	56	52	12,4	0,70	0,067
		24	3,5	0,53	13	56	52	12,4	0,70	0,067
		24	3,5	0,53	13	56	52	12,4	0,745	0,049

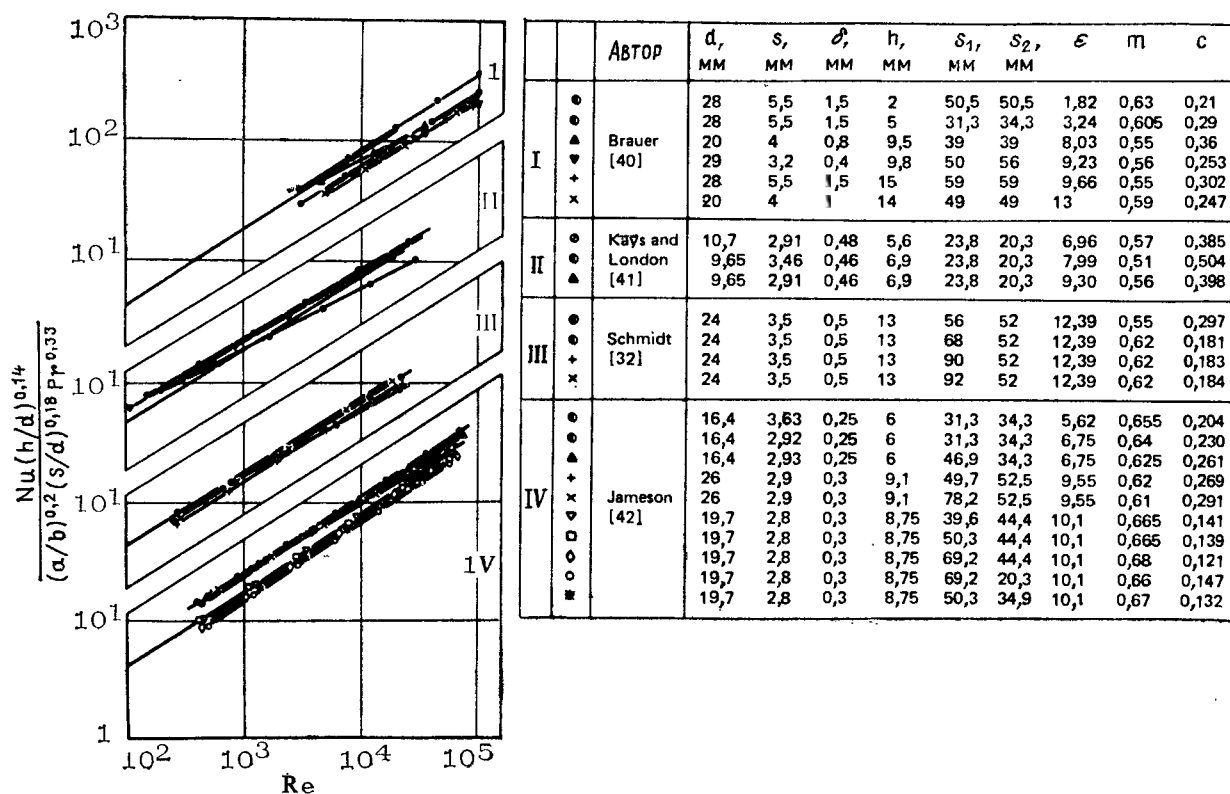


Рис. 22. Коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании газом шахматных оребренных пучков труб

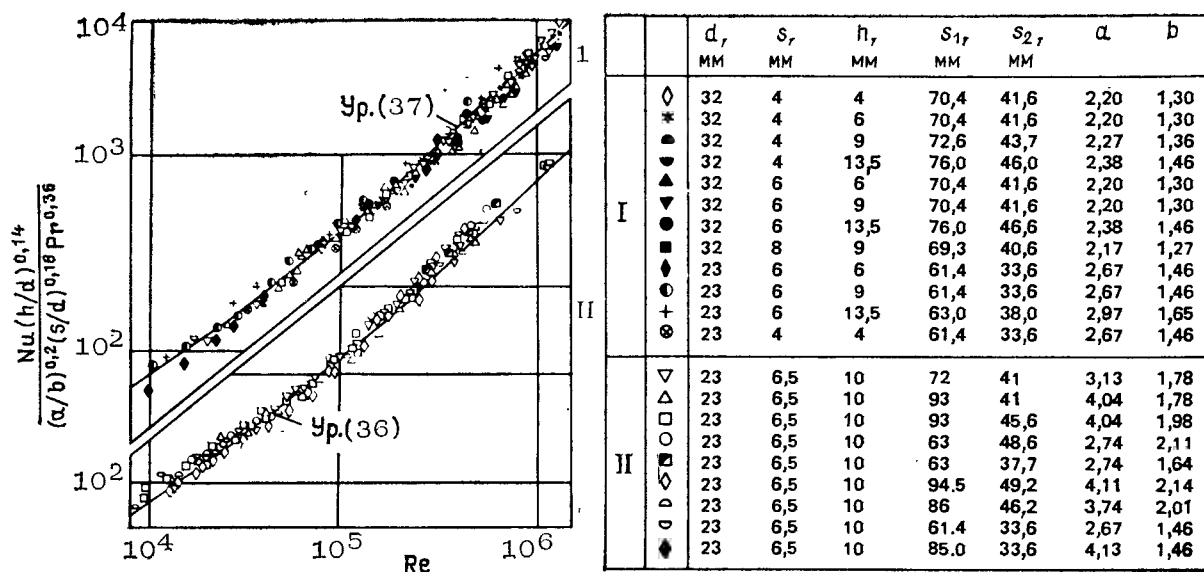


Рис. 23. Коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании газом с высокими числами Рейнольдса шахматных оребренных пучков труб

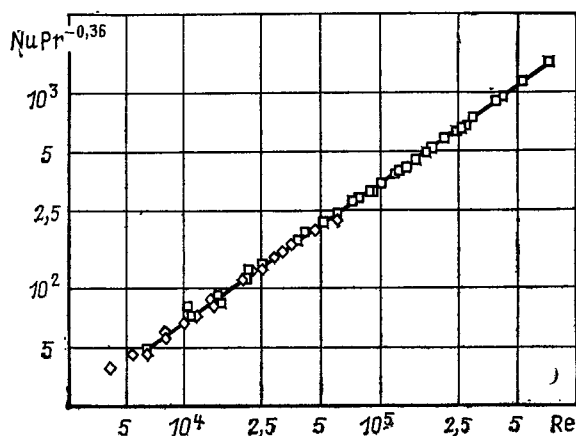


Рис. 24. Коэффициенты теплоотдачи для шахматных пучков оребренных труб с низкими ребрами

раактеристиках пучков, приведенных в сопровождающей графике таблицы. Числа Нуссельта для пучка оребренных труб описываются следующей зависимостью:

$$Nu = c Re^m Pr^{0,333} \quad (42)$$

На рис. 23 сравниваются экспериментальные результаты, полученные в [29] для 21 шахматного пучка из оребренных труб с винтовыми ребрами с числами Nu , вычисленными по уравнениям (36), (37). На рис. 24 для сравнения приведены результаты, полученные из уравнений (40), (42).

2.5.4. Неподвижные слои¹

В. Гнилинский

А. Введение. Сведения о коэффициентах теплоотдачи между частицами в плотноупакованных слоях и жидкостью являются необходимыми при конструировании и эксплуатации химических реакторов. Оценка интенсивности теплообмена важна, например, для химических реакторов с неподвижным катализатором, в которых поглощается или выделяется большое количество теплоты, или для регенеративных теплообменников с неподвижным слоем. В качестве элементов неподвижного слоя используются частицы различных форм, такие, как сферы, цилиндры, кольца Рашинга и др. Проблемы теплообмена в химических реакторах вследствие их важности посвящено большое число статей. Обзоры [1, 2] свидетельствуют о том, что корреляционные уравнения отличаются большим разнообразием. Ниже рассмотрены результаты, полученные в слоях, образованных сферами одинакового размера.

В. Порядок расчета. Измерения, проведенные в [3], показали, что числа Нуссельта при течении жидкости в плотноупакованном слое увеличиваются в первых двух слоях сфер и достигают некоторого предельного значения. В [4] показано, что измеренные в слоях числа Нуссельта существенно больше, чем для одиночных сфер, при той же скорости обтекания, и это отличие уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. Из этого следует, что средние числа Нуссельта при течении через неподвижные сферические насадки с любой долей пустот (порозностью) можно рассчитать, используя уравнение

$$Nu = f_\psi Nu_{\text{single sphere}} \quad (1)$$

где $Nu_{\text{single sphere}}$ определяется с помощью соотношения (21), § 2.5.2,

$$Nu_{\text{single sphere}} = 2 + \sqrt{Nu_{\text{lam}}^2 + Nu_{\text{turb}}^2} \quad (2)$$

$$Nu_{\text{lam}} = 0,664 \sqrt{Re_\psi} \sqrt[3]{Pr}; \quad (3)$$

$$Nu_{\text{turb}} = \frac{0,037 Re_\psi^{0,8} Pr}{1 + 2,443 Re_\psi^{0,1} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (4)$$

В этих уравнениях $Nu = \alpha d / \lambda$ — число Нуссельта; $Re_\psi = \omega_{\text{free}} d / (v\psi)$ — число Рейнольдса; $Pr = \nu / k$ — число Прандтля; d — диаметр сферы; ω_{free} — скорость движения среды во входном поперечном сечении объема с плотноупакованной насадкой.

Коэффициенты теплопроводности λ , кинематической вязкости ν и температуропроводности k движущейся среды определяются по среднemasовой температуре

$$T_m = (T_{\text{in}} + T_{\text{out}}) / 2. \quad (5)$$

Коэффициент теплоотдачи α определяется с учетом значения теплового потока с помощью соотношения

$$\dot{q} = \alpha \Delta T_{LM}. \quad (6)$$

Среднелогарифмический температурный напор

$$\Delta T_{LM} = \frac{T_{\text{out}} - T_{\text{in}}}{\ln(T_w - T_{\text{in}}) / (T_w - T_{\text{out}})} \quad (7)$$

находят, зная температуру поверхности сферы T_w . Порозность ψ сферической насадки вычисляют, зная значения общего объема V_{tot} и объема сфер V_s , содержащихся в нем,

$$\psi = (V_{\text{tot}} - V_s) / V_{\text{tot}}. \quad (8)$$

Для коэффициента формы предложена следующая зависимость [5]:

$$f_\psi = 1 + 1,5(1 - \psi). \quad (9)$$

Уравнение (9) применимо для насадок, состоящих из сферических частиц равного размера с порозностью $0,26 < \psi < 1$.

С. Замечания. В области чисел Пекле $Pe = Re_\psi Pr < 500 + 1000$ экспериментально определенные в плотноупакованных слоях коэффициенты теплоотдачи от частиц к жидкости оказываются значительно ниже величин, рассчитанных с помощью (2). Большое число таких экспериментальных результатов проанализировано и обобщено в [6]. Отличие между теорией и экспериментом объяснено в [7] с помощью простой модели, учитывающей неравномерность порозности слоя. Модель рассматривает плотноупакованные слои из неравномерных частиц со средней порозностью ψ , в которых малая часть общего поперечного сечения имеет большую порозность. Поскольку градиент давления, приложенный к плотноупакованному слою, одинаков, скорость будет заметно больше в сечении с большей порозностью, особенно в области низких чисел Рейнольдса. Большинство экспериментальных данных в [6] свидетельствует о том, что, даже если местные коэффициенты теплоотдачи в обеих частях слоя вычисляют, используя уравнение (2), средние коэффициенты теплоотдачи для неоднородной системы будут намного меньше, хотя и будут обладать теми же характерными зависимостями от числа Пекле и отношения диаметра частиц к высоте слоя.

Д. Сравнение с экспериментальными данными. На рис. 1 представлены измеренные приведенные значения коэффициентов теплоотдачи Nu/f_ψ и массоотдачи Sh/f_ψ , полученные различными авторами. На рисунке приведены также результаты измерений теплоотдачи при обтекании потоками воздуха, N_2 , H_2 и CO_2 обогреваемых сфер, а также измерения массоотдачи при обтекании воздухом пористых сфер с испарением воды на поверхности. Пороз-

¹ Пер. с англ. Н. В. Медведкой.

	$d, \text{мм}$	ψ	Pr, Sc
Rowe and Claxton [10]	38.1	0.260	6.0-7.2
	38.1	0.365	6.7-7.0
	38.1	0.488	6.7-7.0
	38.1	0.632	6.6-7.0
	38.1	0.476	6.4-7.0
Thoenes and Kramers	15.0	0.26	1 175-1 840
	15.0	0.395	1 100-1 320
	15.0	0.476	1 100-1 430
Wilson and Geankopolis [22]	6.3	0.403	1 171-1 231
Williamson et al. [25]	6.1	0.431	1 103-1 140
McCune and Wilhelm [26]	6.4	0.375	1 200-1 450
	4.8	0.369	1 240-1 405
	3.2	0.355	1 330-1 350
	6.4	0.375	1 340
	1.3	0.445	1 340
	2.1	0.433	1 300
Karabelas et al. [27]	12.7; 25.4; 76.2	0.26	1 600
Rowe and Claxton [10]	15.9	0.26	1 360-1 670
	6.4; 12.7	0.37	1 380-1 440
	38.1	0.26	1 360-1 400
	38.1	0.365	1 310-1 410
	38.1	0.488	1 280-1 410
	38.1	0.632	1 320-1 370
Jolls and Hanratty [28]	25.4	0.410	1 695
	25.4	0.410	1 740
	25.4	0.410	1 780
Rowe and Claxton [10]	38.1	0.26	2.54
	38.1	0.476	2.54
	38.1	0.365	2.54
	38.1	0.488	2.54
	38.1	0.632	2.54
Thoenes and Kramers [14]	15.0	0.26	780-1 070
	15.0	0.395	910-1 060
	15.0	0.476	800-1 090
	13.8	0.320	880-1 040
Wilson and Geankopolis [22]	6.2	0.436	876-1 107
	6.3	0.401	760-1 000
	6.3	0.441	950-1 070
Bhattacharya and Raja Rao [23]	23.4	0.53	794
	23.4	0.49	794
	7.9	0.39	794
	17.6	0.53	930
Evans and Gerald [24]	2.0	0.51	1 050-1 104
Venkateswaran and Laddha [19]	19.0	0.483	867-892
Thoenes and Kramers [14]	15.0	0.26	1 960-2 300
	15.0	0.26	3 300-3 650
	15.0	0.395	2 400-2 800
	15.0	0.476	1 960-2 800
	15.0	0.476	2 870-3 540
	13.8	0.32	3 380-3 530
Gaffney and Drew [18]	12.2	0.52	10 100-11 000
	9.2	0.497	10 400-11 000
	6.0	0.507	10 700-11 500

ность слоев ψ изменялась от 0,26 до 0,935. Для сравнения с измеренными данными на рис. 1 приведены сплошные кривые, представляющие средние числа Нуссельта и Шервуда при обтекании одиночной сферы для чисел $\text{Pr}=\text{Sc}=0,7$ и 0,6 и рассчитанные с помощью уравнения (2) при $f_\psi=1$.

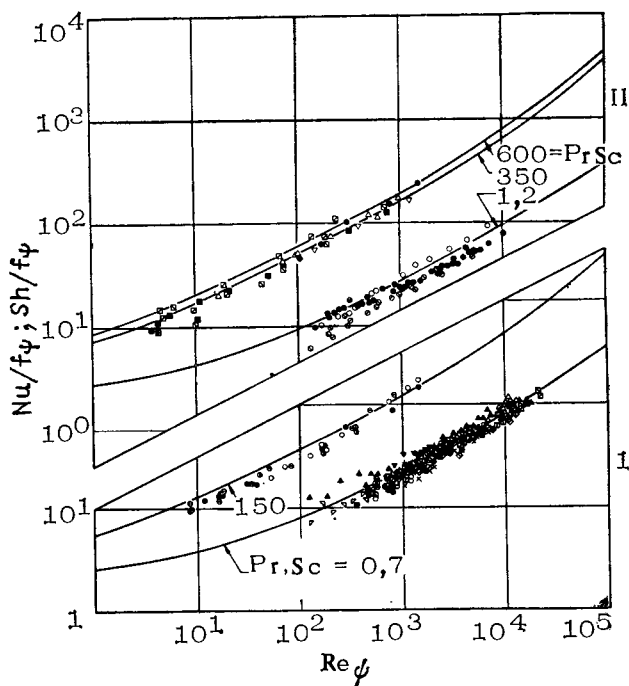


Рис. 2. Экспериментальные значения Nu/f_ψ , Sh/f_ψ и приведенные числа Шервуда (массоотдача при числах Шмидта от 1,2 до 680) (обозначения см. в подписи к рис. 1)

Как видно из рисунка, большинство экспериментальных данных отклоняется от значений, рассчитанных по (2), не более чем на $\pm 15\%$.

На рис. 2 в дополнение к проверке экспериментальных значений, приведенной на рис. 1, представлены приведенные числа Шервуда, взятые из работ по исследованию массоотдачи с числами Шмидта от 1,2 до 680. На рис. 3 приведены данные для чисел Прандтля и Шмидта от 2 до 10^4 и порозности слоев от 0,26 до 0,63. Кривые — результат расчетов по уравнению (2) для постоянных чисел Pr и Sc с $f_\psi=1$. Из рисунка видно, что, так же как и на рис. 1 и 2, измеренные значения отклоняются от расчетных [см. уравнение (2)] не более чем на $\pm 15\%$.

2.5.5. Теплообмен между жидкостью и частицами в псевдооживенных слоях¹

С. С. Забродский. Под ред. Х. Мартина

А. Введение. Область псевдооживения. Расширение слоев. Псевдооживение твердых частиц потоком газа или жидкости происходит при скорости движения

$$u_{mf} < u < u_t, \quad (1)$$

где u_{mf} — так называемая минимальная скорость псевдооживения; u_t — предельная (критическая) скорость. Минимальную скорость псевдооживения u_{mf} можно получить из баланса сил, приравнивающего градиент давления в неподвижном слое к весу частицы (подъемной силе), отношению к площади поперечного сечения. Используя уравнение для определения градиента давления в неподвижных слоях [1], получаем число Рейнольдса $\text{Re}_{mf} = \rho_f u_{mf} d / \eta_f$ как функцию числа Архимеда $\text{Ar} = g d^3 \rho_f (\rho_p - \rho_f) / \eta_f^2$ и порозно-

¹ Пер. с англ. Н. В. Медведкой.

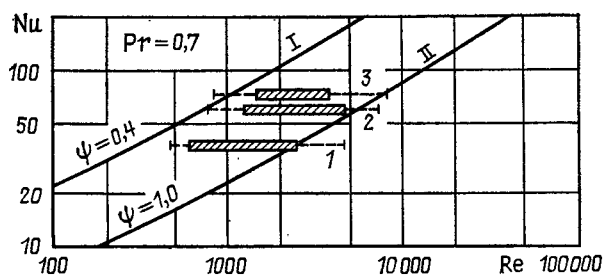


Рис. 2. Теплоотдача металлических сфер, псевдоожижаемых воздухом: экспериментальные данные [5] показаны в виде заштрихованных прямоугольников; штриховые линии — область псевдоожижения см. уравнения (2), (5) из [5], I — неподвижные слои; II — одиночная сфера. Параметры, характеризующие процесс обтекания металлических сфер воздухом, приведены ниже:

Номер	Материал	d , мм	Ag , 10^6	Re_t
1	Al	4,76	6,93	4680
2	Al	6,35	16,50	7390
3	Сталь	4,76	20,00	8180

При числах $Nu \geq 2$ (см. (11)) NTU выше для малых значений $Re = Re_{Pr}$ и выходящая температура жидкости $T_{F, out}$ близка к значению температуры теплового равновесия T_s [см. (14)]. Так, для того чтобы проверить, становятся ли коэффициенты тепло- или массоотдачи в псевдоожиженных слоях действительно равными значениям, полученным с помощью уравнений (11), (13) и (15), необходимо прежде всего проанализировать экспериментальные данные при

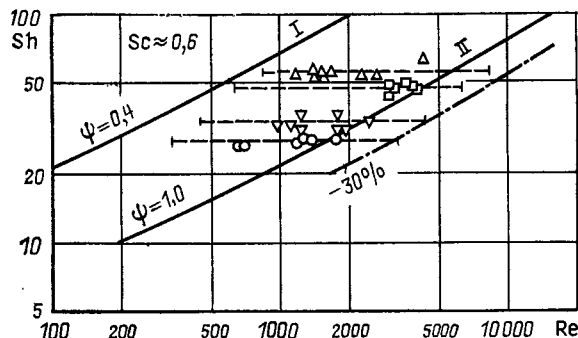


Рис. 3. Массообмен влажных пористых бетонных частиц, псевдоожижаемых воздухом. Штриховые линии показывают область псевдоожижения. Экспериментальные данные [7]: I — неподвижный слой; II — одиночная сфера. Параметры процесса приведены ниже:

Эксперимент	d , мм	ψ	Sc	Ag , 10^6	Re_t
Δ	9,0	0,439—0,848	0,6	20,3	8240
$\square$	7,6	0,824—0,905		12,0	6260
∇	6,0	0,684—0,886		6,0	4340
$\circ$	5,0	0,587—0,870		3,5	3260

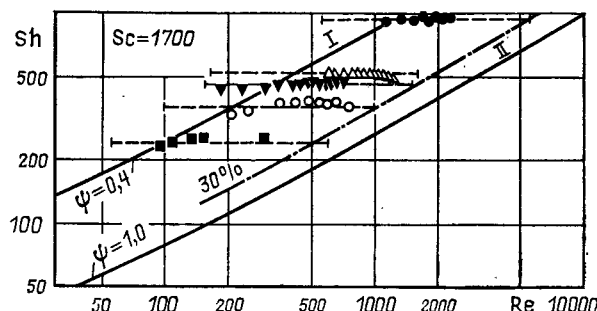


Рис. 4. Массоотдача сфер из твердой бензойной кислоты, псевдоожижаемых водой. Штриховые линии показывают область псевдоожижения. Экспериментальные данные [9]: I — неподвижный слой; II — одиночная сфера. Параметры процесса приведены ниже:

Эксперимент	d , мм	ψ	Sc	Ag , 10^6	Re_t
$\bullet$	16,5	0,608—0,805	1654—1734	9,3	5470
$\triangle$	7,9	0,746—0,956	1715—1868	0,93	1590
∇	7,3	0,445—0,808	1484—1556	0,85	1510
$\circ$	5,7	0,571—0,942	1597—1637	0,40	1000
$\blacksquare$	4,1	0,540—0,893	1462—1714	0,16	590

высоких числах Пекле (или соответственно низких NTU_3). При низких числах Pr или Sc , характерных для газов, высокие числа Re означают высокие числа Рейнольдса или относительно большие диаметры частиц.

Данные по теплообмену в этой области, приведенные в [5], получены на металлических сферах (диаметр 4,76 или 6,35 мм), псевдоожижаемых потоком воздуха. Они свидетельствуют о том, что коэффициенты теплоотдачи не зависят от скорости течения газа в области псевдоожижения [это следует из уравнений (10) — (13)].

На рис. 2 эти данные (заштрихованные узкие прямоугольники) показаны в виде зависимости Nu от Re . Штриховые горизонтальные линии, проходящие через прямоугольники, показывают область псевдоожижения ($Re_{mf} < Re < Re_t$). Аналогичные результаты получены в [6—8] при испарении воды с пористых керамических сфер и псевдоожижении слоев потоком воздуха. Данные [7] показаны на рис. 3 в виде зависимости чисел Sh от Re . Результаты эксперимента также свидетельствуют о том, что коэффициенты массоотдачи не зависят от скорости течения в области псевдоожижения. Абсолютные (измеренные) значения оказываются ниже рассчитанных по уравнениям (10) — (13) на 20—30%. В этих экспериментах, вероятно, сказывается влияние дополнительного инерционного сопротивления массоотдаче (локальная сушка пористых бетонных *Siporex* частиц), влияние перетечек или других отклонений от идеального стержневого режима течения газовой фазы. Данные по массоотдаче на сферических частицах из твердой бензойной кислоты, псевдоожижаемых водой ($Sc \approx 1700$), полученные в [10], показывают аналогичное поведение (рис. 4). В этом случае абсолютное значение на 20—30% выше, чем рассчитанные по (10) — (13).

С использованием методики [9] псевдоожижения водой сферических частиц из бензойной кислоты в [10] продолжены измерения [9], но с частицами меньших размеров ($4,2 \text{ мм} \geq d \geq 0,7 \text{ мм}$) — в области чисел Рейнольдса от $1,6 < Re < 91$. Эти данные для диаметров частиц, изменяющихся от режима к режиму, представлены на рис. 5 с использованием различных символов для каждого диапазона значений чисел Архимеда. В противоположность данным [9] в [10] результаты получены в узкой области значений порозности $0,49 < \psi < 0,62$. Они также приблизительно на 20—30% выше, чем рассчитанные по уравнениям (10) — (13).

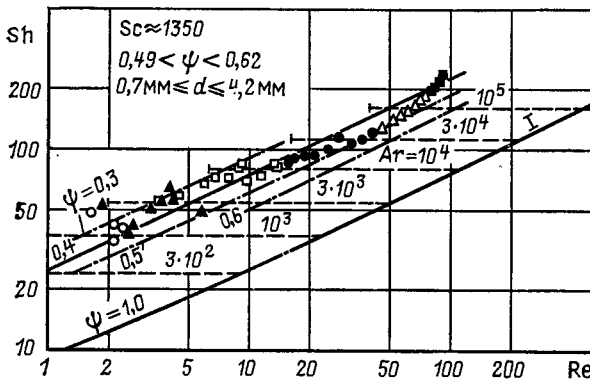


Рис. 5. Массоотдача сфер из твердой бензойной кислоты, псевдоожижаемых водой. Штриховые линии — расчет по уравнениям (10) — (13). Экспериментальные данные [10]; 1 — одиночная сфера. Ниже приведены числа Архимеда, используемые авторами в различных экспериментах:

Эксперимент	Ar, 10³	Эксперимент	Ar, 10³
○	0,3—1,0	●	10,0—30,0
▲	1,0—3,0	△	30,0—100,0
□	3,0—10,0	■	100,0—3000,0

Д. Некоторые замечания о коэффициентах тепло- и массоотдачи в области низких чисел Пекле. В области низких чисел Re (примерно не более 500) большинство экспериментально полученных коэффициентов тепло- и массоотдачи в плотноупакованных, а также в псевдоожиженных слоях лежит ниже значений, рассчитанных с помощью зависимости (11) [11—15]. Большинство специалистов по тепло- и массообмену полагают, что низкие значения коэффициентов теплоотдачи, соответствующих числам Нуссельта и Шервуда, меньшим двух представляют собой не реальные коэффициенты теплоотдачи, а только эффективные (кажущиеся) значения. Причина этих низких кажущихся коэффициентов тепло- и массоотдачи по сути в том, что они обычно определяются по измерениям входным и выходным температурам в предположении, что режим течения жидкости через слой является идеальным стержневым. Действительно, при течении через беспорядочно упакованные и псевдоожижаемые слои всегда имеют место некоторое перемешивание, вызванное возвратными течениями, и (или) небольшие отклонения от идеального распределения скорости, которые могут привести к эффекту байпасирования [14—16]. В области высоких чисел Пекле и соответственно низких NTU_s эти отклонения от идеального пробкового режима течения не оказывают большого влияния на средние характеристики. Однако для низких чисел Пекле даже очень небольшие отклонения в распределении скорости в поперечном сечении слоя могут вызвать уменьшение средних значений коэффициентов отдачи (см. рис. 5, § 2.1.4). Эти эффекты учитывались в моделях, предложенных различными авторами: модель микропорывов (micro breakthrough) [11]; модель пузырькового слоя (bubbling bed) [12]; модель возмущений (male distribution) [14]. Все эти модели содержат один или более подгоночных параметров, которые можно использовать для того, чтобы подобрать результирующие уравнения к любому набору экспериментальных данных.

Простейшей и наиболее удобной для применения является однопараметрическая модель «байпас», которая использовалась в [16, 17] для псевдоожиженных слоев и в модифицированном виде в [15] для плотноупакованных слоев.

В этой модели полная скорость течения через слой рассматривается как сумма скоростей основного и байпасного потоков. Предполагается, что байпасный поток проходит через слой, не принимая участия в процессах тепло- и массообмена и, таким образом, покидает его с начальными значениями температуры и концентраций. С учетом этого предположения выходная температура (концентрация) равна температуре смешения обоих потоков

$$\frac{T_{F, out} - T_s}{T_{F, in} - T_s} = (1 - v) e^{-NTU_M} + v, \quad (16)$$

$$v = \frac{\dot{M}_{bypass}}{\dot{M}_{total}} \quad (\text{безразмерная скорость байпасного потока}) \quad (17)$$

и

$$NTU_M = \frac{6(1 - \psi) L Nu}{d(1 - v) Re Pr} \quad (NTU \text{ основного потока}). \quad (18)$$

Число Nu в уравнении (18), как и прежде, рассчитывается из соотношений (10) — (13). Определив на основе измерений входной, выходной температуры газа и температуры твердой фазы коэффициенты теплоотдачи, считая течение жидкости стержневым, получим кажущиеся коэффициенты теплоотдачи

$$Nu_{app} = \frac{Re Pr d}{6(1 - \psi) L} \ln[(1 - v) e^{-NTU_M} + v]. \quad (19)$$

При скорости байпасного течения, составляющей 5% общей скорости ($v = 0,05$), уравнение (19) при $\psi_{mf} = 0,5$; $L_{mf}/d = 10$; $Pr = 0,7$ (воздух) и $Re = Re_t$ дает:

Re	Nu	Nu_{app}
1	2,59	0,070
10	3,88	0,699
100	8,06	6,05
1000	22,6	31,8
10 000	80,4	79,6

Эти эффективные числа Нуссельта можно сопоставить с экспериментальными данными различных авторов, представленными на рис. 6 [12].

Для того чтобы сопоставить данные по тепло- и массообмену в области низких чисел Пекле с соотношениями (18) и (19), необходимо иметь длину слоя L и удельную площадь поверхности

$$a_v = 6(1 - \psi)/d. \quad (20)$$

Одной из работ, содержащих всю необходимую информацию об экспериментальных данных, является [18]. Результаты, полученные в этой работе, используются здесь, чтобы показать, что модель «байпас» в состоянии объяснить наблюдаемые в области низких чисел Пекле закономерности.

Авторы [18] свели в таблицу значения NTU , полученные непосредственно из измеренных парциальных давлений нафталина на выходе из слоя ($p_{1, in} = 0$)

$$NTU_{app} = \ln \frac{p_1^* - p_{1, in}}{p_1^* - p_{1, out}}. \quad (21)$$

Уравнение (21) для массоотдачи, которое является эквивалентом (14), основывается на предположении об идеальном стержневом режиме течения газа. Из уравнений модели «байпас» (16) — (19) находим

$$NTU_{app} = -\ln[(1 - v) e^{-NTU_M} + v], \quad (22)$$

где для массоотдачи

$$NTU_M = \frac{a_v L Sh}{(1 - v) Re Sc}. \quad (23)$$

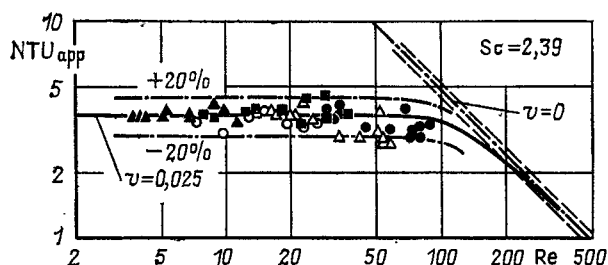


Рис. 6. Массоотдача частиц нафталина, псевдоожигаемых воздухом [18]. Сравнение экспериментальных данных [18] с расчетом по модели байпасирования с постоянной относительной скоростью байпасного течения ($v=0,025$). Параметры процесса приведены ниже:

Эксперимент	d , мм	Ar	Re_{mf}	Re_t	Sh	$a_0 L$
●	1,06	54 300	25,8	315,4	18,3	68
□	0,74	17 300	10,3	156,8	13,4	80
△	0,47	4380	2,96	64,31	9,2	123
○	0,40	2470	1,71	43,46	7,9	146
▲	0,28	836	0,59	19,94	5,98	190

Числа Шервуда получены из уравнений (10) — (13), в которых числа Nu заменены числами Шервуда Sh, а числа Pr — числами Шмидта Sc. Из соотношения (22) видно, что NTU_{app} становятся очень близкими к NTU_M , если v малы по сравнению с единицей и числа Пекле $Pe = ReSc$ велики, а значения NTU_M малы. При низких числах Pe , т. е. когда NTU_M больше пяти, кажущиеся значения NTU перестают зависеть от любых свойств, что обычно оказывает некоторое влияние на тепло- и массоотдачу,

$$\lim_{Re \rightarrow 0} NTU_{app} = -\ln v. \quad (24)$$

На рис. 6 показаны кажущиеся значения NTU , измеренные в [18] для частиц нафталина ($0,28 < d < 1,06$), псевдоожигаемых потоком воздуха, в виде зависимости NTU от числа Рейнольдса. Как показывает соотношение (24), кажущиеся значения NTU при низких числах Пекле (или Рейнольдса) становятся постоянными. Кривые рассчитаны из уравнений (22), (23) и (10) — (13) для относительной скорости байпасирования 2,5% ($v=0,025$). Те же данные показаны в виде зависимости Sh от Re на рис. 2 в гл. 7 [12] для сопоставления с данными, полученными по модели кипящего слоя. Без учета байпасного течения NTU обратно пропорционально числу Re [см. соотношение (23) и пунктирную линию для $v=0$ на рис. 6].

На рис. 7 показаны аналогичные данные для частиц одного диаметра ($d=0,4$ мм), псевдоожигаемых тремя различными газами. Несмотря на различие в интенсивностях диффузии нафталина в водороде, воздухе и двуокиси углерода, измеренные значения NTU_s оказываются близкими и отличаются не более чем на 15%. Кривые на рис. 7 рассчитаны с помощью уравнения (22) для относительной скорости байпасного течения 2,5%. Без учета байпасного эффекта значения NTU_s будут определены как 1 : 2,1 : 3,8 соответственно для H_2 , воздуха и CO_2 (см. расчетные кривые для $v=0$ на рис. 7).

Возникают определенные трудности при отсутствии возможности определить относительное значение скорости байпасного потока. В [18] использовалось $v=0,0025$ как наиболее удобное и обоснованное. В [16] при изучении испарения воды с частиц пористого алюминиевого силиката и молекулярных сит ($0,92 < d < 4,12$ мм) определено значение $v=0,05$, которое подходит для описания этих данных соотношениями модели «байпас». В [17] с использованием

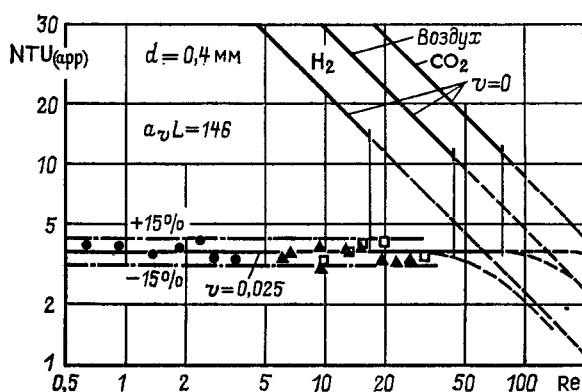


Рис. 7. Массоотдача от частиц нафталина, псевдоожигаемых водородом, воздухом и двуокисью углерода. Сравнение экспериментальных данных [18] с расчетом по модели «байпас» с постоянной относительной скоростью байпасного течения ($v=0,025$). Параметры процесса приведены ниже:

Эксперимент	Газ	Sc	Ar	Re_{mf}	Re_t	Sh
●	H_2	4,02	650	0,46	16,5	6,31
▲	Воздух	2,39	2470	1,71	43,5	7,90
□	CO_2	1,47	5810	3,86	77,7	8,76

методики [16] показано, что v линейно увеличивается с ростом диаметра частиц. Для частиц с диаметрами 0,92; 2,76 и 4,30 мм относительные скорости байпасного потока, определяющиеся из измеренных значений NTU_s (или кажущихся чисел Шервуда), равнялись соответственно 0,033; 0,098 и 0,152.

Таким образом, если непосредственное измерение NTU_{app} невозможно, считается, что в первом приближении

$$v \approx 0,05. \quad (25)$$

Это значение соответствует предельному кажущемуся NTU [см. (24)] для $NTU_{app}=3$.

Е. Примеры. Для примера рассмотрим импульсное охлаждение прожаренных кофейных зерен в охладителе с псевдоожженным слоем (рис. 8).

Кофе периодически прокаливается в псевдоожженном слое в устройстве типа трубы Вентури. Время обжаривания одной партии составляет 150 с. В течение этого времени предыдущая партия охлаждается в атмосферном воз-

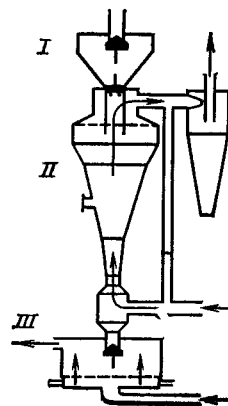


Рис. 8. Приспособление для обжаривания кофе II с псевдоожженным слоем, резервуаром-хранилищем I и охладителем III с псевдоожженным слоем

духе, двигаясь вниз в псевдооживленном цилиндрическом слое.

Вопрос: является ли это время достаточным для охлаждения кофейных зерен от температуры $T_{s,i}=300^\circ\text{C}$ до менее чем 30°C . Заданы следующие величины.

Твердое тело (индекс s) — кофейные зерна: начальная температура $T_{s,i}=300^\circ\text{C}$; теплоемкость $C_s=1,70$ кДж/(кг·К); плотность $\rho_s=630$ кг/м³; теплопроводность $\lambda_s=0,1$ Вт/(м·К); приведенная масса, отнесенная к площади поперечного сечения, $M_s/S=m_s=60$ кг/м², средний диаметр частиц $d=6$ мм.

Газ (индекс g) — атмосферный воздух: температура на входе $T_{g,in}=20^\circ\text{C}$; массовая скорость $\dot{m}_g=3$ кг/(м²·с); плотность $\rho_g=1$ кг/м³; теплоемкость $C_{p,g}=1$ кДж/(кг·К); теплопроводность $\lambda_g=0,029$ Вт/(м·К); кинематическая вязкость $\nu_g=20 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Предполагается, что твердая фракция хорошо перемешивается, так что T_s является функцией времени и не зависит от расположения в системе координат.

Пренебрегая локальным изменением энтальпии газа по сравнению с твердой фракцией, имеем

$$v \approx 0,05. \quad (25a)$$

$$m_s C_s \frac{dT_s}{dt} = \dot{m}_g C_{p,g} [T_{g,in} - T_{g,out}(t)]; \quad (26)$$

$$\frac{T_{g,out}(T) - \bar{T}_s(t)}{T_{g,in} - \bar{T}_s(t)} = (1-v) e^{-NTU_M} + v \quad [\text{из уравнения (16)}]. \quad (27)$$

Из этих двух соотношений для двух неизвестных функций от времени $T_{g,out}(t)$ и $\bar{T}_s(t)$ исключим первую $T_{g,out}(t)$; затем, проинтегрировав по времени, получим

$$\theta_s = \frac{\bar{T}_s(\tau) - T_{g,in}}{T_{s,i} - T_{g,in}} = \exp[-(1-v)(1 - e^{-NTU_M})\tau], \quad (28)$$

где

$$\tau = \frac{\dot{m}_g C_{p,g}}{m_s C_s} t; \quad (29)$$

$$NTU = \frac{6U m_s / \rho_s}{\dot{m}_g C_{p,g} (1-v)}. \quad (30)$$

Поскольку $\bar{T}_s$ не является температурой поверхности кофейных зерен, а некоторой средней температурой, α в NTU_M надо заменить на средний коэффициент теплоотдачи U , включающий внутреннее термическое сопротивление (см. § 2.4.3),

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{\alpha_{\text{outside}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{internal}}}. \quad (31)$$

Внешний коэффициент теплоотдачи рассчитывается из соотношений (5) — (10), (13) как

$$Gr = \frac{gd^3}{\nu^2} \frac{\rho_s - \rho_g}{\rho_g} = 3,34 \cdot 10^6;$$

$$Re_{mf}(\Psi_{mf}=0,4)=326; Re_t=3180 \quad [\text{см. (5)}]; Re=900 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{u}{u_{mf}} = 2,76; Pr = \rho_g C_{p,g} \frac{\nu_g}{\lambda_g}; Pr = 0,69; Nu_{lam} = 33,1 \quad [\text{см. (12)}]; Nu_{turb} = 21,3 \quad [\text{см. (13)}]; Nu = 41,32 \quad [\text{см. (11)}];$$

$$\alpha_{\text{outside}} = \frac{\lambda_g}{d} Nu = 200 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)};$$

$$Bi = (\alpha_{\text{outside}} d / 2) / \lambda_s = 5,99; K_s = \frac{\lambda_s}{\rho_s C_s} = 9,34 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$Nu_{i,\infty} = 3,90 \quad [\text{см. (62), § 2.4.3}];$$

$$t^+ = \frac{K_s t}{(d/2)^2} = 1,556;$$

$$Nu_i(t^+) = 4,004 \quad [\text{см. (60), § 2.4.3}];$$

$$\alpha_{\text{internal}} = \frac{\lambda_s}{d/2} Nu_i = 133 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$$

$$U = 80,0 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)} \quad [\text{см. (31)}]; NTU_M = 2,54/(1-v); \tau = 4,41$$

v	θ_s	$\bar{T}_s, ^\circ\text{C}$
0,00	0,0172	24,8
0,05	0,0202	25,7
0,10	0,0239	26,7
0,20	0,0340	29,5

Из этих расчетов видно, что время 150 с достаточно, для того чтобы охладить кофейные зерна до температуры меньшей, чем 30°C , даже если относительная скорость байпасирования составляет 20%.

2.5.6. Струи, ударяющиеся о поверхность¹

Х. Мартин

А. Введение. Нагревание или охлаждение больших площадей поверхностей часто производят с помощью устройств, состоящих из ряда круглых или щелеобразных сопел, через которые воздух (или другой газ) подается перпендикулярно поверхности. Такие устройства с ударяющимися о поверхность струями обеспечивают короткие длины пути газа вдоль поверхности и, следовательно, относительно высокие интенсивности теплоотдачи. Такие устройства применяются в промышленности при отжиге металлических и пластиковых листов, снятии остаточных напряжений в стекле, высушивании тканей, фанеры, бумаги и пленочных материалов. Основными переменными, которые можно выбирать для решения данной задачи тепло- или массообмена, являются объемный расход газа, диаметр сопел или ширина щели, интервалы между ними и расстояние между соплами и поверхностью обрабатываемого материала.

Как показано в [17], картину течения падающих струй из единичного круглого или щелевого сопла можно разделить на три характерные области: область свободного истечения, область формирования течения и область поперечного (или радиального) течения, называемую также в соответствии с основной теоретической работой [8] областью пристенной струи. Поле скорости ударяющейся о поверхность струи схематически показано на рис. 1.

В условиях, соответствующих реальным техническим задачам, струя, свободно истекающая из сопла a диаметром D или с шириной щели B , в общем случае является турбулентной. При интенсивном обмене импульсом с окружающим газом через свободные границы b струя линейно расширяется в длину z' , пока не достигнет такого расстояния z_g от поверхности твердого тела c , которое служит границей ее линейного расширения. Профиль скорости d , будучи почти прямоугольным на выходе из сопла, растягивается по направлению к свободным границам и при достаточной длине свободной струи принимает форму колокола.

Область формирования течения начинается относительно близко к поверхности (согласно [1] расстояние z_g составляет около 1,2 диаметра сопла). Здесь вертикальная составляющая скорости уменьшается и преобразуется в ускоряющуюся горизонтальную составляющую скорости. Известны аналитические решения уравнений Навье-Стокса для такого течения в окрестности критической точки для идеализированного предельного случая бесконечно широ-

¹ Пер. с англ. Е. Б. Эйгенсон

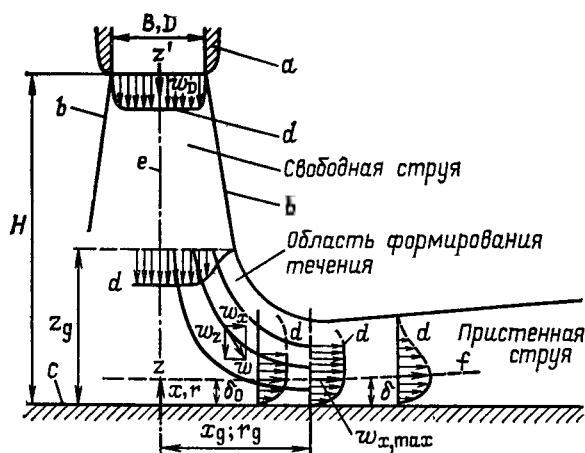


Рис. 1. Поле скоростей в потоке, ударяющемся о поверхность

кой плоскости и осесимметричных ламинарных потоков [9].

Из-за бесконечного расширения струи и ее обмена импульсом с неподвижной окружающей средой ускоряющаяся горизонтальная составляющая скорости должна в конечном счете преобразоваться в замедляющееся течение пристенной струи. Таким образом, составляющая скорости w_x (w_r), параллельная стенке, первоначально линейно увеличивающаяся от нуля, должна достигнуть максимального значения на определенном расстоянии x_g (r_g) от критической точки и в конце концов устремляется к нулю как x^{-n} (r^{-n}) в полностью развитой пристенной струе. Экспонента n приблизительно равна 0,5 для плоской [8, 10, 11] и 1 для осесимметричной [8, 11, 12] турбулентной пристенной струи. Поскольку стабилизирующее влияние ускорения поддерживает ламинарный режим течения в пограничном слое, в зоне формирования потока переход к турбулентному режиму течения в общем случае будет происходить сразу после x_g (или r_g) в области замедления потока. Пристенный пограничный слой и граница свободной струи растут вместе, формируя типичный профиль пристенной струи,

где пограничный слой δ определяется как геометрическое место максимума скорости $z(w_{x, \max})$ (см. рис. 1 и 5).

В общем случае падающая струя из ряда сопел показывает те же самые три области течения: свободная струя, зона формирования потока, пристенная струя, но кроме них имеются вторичные зоны, в которых пристенные струи соседних сопел сталкиваются друг с другом. Подобно зонам пересечения спутных потоков на задней стороне цилиндров или сфер в поперечном потоке эти вторичные зоны характеризуются отрывом пограничного слоя и завихрением потока.

В. Локальное изменение коэффициентов обмена. Единичные круглые и щелевые сопла. Местный коэффициент теплоотдачи α определяется как отношение локального теплового потока к перепаду температур между выходом из сопла и поверхностью материала

$$\alpha = \dot{q} / \Delta T. \quad (1)$$

На рис. 2 приведена зависимость изменений локальных коэффициентов теплоотдачи $Nu/Pr^{0,42}$ от относительного радиального расстояния r/D от критической точки для различных отношений H/D , где H — расстояние от выхода из сопла до поверхности; D — диаметр или ширина сопла. Рисунок взят из [13], где приведены данные по возгонке нафталина при единичном круглом сопле для чисел Рейнольдса на выходе из сопла ($Re = wD/\nu$) $Re = 54\,000$. Число Нуссельта

$$Nu = \alpha D / \lambda, \quad (2)$$

где диаметр сопла D считается характеристической длиной.

Сходные экспериментальные результаты как для единичных круглых сопел SRN, так и для единичных щелевых сопел SSN можно найти для перечисленных ниже случаев.

Испарение воды из пористых пластин с помощью воздушных струй ($Sc = 0,59$): [14] SRN; [15] SSN; см. также [16]. Теплоотдача к воздушным струям ($Pr = 0,7$): [5, 17, 18] SRN; [19, 20] SSN.

Массообмен в системе нафталин — воздух ($Sc = 2,5$): [13, 21] SRN; [6, 22, 23] SSN.

Массообмен в системе кислота — вода ($Sc \approx 900$): [24] SRN.

Как для круглых, так и для щелевых сопел локальное изменение коэффициентов теплоотдачи качественно имеет один и тот же характер: монотонно уменьшающиеся колоколообразные кривые для больших относительных расстояний от выхода из сопла до пластины (H/D) или $H/B \geq 8$) и кривые с более или менее выраженным горбом или вторым максимумом для меньших H/D (или H/B). Резкое увеличение коэффициентов теплоотдачи начинается сразу после конца области ускорения потока, в которой исчезновение направленного по течению градиента давления ведет к внезапному крутому подъему уровня турбулентности [14, 19].

В общем согласии между экспериментальными результатами различных авторов вполне удовлетворительное в области пристенной струи, тогда как в зоне формирования потока имеются большие различия, вероятно, из-за различия в уровнях турбулентности на выходе из сопла. Эти различия играют второстепенную роль при определении интегральных средних коэффициентов теплоотдачи, интерес к определению которых в технических задачах является преобладающим.

Несколько теоретических или полуэмпирических подходов, в которых сочетались описание течения в окрестности критической точки [9] и пристенной струи [8, 10—12, 25] или непосредственно применялась теория пограничного слоя, были выполнены для единичных осесимметричных [26—29] и плоских [6, 30—32] падающих на поверхность струй. Однако они дают неудовлетворительные результаты при определении наблюдаемых в экспериментах немонотонных изменений коэффициентов теплоотдачи при коротких расстояниях от выхода из сопла до пластины. Только для

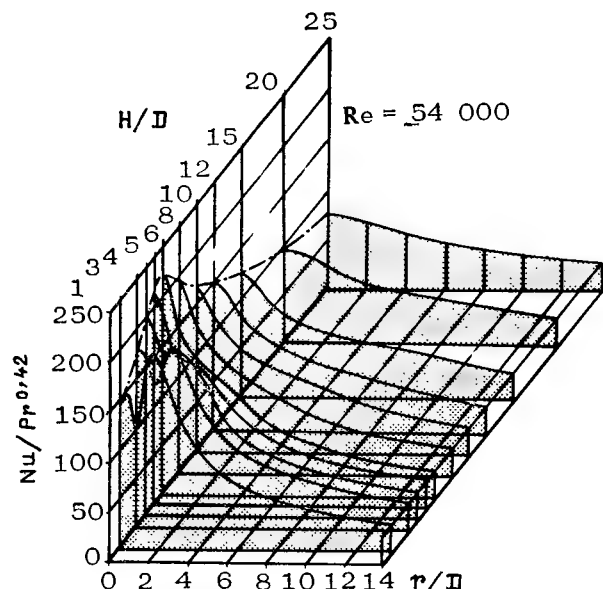


Рис. 2. Распределение теплоотдачи под единичным круглым соплом

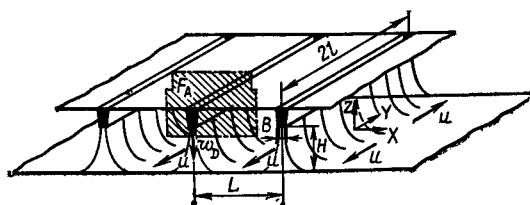


Рис. 3. Совокупность щелевых сопел с потоком, распространяющимся поперечно пластине

ламинарных падающих струй достигнуто относительно хорошее согласие между теоретическими и некоторыми экспериментальными результатами [6, 33, 34].

В [35] применялся численный метод [36] для решения систем эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных для задачи о потоке, падающем на поверхность из единичного щелевого сопла. Система уравнений должна быть замкнута с помощью более или менее произвольной гипотезы о взаимосвязи между корреляциями турбулентных пульсаций (например, $\overline{u'u'}$, $\overline{u'p'}$, $\overline{v'T'}$) и средними значениями скоростей, давлений, температур и т. д. Метод дает множество подробной информации о всем поле течения: линиях тока, линиях равной завихренности, изотермах и линиях равной энергии турбулентности. К сожалению, расчеты были выполнены только для одного фиксированного относительного расстояния от сопла до пластины $H/B=8$. Числа Нуссельта находятся в хорошем согласии с данными измерений [20]. Однако их поперечное изменение значительно отличается от измеренных кривых, особенно для низких чисел Рейнольдса.

Группа исследователей из Университета Мак-Гилла (Монреаль, Канада) улучшила эти численные методы, включив в рассмотрение явления отсоса через поверхность и зависимость физических свойств от температуры [37—40].

Совокупности круглых и щелевых сопел. Локальные измерения коэффициентов тепло- и массопереноса для падающего потока из регулярно расположенной совокупности круглых сопел (ARN) [18], единичного ряда крупных сопел [41] и цепочек параллельных щелевых сопел [20, 22] дают результаты, качественно сходные с результатами для единичных сопел. Кроме того, могут появляться добавочные пики в изменении коэффициентов теплоотдачи в поперечном направлении, там, где пристенные струи смежных сопел взаимодействуют друг с другом, образуя вторичные зоны.

Во многих случаях локальные изменения коэффициентов теплоотдачи зависят не только от координаты вдоль поверхности x (или радиальной r), но также и от перпендикулярной ей координаты y (рис. 3), а именно в случае, когда газ не может прямо подниматься вверх в промежутке между соплами, а течет симметрично в обе стороны (параллельно щелям в направлении $\pm y$) по всей ширине материала. Ясно, что этот выходящий поток влияет на все поле потока. Чем меньше отношение выходной площади потока Fa (заштрихованная площадь на рис. 3) к площади выходного поперечного сечения сопла Bl (для щелевых сопел), тем больше выходная скорость потока и менее однородно распределение коэффициентов теплоотдачи по ширине поверхности. Это влияние условий на выходе потока в деталях рассматривается в [16].

С. Средние коэффициенты обмена. Для практических инженерных расчетов нужны интегральные средние коэффициенты тепло- и массообмена

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{A} \iint_A \alpha dA; \quad \bar{\beta} = \frac{1}{A} \iint_A \beta dA. \quad (3)$$

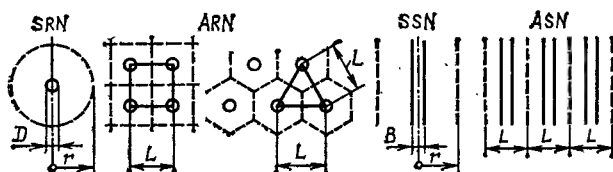


Рис. 4. Пространственные размещения совокупности сопел

Уравнению (3) можно придать особый характер для применения к единичному круглому соплу SRN

$$\bar{\alpha} = \frac{2}{r^2} \int_0^r \alpha(r') r' dr' \quad (4)$$

и для единичного щелевого сопла SSN

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{x} \int_0^x \alpha(x') dx'. \quad (5)$$

Для единичных круглых и щелевых сопел средние коэффициенты теплоотдачи [см. (4) и (5)] и соответствующие средние коэффициенты массопереноса можно привести к следующему безразмерному виду:

$$\bar{Nu} = F(Re, Rr, r/D, H/D); \quad (6)$$

$$\bar{Sh} = F(Re, Sc, r/D, H/D) \quad (7)$$

(для щелевых сопел вместо r/D , H/D используются x/D , H/S). В качестве характерной длины в Nu , Sh и Re выбирают диаметр D для круглых сопел или гидравлический диаметр $S=2B$ для щелевых сопел.

Для совокупности сопел осреднение в уравнении (3) необходимо проводить по тем частям площади поверхности, которые прилегают к одному соплу. Для расположенных регулярно наборов круглых сопел эти площади являются квадратами со стороной, равной L , или правильными шестиугольниками со стороной, равной $L/2$ (рис. 4). Относительная площадь сопла f задается отношением выходной площади поперечного сечения сопла к площади квадрата или шестиугольника, прилегающего к нему,

$$f = (\pi/4) D^2 / A_{\text{square (hexagon)}} \quad (8)$$

Радиус r в уравнениях (6), (7) можно заменить радиусом R_T круга с той же площадью, что и квадрат или шестиугольник:

$$R_T = D / \sqrt{4f}.$$

Для совокупности щелевых сопел интегрирование в уравнении (5) проводится от $x=0$ до $x=X$ при $X=L/2$. Это также можно выразить через относительную площадь сопла.

$$f = \frac{Bl}{Li} = \frac{S}{2L}. \quad (9)$$

В этом случае $X=S/(4f)$.

Таблица 1. Относительная площадь сечения сопла, выраженная через геометрические размеры сопла и поверхности

SRN	ARN Δ	ARN $\square$	SSN	ASN
$f \frac{1}{4} \left(\frac{D}{r} \right)^2$	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\frac{D}{L} \right)^2$	$\frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{L} \right)^2$	$\frac{1}{4} \frac{S}{x}$	$\frac{B}{L}$

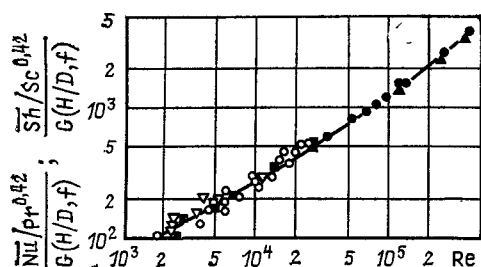


Рис. 5. Тепло- и массообмен между круглой пластиной и струей, падающей из единичного круглого сопла [14]; точки — результаты, полученные различными авторами

Таким образом, для совокупностей сопел относительное расстояние от критической точки можно заменить на функцию относительной площади сопла

$$\left(\frac{r}{D}\right)_{ARN} \approx \frac{11}{(4f)^{1/2}}; \quad (10)$$

$$\left(\frac{x}{S}\right)_{ASN} \approx \frac{1}{4f}. \quad (11)$$

В табл. 1 различные выражения для относительной площади сопла приведены для единичных сопел и цепочки сопел, расположенных через равные интервалы.

Единичные сопла. 1. Единичные круглые сопла. Данные по тепло- и массообмену для струй, падающих из единичных круглых сопел [14, 17, 18, 42, 43] (рис. 5), обобщены

Шлюндером и Гинлиным в виде эмпирического уравнения

$$\left(\frac{\overline{Nu}}{Pr^{0.42}}\right)_{SRN} = \left(\frac{\overline{Sh}}{Sc^{0.42}}\right)_{SRN} = G\left(\frac{r}{D}, \frac{H}{D}\right) F(Re), \quad (12)$$

где

$$G\left(\frac{r}{D}, \frac{H}{D}\right) = \frac{D}{r} \frac{1 - 1,1D/r}{1 + 0,1(H/D - 6)D/r}. \quad (12a)$$

Функцию $F(Re)$, которая приводится в [14] в виде графика, можно рассчитать с помощью выражения

$$F(Re) = 2 \left[Re \left(1 + \frac{Re^{0.55}}{200} \right) \right]^{1/2}. \quad (12b)$$

Приведем область применимости уравнения (12):

$$2000 \leq Re \leq 400\,000; \quad 2,5 \leq \frac{r}{D} \leq 7,5 \quad (0,04 \geq f \geq 0,004);$$

$$2 \leq \frac{H}{D} \leq 12.$$

2. Единичные щелевые сопла. Данные по массообмену для единичных щелевых сопел, полученные в [15], обобщены с помощью следующего эмпирического уравнения:

$$\left(\frac{\overline{Sh}}{Sc^{0.42}}\right)_{SSN} = \left(\frac{\overline{Nu}}{Pr^{0.42}}\right)_{SSN} = \frac{1,53 Re^m (x/S, H/S)}{x/S + H/S + 1,39}; \quad (13)$$

$$m = 0,695 - \left[\frac{x}{S} + \left(\frac{H}{S} \right)^{1,33} + 3,06 \right]^{-1}.$$

Область применимости уравнения:

$$3000 \leq Re \leq 90\,000;$$

$$2 \leq \frac{x}{S} \leq 25 \quad (0,125 \geq f \geq 0,01);$$

$$2 \leq H/S \leq 10.$$

Показатель экспоненты m числа Re зависит от геометрических переменных и изменяется от 0,56 до 0,68 в данном интервале значений. Уравнение (13) описывает почти все данные [15] с разбросом $\pm 15\%$ (рис. 6) [19, 22].

Совокупности сопел. 1. Цепочки круглых сопел. Средние коэффициенты тепло- и массообмена для системы струй, падающих из правильных (квадратных и гексагональных) совокупностей круглых сопел (ARN_s), можно рассчитать с помощью

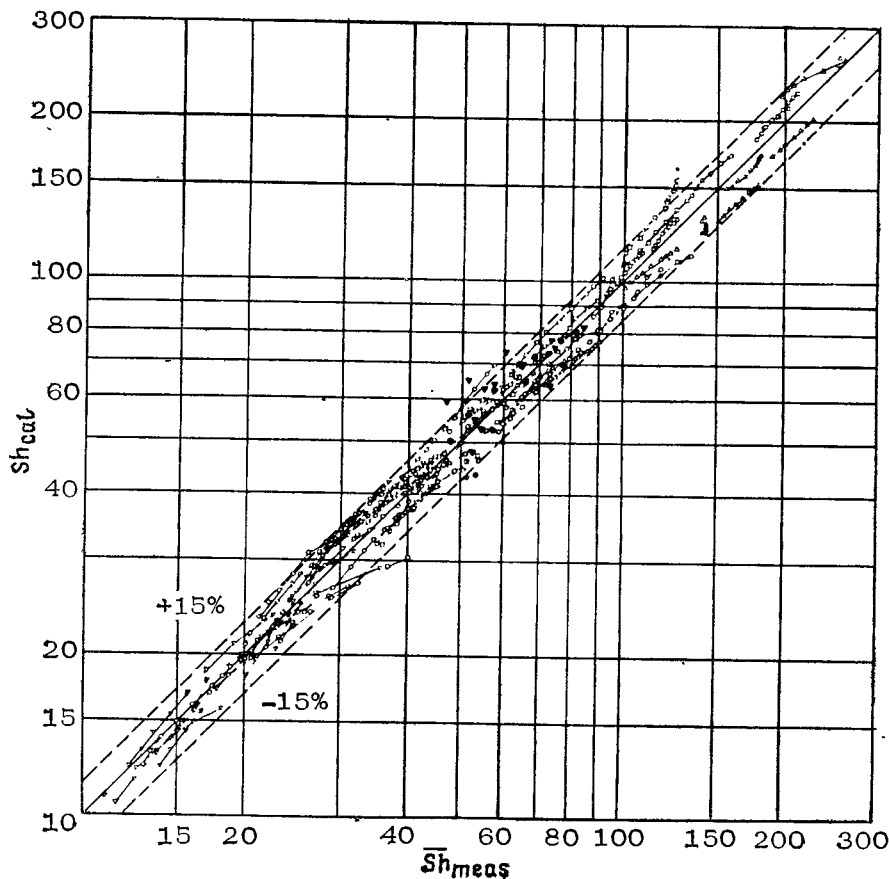


Рис. 6. Массообмен между пластиной и потоком, падающим из единичных щелевых сопел [15]. Сравнение измеренных чисел Шервуда со значениями, рассчитанными по (13): $\triangle$ — $B=20$ мм; $\square$ — $B=10$ мм; $\circ$ — $B=5$ мм; ∇ — $B=2$ мм; $\blacktriangledown$ — $B=3,2$ мм; $\bullet$ — $B=5$ мм

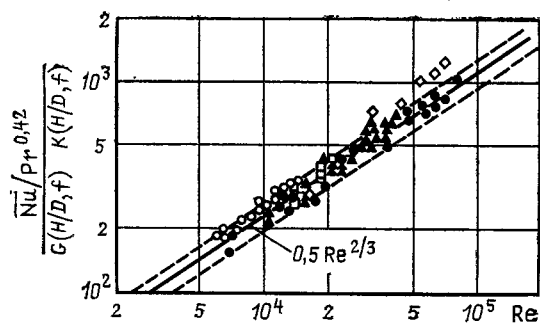


Рис. 7. Теплообмен между пластиной и потоком, падающим из совокупности круглых сопел [16, 44]. Сравнение экспериментальных данных с результатами, полученными из (14). Точки — результаты, полученные различными авторами

соотношений [16, 44]

$$\left(\frac{\overline{Sh}}{Sc^{0.42}}\right)_{ARN} = \left(\frac{\overline{Nu}}{Pr^{0.42}}\right)_{ARN} = K\left(\frac{H}{D}, f\right) \frac{V\bar{f}(1-2.2V\bar{f})}{1+0.2(H/D-6)V\bar{f}} Re^{2/3}, \quad (14)$$

где

$$K\left(\frac{H}{D}, f\right) = \left[1 + \left(\frac{H/D}{0.6} V\bar{f}\right)^6\right]^{-0.05}.$$

Область применимости уравнения:

$2000 \leq Re \leq 100\,000$; $0.004 \leq f \leq 0.04$; $2 \leq H/D \leq 12$. На рис. 7

приведено сравнение результатов, полученных по (14) с экспериментальными данными из [2, 44—47].

2. Совокупности щелевых сопел. Усредненные коэффициенты тепло- и массообмена для системы струй, падающих из совокупности щелевых сопел (ASN_S), можно рассчитать с помощью соотношений из [16, 48]

$$\left(\frac{\overline{Sh}}{Sc^{0.42}}\right)_{ASN} = \left(\frac{\overline{Nu}}{Pr^{0.42}}\right)_{ASN} = \frac{2}{3} f_0^{3/4} \left(\frac{2 Re}{f/f_0 + f_0/f}\right)^{2/3}, \quad (15)$$

где

$$f_0\left(\frac{H}{S}\right) = [60 + 4(H/S - 2)^2]^{-1/2}.$$

Область применимости уравнения:

$1500 \leq Re \leq 40\,000$; $0.008 \leq f \leq 2.5 f_0(H/S)$; $1 \leq H/S \leq 40$.

Как видно из рис. 8, это уравнение описывает результаты, полученные автором с разбросом $\pm 15\%$. Большинство полученных к настоящему времени результатов других авторов [20, 22, 47, 49, 50] также находится в удовлетворительном согласии с этой корреляцией (рис. 9).

Д. Оптимальное пространственное размещение сопел. Здесь и далее термин «оптимальное пространственное размещение» означает такое сочетание геометрических переменных, которое обеспечивает самый высокий средний коэффициент теплообмена для нагнетателя данной мощности на единичную площадь поверхности теплообмена. Для совокупностей сопел, однородно расположенных в пространстве, с хорошими условиями выхода потока имеются всегда три независимые геометрические переменные: диаметр сопла D (или ширина щели B); расстояние от сопла до пластины L (см. табл. 1 и рис. 4), расстояние от сопла до пластины H .

Средняя скорость выхода из сопла $\bar{w}$ должна быть выражена как функция мощности нагнетателя на единицу

площади поверхности теплообмена P

$$\left. \begin{aligned} P &= \Delta p \frac{\dot{V}}{A}; \\ \Delta p &= \xi \left(\frac{\rho}{2}\right) \bar{w}^2; \quad \bar{w} = \left(\frac{2P}{\xi \rho f}\right)^{1/3}; \\ \dot{V} &= \bar{w} f A. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Коэффициент потерь давления является суммой всех коэффициентов сопротивления между нагнетателем и выходом из сопла

$$\xi = \sum_i \xi_i \left(\frac{fA}{a_i}\right)^2, \quad (17)$$

где fA — полная площадь поперечного сечения на выходе из сопла; a_i — площади поперечных сечений трубок, связывающих нагнетатель с цепочками сопел. Большинство из сопротивлений, преодолеваемых потоком, не зависит от скорости потока, так что их сумму можно считать постоянной.

Один из трех размеров, входящих в эту задачу, необходимо установить заранее, иначе уменьшение всех трех расстояний одновременно приведет к монотонно увеличивающимся коэффициентам переноса. Чтобы определить оптимальное пространственное размещение, в уравнениях для средних коэффициентов тепло- и массообмена для совокупностей сопел [см. (14) и (15)] скорость на выходе из сопла (в виде безразмерного числа Рейнольдса) заменяется на $\bar{w}$ из (16). В результате средние коэффициенты переноса описываются с помощью относительной мощности нагнетателя P и трех размеров. В соответствии с выбором какого-либо из размеров задача оптимизации решается для трех различных условий [D (или B) = const; L = const; H = const], определяющих разные оптимальные пространственные размещения сопел [48]. Наиболее важным из этих трех возможных условий является определение расстояния от сопла до пластины H . Определенное минимальное расстояние H часто налагается условиями конструирования, например чтобы избежать каких-либо контактов с соплом при изменении прогиба материала. Только это условие H = const обсуждается ниже.

Уравнения (14) и (15) с $\bar{w}$, замененным из уравнения (16), преобразуем так, чтобы левая его часть кроме средних коэффициентов переноса $\bar{\alpha}$ (или $\bar{\beta}$) содержала только те параметры, которые можно считать постоянными (P , H , ξ и физические свойства),

$$\frac{(\bar{\alpha} H / \lambda) Pr^{0.42}}{\{[2P/(\xi \rho)]^{1/3} H / \nu\}^{2/3}} = G_H\left(f, \frac{H}{S}\right). \quad (18)$$

В правой части уравнения оставим только функцию геометрических переменных. Эту функцию G_H , конечно, можно представить через другие наборы двух геометрических отношений, например

$$G_H\left(\frac{D}{H}, \frac{L}{H}\right)_{ARN} \quad \text{или} \quad G_H\left(\frac{B}{H}, \frac{L}{H}\right)_{ASN}.$$

Для последовательности круглых сопел из (14) получаем

$$\begin{aligned} G_H\left(f, \frac{H}{D}\right)_{ARN} &= \frac{(H/D)^{1/3}}{f^{2/9}} K\left(f, \frac{H}{D}\right) \times \\ &\times V\bar{f} \frac{1-2.2V\bar{f}}{1+0.2(H/D-6)V\bar{f}}; \\ K\left(f, \frac{H}{D}\right) &= \left[1 + \left(\frac{H/D}{0.6 V\bar{f}}\right)^6\right]^{-0.05}, \end{aligned} \quad (19)$$

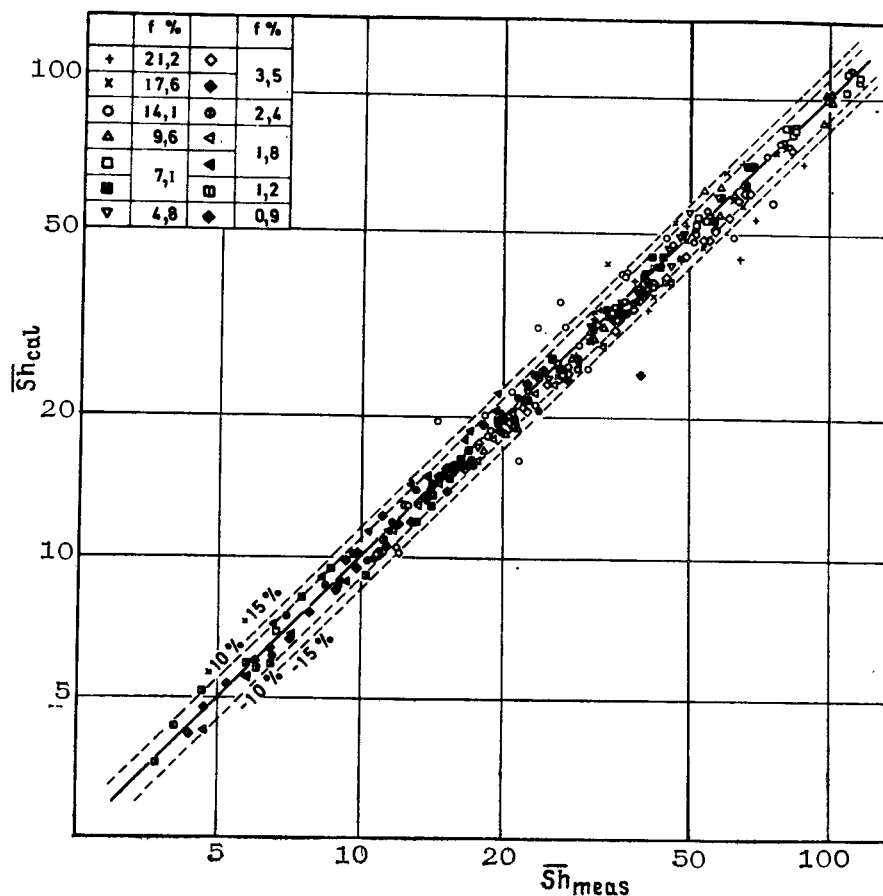


Рис. 8. Данные по массообмену [48] для совокупности щелевых сопл в сравнении с результатами расчетов по уравнению (15). Точки — результаты, полученные различными авторами

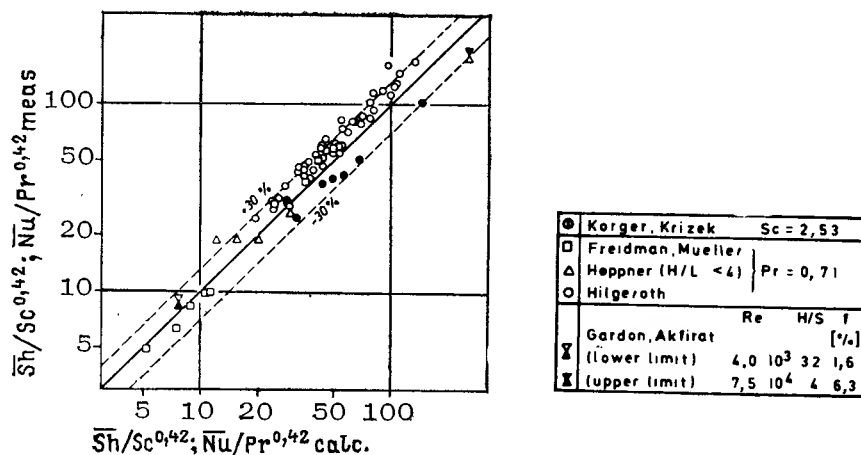


Рис. 9. Данные по тепло- и массообмену различных авторов в сравнении с результатами расчетов по уравнению (15) (совокупность щелевых сопл)

а для последовательности щелевых сопл из уравнения (15) имеем

$$G_H \left(f, \frac{H}{S} \right)_{ASN} = \frac{(H/S)^{1/3}}{f^{2/9}} \frac{2}{3} f_0^{3/4} \left(\frac{2}{f/f_0 + f_0/f} \right)^{2/3};$$

$$f_0 \left(\frac{H}{S} \right) = \left[60 + 4 \left(\frac{H}{S} - 2 \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (20)$$

Каждая функция в (19) и (20) имеет абсолютный максимум, положение которого можно определить при приравнивании их первых производных нулю [16, 48]. Отсюда находим, что оптимальное пространственное размещение для совокупности круглых сопл имеет место при

$$f_{opt} = 0,0152; \left(\frac{H}{D} \right)_{opt} = 5,43;$$

$$\max G_H = G_H \left[\left(\frac{H}{D} \right)_{opt}, f_{opt} \right] = 0,385,$$

а для последовательности щелевых сопл — при

$$f_{opt} = 0,0718; \left(\frac{H}{S} \right)_{opt} = 5,037;$$

$$\max G_H = G_H \left[\left(\frac{H}{S} \right)_{opt}, f_{opt} \right] = 0,355.$$

Коэффициенты обмена, которые получены при оптимальном размещении ряда круглых сопл, приблизительно на 8% выше коэффициентов обмена, полученных при оптимальном размещении ряда щелевых сопл, при условии, что мощности нагнетателей, коэффициенты потерь давления и расстояния от сопл до пластины в обоих случаях одинаковы. Отношение скоростей на выходе из сопла

$$\frac{\bar{\omega}_{ARN, opt}}{\bar{\omega}_{ASN, opt}} = \left(\frac{f_{opt, ASN}}{f_{opt, ARN}} \right)^{1/3} = \frac{1,68}{1},$$

и требуемые объемные скорости истечения связаны друг с другом соотношением

$$\frac{\dot{V}_{ARN, opt}}{\dot{V}_{ASN, opt}} = \left(\frac{f_{opt, ARN}}{f_{opt, ASN}} \right)^{2/3} = \frac{1}{2,82}.$$

В результате делаем вывод, что щелевые сопла более предпочтительны, когда материал не выдерживает высокой скорости натекания, как, например, при высушивании кино- и фотопленок.

Так как оптимальное пространственное размещение сопл выводилось для заранее определенного расстояния от сопла до поверхности H , было бы много удобнее выразить оптимальные размеры в виде функций от H . Перепиывая предыдущие выражения таким образом, находим, что для последовательности круглых сопл оптимальный диаметр сопла $D_{opt} = 0,184 H$; оптимальное расположение; (гексагональное) $L_{opt} = 1,423 H$; (ортогональное) $L_{opt} = 1,324 H$. Для последовательности щелевых сопл оптимальный (гидравлический) диаметр сопла $S_{opt} = 0,199 H$ ($S_{opt} = 2B_{opt}$); оптимальное расположение $L_{opt} = 1,383 H$.

Описываемое таким способом оптимальное размещение сопл выражается почти через те же самые отношения и для круглых, и для щелевых сопл. С достаточной степенью точности можно использовать следующие правила определения оптимального размещения сопл, пригодные для обоих типов сопл:

$$S_{opt} \approx \frac{1}{5} H; \quad (21)$$

$$L_{opt} \approx \frac{7}{5} H \quad (22)$$

($S=D$ для круглых сопл, $S=2B$ — для щелевых).

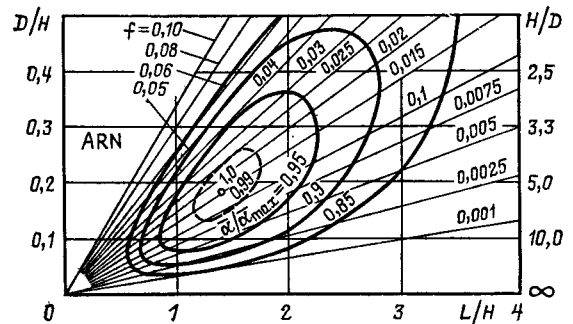


Рис. 10. Оптимальные пространственные размещения совокупности круглых сопл [16]

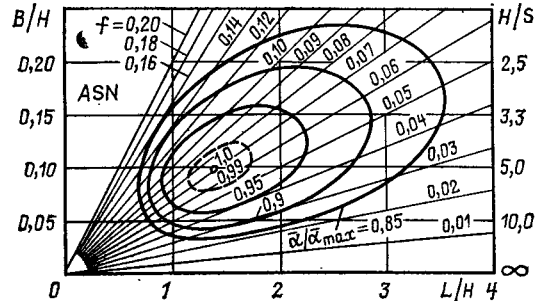


Рис. 11. Оптимальные пространственные размещения совокупности щелевых сопл [16]

Используя эти оптимальные соотношения, рассчитаем коэффициенты обмена с помощью следующих простых уравнений:

$$\left(\frac{\bar{\alpha} H}{\lambda} \text{Pr}^{-0,42} \right)_{ARN, max} = \left(\frac{\bar{\beta} H}{\delta} \text{Sc}^{-0,42} \right)_{ARN, max} =$$

$$= 0,16 \left(\frac{\bar{\omega} H}{\nu} \right)^{2/3} \left(D = \frac{H}{S}, L = \frac{7H}{5} \right); \quad (23)$$

$$\left(\frac{\bar{\alpha} H}{\lambda} \text{Pr}^{-0,42} \right)_{ASN, max} = \left(\frac{\bar{\beta} H}{\delta} \text{Sc}^{-0,42} \right)_{ASN, max} =$$

$$= 0,20 \left(\frac{\bar{\omega} H}{\nu} \right)^{2/3} \left(B = \frac{H}{10}, L = \frac{7H}{5} \right). \quad (24)$$

Диаметры сопл и интервалы между ними, отличающиеся от оптимальных, приводят к уменьшению коэффициентов обмена согласно следующему соотношению:

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}_{max}} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}_{max}} = \frac{G_H(S/H, L/H)}{G_H(S_{opt}/H, L_{opt}/H)}. \quad (25)$$

Функции, входящие в (25), нанесены в виде «линий уровня» на рис. 10, 11, чтобы дать карту, показывающую местоположение, протяженность и тангенс угла наклона максимума коэффициента обмена. Для удобства на этих рисунках показаны также координаты f и H/S (или H/D).

Эти карты можно также рассматривать с точки зрения того, какая мощность нагнетателя необходима для заданного коэффициента обмена. Тогда точка $\bar{\alpha}/\bar{\alpha}_{max} = 1$ становится точкой $P/P_{min} = 1$ и линии $\bar{\alpha}/\bar{\alpha}_{max} = \text{const}$ должны быть маркированы в значениях P/P_{min} , которые можно рассчитать из $P/P_{min} = (\bar{\alpha}/\bar{\alpha}_{max})^{-1/2}$ [(см. (18)]:

$\bar{\alpha}/\bar{\alpha}_{max}$	P/P_{min}
1	1
0,99	1,05
0,95	1,26
0,90	1,61
0,85	2,08

Таким образом, для совокупности сопл, геометрические размеры которых лежат вне контурной линии $\bar{\alpha}/\bar{\alpha}_{\max} = 0,85$, потребовался бы нагреватель с мощностью в 2 раза большей, чтобы достигнуть того же самого коэффициента обмена, что и при оптимальном размещении.

2.5.7. Свободная конвекция около погруженных в жидкость тел¹

С. У. Чарчилл

Разность температур между поверхностью тела и окружающей жидкостью приводит к появлению градиента плотности, который в свою очередь вызывает движение жидкости. Это движение увеличивает интенсивность теплообмена между телом и жидкостью по сравнению с чистой теплопроводностью. Такое движение с переносом теплоты, связанным с ним, называется свободной конвекцией.

Разность концентрации между поверхностью тела и окружающей жидкостью также может вызывать появление градиента плотности, а следовательно, движение жидкости и более интенсивный перенос компонентов (массоперенос). Поскольку интенсивность переноса массы от поверхности по сравнению с массовой скоростью потока мала, сведения об интенсивности переноса субстанции можно получить на основе результатов исследования теплообмена. Если одновременно имеют место разности и температур, и концентраций, интенсивность теплообмена и переноса компонентов определяется градиентом и температур, и концентраций.

Свободная конвекция может также возникать как результат других разностей потенциалов, таких, как градиенты поверхностного натяжения и магнитного поля. Однако здесь эти специальные вопросы не рассматриваются. Совместное действие свободной и вынужденной конвекции обсуждается в § 2.5.9 и 2.5.10.

Хорошо обоснованная теория разработана для ламинарного режима свободной конвекции в пограничных слоях. Она дает априорные предположения и основную структуру для корреляции экспериментальных результатов. Развита вычислительная техника и методов исследования привело к возможности получения численных решений для ламинарного режима течения в широкой области определяющих параметров. Но даже для этих условий многие проблемы, имеющие практический интерес, остаются нерешенными.

Теория свободной конвекции при турбулентном режиме течения менее разработана. Численные решения, основанные на концепции турбулентного переноса количества движения и теплоты, находятся в данное время в некоторой критической стадии развития, и надежные результаты в широкой области параметров еще должны быть получены.

Экспериментальные данные по свободной конвекции большей частью менее точны и аккуратны, чем по вынужденной конвекции, вследствие низкой интенсивности теплообмена и связанных с этим трудностей таких измерений, которые не вызывали бы нарушений самого процесса обмена.

Большинство теоретических моделей свободной конвекции использует приближения Буссинеска: влияние вязкой диссипации пренебрежимо мало; изменение давления в направлении течения несущественно; изменения физических свойств малы, за исключением плотности, входящей в гравитационный член уравнения, которая описывается как

$$\rho = \frac{\rho_{\infty}}{1 + \xi(T - T_{\infty})}, \quad (1)$$

где ρ — плотность, кг/м³; T — температура, К; ξ — температурный коэффициент объемного расширения, К⁻¹. Бесконечность в индексе означает свободную жидкость в

объеме. Эти предположения, как известно, в дальнейшем были проверены и большей частью обоснованы.

Теория пограничного слоя кроме указанных выше предположений включает еще и следующие: основные изменения скорости и температуры сосредоточены вблизи границы жидкость — тело, перенос количества движения и энергии в направлении основного движения пренебрежимо мал. Условия, при которых эти предположения справедливы, рассмотрены ниже.

Задачам свободной конвекции на изотермических или равномерно обогреваемых вертикальных пластинах уделялось большое внимание, поскольку они не только отличаются простотой, но и имеют практическое значение. Теоретические решения задач для этой геометрии большей частью основаны на предположениях о том, что пластина, погруженная в бесконечно большой объем жидкости, имеет бесконечную ширину и полуограничена по длине вверх по потоку; движение жидкости ниже нижней кромки пластины отсутствует. Несмотря на эти упрощения получаемые решения дают правильные по структуре зависимости для корреляции экспериментальных данных. Аналогичный вид зависимостей оказывается пригодным и для других геометрий и условий. Поэтому сначала рассматриваются теоретические решения, а затем экспериментальные результаты.

Для простоты предполагают, что пластина является на всем протяжении обогреваемой, а движение подъемным. Очевидно, что эти результаты применимы для охлаждаемых пластин и опускающего течения. Задачи конвекции около наклонных и горизонтальных пластин сравниваются и сопоставляются с данными для вертикальных пластин. В конце рассматриваются задачи естественной конвекции через обогреваемые открытые с концов каналы.

Свободная конвекция вокруг тела с резко изменяющимся контуром является наиболее сложной задачей, поскольку имеет место отделение линий тока и формирование следа (за выступом или уступом). Показано, что даже в этом случае теория пограничного слоя имеет широкую область применения. Теоретические решения для конвекции малой интенсивности оказались более успешными для сфер и цилиндров, чем для плоских пластин.

Назовем несколько общих обзоров по свободной конвекции. В 1954 г. в [1] проведен наиболее общий обзор. В 1961 г. в [2] рассмотрены результаты исследования свободной и естественной конвекций, особое внимание уделено последним достижениям. В 1965 г. в [3] проведен обзор работ по стационарной свободной и естественной конвекции. В 1966 г. в [4] рассмотрены достижения в области численных методов исследования свободной и естественной конвекций. В 1967 г. в [5] проведен подробный обзор результатов по свободной конвекции на вертикальных пластинах. В [6] материал о свободной конвекции включен в обзор, посвященный задачам, описывающим конвекцию около цилиндров.

А. Вертикальные пластины. Безразмерные комплексы. Для установившейся ламинарной свободной конвекции, принимая во внимание упрощение Буссинеска, можно показать, что

$$Nu = \Phi(Gr, Pr), \quad (2)$$

где $Nu = \alpha x / \lambda$ — локальное число Нуссельта, определяемое через x ; $Gr = g \rho^2 \xi (T_w - T_{\infty}) x^3 / \eta^2$ — число Грасгофа, определяемое через x ; $Pr = c_p \eta / \lambda$ — число Прандтля; $\Phi(z)$ — функция z ; α — локальный коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К); x — расстояние от нижней кромки пластины, м; λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); g — ускорение силы тяжести, м/с²; T_w — температура поверхности, К; η — динамическая вязкость, Па·с; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг·К).

Иначе сгруппированное соотношение

$$Nu = \Phi(Ra, Pr), \quad (3)$$

¹ Пер. с англ. Н. В. Медведкой.

где $Ra = GrPr = g\rho^2 c_p \zeta (T_w - T_\infty) x^3 / (\eta \lambda)$ — число Релея, рассчитанное по x , является равно справедливым. Ограничения, накладываемые моделью ламинарного пограничного слоя (см., например, [7]), позволяют получить следующее соотношение из (1), (2):

$$Nu = Gr^{1/4} \Phi(Pr), \quad (4)$$

или

$$Nu = Ra^{1/4} \Phi(Pr). \quad (5)$$

Кроме того, можно показать, что пределом при $Pr \rightarrow 0$ является соотношение

$$Nu \rightarrow A Gr^{1/4} Pr^{1/2} = A (RaPr)^{1/4} = ABq^{1/4}, \quad (6)$$

где A — безразмерная константа, зависящая от граничных условий;

$$Bq = GrPr^2 = RaPr = g\rho^2 c_p \zeta (T_w - T_\infty) x^3 / \lambda^2;$$

— число Буссинеска, рассчитанное по x .

При $Pr \rightarrow \infty$ предельное соотношение имеет вид

$$Nu \rightarrow B (GrPr)^{1/4} = BRa^{1/4}; \quad (7)$$

где B — безразмерная константа, зависящая от граничных условий.

Как правило, для расчетов выбирают форму корреляционной зависимости с числом Грасгофа. Однако, как будет показано, теплоотдача к жидкостям, исключая жидкие металлы, хорошо описывается с помощью (7).

Для инженерных расчетов более удобным по сравнению с числом Грасгофа является число Релея, поскольку число Прандтля в этом случае является только слабо влияющим параметром.

Уравнение (7) запишем в более четкой форме [7]

$$\alpha \left[\frac{x\eta}{g\rho^2 c_p \lambda^3 \zeta (T_w - T_\infty)} \right]^{1/4} = B. \quad (8)$$

Комплекс в левой части уравнения (8), очевидно, является характерной величиной для ламинарной свободной конвекции при больших числах Грасгофа. Уравнение (8) удобно также использовать для получения соотношения между α и другими независимыми переменными.

Поскольку чаще, чем постоянная температура стенки, является заданной постоянной плотность теплового потока на стенке, удобно заменить одну из зависимых переменных α и T_w на значение теплового потока $\dot{q}$, Вт/м², с помощью соотношения, определяющего локальный коэффициент теплоотдачи,

$$\alpha = \dot{q} / (T_w - T_\infty). \quad (9)$$

Если заменить $T_w - T_\infty$, то (8) приобретет вид

$$\alpha \left(\frac{x\eta}{g\rho^2 c_p \lambda^3 \zeta \dot{q}} \right)^{1/5} = B^{4/5}, \quad (10)$$

а если заменить α , то

$$(T_w - T_\infty) \left(\frac{g\rho^2 c_p \lambda^3 \zeta}{\dot{q}^4 x\eta} \right)^{1/5} = B^{-4/5}. \quad (11)$$

В форме, соответствующей (7), эти соотношения имеют вид

$$Nu = B^{4/5} Ra^{*1/5}, \quad (12)$$

где $Ra^* = RaNu = g\rho^2 c_p \zeta \dot{q} x^4 / (\eta \lambda^2)$ — модифицированное число Релея для постоянной плотности теплового потока. Этот способ часто используется для представления результатов при однородном обогреве, однако он не присутствует в явном виде в соотношениях (7) или (8) для практически

равнозначных результатов при однородной температуре стенки UWT и однородном тепловом потоке UHF .

Как показано в [5 и 8], подобный анализ применим и к турбулентному движению, если есть хотя бы одно предположение, выражающее предельный случай. Так, в [9] утверждалось, что α может не зависеть от x для больших чисел Ra , если привести соотношения (2) к виду

$$Nu = Ra^{1/3} \Phi(Pr) \text{ для } Ra \rightarrow \infty, \quad (13)$$

которое можно представить как

$$\alpha \left[\frac{\eta}{g\rho^2 c_p \lambda^2 \zeta (T_w - T_\infty)} \right]^{1/3} = \Phi \frac{\eta c_p}{\lambda} \text{ для } x \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Используя предположение о том, что силы вязкости и инерции при $Pr \rightarrow 0$ и $Pr \rightarrow \infty$ пренебрежимо малы, перепишем (13)

$$Nu = CBq^{1/3} \text{ для } Pr \rightarrow 0; Bq \rightarrow \infty; \quad (15)$$

$$Nu = ERA^{1/3} \text{ для } Pr \rightarrow \infty; Ra \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где C и E — безразмерные константы, зависящие от граничных условий.

Решения и корреляционные соотношения для постоянной температуры стенки. 1. Ламинарный режим течения. Следующие асимптотические решения получены в [10] для ламинарного режима течения в пограничном слое:

$$Nu = 0,6004 Bq^{1/4} \text{ для } Pr \rightarrow 0; \quad (17)$$

$$Nu = 0,5027 Ra^{1/4} \text{ для } Pr \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Таким образом, константа A в уравнении (6) равна 0,6004, а B в (6) и (7) равна 0,5027.

В [11] получено численное решение для промежуточных чисел Pr . Эти значения с точностью 0,7% описываются с помощью следующего эмпирического уравнения [12]:

$$Nu = 0,503 (Ra\psi(Pr))^{1/4}, \quad (19)$$

где

$$\psi(Pr) = \left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9}. \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20) обеспечивают гладкую интерполяцию между соотношениями (17) и (18). Коэффициент 0,492 = = (0,502745/0,600408)⁴ представляет собой среднее значение числа Прандтля для этой системы, которое объясняет удовлетворительную корреляцию данных для большого числа жидкостей и даже воздуха с помощью уравнения (7) или эквивалентного соотношения с несколько иными коэффициентами. Как показано ниже, уравнение (20) оказывается универсальной функцией для зависимости от числа Прандтля для всех случаев естественной конвекции в пограничных слоях.

Интегрирование по x от 0 до L уравнения (19) дает выражение для среднего числа Нуссельта

$$\overline{Nu} = 0,670 (Ra_L \psi(Pr))^{1/4}. \quad (21)$$

Это соотношение предложено в [13] для ламинарного режима течения в тонких пограничных слоях ($10^4 < Ra < 10^9$). Оно неприменимо как для более высоких чисел Релея, поскольку возникает турбулентное течение, так и для более низких, поскольку вблизи передней кромки не выполняются приближения теории пограничного слоя. Для низких чисел Рейнольдса решение в общепринятом виде получить нельзя. Однако экспериментальные данные [14] свидетельствуют о том, что при $Ra \rightarrow 0$ число Nu стремится к предельному значению 0,68. Этот результат использован в [13] при получении корреляционного уравнения для всех чисел $Ra < 10^9$

$$\overline{Nu} = 0,68 + 0,67 (Ra_L \psi(Pr))^{1/4}. \quad (22)$$

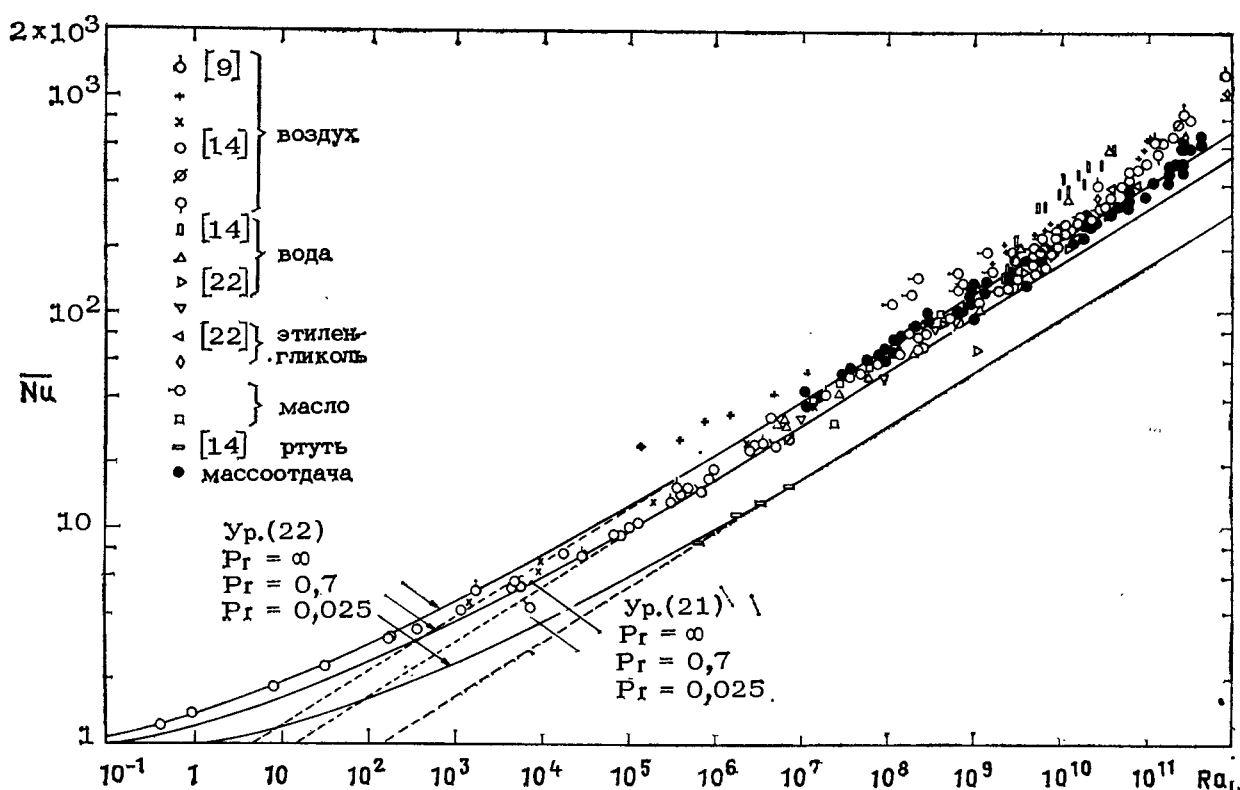


Рис. 1. Сравнение результатов, полученных из (22), с экспериментальными данными различных авторов (точки) для средних чисел Нуссельта и Шервуда при ламинарной свободной конвекции на изотермических вертикальных пластинах

Соответствующее соотношение для локальных значений имеет вид

$$Nu = 0,68 + 0,503 (Ra_{\phi}(Pr))^{1/4}. \quad (23)$$

На рис. 1 результаты расчетов по уравнению (22) сопоставлены с экспериментальными данными. Для всех чисел Pr , включая 0,025 (ртуть), при $Ra < 10^9$ наблюдается удовлетворительное соответствие. Данные по массоотдаче (большие числа Sc) согласуются с этим соотношением до чисел $Ra = 4 \cdot 10^{11}$ в предположении, что переход от ламинарного режима к турбулентному характеризуется скорее числом Gr_L , а не Ra_L . Следует отметить, что данные по свободной конвекции, особенно для низких чисел Релея Ra_L , имеют обычно больший разброс, чем по вынужденной, вследствие существенного искривления линий тока и ряда других причин. Результаты расчетов по уравнению (21), нанесенные на рис. 1, показывают нижний предел применимости теории тонкого ламинарного пограничного слоя.

На рис. 2 результаты расчетов по (19) и (23) одинаковым образом сопоставлены с экспериментальными данными по локальным значениям чисел Nu . Область значений чисел Nu из [15] для $Ra < 4 \cdot 10^{-4}$ свидетельствует о влиянии конфигурации передней кромки на теплоотдачу. Соответствие расчетных и экспериментальных данных является удовлетворительным для $Ra < 10^9$. При более высоких числах Ra имеет место переход к турбулентному режиму течения.

2. Турбулентный режим. Ряд исследователей [16—18] с помощью интегрирования дифференциальных уравнений сохранения в частных производных с произвольными зависимостями для турбулентного переноса импульса и теплоты получили теоретические соотношения для турбулентного режима движения. Эти результаты показали, что интен-

сивность теплоотдачи зависит от числа Ra в степени, несколько большей $1/3$ и уменьшающейся до $1/3$ по мере увеличения числа Ra . Зависимость от числа Pr с помощью этих расчетов не была выявлена. В [19, 20] для корреляции экспериментальных данных при турбулентном режиме ($Ra > 10^{12}$) использовалась зависимость (16). В [13] с помощью соотношений (15), (16) и того же среднего значения числа Pr , что и в (20), получено выражение

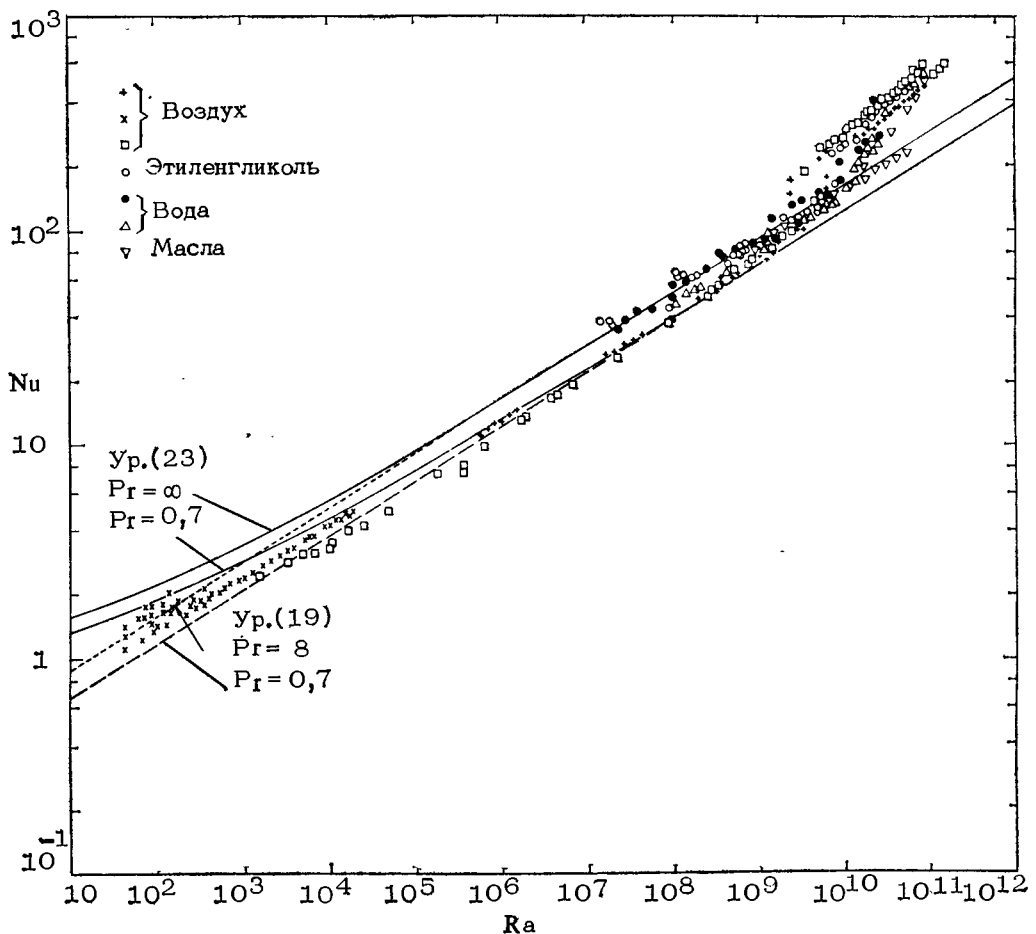
$$Nu = 0,15 (Ra_{\phi}(Pr))^{1/3}. \quad (24)$$

Коэффициент 0,15 определен из экспериментальных данных.

3. Переходный режим. Значительная неопределенность существует в отношении поведения характеристик в области перехода от ламинарного к турбулентному режиму конвекции, даже в отношении того, какие безразмерные комплексы описывают его. В [21] с помощью уравнения Орра — Зоммерфельда рассчитаны критические числа Грасгофа для потерн устойчивости и обнаружено увеличение их с возрастанием числа Pr . Однако эти значения оказались намного ниже тех, что наблюдались при переходе, фиксируемом по числам Nu . Этот результат был проанализирован в [22], где наблюдалось формирование неустойчивостей при числах Ra более низких, чем переход по числу Nu . В [23] в качестве критерия предложено число $Ra = 2 \cdot 10^8$, которое получено при пересечении пары кривых для чисел Nu , соответствующих ламинарному и турбулентному течениям. Как показано на приведенных выше и последующих рисунках, совокупность экспериментальных данных свидетельствует о том, что переход по числам Nu начинается около $Gr = 10^9$ и заканчивается вблизи $Gr = 10^{10}$.

Если предположить, что переход от ламинарного режима к турбулентному происходит при $Gr = 10^9$, то соотношение (19) и (22) можно записать так, чтобы получить следующее общее выражение для областей переходного и

Рис. 2. Сравнение результатов, полученных из (23), с экспериментальными данными (точки) различных авторов по местным числам Нуссельта при ламинарной свободной конвекции на изотермических вертикальных пластинах



турбулентного режимов движения:

$$Nu = 89,4 Pr^{1/4} \psi^{1/4} (Pr) + 0,15 (Ra^{1/3} - 1000 Pr^{1/3}) \psi^{1/3} (Pr). \quad (25)$$

Интегрируя соотношения (19) и (22), получаем следующее выражение для средних значений:

$$\bar{Nu} = 119,3 Pr^{1/4} \psi^{1/4} (Pr) + 0,15 (Ra_L^{1/3} - 1000 Pr^{1/3}) \psi^{1/3} (Pr). \quad (26)$$

На рис. 3, 4 результаты расчетов по соотношениям (25) и (26) сопоставлены с экспериментальными данными. Соотношения (19) и (24) и соответственно (21) и (24) включены в рис. 3 и 4 как асимптоты. Несовпадение в переходной области не является неожиданным, поскольку переход зависит и от вторичных эффектов, таких, как турбулентность внешнего потока и шероховатость поверхности. Локальные значения чисел Nu для шпиндельного ($Pr=77 \div 170$) и моторного ($Pr=260 \div 2600$) масел, приведенные в [24], являются более низкими, чем для воды ($Pr=5,8$). Следовательно, отличие между этими данными и соотношениями (24) и (26) можно объяснить погрешностями эксперимента.

4. Комбинированные режимы. Простое корреляционное уравнение относительно Nu для всех чисел Ra_L и Pr можно получить с помощью соотношений (22) и (24),

записанных в виде

$$\bar{Nu} = 0,68 + 0,67 (Ra_L \psi (Pr))^{1/4} (1 + 1,6 \cdot 10^{-8}) \times \times Ra_L \psi (Pr))^{1/2}. \quad (27)$$

На рис. 5 числа $\bar{Nu}$, рассчитанные по (27), сопоставлены с экспериментальными данными в зависимости от составной переменной $Ra_L \psi (Pr)$.

Соответствие является вполне удовлетворительным для тех данных, для которых переход к турбулентному движению имеет место при $Ra_L = 10^9$. Значения для больших чисел Pr и Sc лучше согласуются с соотношением (22), а не (26), поскольку для этих данных переход к турбулентному движению в зависимости от $Ra_L \psi (Pr)$ затягивается.

Решения и корреляционные уравнения для однородного обогрева. Для постоянной плотности теплового потока на пластине в тонких ламинарных пограничных слоях получены теоретические решения. Эти результаты подобны результатам для однородной (постоянной) температуры стенок. Согласно [25] асимптотические выражения имеют вид

$$Nu = 0,6922 Bq^{1/4} \text{ для } Pr \rightarrow 0; \quad (28)$$

$$Nu = 0,5627 Ra^{1/4} \text{ для } Pr \rightarrow \infty \quad (29)$$

(здесь в Bq и Ra используется локальное значение $T_w - T_\infty$).

Для промежуточных (средних) чисел Pr в [25] получена корреляция расчетных значений из [25] и других с

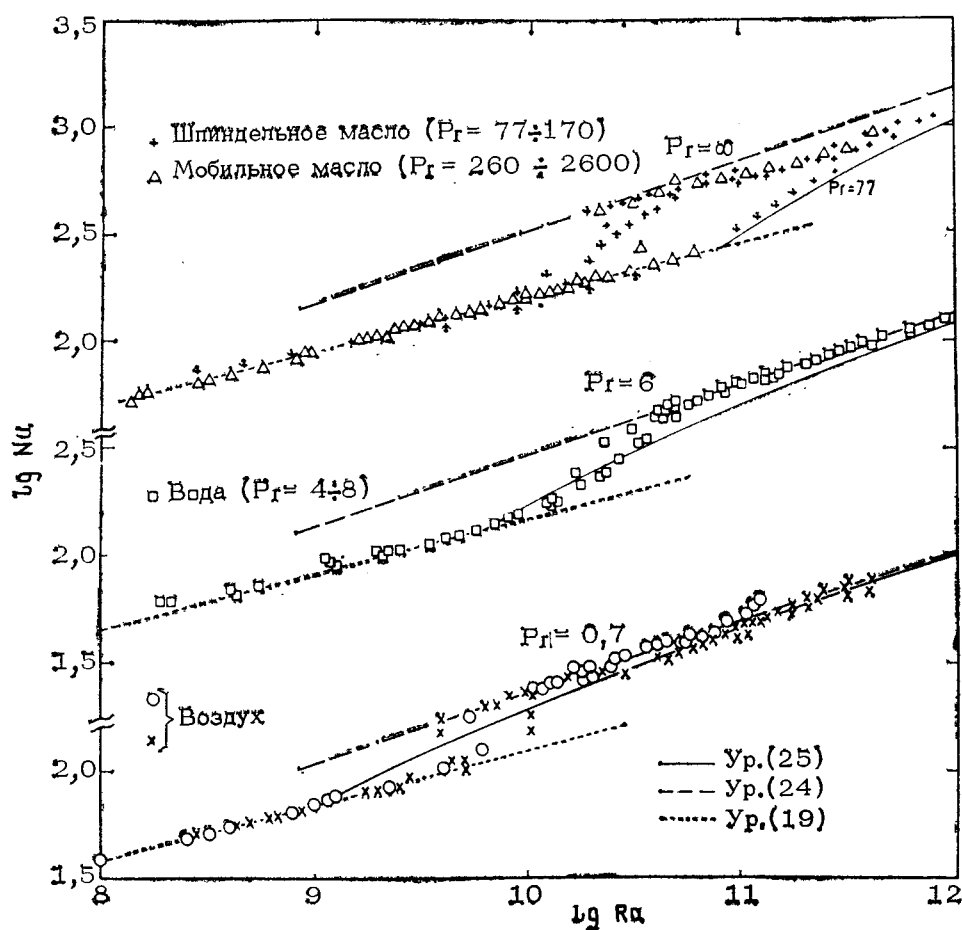


Рис. 3. Сравнение результатов, полученных из (25), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для локальных чисел Нуссельта в переходном режиме свободной конвекции вдоль изотермических вертикальных пластин

точностью 2% с помощью выражения

$$Nu = 0,563 (Ra \Phi(Pr))^{1/4}, \quad (30)$$

где

$$\Phi(Pr) = \left[1 + \left(\frac{0,437}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9}. \quad (31)$$

Последнее соотношение соответствует уравнению (20) для однородной (постоянной) температуры стенки. Функции $\psi(Pr)$ и $\Phi(Pr)$ различаются максимум на 12,5% (для $Pr \rightarrow 0$), а степени $1/4$ и $1/3$ дают отличие соответственно на 3 и 4%. Такое отличие в большинстве случаев меньше, чем экспериментальная погрешность, и для практических целей действительно можно использовать округленное значение 0,5 вместо 0,492 или 0,437. Распределение температуры стенки, соответствующее (30), имеет вид

$$T_w = T_\infty + 1,584 \left(\frac{\dot{q}^4 \eta x}{8 \rho^2 c_p \lambda^3 \xi} \right)^{1/5} \Phi^{1/5}(Pr). \quad (32)$$

При отсутствии определенности в теоретических и экспериментальных результатах для $Ra \rightarrow 0$ можно предположить существование предельного значения, такого же, как и для случая постоянной температуры стенки, откуда имеем

$$Nu = 0,68 + 0,563 (Ra \Phi(Pr))^{1/4}. \quad (33)$$

Поскольку при турбулентном движении число Nu пропорционально $Ra^{1/3}$, температура стенки при однород-

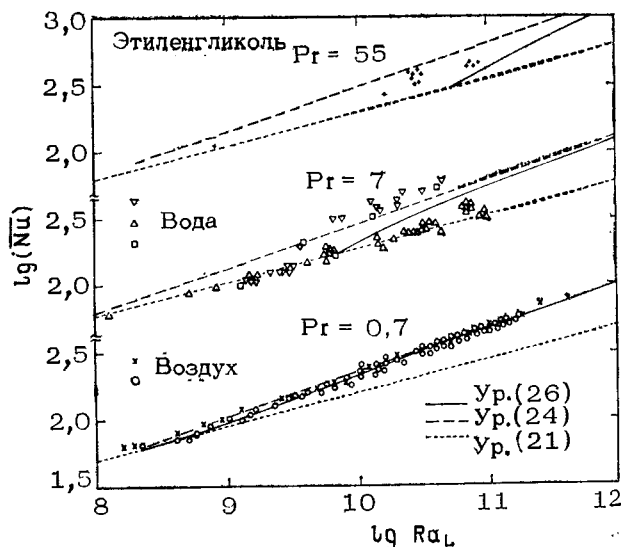


Рис. 4. Сравнение результатов, полученных из (26), с экспериментальными данными (точки) различных авторов по средним числам Нуссельта в переходном режиме свободной конвекции от изотермических вертикальных пластин

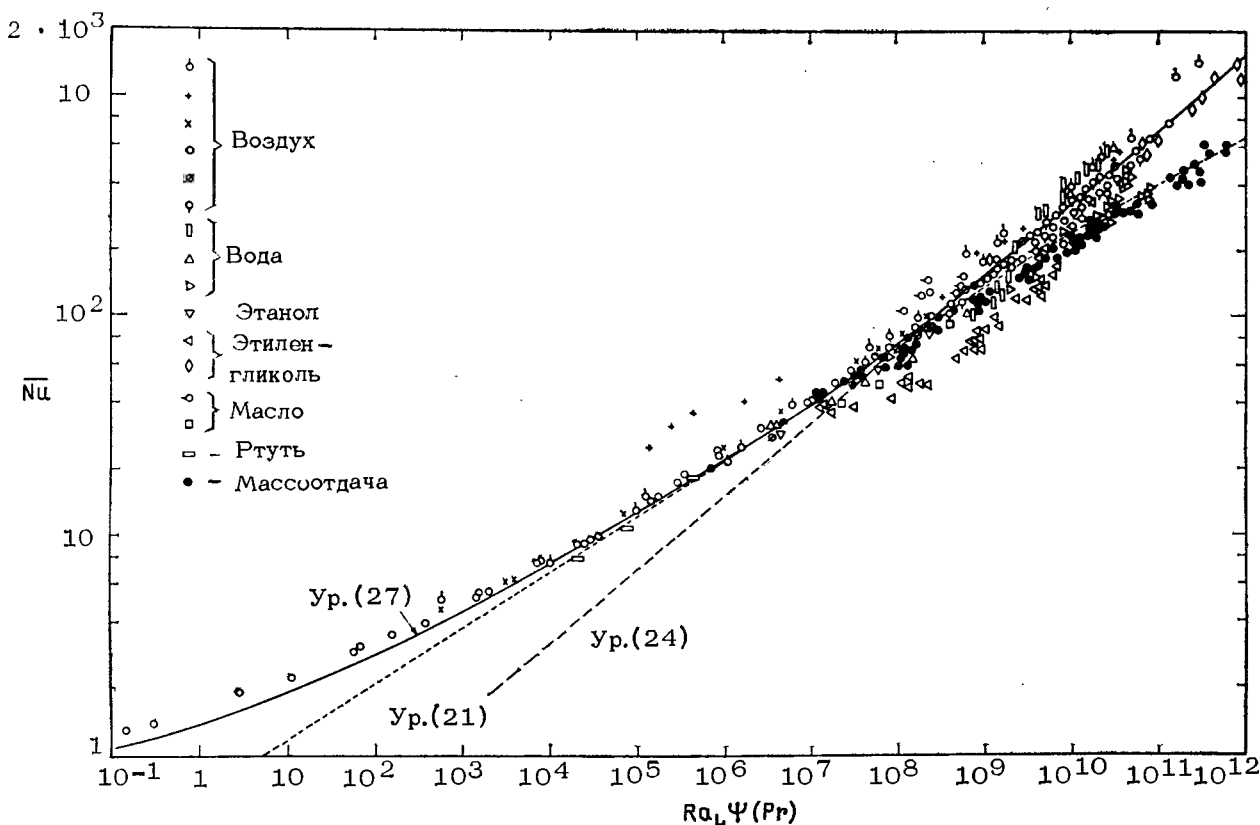


Рис. 5. Сравнение результатов, полученных из (27), с экспериментальными данными (точки) различных авторов по средним числам Нуссельта и Шервуда для всех режимов свободной конвекции на изотермических вертикальных пластинках

иом обогрева является постоянной. Следовательно, уравнение (24) должно быть приемлемой аппроксимацией для однородного обогрева при турбулентном режиме движения. Некоторое усовершенствование можно получить с помощью замены 0,492 на 0,437, откуда

$$Nu = 0,15 (Ra^* \Phi(Pr))^{1/2}. \quad (34)$$

В этом случае аналог уравнения (25) имеет вид

$$Nu = 100 Pr^{1/4} \Phi^{1/4}(Pr) + 0,15 (Ra^{1/2} - 1000 Pr^{1/2}) \Phi^{1/2}(Pr). \quad (35)$$

Определение числа $\bar{Nu}$ для однородного обогрева является довольно произвольным. Однако в [26] показано, что для ламинарных режимов течения в тонких пограничных слоях использование в качестве определяющей температуры поверхности в средней точке $L/2$ дает значения $\bar{Nu}$, лучше согласующихся с данными по теплоотдаче для изотермической пластины, чем использование в качестве определяющей средней интегральной разности температур или использование для расчета $\bar{Nu}$ среднего интегрального коэффициента теплоотдачи. С учетом этого определения уравнение (30) приобретает вид

$$\bar{Nu} = 0,670 (Ra_L \Phi(Pr))^{1/4}. \quad (36)$$

Соотношение (36) можно преобразовать к виду, включающему среднюю интегральную температуру, путем умножения коэффициента 0,670 на $(6/5)^{5/4}/2^{1/4}$, дающего 0,708, и к виду, содержащему среднюю интегральную разность температур, путем умножения 0,670 на $(5/4)^{5/4}/2^{1/4}$, дающего 0,745.

Поскольку соотношения (34) — (36) незначительно

отличаются от (24), (25) и (21) соответственно, то обе группы должны удовлетворять любому распределению температуры от однородного до распределения, описываемого уравнением (32) при $T_w - T_\infty \approx x^{1/2}$.

Соотношения (30), (34) и (36) можно представить в следующей явной форме, как это было показано ранее. Для области ламинарного пограничного слоя соотношение (30) приобретает вид

$$Nu = 0,631 (Ra^* \Phi(Pr))^{1/2}, \quad (37)$$

а соотношение (36)

$$\bar{Nu} = 0,726 (Ra_L^* \Phi(Pr))^{1/4}. \quad (38)$$

Для турбулентной области

$$Nu = 0,241 (Ra^* \Phi(Pr))^{1/4}. \quad (39)$$

На рис. 6 результаты расчета по уравнениям (30), (33) и (35) сопоставлены с локальными значениями чисел Nu для однородного обогрева. Можно заметить, что наблюдается вполне удовлетворительное соответствие и для ламинарной, и для турбулентной областей, за исключением очень малых чисел Ra , где экспериментальные данные дают более низкое предельное значение, чем 0,68, и больших чисел Ra для шпиндельного масла (экспериментальные данные [24]). Эти последние данные получены с учетом граничных условий, промежуточных между однородным обогревом и однородной температурой поверхности. Из рис. 6 видно, что во всех случаях наблюдается более крутой переход, чем переход, определяемый уравнением (35).

На рис. 7 приведено сравнение результатов расчета по соотношениям (34) и (36), (26) и (27) при $\Phi(Pr)$ вместо $\psi(Pr)$ со средними значениями чисел Nu . Соответствие

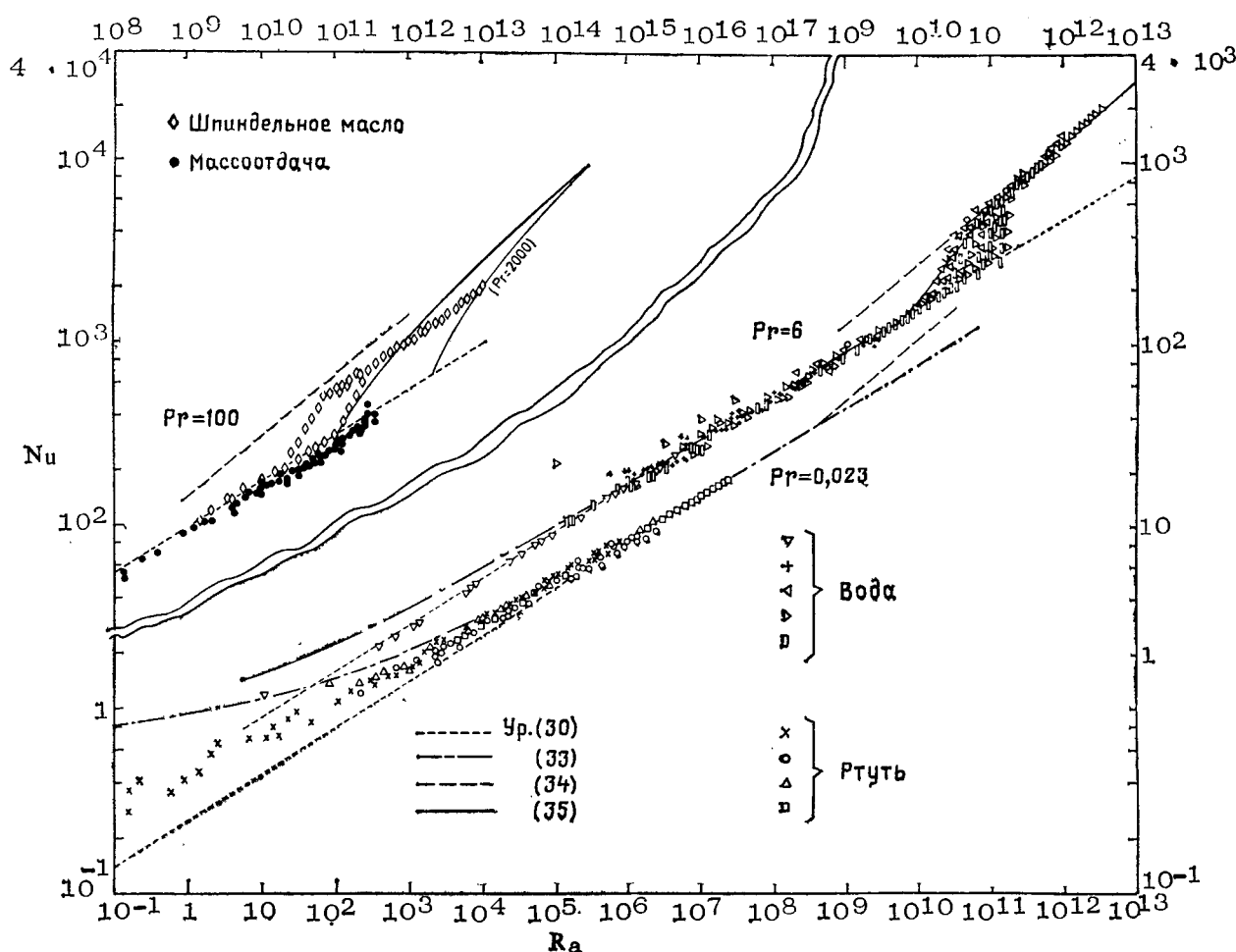


Рис. 6. Сравнение результатов, полученных из (33)—(35), с экспериментальными данными (точки) различных авторов по локальным числам Нуссельта для свободной конвекции на однородно обогреваемых вертикальных пластинах

расчетных и экспериментальных данных удовлетворительное, за исключением данных для воды, в которых наблюдается затягивание перехода.

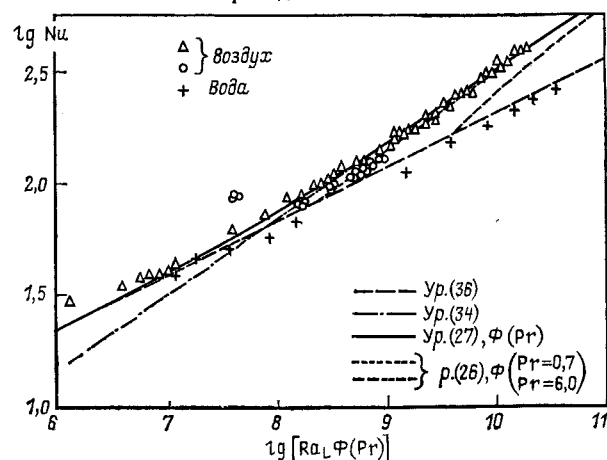


Рис. 7. Сравнение результатов, полученных из (27), (34) и (36), с экспериментальными данными (точки) различных авторов по средним числам Нуссельта для свободной конвекции вдоль однородно обогреваемых вертикальных пластин

Переходные режимы. В том случае, когда температура поверхности вертикальной пластины увеличивается скачком, температурное поле в жидкости вначале изменяется согласно решению для чистой теплопроводности в полуограниченной области. Инерционные силы замедляют развитие движения жидкости, и результатом являются осциллирующие приближения к устойчивому состоянию. Коэффициенты, характеризующие интенсивность теплоотдачи, также приближаются к устойчивому состоянию в результате осцилляций.

В [27] приведено полное описание режима, полученного при численном решении в [28], с помощью эмпирического уравнения, которое можно распространить на все числа Прандтля,

$$\frac{Nu^{20}}{Ra^5} = \left(\frac{1}{\pi t}\right)^{10} \left[\frac{c_p \mu x}{g \lambda \zeta (T_w - T_\infty)} \right]^5 + \left\{ \frac{0,5026 / (1 + (0,492 / Pr)^{9/16})^{4/9}}{1 + (2,3/t)^8 [c_p \mu x / g \lambda \zeta (T_w - T_\infty)]^4} \right\}^{20}, \quad (40)$$

где t — время, с. Недавно в [29] сходимость численного решения в этих условиях была подвергнута сомнению, но этот результат не означает, что поведение, описываемое уравнением (40), не соответствует действительности. Из рис. 8 видно, что наблюдается качественное соответствие с имеющимися большой разброс экспериментальными данными [30] для воздуха.

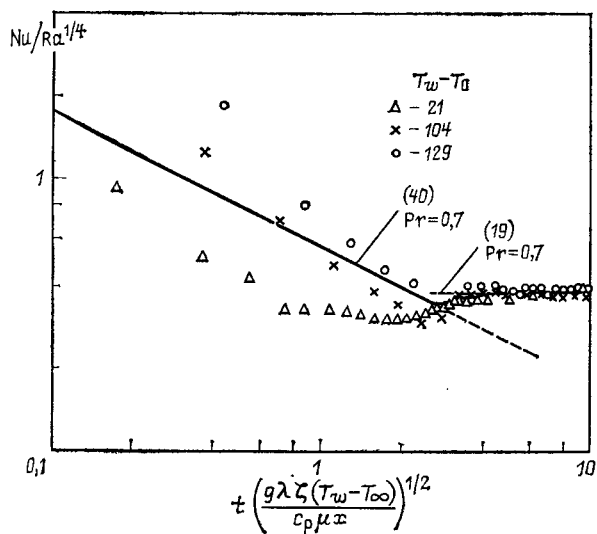


Рис. 8. Сравнение результатов, полученных из (40) (сплошная линия), с экспериментальными данными (точки) [30] для воздуха по локальным числам Нуссельта в переходном, ламинарном режимах свободной конвекции на изотермической вертикальной пластине. Штриховая кривая — теплопроводность в переходном режиме

Ступенчатое изменение теплового потока не вызывает значительного отклонения или осцилляций, по крайней мере для $Pr > 0,01$. В [31] предложено следующее выражение для интерполяции между решениями для чистой теплопроводности с установившимся режимом конвекции:

$$Nu^6 = \left(\frac{\pi \rho c_p x^2}{4kt} \right)^3 + 0,1005 (Ra \Phi(Pr))^{3/2}. \quad (41)$$

Показатель 6 выбран для того, чтобы описать экспериментальные данные [32] для воды и аппроксимировать численное решение [33]. На рис. 9 показано сравнение с экспериментальными данными для четырех сечений и двух значений плотности теплового потока.

Неньютоновские жидкости. В [34] получено решение для неньютоновских жидкостей с числом $Pr \rightarrow \infty$ и эффективной вязкостью, выражающейся с помощью следующего

Таблица 1. Коэффициент $\Phi(n)$, полученный в [34] для не Ньютоновских жидкостей

n	Вертикальная пластина	Цилиндр	Сфера
0,1	0,90	0,86	0,90
0,5	0,94	0,90	0,92
1,0	1,0	1,0	1,0
1,5	1,06	1,07	1,06

степенного закона:

$$\eta = M \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1}, \quad (42)$$

где M — коэффициент, $kg \cdot s^{-2} \cdot m^{-1}$; u — скорость в направлении x , м/с, y — расстояние от стенки, м; n — безразмерный показатель степени.

Полученные решения обнаружили зависимость теплоотдачи от комплекса $\Phi(n) Ra''^{1/3} n^{n+1}$ вместо $Ra^{1/4}$. Здесь

$$Ra'' = \frac{g \rho^{n+1} c_p^n \zeta (\tau_w - \tau_\infty) x^{2n+1}}{M \lambda^n}, \quad (43)$$

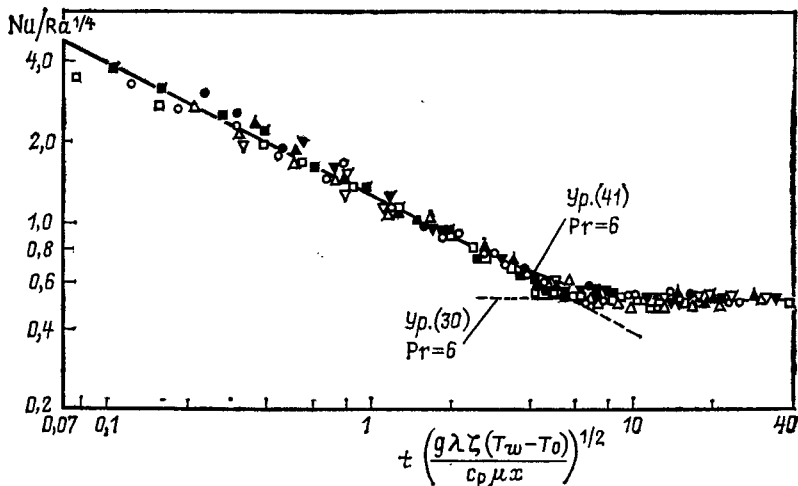
$\Phi(n)$ — слабая функциональная зависимость, приведенная в табл. 1.

Как показано на рис. 10 и 11 [35], это решение обеспечивает хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных для жидкостей с $0,68 \leq n \leq 1,0$, но не для жидкостей, показатель степени которых $n < 0,4$.

В [36] получено аналогичное решение для однородно обогреваемой пластины и показано, что решение, полученное в [34], можно применить для Nu в случае использования в качестве определяющей разности температур в сечении $L/2$. Как показано на рис. 12, соответствие результатов этого решения экспериментальным данным [37] для $0,4 \leq n \leq 1,0$ является вполне удовлетворительным.

В [38] получены численные решения для жидкости с конечными числами Pr и экспериментальные результаты для водных растворов оксида полиэтилена для случаев постоянной температуры стенки и постоянного теплового потока. Как показано на рис. 13, эти результаты для постоянной температуры стенки свидетельствуют о том, что решение, приведенное в [34], соответствующее уравнению (19) с Ra'' из (43), хорошо аппроксимирует поведение

Рис. 9. Сравнение результатов, полученных из (41), с экспериментальными данными (точки) [32] для воды по локальным числам Нуссельта в переходном и ламинарном режимах свободной конвекции на однородно обогреваемой вертикальной пластине. Штриховая кривая — теплопроводность в переходном режиме



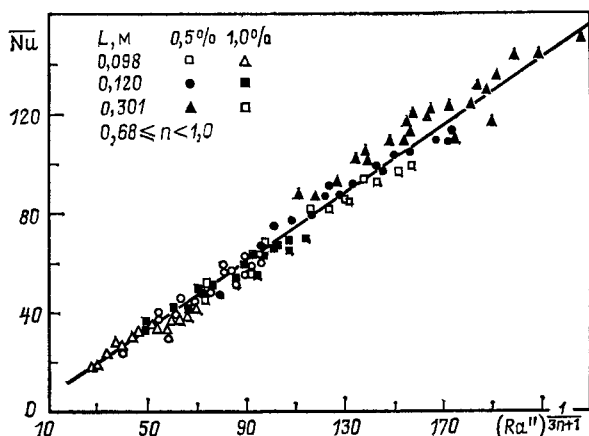


Рис. 10. Сравнение результатов, полученных из (21), с экспериментальными данными (точки) [35] по средним числам Нуссельта для ламинарной свободной конвекции неньютоновских жидкостей (раствор карбопола) на изотермических вертикальных пластинах

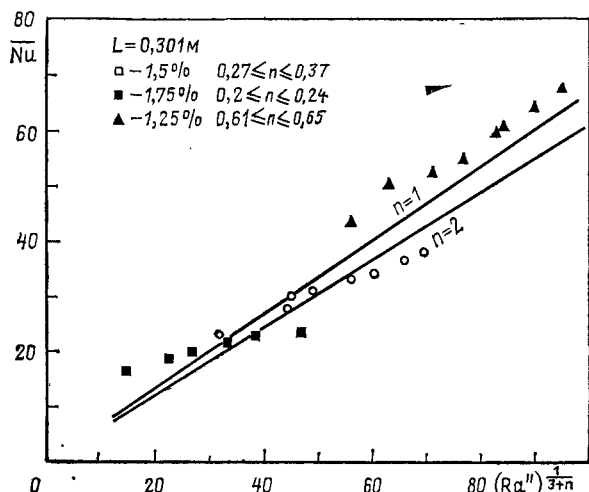


Рис. 11. Сравнение результатов теоретического решения [34] с экспериментальными данными (точки) [35] для средних чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции неньютоновских жидкостей (раствор карбопола) на изотермических вертикальных пластинах

чисел Nu , если M и n при расчете касательного напряжения рассчитываются в средней точке обогреваемой пластины (при $L/2$). Аналогичное соответствие наблюдается для однородного обогрева при использовании соотношения, эквивалентного (37).

Оценка предположений. В [39] показано, что модель Буссинеска применима для воздуха и воды. С другой стороны, в [40] показано, что выбор определяющей разности температур, входящей в зависимость коэффициента объемного расширения, существенно влияет на результаты решения. Авторы [41] пришли к заключению, что влияние сжимаемости пренебрежимо мало практически для всех случаев. Данные [42] свидетельствуют о том, что выбором определяющей разности температур нельзя описать сложное изменение свойств всех газов и жидкостей. Однако анализ, проведенный в [43], показал, что выбор свойств по температуре $(T_w + T_\infty)/2$ приводит для большинства практических случаев к приемлемым результатам.

В [44] показано, что стандартные корреляции для турбулентной свободной конвекции применимы вблизи критической точки, если для определения $1/\zeta$ используется сред-

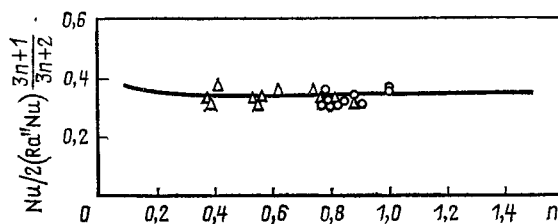


Рис. 12. Сравнение теоретического решения (сплошная кривая) с экспериментальными данными (точки) [37] для средних чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции неньютоновских жидкостей на однородно обогреваемой вертикальной пластине [36]:

○ — большая пластина, $L = 0,508$ м; △ — малая пластина, $L = 0,3048$ м

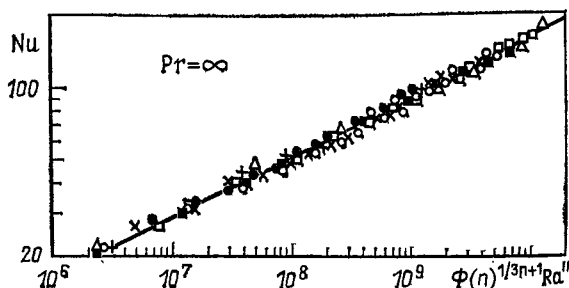


Рис. 13. Сравнение результатов, полученных из (19), с экспериментальными данными (точки) [38] для локальных чисел Nu при ламинарной свободной конвекции жидкости на изотермической вертикальной пластине [38]

нелогарифмическая температура. В [45] получено решение для случая свободной конвекции в воде, в области максимальной плотности ($0-4^\circ\text{C}$).

В [46] получены выражения для учета влияния вязкой диссипации в области ламинарного пограничного слоя. Однако в [47] показано, что такие влияния пренебрежимо малы для всех практически важных случаев, за исключением, вероятно, интенсивного силового воздействия во вращающихся механизмах.

Перенос компонентов. Как показано на рис. 14, экспериментальные данные [48] по переносу компонентов при ламинарной конвекции для ряда веществ с числами Sc от 500 до 80 000 хорошо коррелируют с помощью выражения

$$Sh = 0,66 Ra_L^{1/4}, \quad (44)$$

где $Sc = \eta / \rho \delta$ — число Шмидта; $Sh = \beta x / \delta$ — число Шервуда; $Ra_L' = g \rho \gamma_i \Delta w_i L^3 / \delta \eta$ — число Релея при переносе компонента; δ — коэффициент диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$; β — коэффициент переноса компонентов; γ_i — безразмерный коэффициент расширения, отнесенный к массовой доле i -го компонента; w_i — массовая доля i -го компонента.

Уравнение (44) оказывается эквивалентным соотношению (21), что является подтверждением аналогии между переносом теплоты и субстанции для этого случая. Переход не имеет места, поскольку $Gr_L = Ra_L / Sc$ меньше 10^9 , даже для чисел $Ra_L = 4 \cdot 10^{11}$.

Совместный перенос теплоты и массы. В [49] теоретически показано, что для тонких ламинарных пограничных слоев при $Pr = Sc$ изменения плотности под действием температуры и состава просто суммируются, если действие осуществляется в одном и том же направлении. Поэтому число Ra , входящее во все упомянутые выше уравнения для ламинарной конвекции, можно заменить на $Ra + Ra'$. Разумно предположить, что при практически равных турбулентных числах Прандтля и Шмидта соотношения

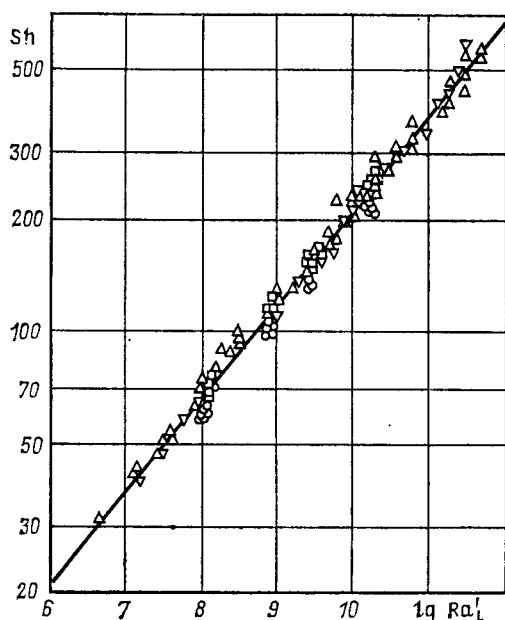


Рис. 14. Сравнение результатов, полученных из (44), с экспериментальными данными (точки) [48] для средних чисел Шервуда при свободной конвекции для вертикальных пластин:

○ — салицидная кислота; □ — бензойная кислота; ▽ — AgClO_4 — HClO_4 ; △ — CuSO_4 — H_2SO_4 .

для турбулентного движения применяются аналогичным образом.

Случай неравенства чисел Sc и Pr является более сложным и не полностью исследованным. Для отдельных специальных условий в тонких ламинарных пограничных слоях при $\text{Sc} \gg \text{Pr} \rightarrow \infty$ и $\text{Gr}'/\text{Gr} \rightarrow 0$ можно использовать соотношение (18) [49, 50], применяемое для расчета чисел Nu , но записанное в виде

$$\text{Sh} = 0,5027 \text{ Ra}^{1/4} \left(\frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} \right)^{1/3}. \quad (45)$$

Зависимость показателя $1/3$ от числа Sc является результатом переноса компонента в линейном поле скорости, которое появляется из-за действия градиента температур.

Соответствующие выражения для $\overline{\text{Sh}}$ и Nu можно получить непосредственно из соотношения для $\overline{\text{Nu}}$. Эти последние предположения еще не были проверены экспериментально.

В. Наклонные и горизонтальные поверхности. Экспериментальные данные для наклонных поверхностей в большинстве случаев обобщаются с помощью соотношений для вертикальных и горизонтальных пластин, в которых g заменяют на эффективный компонент ускорения силы тяжести. Развитие конвекции на обращенных вниз или вверх обогреваемых поверхностях несколько различается и рассматривается отдельно. Здесь θ означает угол наклона обогреваемой поверхности по отношению к вертикали.

Обращенные вниз обогреваемые поверхности.

1. *Однородная температура поверхности.* Экспериментальные данные [51] по локальным значениям скорости переноса субстанции ($\text{Sc} \approx 2000$) для ламинарного и турбулентного режимов представлены на рис. 15 и 16 соответственно. На этих рисунках Ra_θ означает число Релея для переноса компонента, в котором g заменено на составляющую ускорения силы тяжести $g \cos \theta$, параллельную плоскости поверхности. Как видно из рис. 15, наблюдается вполне удовлетворительное соответствие экспериментальных данных с результатами, полученными из [19], вплоть до значений ординаты 1,003. Влияние наклона описывается также удовлетворительно (рис. 16), но измеренные значения $\text{Sh}/\text{Ra}_\theta^{1/4}$ для всех углов, включая вертикальное положение ($\theta = 0$), располагаются существенно ниже значения 0,149, являющегося результатом расчета по (24).

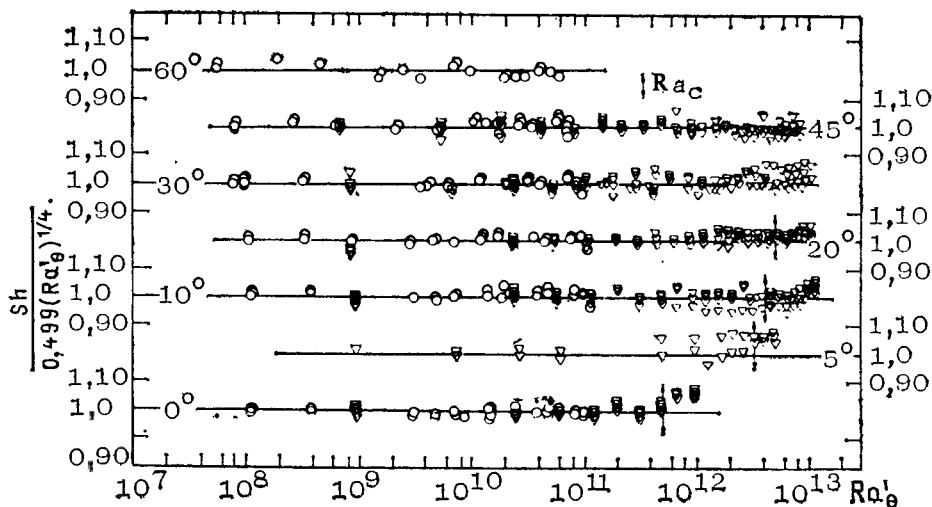
По-видимому, это происходит потому, что переход к турбулентному режиму является незавершенным при максимальных экспериментальных значениях $\text{Ra}_\theta \approx 1,2 \cdot 10^{13}$ ($\text{Gr}_\theta \approx 6 \cdot 10^9$).

Кривая, проведенная через экспериментальные локальные данные [52], и кривая, представленная на рис. 17, совпадают с результатом, полученным из (19) с коэффициентом 0,509 вместо 0,503. Следовательно, для ламинарной области наблюдается вполне удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных. Результаты для $\overline{\text{Nu}}$ на воде [54], приведенные на рис. 18, находятся в хорошем согласии с результатами, полученными согласно (21), поскольку принятый ими коэффициент 0,56 соответствует коэффициенту 0,623 вместо 0,67.

Неограниченные изотермические горизонтальные пластины с обогреваемой поверхностью, обращенной вниз ($\theta = -\pi/2$), не создают условий для развития конвекции,

Рис. 15. Сравнение результатов, полученных из (19) (представлено ординатой 1,003), с экспериментальными данными (точки) для локальных чисел Шервуда при ламинарной свободной конвекции на обращенных вниз нагретых поверхностях наклонных пластин [51]:

▽ — медная поверхность; ○ — никелевая поверхность



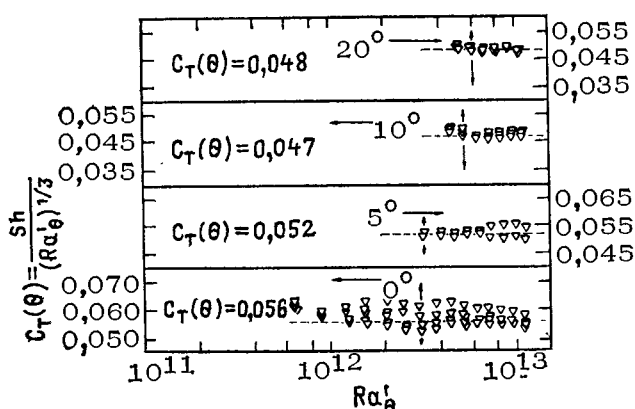


Рис. 16. Сравнение результатов, полученных из (24) (представлено ординатой 0,149), с экспериментальными данными (точки) для локальных чисел Шервуда при свободной конвекции на обращенных вниз нагреваемой поверхности пластинах [51]

однако перенос массы одно или более компонентов имеет место. Для случая силы тяжести, направленной перпендикулярно поверхности пластины, анализ размерностей

дает

$$\overline{Nu} = B Ra^{1/5}, \quad (46)$$

где B является функцией формы и числа Pr . При отсутствии достаточной информации для получения зависимости числа Nu от Pr приближенную зависимость можно построить, используя соотношение (20).

Авторы [55] показали, что для обращенных вверх обогреваемых поверхностей коэффициент B оказывается постоянным для всех геометрий, если в качестве характерной длины в числах Nu и Ra используется отношение площади поверхности пластины к ее периметру. При этом соотношение (46) приобретает вид

$$\overline{Nu}_A = G (Ra_A \psi(Pr))^{1/5}, \quad (47)$$

где индекс A означает определенную выше характерную длину.

Значение чисел Nu для нескольких геометрий получены с помощью интегральной теории пограничного слоя. Некоторые соответствующие коэффициенты для соотношения (47) приведены в табл. 2. Эти значения недостаточно точны, так как при выводах использовались определенные допущения. Экспериментальные значения чисел Nu , полученные несколькими исследователями, приведены на рис. 19.

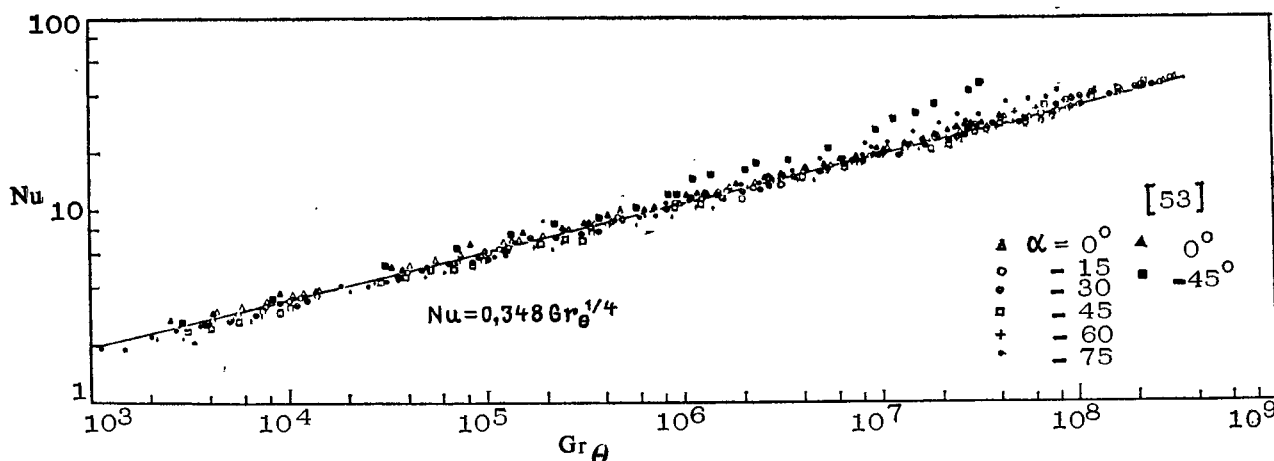


Рис. 17. Сравнение результатов, полученных из (19) (с коэффициентом 0,059), с экспериментальными данными (точки) для локальных чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции в воздухе на обращенных вниз обогреваемой поверхности наклонных изотермических пластинах различной длины [52]

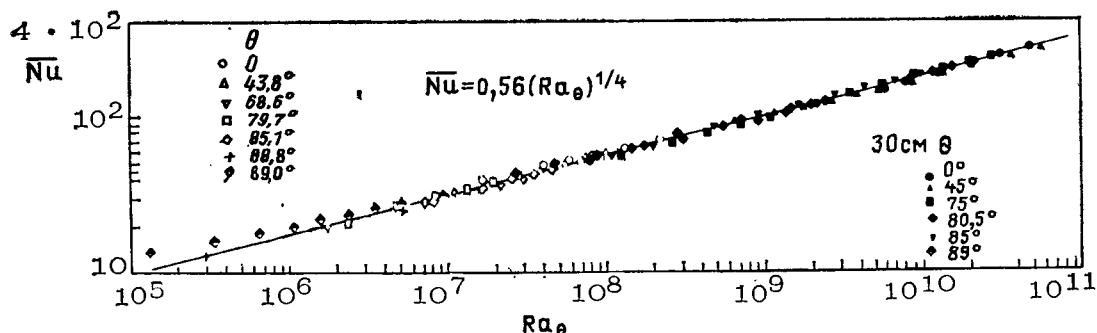


Рис. 18. Сравнение результатов, полученных из (21) (с коэффициентом 0,623), с экспериментальными данными (точки) для средних чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции в воде на изотермических обращенных вниз нагреваемой поверхности наклонных пластинах [54]

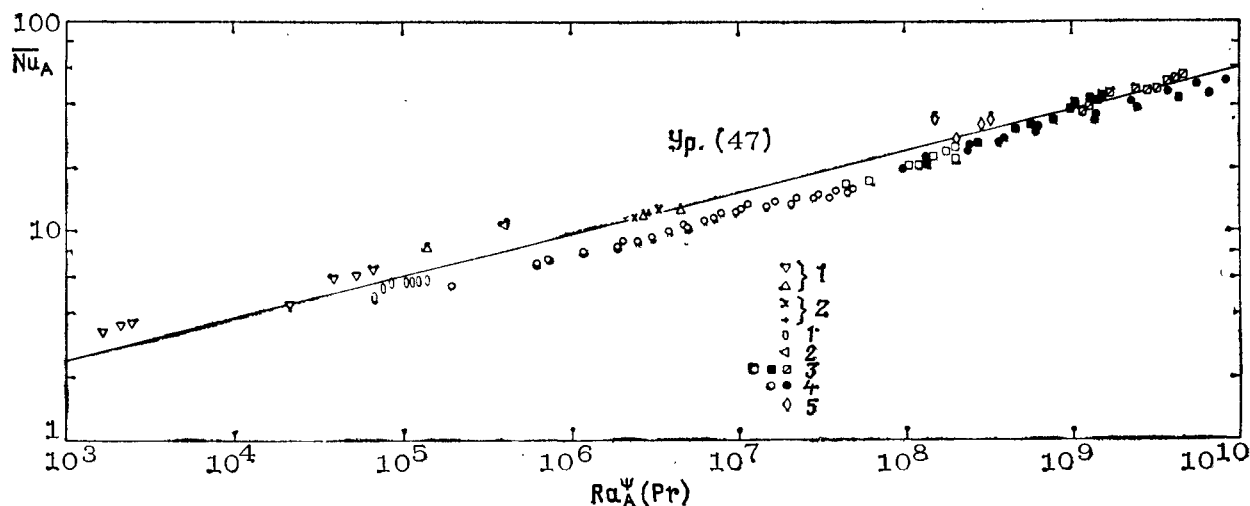


Рис. 19. Сравнение результатов, полученных из (47), с экспериментальными данными (точки) для средних чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции на изотермических обращенных вниз обогреваемой поверхностью горизонтальных пластинах различной формы:

1 — воздух, квадратная пластина ($l=L/4$); 2 — воздух, прямоугольная пластина ($l=L/2$); 3 — воздух, прямоугольные пластины 1×1 , 1×2 , 1×3 ($l=L/2$); 4 — вода, прямоугольные пластины 1×2 , 2×1 ($l=L/2$); 5 — вода, квадратная пластина ($l=L/2$)

Соответствие экспериментальных значений Nu и результатов, полученных согласно соотношению (47) с коэффициентом $G=0,6$, является вполне удовлетворительным. Данные [54] для воды лежат ниже других значений, как это имело место и на рис. 18.

Локальные значения $Nu_A/(Ra_A^{\Psi}(Pr))^{1/5}$ для двумерной конвекции на прямоугольных плитах, приведенные на рис. 20, сопоставлены с кривой, представляющей собой решение, взятое из [57]. Полученное соответствие является вполне удовлетворительным.

2. *Однородный обогрев.* Результаты, полученные при граничных условиях на стенке с равномерным обогревом, обычно представляют в виде зависимости Nu от $Ra_0 = NuRa_0$. Подобная зависимость [60] для воды представлена на рис. 21. Наблюдается удовлетворительное согласие с результатами, найденными из (30) и (34), в которых вместо g подставлено $g \cos \theta$. В [50] получено следующее эмпирическое выражение для начала перехода:

$$Ra_c^* = 6,31 \cdot 10^{12} e^{-4,04\theta}, \quad (48)$$

которое описывает переходы, показанные на рис. 21.

Обращенные вверх обогреваемые поверхности. 1. *Однородная (постоянная) температура поверхности.* В противоположность обращенной вниз и вертикальной поверхностям в этих условиях наблюдается переход к турбулент-

ному движению, поскольку числа Ra могут принимать значения выше критического Ra_s . Авторы [54] предложили следующее эмпирическое соотношение для этого значения на изотермической поверхности:

$$Ra_s = 10^{8,11,5 \cos \theta}. \quad (49)$$

Для ламинарного и турбулентного режимов конвекции при малых углах наклона применимы те же выражения, что и для обращенных вниз обогреваемой частью пластин. Об этом свидетельствует большое число результатов, приведенных на рис. 22. Первая точка в каждом наборе данных, указывающая на начало турбулентного режима

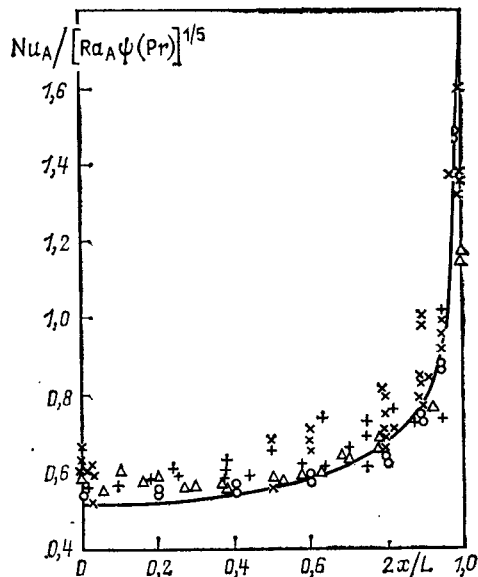


Рис. 20. Сравнение результатов теоретического решения [57] с экспериментальными данными (точки) для локальных чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции на изотермических обращенных вниз обогреваемой поверхностью горизонтальных пластинах:

○ — воздух ($l=L/2$); △ — воздух ($l=L/2$); × — воздух ($l=L/4$); + — вода ($l=L/2$)

Таблица 2. Коэффициенты в уравнении (47) для нагреваемых обращенных вниз поверхностей

Квадрат	Круг	Длинная полоса	Литература
0,748	0,667	0,600	[56]
—	—	0,551	[57]
—	—	0,600	[58]
0,689	—	—	[59]

Примечание. Характеристическая длина равна отношению площади нагреваемых поверхностей к их периметру.

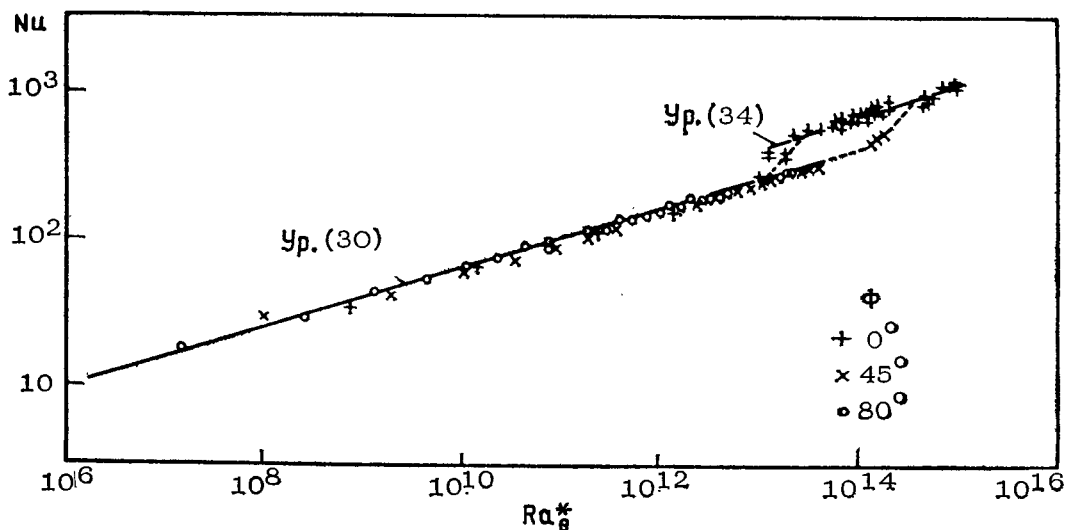


Рис. 21. Сравнение результатов, полученных из (30) и (34), с экспериментальными данными (точки) [60] для локальных чисел Нуссельта при свободной конвекции в воде на однородно обогреваемой обращенной вниз наклонной пластине

конвекции, обведена кружком. Эти результаты находятся в удовлетворительном соответствии с результатами расчета по (49). Для турбулентного режима конвекции при больших углах наклона в [61] показано, что необходимо использовать составляющую ускорения силы тяжести, перпендикулярную, а не параллельную плоскости поверхности; следовательно, числа Nu оказываются пропорциональными $(\sin \theta)^{1/2}$. Соответствующее выражение в этом случае имеет вид

$$Nu = 0,15 (Ra \phi (Pr) \sin \theta)^{1/2}. \quad (50)$$

Результаты, приведенные на рис. 23, подтверждают это предположение. Здесь учтены оба числа Nu , Nu , поскольку различия между ними в этих условиях незначительны. В [62] получено точное решение для режима конвекции типа пограничного слоя на полуграниченной горизонтальной полосе с обращенной вверх обогреваемой поверхностью и выполнены требуемые численные расчеты для ряда чисел

Рг. В [63] эти значения обобщены с помощью соотношения

$$\overline{Nu}_A = \frac{0,766 Ra_A^{1/5}}{[1 + (0,322/Pr)^{11/20}]^{4/11}}. \quad (51)$$

Для турбулентного режима можно использовать соотношение (34) в следующем виде:

$$\overline{Nu}_A = \frac{0,15 Ra_A^{1/3}}{[1 + (0,322/Pr)^{11/20}]^{20/33}}. \quad (52)$$

Сравнение соотношений (51) и (52) с экспериментальными результатами различных исследователей приведено на рис. 24. На основании ранее упомянутого предположения в [55] данные для различных форм поверхностей обобщены в виде зависимости Nu_A от Ra_A .

Обнаруженная зависимость Nu от Pr , Ra и формы оказалась в пределах разброса данных. Однако экспери-

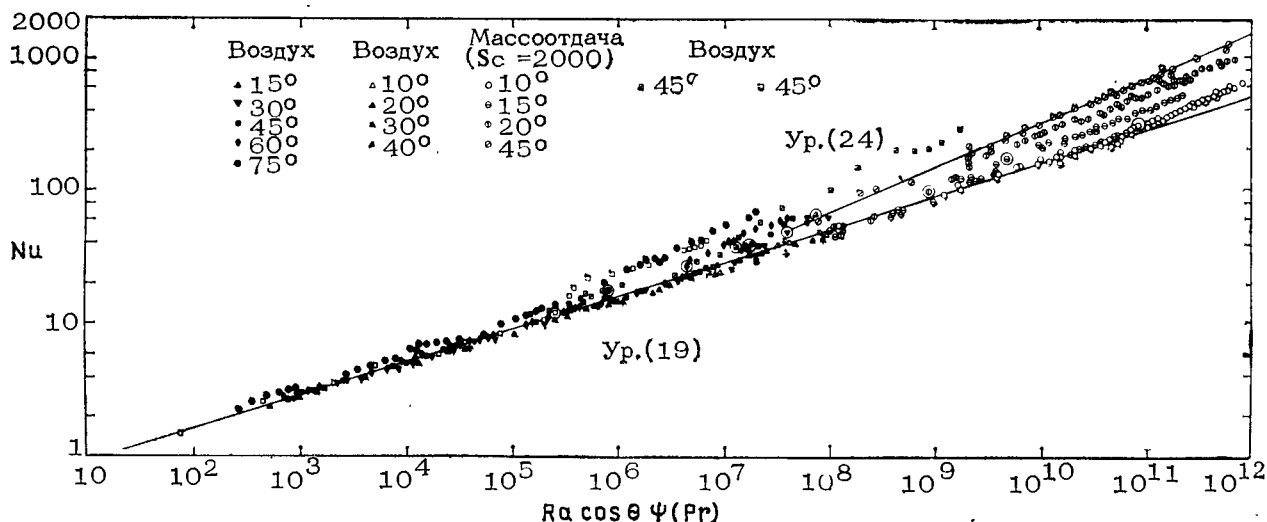


Рис. 22. Сравнение результатов, полученных из (19) и (24), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для локальных чисел Нуссельта и Шервуда при свободной конвекции на изотермически обогреваемой поверхности наклонных пластин

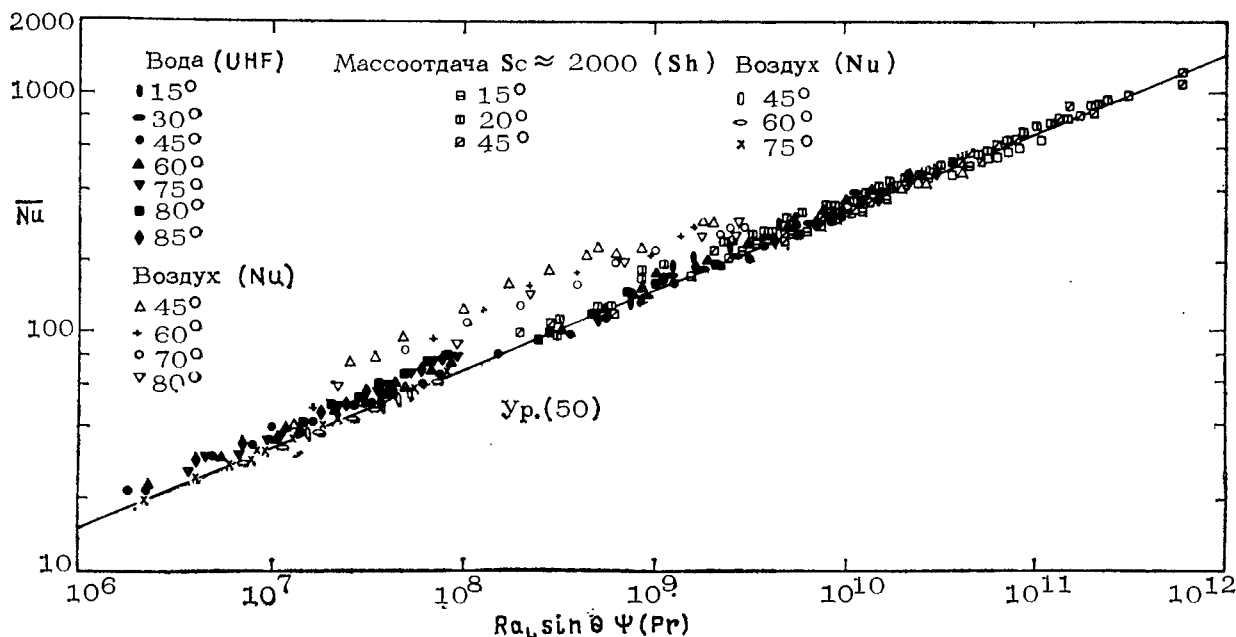


Рис. 23. Сравнение результатов, полученных из (50), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для локальных и средних чисел Нуссельта и Шервуда при турбулентной свободной конвекции на обращенных вверх обогреваемой поверхности пластинах с большими углами наклона по отношению к вертикали

ментальные данные лежат преимущественно выше результатов расчета по корреляционным уравнениям.

2. Однородный обогрев. Согласно [60] переход для однородно обогреваемой обращенной вверх поверхности имеет место при

$$Ra_c^* = 6,31 \cdot 10^{12} e^{-11\theta} \quad (53)$$

Можно ожидать, что уравнения (30) для ламинарного, (34) для турбулентного режимов при малых углах наклона с $g \cos \theta$, подставленным вместо g , и уравнение (50) для больших углов наклона в этих условиях будут применимы. На рис. 25 соотношения (30) и (34) находятся в хорошем согласии с результатами, полученными в [64] при $\theta = 29\pi/180$ (вода) и в [65] только для ламинарного режима при θ от $15\pi/180$ до $60\pi/180$ рад. Однако переход согласно [64] является более замедленным по сравнению с переходом согласно уравнению (53) $\lg(Ra\Phi(Pr)) = 10,22$. В [66], так же как и в [65], утверждается, что результаты, полученные при турбулентном течении воздуха и воды, соответственно лучше обобщаются с помощью числа Ra , а не $Ra\Phi$. Для проверки (50) оказалось трудно подобрать результаты, кроме полученных в [54] и представленных на рис. 23.

С. Течение в каналах, вызванное действием сил плавучести. Обогрев стенок открытого с концов вертикального канала вызывает появление конвекции. В [67] в результате корреляции экспериментальных и расчетных значений для случаев однородной температуры и однородного нагрева стенок получено соотношение

$$\overline{Nu} = \frac{ARa^{\#}}{\{1 + (4A/3)^{3/2} [1 + (C/Pr)^{9/16}]^{2/3} (Ra^{\#})^{9/8}\}^{2/3}} \quad (54)$$

Константы, используемые в этом выражении, приведены в табл. 3. Модифицированное число Рейле для инцинированного канала плавучести течения

$$Ra^{\#} = \frac{g\beta^2 c_p \zeta (T_w - T_{\infty}) l^4}{L\lambda\eta} \quad (55)$$

где l — характеристическая длина (табл. 3); L — длина канала.

Соотношение (54) получено с использованием предположений о существовании пограничного слоя на входе (с коэффициентами, используемыми для описания входных эффектов [68] и кривизны) и полностью развитой конвекции на выходе из канала. Вполне удовлетворительное соответствие результатов расчета по (54) с экспериментальными данными показано на рис. 26, где приведена зависимость данных при несимметричном обогреве от среднего перепада температур в средней по высоте точке [69].

Д. Горизонтальные цилиндры. С помощью теории тонких ламинарных пограничных слоев трудно обобщить данные, полученные на горизонтальных цилиндрах, так как формирование следа за цилиндром при умеренных числах Ra и умеренной кривизне является пограничным слоем самим по себе.

В [70] приведена комбинация асимптотических решений, полученных с помощью теории тонких пограничных

Таблица 3. Характеристические длины и коэффициенты уравнения (54) для конвекции, вызванной влиянием сил плавучести [67]

Каналы	Граничные условия	Характеристическая длина	A	C
Цилиндрический	$UWT (T_w = \text{const})$	D	1/128	0,492
Параллельные пластины	UWT	b	1/24	0,492
Цилиндрический	$UHF (q_w = \text{const})$	D	1/64	0,437
Параллельные пластины	UHF	b	1/12	0,437

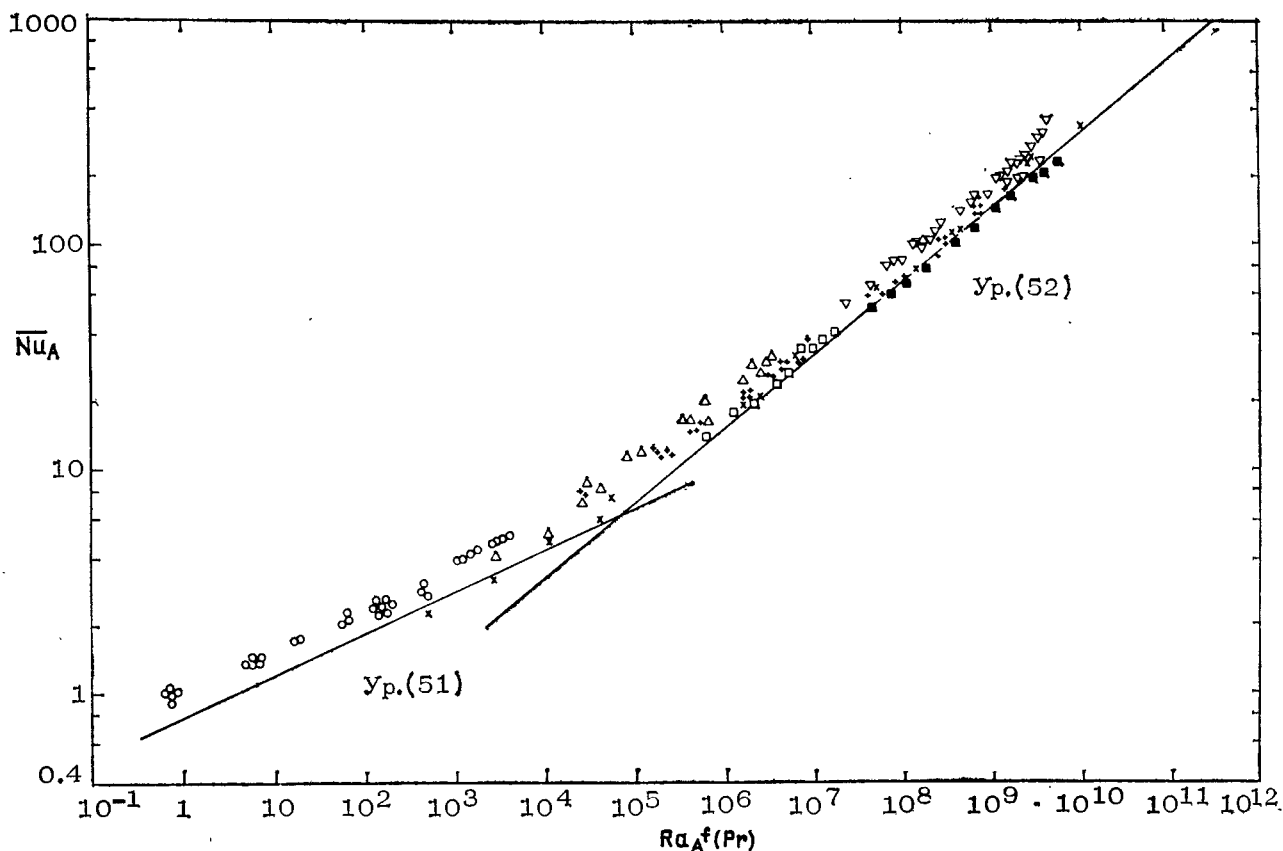


Рис. 24. Сравнение результатов, полученных из (51) и (52), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для средних чисел Нуссельта и Шервуда при свободной конвекции на обращенных вверх обогреваемой поверхности изотермических горизонтальных пластинах разных форм:

∇ — воздух (УНФ), 1×1 , 1×2 , 1×3 прямоугольные пластины ($l=L/2$); Δ — воздух, разные формы ($l=A/P$); $\circ$ — нафталин ($Sc=2.5$), разные формы ($l=A/P$); $\square$ — вода, 1×2 прямоугольные пластины ($l=L/2$); $\blacksquare$ — вода, 3×1 прямоугольные пластины ($l=L/2$); $+$ — электрохимия ($Sc \approx 2200$), разные формы ($l=A/P$); $\times$ — электрохимия ($Sc \approx 2250$), круглые диски ($l=D/4$)

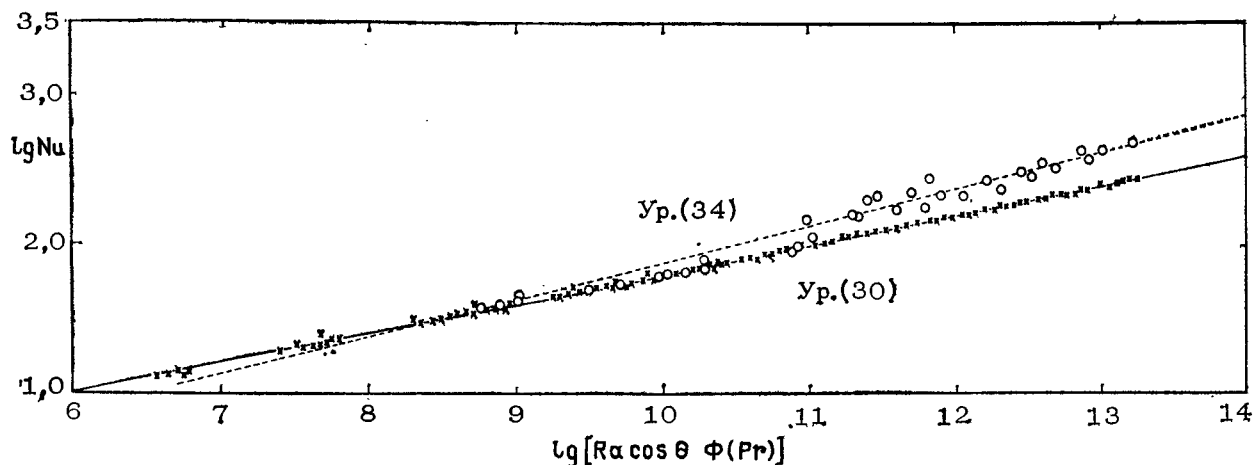


Рис. 25. Сравнение результатов, полученных из (30) и (34), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для локальных чисел Нуссельта при свободной конвекции в воде на однородно обогреваемых обращенных вверх наклонных пластинах

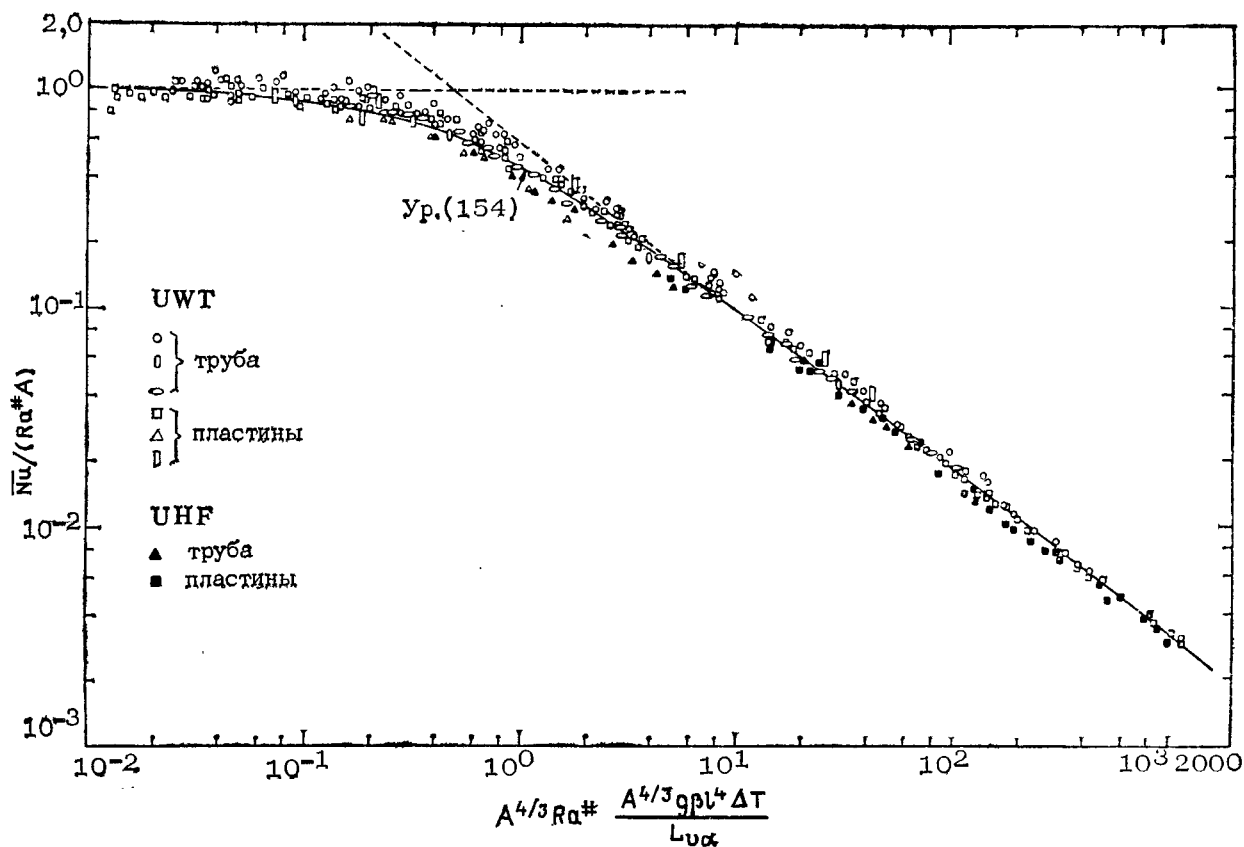


Рис. 26. Сравнение результатов, полученных из уравнения (50), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для средних чисел Нуссельта при ламинарном, вызванном влиянием подъемных сил, течениях в открытых с концов вертикальных каналах [67]

слоев в [10] для $Pr \rightarrow \infty$ и в [71] для $Pr \rightarrow 0$, в виде следующего корреляционного уравнения для однородной (постоянной) температуры стенки (UWT):

$$\overline{Nu} = \frac{0,518 Ra^{1/4}}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (56)$$

Характеристической длиной в уравнении (56) и во всех последующих выражениях этого раздела является диаметр D .

Соотношение (24) можно применять для расчета теплоотдачи при турбулентном режиме конвекции на горизонтальных цилиндрах, так же как и для вертикальных пластин. Аналогичное (27) соотношение дает возможность описать поведение теплоотдачи с учетом режима существования двух тонких пограничных слоев:

$$\overline{Nu}_f = \frac{0,518 Ra^{1/4}}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \times \left(1 + \frac{3,47 \cdot 10^{-7} Ra}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{16/9}}\right)^{1/12} \quad (57)$$

В [72] предложено следующее выражение для учета влияния кривизны пограничного слоя на цилиндре:

$$\overline{Nu} = 2 \ln \left(1 + \frac{2}{\overline{Nu}_f}\right) \quad (58)$$

Уравнение (58) можно скомбинировать с уравнением (56), чтобы получить расчетное соотношение для всей ламинар-

ной области, с уравнением (24) — для турбулентной области и с уравнением (57) — для всех чисел Релея Ra . Некоторые решения получены для ползущего течения ($Ra \rightarrow 0$) с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений. Наиболее точным является [73], которое можно представить в виде

$$\overline{Nu} = 6/\ln \left[\frac{49,8 (Pr + 9,4)^{1/2}}{\overline{Nu} Pr Ra} \right] \quad (59)$$

Соотношение (57) авторы предлагают использовать только для $Pr Ra < 10^{-3}$.

Эти соотношения на рис. 27 сопоставлены с экспериментальными данными, полученными различными исследователями в широкой области чисел Ra и Pr .

Комбинация уравнений (57) и (58) обеспечивает хорошее описание большинства экспериментальных данных, за исключением данных для больших чисел Sc , которые лучше описываются уравнением (56) из-за устойчивости ламинарного течения.

Соотношение (59) находится в лучшем соответствии с экспериментальными данными, чем комбинация уравнений (59) или (56) и (58) только для $Ra < 10^{-8}$. Однако значения чисел Nu , наблюдаемые экспериментально для очень малых чисел Ra , являются несомненно более высокими (как результат воздействия возмущений на линии тока и концевых эффектов).

Большое число экспериментальных данных и другие предложенные корреляции проанализированы в [6]. Соответствующие модификации приведенных выше уравнений для однородного обтекания, изменения физических свойств,

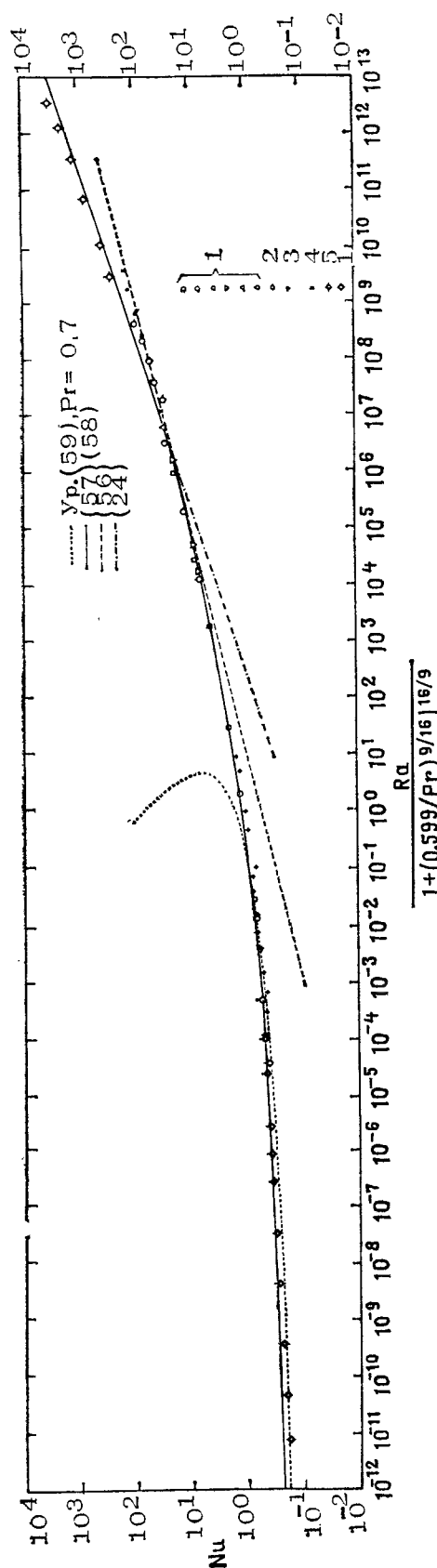


Рис. 27. Сравнение результатов, полученных из (56) — (59), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для средних чисел Нуссельта и Шервуда при свободной конвекции на изотермических горизонтальных цилиндрах. Опытные данные: 1 — воздух; 2 — вода; 3 — глицерин; 4 — масло; 5 — H_2SO_4 . Массовая доля: 5 — H_2SO_4 , массовая доля; 4 — CuSO_4 , анилин, оливковое масло, глицерин; 3 — толуол, CsCl , анлилин, оливковое масло, глицерин; 2 — вода; 1 — воздух.

одновременного переноса массы и для неьютоновских жидкостей являются таким же, как и для вертикальной пластины. Корректирующие множители для последних случаев представлены в табл. 1. Для случая однородного обогрева среднее значение числа Pr равно 0,442, а не 0,559, но это отличие пренебрежимо мало (за исключением случая жидких металлов).

В [74] показано, что уравнение, эквивалентное (59), применимо даже вблизи критической точки при условии, что правильно рассчитаны свойства.

Е. Вертикальные и наклонные цилиндры. В [75] получено следующее выражение для вертикального цилиндра с произвольно заданным распределением температуры:

$$\overline{\text{Nu}} = \overline{\text{Nu}}_p + 0,97 (x/D), \quad (60)$$

где $\overline{\text{Nu}}_p$ — локальное число Nu для плоской пластины на том же расстоянии x и с тем же профилем температуры; x — расстояние вверх по цилиндру; D — диаметр.

В качестве характерного размера здесь берется x . Следующее выражение для наклонных цилиндров (с изолированными поверхностями торцов) для режимов тонких пограничных слоев ($10^5 < \text{Ra} < 10^9$) получено на основе соотношения (56) для горизонтальных цилиндров и соотношения (21) для вертикальных плоских пластин, которые использовались как асимптотические, причем $g \cos \theta$ заменяет g в (56) и (21) и коэффициент 0,559 заменяет 0,497 в (21),

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{0,518 (\text{Ra} \cos \theta)^{1/4} [1 + (2,8D \tan \theta/x)^{3/2}]^{1/8}}{[1 + (0,559/\text{Pr})^{9/16}]^{4/9}}. \quad (61)$$

Здесь θ — угол наклона оси цилиндра по отношению к вертикали; D — характерный размер в числах $\overline{\text{Nu}}$ и Ra . При достаточно малых x/D поправка, определяемая соотношением (60), незначительна. Показатель степени $1/6$ выбран с учетом теоретических оценок [76] для средних углов наклона и $\text{Pr} = \infty$.

Расчетные значения [76] на рис. 28 хорошо описываются соотношением (61), но экспериментальные данные [77] для воздуха лежат систематически и существенно выше. Вместе с тем они хорошо описываются следующим выражением, полученным в [77]:

$$\overline{\text{Nu}} = 0,42 (\text{Gr} \cos \theta)^{1/4} \left\{ 1 + \left[1,31 \left(\frac{D \tan \theta}{L} \right)^{1/4} \right]^8 \right\}^{1/8}. \quad (62)$$

Уравнение (62) является аналогом (61), но с эмпирически определенными значениями коэффициентов 0,6 и 0,55 вместо теоретических значений 0,518 и 0,67. Это, не имеющее большого значения, различие вызвано использованием показателей 2 и $1/8$ соответственно вместо $3/2$ и $1/6$.

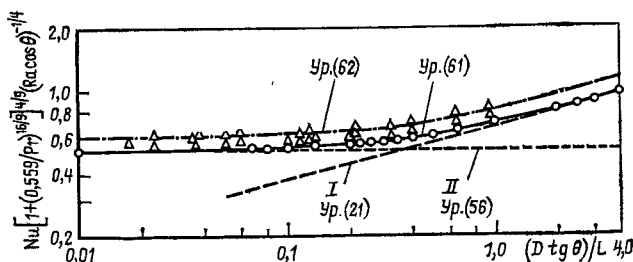


Рис. 28. Сравнение результатов, полученных из (61) и (62), с экспериментальными данными (Δ) [77] для средних чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции в воздухе на изотермических наклонных цилиндрах. Здесь же представлены результаты по теории тонкого пограничного слоя ($\circ$) [76]: I — модифицированное уравнение (21), наклонная пластина; II — модифицированное уравнение (56), длинный наклонный цилиндр.

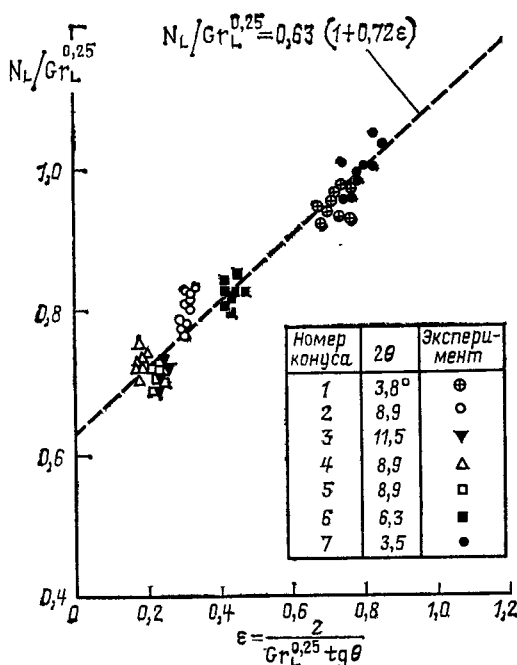


Рис. 29. Сравнение результатов, полученных из (65), с экспериментальными данными (точки) для средних чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции в воздухе на изотермических вертикальных конусах [81]

Данные не представлялись в виде, который позволил бы использовать соотношение (58), однако тестовые расчеты показали, что это соотношение можно использовать для описания экспериментальных данных. Следовательно, комбинацию уравнений (58) и (61) можно рекомендовать для расчета, поскольку она имеет более общий вид.

В [6] обсуждаются экспериментальные данные других авторов и предлагаются другие корреляционные соотношения.

Г. Вертикальные конусы. Теоретическое значение 0,7098, полученное в [78] для $\overline{Nu}/(Ra \cos \theta)^{1/4}$ и $Pr \rightarrow \infty$, можно использовать вместе со значениями, рассчитанными в [79] для низких чисел Pr , чтобы построить следующее обобщенное корреляционное уравнение для тонких пограничных слоев и всех чисел Pr :

$$\overline{Nu} = \frac{0,710 (Ra_L \cos \theta)^{1/4}}{[1 + (0,352/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (63)$$

Здесь характерной длиной в $\overline{Nu}$ и Ra_L является наклонная высота конуса, θ означает угол наклона между образующей конуса и осью. В [80] получено выражение для учета влияния нарастания пограничного слоя, первые два члена которого имеют вид

$$\overline{Nu} = \overline{Nu}_f + \frac{0,412}{\lg \theta}, \quad (64)$$

где $\overline{Nu}_f$ определяется согласно (63).

Авторы [81] на основе корреляции экспериментальных данных для воздуха, как показано на рис. 29, получили аналогичное выражение

$$\overline{Nu} = 0,63 (Gr_L \cos 2\theta)^{1/4} + \frac{0,907}{\lg \theta}. \quad (65)$$

Коэффициенты в соотношении (65) подобраны эмпирическим путем. Использование $\cos 2\theta$, а не $\cos \theta$ не объяснено;

также не объясняется расхождение с уравнением (64), так как максимальный угол в экспериментах составил 5,85π/180 рад.

Г. Сферы. Автор [82], используя теоретические решения [83] для $Pr=0,7$, [84] для $Sc=1, 100, 500$ и 650 и [76] для $Sc \rightarrow \infty$, получил следующее корреляционное уравнение для локальных и средних чисел Нуссельта в тонком ламинарном пограничном слое:

$$\overline{Nu} = \frac{0,770 (1 - 0,0716\theta^2) Ra^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}; \quad (66)$$

$$\overline{Nu} = \frac{0,589 Ra^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}, \quad (67)$$

где диаметр используется как характерная длина, а θ — угол, отсчитываемый от верхней неподвижной точки, рад.

Коррекция для пограничного слоя конечной толщины на поверхности с конечным радиусом кривизны, предложенная в [72], заключается в добавлении предельного значения 2,0 для чистой теплопроводности в правую часть уравнений (66) и (67). Таким образом, для среднего значения

$$\overline{Nu} = 2 + \frac{0,589 Ra^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}. \quad (68)$$

Для турбулентных режимов корреляционное соотношение составлено из соотношения (68) и несколько модифицированного уравнения (24) в виде

$$\overline{Nu} - 2 = \frac{0,589 Ra^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \times \left\{ 1 + \frac{7,44 \cdot 10^{-8} Ra}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{16/9}} \right\}^{1/2}. \quad (69)$$

Представленные на рис. 30 результаты большого числа исследователей сопоставлены с результатами, полученными из уравнения (69) в широкой области параметров. Соответствие этих результатов является вполне удовлетворительным, хотя данные для больших чисел Pr и Sc имеют тенденцию к замедлению перехода в зависимости вида $Ra^{1/4} + (0,469/Pr)^{9/16}]^{-4/9}$, и следовательно, лучше описываются уравнением (68) для всех чисел Ra .

Экспериментальные данные различных исследователей по локальным числам Нуссельта для средних чисел Ra сопоставлены с результатами, полученными из уравнения (66) на рис. 31. Наблюдается удовлетворительное согласие расчетных и экспериментальных данных, хотя для малых углов экспериментальные данные лежат несколько ниже расчетных. По мере увеличения чисел Ra наступает отрыв. За точкой отрыва интенсивность теплообмена увеличивается с возрастанием угла. Вклад в теплообмен образовавшиеся следы видны из результатов [85], которые свидетельствуют об увеличении теплообмена с возрастанием числа Ra . Использование $Nu-2$ вместо Nu в качестве ординаты на рис. 31, по-видимому, позволит улучшить соответствие, особенно для малых чисел Ra , но числа Nu и Ra , рассчитанные для области отрыва, неприменимы во всех случаях.

В [86] предложено следующее выражение для ползущего течения ($Gr \rightarrow 0$):

$$\overline{Nu} = 2 + Gr + Gr^2 (0,139 - 0,419 Pr + 1,1902 Pr^2). \quad (70)$$

Уравнение (70) дает более надежную, чем (68), зависимость от чисел Gr и Pr при $Gr \rightarrow 0$. Однако из-за влияния предельного значения 2 отличие в числах $\overline{Nu}$, рассчитанных по (70) и (68), невелико.

Уравнение (68) с числом Ra , определенным по (43), применимо для сфер и неньютоновских жидкостей со степенным законом с коэффициентами, приведенными в табл. 1. В [34] графически представлены теоретические

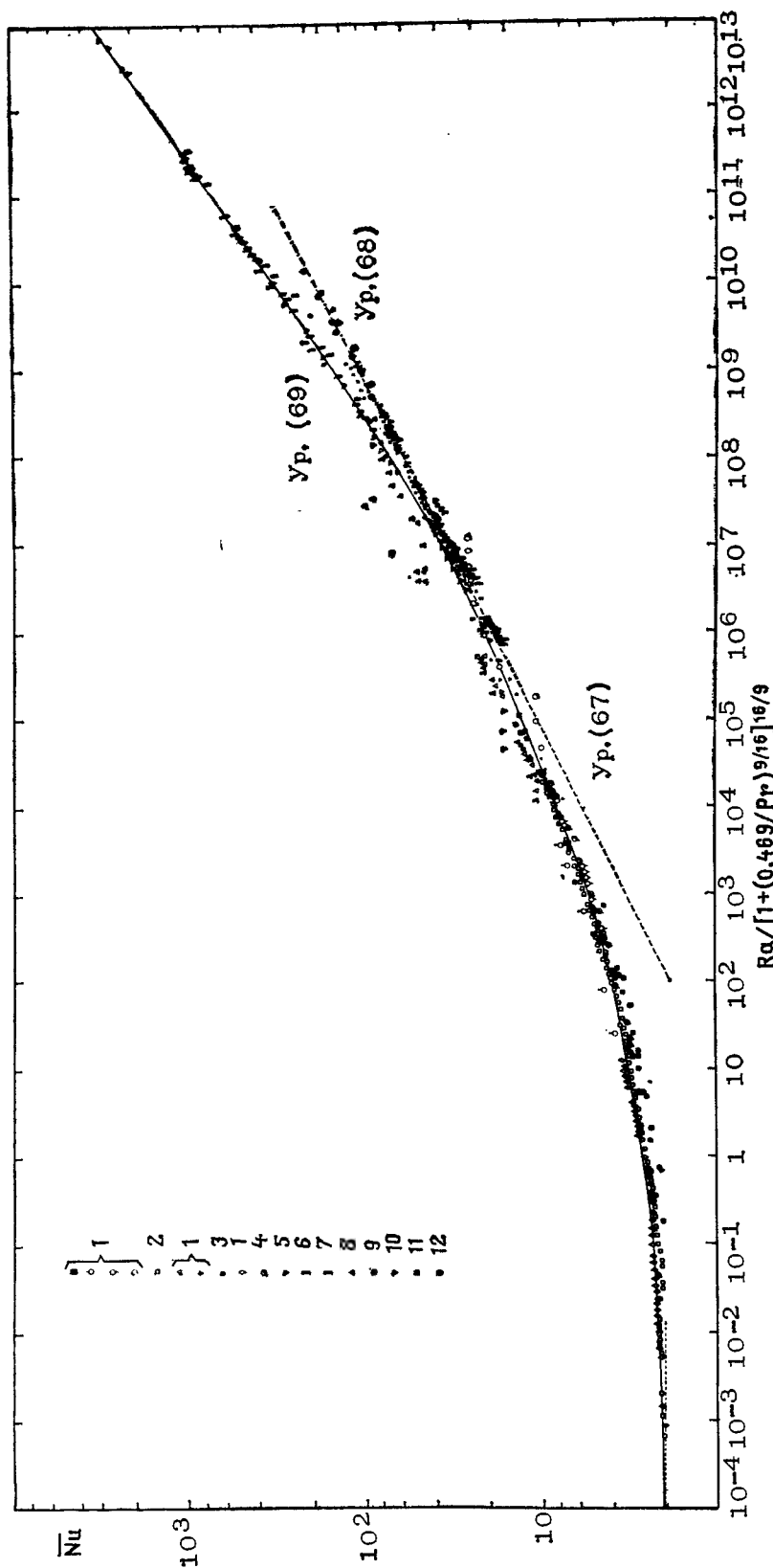
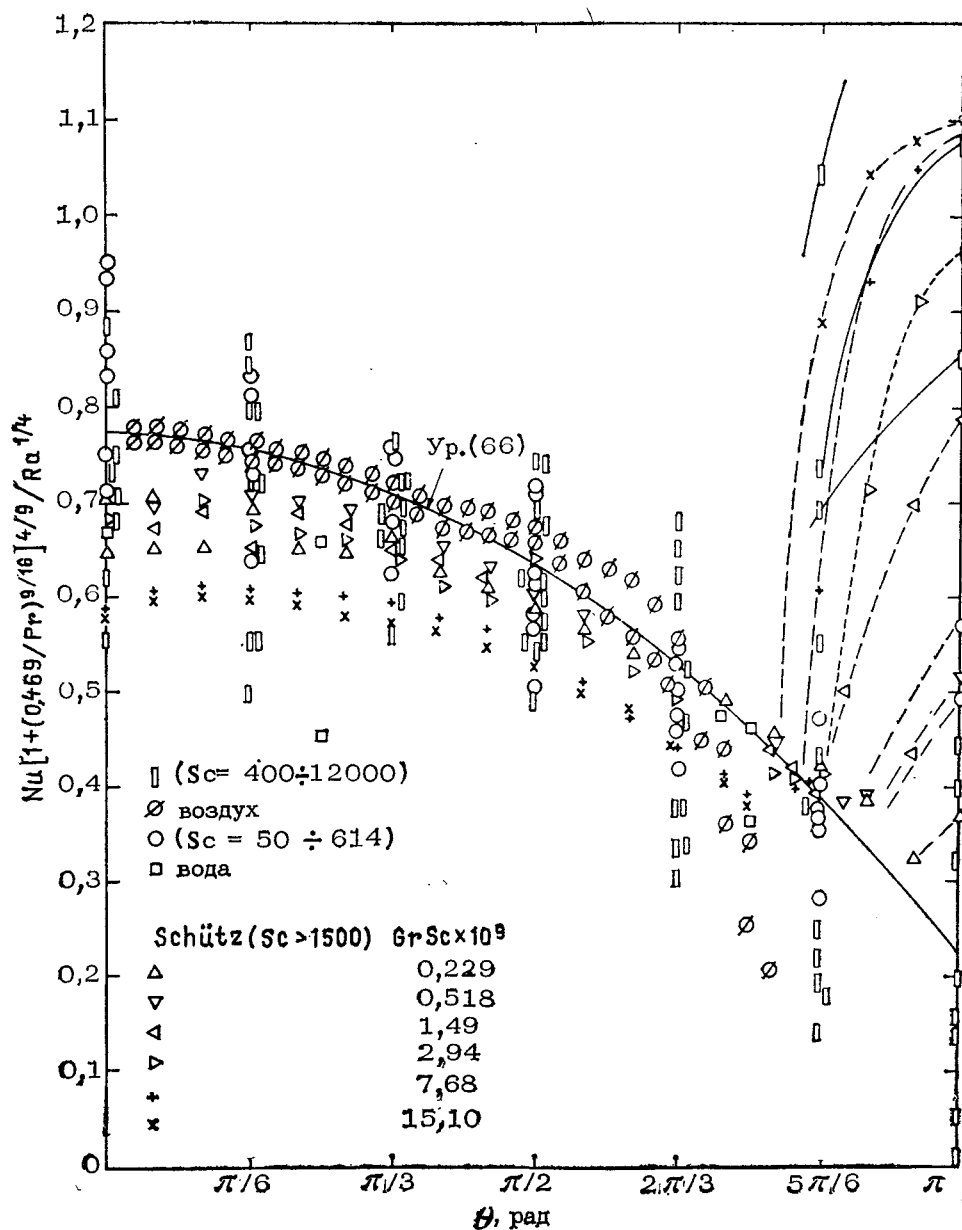


Рис. 30. Сравнение результатов, полученных из (68) и (69), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для средних чисел Нуссельта и Шервуда при свободной конвекции на изотермических пластинах [82].

Рис. 31. Сравнение результатов, полученных из (66), с экспериментальными данными (точки) для локальных чисел Нуссельта и Шервуда при свободной конвекции на изотермических сферах [82]



результаты для степенных законов $1/2$ и $3/2$. Как показано на рис. 32, данные для $\overline{Nu}$ [87] лежат ниже результатов расчета по (68) для малых Ra , но для больших чисел Ra находятся в удовлетворительном согласии. Эти данные хорошо согласуются с теоретическими результатами [34] (здесь не показано).

Н. Тела других форм. В дополнение к тем формам тел, о которых уже упоминалось, теоретические решения были получены для некоторых других геометрий. Экспериментальные результаты были получены для большего числа форм, в частности для ребер и радиаторов. Только некоторые особенно важные из этих результатов будут рассмотрены ниже.

В [88] получены данные для одного продолговатого и двух сплюснутых сфероидов и предложены корреляционные соотношения в форме [12], описывающие режимы пол-

зущего течения, пограничного слоя и турбулентного движения. В [89] на основе численного интегрирования получены решения для горизонтальных эллиптических цилиндров. В [90] с помощью метода [91] получено несколько решений для тех же условий, что и в [89]. Автор [92] представил обобщенное решение уравнений пограничного слоя для наклонных плоских пластин произвольной формы и использовал его при получении результатов для m -гранной пирамиды. В [78] решена задача для ламинарного пограничного слоя при $Pr \rightarrow \infty$ для некоторых поверхностей, включая наклонные диски, квадратные и круглые ребра на горизонтальных трубах.

1. Обобщенные решения и корреляции. Значительный прогресс достигнут в обобщении решений и корреляционных соотношений для свободной конвекции. В [78] показано, что решение для случая трехмерной свободной конвек-

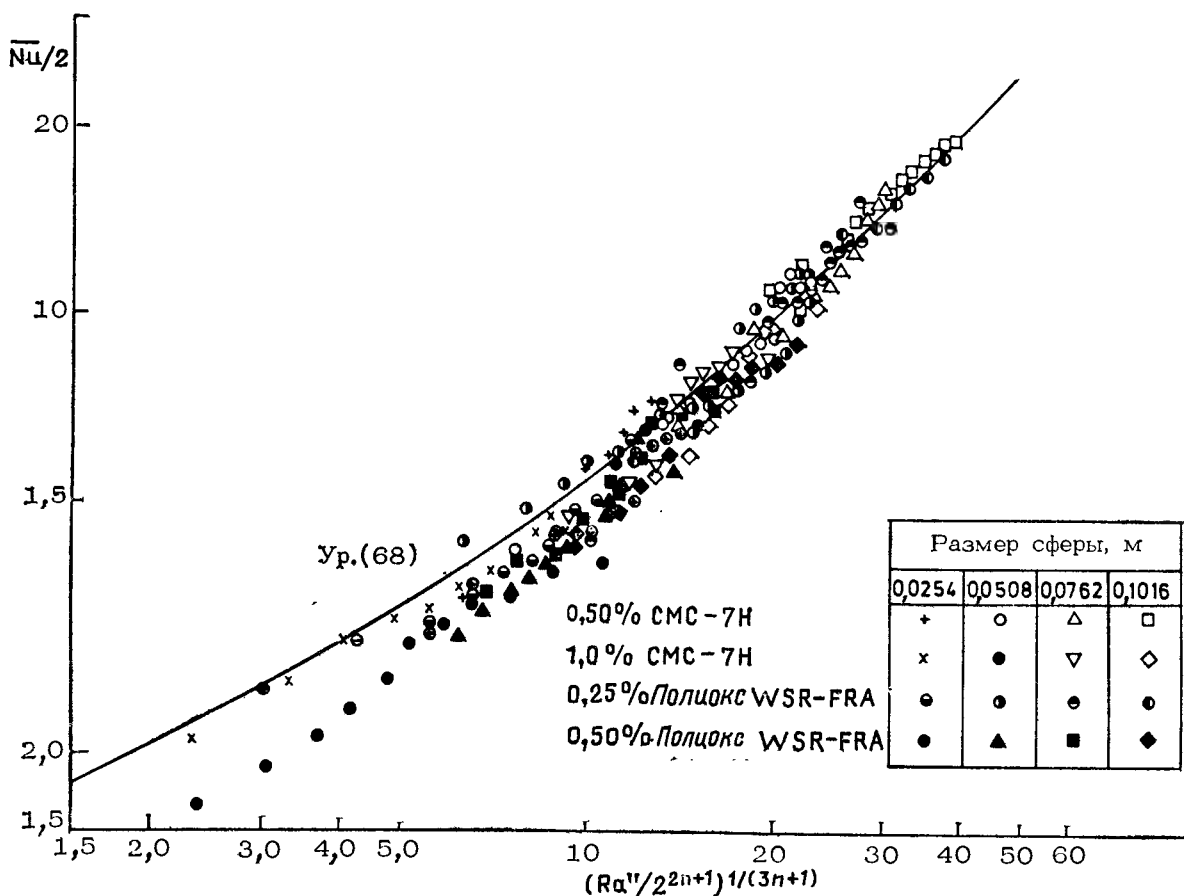


Рис. 32. Сравнение результатов, полученных из (68), с экспериментальными данными (точки) для средних чисел Нуссельта при ламинарной свободной конвекции в растворах полимеров (концентрация указана на рисунке) на изотермических сферах [87]

ции на изотермической поверхности в области тонкого ламинарного пограничного слоя для всех геометрий при $Pg \rightarrow \infty$ можно представить в виде

$$\overline{Nu} = |A Ra''|^{1/4}, \quad (71)$$

где A — функция только геометрии, а абсолютное значение означает возможность использования этого соотношения для случаев нагревания и охлаждения. В дальнейшем автор [78] показал, что для степенных неньютоновских жидкостей число Nu имеет следующий вид:

$$Nu = A \Phi(n) |Ra''|^{1/(1+3n)}, \quad (72)$$

где Ra'' и $\Phi(n)$ определены так же, как было показано выше. Значения $\Phi(n)$ для вертикальных пластин, горизонтальных цилиндров и сфер приведены в табл. 1.

В [93] показано, что преобразование переменных типа гетлеровского можно использовать для обобщения уравнений тонкого пограничного слоя для любого данного класса форм тела, таких, как цилиндры с закругленной или заостренной носовой частью, а асимметричные тела — с закругленной носовой частью. Результаты для конкретных тел любого контура получаются при подставлении соответствующих коэффициентов в общее решение в виде разложения в ряд для тел данного класса и определенного числа Прандтля.

В [93] утверждается, что гетлеровские ряды сходятся быстрее, чем Блазиусовские. Авторы [90] показали, что ряды, используемые в [91], являются точными для больших расстояний или углов.

В [78] предложена обобщенная формулировка решения для $\overline{Nu}$ в случае тонкого ламинарного пограничного слоя при $Pg \rightarrow \infty$ для большинства трехмерных поверхностей в зависимости от простых интегралов, включающих только геометрию. В [76] это решение обобщено на основе использования универсальной функции [14], учитывающей зависимость от числа Pg . Так же предложено использовать корректирующий множитель для малых чисел Ra .

Автор [94] отметил, что аппроксимация первого порядка применима для ламинарной свободной конвекции в воздухе для всех геометрий

$$\overline{Nu} \approx 0,5 Ra^{1/4}, \quad (73)$$

если длина пограничного слоя используется как характерный размер. В [95] обобщены экспериментальные данные для горизонтальных цилиндров, сфер и сферондов, причем отношение $2V/A$ используется как характерный размер; V — объем, m^3 ; A — площадь поверхности, m^2 .

В [96, 97] показано, что решение в случае тонких ламинарных пограничных слоев для всех геометрий и чисел Прандтля имеют вид

$$\overline{Nu} = A (Ra f(Pg))^{1/4}. \quad (74)$$

Это выражение можно распространить на малые числа Ra добавлением предельного значения Nu_0 , для чего следует учесть нарастание пограничного слоя

$$\overline{Nu} = Nu_0 + A (Ra f(Pg))^{1/4}. \quad (75)$$

Таблица 4. Характерные размеры и значения Nu_0 для обобщенной корреляции [97]

Тела	Размер	Nu_0
Наклонная пластина	x	0,68
Наклонный диск	$9D/11$	0,56
Вертикальный цилиндр	x	0,68
Конус	$4x/5$	0,54
Горизонтальный цилиндр	πD	0,36 π
Сфера	$\pi D/2$	$\frac{\pi}{2}$
Сфероиды	$3\pi V/A$	$A^3/(36 v^2)$

В этих работах показано, что

$$f(Pr) = \left[1 + \left(\frac{0,5}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9} \quad (76)$$

является хорошей аппроксимацией для всех геометрий, а коэффициент A можно выбрать, как для вертикальной пластины, если характерный размер выбирается произвольно (табл. 4). Соответствующие значения Nu_0 представлены в этой же таблице. Таким образом, обобщенная корреляция для всех геометрий и всех значений Pr и Ra при ламинарном режиме имеет следующий вид:

$$\overline{Nu} = Nu_0 + \left(\frac{Ra f(Pr)}{5} \right)^{1/4} \quad (77)$$

Аналогичным образом обобщенное соотношение для турбулентного режима конвекции представим в виде

$$\overline{Nu} = \left[\frac{Ra f(Pr)}{300} \right]^{1/3}, \quad (78)$$

а для малых чисел Ra — в виде

$$\overline{Nu}^{1/2} = Nu_0^{1/2} + \left[\frac{Ra f(Pr)}{300} \right]^{1/8} \quad (79)$$

Несколько более общая корреляция:

$$\overline{Nu} = Nu_0 + \left[\frac{Ra f(Pr)}{5} \right]^{1/4} \times \left[1 + 1,6 \cdot 10^{-8} Ra f(Pr) \right]^{1/12} \quad (80)$$

Характерные длины и значения чисел Nu_0 в табл. 4. также соответствуют уравнениям (78) — (80). Соотношения (75) — (80) применимы для случая однородного обогрева с перепадом температур, рассчитанным в средней по поверхности точке. Их также можно применить для степенных неньютоновских жидкостей и для переноса компонентов с помощью поправок, описанных выше.

2.5.8. Свободная конвекция в слоях и полостях¹

С. У. Чарчилл

Естественная конвекция в полостях является результатом градиентов плотности, которые в свою очередь возникают вследствие изменений температуры или концентрации. Интенсивность теплообмена обычно характеризуется числом Нуссельта, которое является функцией чисел Рейля, Прандтля, геометрии, граничных и начальных условий. Числа Нуссельта и Рейля обычно рассчитываются по внешней разности температур и размеру полости по направлению передачи теплоты, за исключением некоторых слу-

чаев, о которых речь пойдет ниже. Другие переменные, входящие в эти комплексы, определяются так же, как в § 2.5.7.

В [1] дан подробный аналитический обзор последних работ по естественной конвекции в полостях. В [2, 3] приведено несколько более детальное обсуждение результатов, полученных для цилиндрических и прямоугольных полостей. В [4] представлен обзор конвекции типа Бенара, а в [5] рассмотрены вопросы естественной конвекции в солнечных коллекторах. Авторы [6] использовали теоретические и экспериментальные результаты для предельных условий, чтобы получить корреляционные уравнения для расчета теплоотдачи в прямоугольных и цилиндрических полостях в широкой области параметров с учетом влияния углов наклона и вращения.

В данном параграфе рассмотрены картины движения жидкости и рекомендованы корреляционные соотношения для расчета теплоотдачи для особенно важных практических условий. В литературных ссылках, приведенных здесь и в упомянутых выше обзорах, интересующийся читатель сможет найти более подробную информацию по данному вопросу.

Экспериментальные результаты по естественной конвекции в полостях, в основном, менее точны чем для вынужденной конвекции, поскольку это связано с трудностью оценки значений тепловых потоков через и вдоль неизотермических стенок. Поэтому задача описания различных групп данных еще не полностью решена. Кроме того, использовавшиеся интервалы времени в экспериментах, особенно для жидкостей, иногда были недостаточными для достижения действительно стационарного состояния.

Теоретические результаты ограничены в точности и не являются общими, поскольку, как правило, не учитывают трехмерный характер полей скорости и температуры во всех полостях с двумя или тремя конечными размерами. Эта трехмерность определяет переходы от одного вида циркуляции к другому. Если одно или другое отиошение сторон близко к единице, трехмерность существенно влияет на циркуляцию и теплообмен. Но даже в этом случае результаты многочисленных решений двумерных и ряда трехмерных задач дают полезную информацию для интерпретации, корреляции и экстраполяции экспериментальных результатов.

В горизонтальных слоях с однородной температурой верхней стенки и более высокой однородной температурой нижней стенки покоящаяся жидкость остается в стационарном состоянии при числах Рейля ниже критического значения Ra_{cr} . Для обратных граничных условий находящаяся в покое жидкость остается в устойчивом состоянии для всех чисел Ra . В любых других тепловых граничных условиях имеет место движение жидкости.

А. Полуограниченные горизонтальные слои жидкости, обогреваемые снизу. Изучение естественной конвекции в слоях этой геометрии привлекает широкое внимание, начиная с 1900 г., когда Бенард [7] наблюдал гексагональные вращающиеся ячейки на начальном этапе конвекции в расплавленном спермацете со свободной верхней границей. Движение, наблюдаемое Бенардом, являлось скорее всего результатом влияния поверхностного натяжения, а не гравитации. Гексагональные вращающиеся ячейки наблюдались в [8] и для гравитационной конвекции с твердой верхней границей, как показано на рис. 1. Зарождающееся движение для изотермических поверхностей предполагает наличие продольных или круглых вращающихся ячеек в зависимости от конфигурации боковых стенок. Все три типа движения схематически изображены на рис. 2.

В [9] впервые было рассчитано критическое число Ra_{cr} , определяющее начало конвекции. Принятое теоретическое значение этого безразмерного комплекса, определяемого соотношением (3), § 2.5.7, равно 1708 для твердых верхней и нижней границ. Это значение не зависит от типа конвекции.

¹ Пер. с англ. Н. В. Медвецкой.

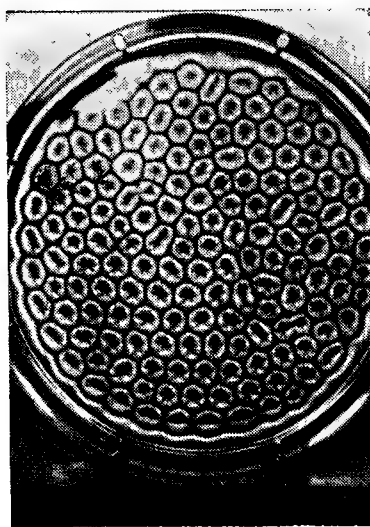


Рис. 1. Гексагональные крутящиеся элементы в горизонтальном обогреваемом снизу слое силиконового масла с твердой верхней поверхностью [8]

При свободной конвекции от погруженных в жидкость тел, как обсуждалось в § 2.5.7, по мере увеличения числа Релея имеет место постепенный переход от находящейся в покое жидкости без направленного течения к течению в тонком ламинарном пограничном слое, затем следует быстрый переход к турбулентному пограничному слою. В противоположность этому для жидкости, ограниченной стенками, имеет место ряд дискретных переходов, связанных с увеличивающейся неустойчивостью типа Релея. Такие переходы в скорости циркуляции и интенсивности теплообмена наблюдались экспериментально в [10, 11]. В [12] получено выражение для расчета интенсивности теплоотдачи, учитывающее влияние переходов:

$$Nu = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} Nu_i \left(1 - \frac{Ra_{ci}}{Ra}\right) U(Ra - Ra_{ci}), \quad (1)$$

где Nu_i — число Нуссельта для конвекции i -го типа; Ra_{ci} — критическое число Релея для конвекции i -го типа; $U(Ra - Ra_{ci})$ — единичная ступенчатая функция (0 для $Ra < Ra_{ci}$, 1 для $Ra > Ra_{ci}$).

Значения Nu_i и Ra_{ci} , рассчитанные в [13], приведены в табл. 1. Результаты приведены для асимптотического

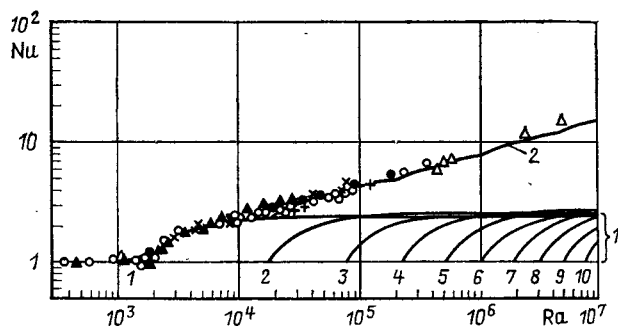


Рис. 3. Сравнение результатов, полученных из (1), с экспериментальными данными (точки) при переосе теплоты между горизонтальными пластинами, обогреваемыми снизу [13]:

1 — теплоотдача отдельных элементов; 2 — суммарная теплоотдача. Результаты экспериментов: ○ — вода; + — гептан; × — этиленгликоль; ● — силиконовое масло АКЗ; ▲ — силиконовое масло АК350; Δ — воздух

случая $Pr \rightarrow \infty$. Тем не менее значения для чисел Nu_i , рассчитанные с использованием Nu_i из табл. 1, оказываются, как видно из рис. 3, в хорошем соответствии с экспериментальными данными для различных жидкостей.

Авторы [6] использовали два первых члена приведенного выше ряда, решение [14] для длины пути смешения при больших числах Ra и Pr и универсальную зависимость [15] от числа Pr в виде соотношения (76) из § 2.5.7 для того чтобы получить следующее корреляционное уравнение:

$$Nu = \left\{ \left[1 + 1,446 \left(1 - \frac{Ra_{cr}}{Ra} \right) \right]^{15} + \left(\frac{Ra f(Pr)}{1420} \right)^5 \right\}^{1/15}. \quad (2)$$

Уравнение (2) с числом $Ra_{cr} = 1708$ сопоставлено с рядом экспериментальных данных на рис. 4. Результаты, полученные для воздуха и воды, лежат несколько выше расчетных для $10^4 < Ra < 10^8$, а данные для воды несколько ниже для $Ra > 10^8$. Если бы была уверенность в том, что данные можно поместить на рис. 4 вместо данных [14], значение $0,109 Ra^{0,313}$ можно было бы использовать в уравнении (2) вместо $(Ra f(Pr)/1420)^{1/5}$.

В [16] предложены другие корреляционные уравнения, описывающие выбранные экспериментальные данные для воздуха и воды.

В. Полости, обогреваемые снизу. Критическое число Релея. Протяженные боковые стенки увеличивают значение критического числа Релея. Определение этой величины для различных геометрий и полостей является важным, поскольку оно служит критерием при конструировании полостей, в которых циркуляция должна отсутствовать и теплообмен должен быть минимальным.

В [17] для расчета Ra_{cr} как функции отношений двух сторон прямоугольной полости с неограниченными теплопроводными боковыми стенками использовалась линейная теория устойчивости.

Таблица 1. Критические расчетные числа Релея и коэффициенты теплопередачи для условий нагрева снизу [13]

Мода	Ra_{ci}	Nu_i	Мода	Ra_{ci}	Nu_i
1	1 707 762	1,446	6	1 202 509	1,901
2	17 610	1,664	7	1 843 582	1,932
3	75 709	1,761	8	3 085 828	1,960
4	219 885	1,822	9	4 870 124	1,990
5	509 657	1,865	10	7 334 779	2,000

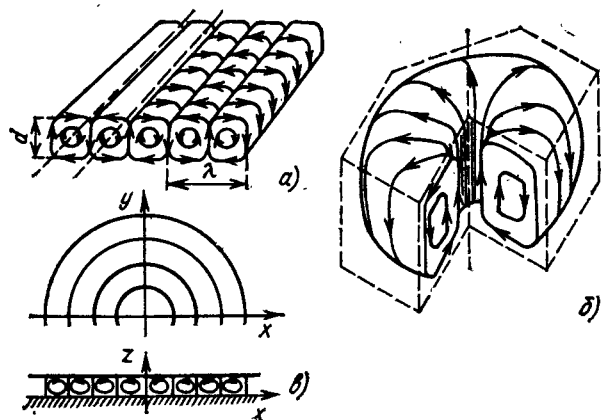


Рис. 2. Схемы крутящихся элементов в горизонтальном слое жидкости, обогреваемом снизу: а — продольные (вытянутые) ячейки; б — гексагональная ячейка; в — круглые (кольцо) ячейки [4]

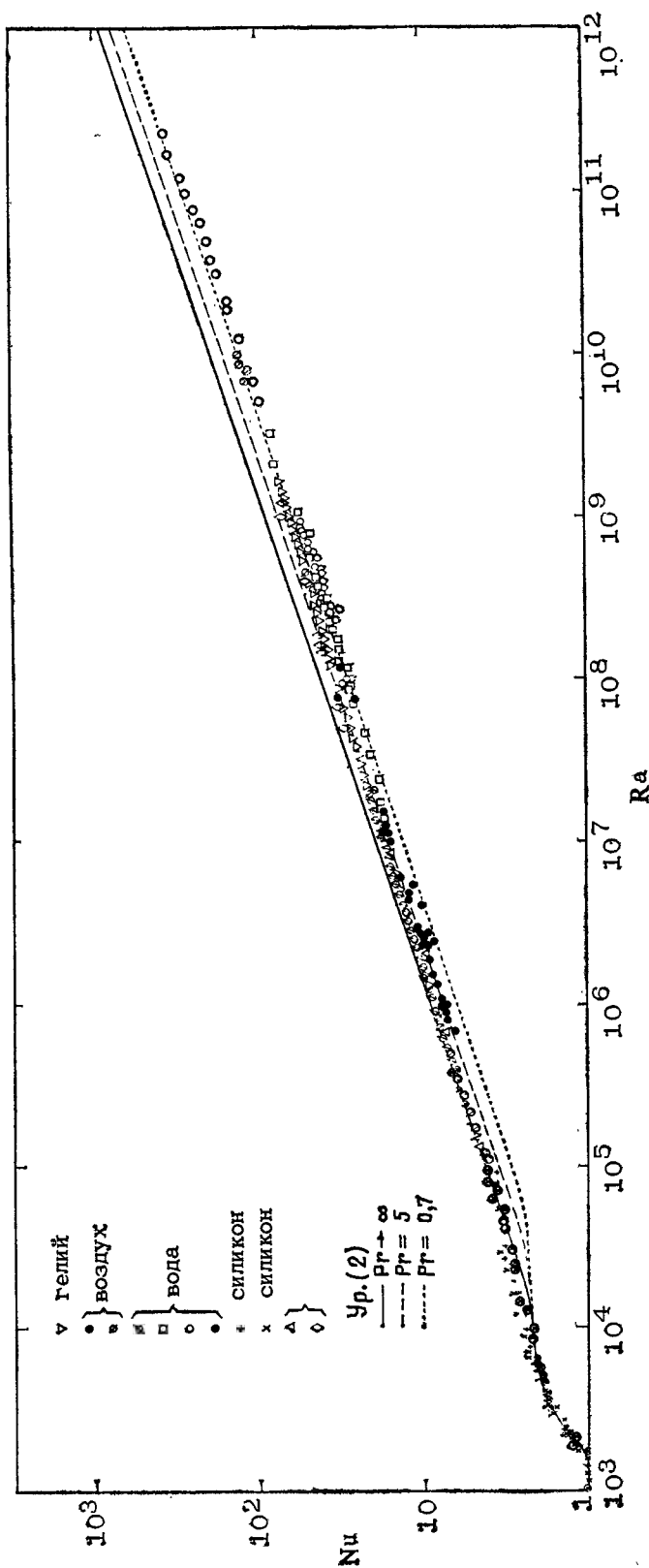


Рис. 4. Сравнение результатов, полученных из (2), с экспериментальными данными (точки) различных авторов по переносу теплоты между горизонтальными пластинами, обогреваемыми снизу [6]

Т а б л и ц а 2. Критическое число Релея, характеризующее начало движения в прямоугольных полостях с высокотеплопроводными боковыми стенками (расчеты см. в [20])

H_1	H_2									
	0,125	0,25	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	
0,125	9 802 960,0	1 554 480,0	606 001,0	469 377,0	444 995,0	444 363,0	457 007,0	473 725,0	494 742,0	
0,25	1 554 480,0	638 754,0	115 596,0	64 270,8	53 529,7	50 816,4	50 136,1	50 088,6	50 410,1	
0,50	606 001,0	115 596,0	48 178,9	14 615,3	11 374,5	9 831,6	9 311,9	9 099,4	8 980,2	
1,00	469 377,0	64 270,8	14 615,3	6 974,0	5 137,9	3 906,0	3 633,6	3 446,2	3 357,9	
2,00	444 995,0	53 529,7	11 374,5	5 138,2	3 773,6	2 753,6	2 530,5	2 359,5	2 285,7	
3,00	444 363,0	50 816,4	9 831,6	3 906,0	2 753,6	2 557,4	2 337,2	2 174,4	2 100,9	
4,00	457 007,0	50 136,1	9 312,0	3 633,6	2 530,5	2 337,2	2 270,2	2 110,9	2 037,2	
5,00	473 725,0	50 088,7	9 099,4	3 446,2	2 359,5	2 174,44	2 110,9	2 081,7	2 007,8	
6,00	494 741,0	50 410,1	8 980,2	3 358,0	2 285,7	2 101,0	2 037,2	2 007,8	1 991,9	

Таблица 3. Критические числа Релен, характеризующие начало движения в прямоугольных полостях с теплопроводными боковыми стенками (расчеты см. в [21])

H_1	H_2									
	0,125	0,25	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	12,0
0,125	3 011 718 (1)									
0,25	333 013 (1)	203 163 (1)								
0,50	70 040 (1)	28 452 (1)	17 307 (1)							
1,00	37 689 (1)	11 962 (1)	5 262 (1)	3446 (1)						
1,50	39 798 (2)	12 540 (2)	5 341 (1)	3270 (1)						
2,00	36 262 (2)	111 020 (2)	4 524 (2)	2789 (2)	2276 (2)					
2,50	37 058 (3)	11 251 (3)	4 567 (2)	2754 (2)	2222 (2)					
3,00	35 875 (3)	10 757 (3)	4 330 (3)	2622 (3)	3121 (3)	2004 (3)				
3,50	36 209 (4)	10 858 (4)	4 355 (3)	2609 (3)	2098 (3)	1978 (3)				
4,00	35 664 (4)	10 635 (4)	4 245 (4)	2552 (4)	2057 (4)	1941 (4)	1894 (4)			
4,50	35 794 (5)	10 666 (5)	4 261 (4)	2545 (4)	2044 (4)	1927 (4)	1927 (4)			
5,00	35 486 (5)	10 544 (5)	4 186 (5)	2502 (5)	2009 (5)	1897 (5)	1852 (5)			
5,50	35 556 (6)	10 571 (6)	4 196 (5)	2498 (5)	2001 (5)	1888 (5)	1842 (5)			
6,00	35 380 (6)	10 499 (6)	4 158 (6)	2480 (6)	1989 (6)	1879 (6)	1833 (6)	1810 (6)	1797 (6)	
6,50	35 451 (7)	10 518 (7)	4 165 (6)	2447 (6)	1984 (6)	1871 (6)	1826 (6)	1803 (6)	1789 (6)	
12,00	35 193 (12)	10 426 (12)	4 118 (112)	2453 (12)	1967 (12)	1855 (12)	1808 (12)	1783 (12)	1768 (12)	1741 (12)

В [20, 21] проведены также расчеты Ra_{cr} для более практических случаев нетеплопроводных и частично теплопроводных стенок. Эти результаты для неограниченных боковых стенок приведены в табл. 2 и 3. Сравнивая результаты, приведенные в этих таблицах, видим, что теплопроводные стенки увеличивают критическое число Релен.

В [6] получена корреляция расчетных значений Ra_{cr} для теплопроводных стенок и значений отношения двух сторон $H_1 \geq H_2 \geq 1$, в пределах 0,8% описываемая эмпирическим выражением

$$Ra_{cr} = 1708 \left(1 + \frac{0,425}{H_1^{3/2}} \right) \left(1 + \frac{3}{H_2^2} \right)^{1/4}. \quad (3)$$

Для длинных каналов $H_1 \rightarrow \infty$ оно имеет вид

$$Ra_{cr} = 1708 \left(1 + \frac{3}{H_2^2} \right)^{1/4}, \quad (4)$$

где $H_1 = b/d$; $H_2 = w/d$; b — ширина (главный горизонтальный размер), м; w — ширина (минимальный горизонтальный размер), м; d — толщина слоя жидкости, м.

В [22] предложено следующее обобщенное выражение для критического числа Релен в полости любой формы:

$$Ra_{cr} = \frac{(a^2 + 16)^3}{a^2}. \quad (5)$$

Здесь a — горизонтальное волновое число, которое зависит от формы и отношения (или отношений) сторон. В [21] предложено следующее выражение для a в случае прямоугольных полостей с $\frac{2}{3}H_1 < H_2 < 1$:

$$a^2 = \pi^2 \left(\frac{4}{H_1^2} + \frac{1}{H_2^2} \right). \quad (6)$$

В [6] предложена корреляция расчетных значений, полученных в [18] для случая высокотеплопроводных стенок, но не такая точная, как для нетеплопроводных стенок. Это, вероятно, связано с большой погрешностью самих значений. Для отношений сторон при $H_1 \geq H_2 \geq 1$ это эмпирическое выражение имеет вид

$$Ra_{cr} = 1708 (1 + 0,116/H_1)^8 (1 + 22/H_2^2)^{1/6}. \quad (7)$$

Для длинного канала ($H_1 \rightarrow \infty$) уравнение (7) записывается в более простой форме

$$Ra_{cr} = 1708 (1 + 22/H_2^2)^{1/6}. \quad (8)$$

Для квадратной полости ($H = H_1 = H_2$) простой и более точной аппроксимацией для $H \geq 1$ является

$$Ra_{cr} = 1708 \left(1 + \frac{3,083}{H^{1,63}} \right). \quad (9)$$

Для аппроксимации результатов в круглых цилиндрических полостях с теплоизолированными боковыми стенками авторы [22] предложили значение a в соотношении (5) выбирать большим из двух (2,822 и 5,75 d/D), а для бесконечно теплопроводной стенки большим из значений 2,822 и 7,66 d/D . Те же самые выражения были предложены для гексагональных цилиндров с расстоянием между противоположными вертикальными плоскостями, равным D .

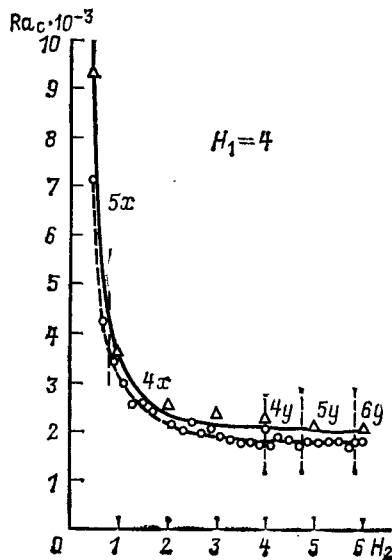


Рис. 5. Сравнение результатов расчета — [17] и Δ — [18] с экспериментальными данными ($\circ$) для критических чисел Релен в прямоугольных полостях, обогреваемых снизу [23]

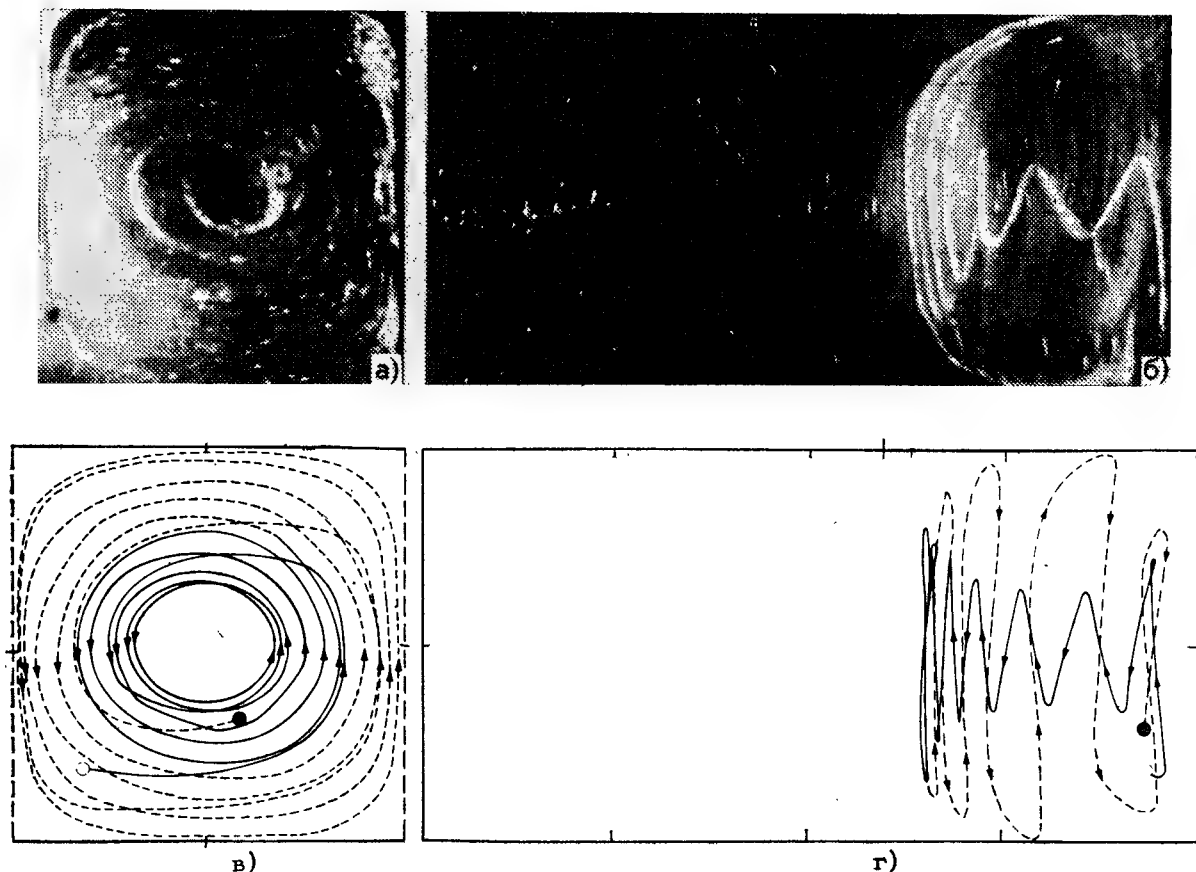


Рис. 6. Экспериментальные траектории частиц (a — вид спереди; b — вид сбоку), $Ra=14\,400$; $Pr=4300$, и расчетные линии движения для прямоугольной полости, обогреваемой снизу (a — вид спереди; $г$ — вид сбоку), $Ra=4000$; $Pr=10$; $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0,125$ из [26]

Экспериментальная проверка в [23] теоретических результатов [7, 18] для высокотеплопроводных полостей при $H_1=4$ и изменяющемся H_2 показана на рис. 5. Сходные результаты были получены для других значений H_1 , и можно было бы ожидать аналогичного соответствия расчетных и экспериментальных данных для частично или плохо-теплопроводных стенок. В [24] экспериментально подтверждены теоретические результаты для прямоугольных полостей с бесконечной теплопроводностью стенок, но обнаружен некоторый признак зависимости результатов от числа Pr . Однако в [25] определенные экспериментально значения для ртути ($Pr=0,025$) в высоком цилиндре с изолированными стенками находятся в соответствии с расчетом по уравнению (5) при $a=5,75\,d/D$.

Типы циркуляции. Для значений $H_1 \geq H_2 \geq 1$ в прямоугольных полостях движение жидкости в ламинарном режиме представляет собой вращающиеся элементы, такие, как показаны на рис. 2, a , с практически квадратным поперечным сечением и горизонтальными осями, параллельными более короткой стороне полости. Эти вращающиеся ячейки увеличивают интенсивность, но сохраняют форму до начала турбулентного режима движения при $Ra \approx 10^6$. В [26] теоретически и экспериментально продемонстрировано (рис. 6), что все траектории частиц в ламинарном режиме являются спиралями и заключены в одной или другой половине вращающегося элемента. Картины циркуляции, соответствующие изменению граничных условий, могут в начальной стадии иметь несколько другое число и (или) ориентацию вращающихся ячеек. Для перехода к стационарному состоянию может потребоваться много времени,

особенно для нецелых отношений сторон, поскольку производство (изменение) энтропии для другого квазистационарного состояния отличается очень незначительно.

Ламинарная циркуляция в кольцевой полости между концентрическими вертикальными цилиндрами, обогреваемой со стороны нижней горизонтальной поверхности, получена экспериментально в [27], теоретически и экспериментально — в [28]. Показано, что этот тип конвекции состо-

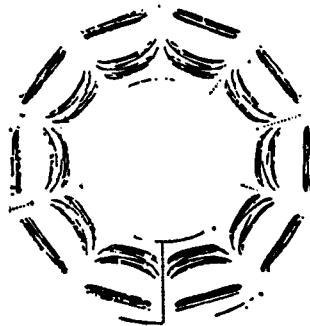


Рис. 7. Вид сверху расчетных линий движения для вертикальной кольцевой полости, обогреваемой снизу, с $r_1/d=1$; $r_2/d=2$, $Ra=6000$ и $Pr=10$ [28]

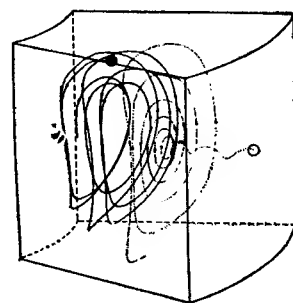


Рис. 8. Общий вид расчетных линий движения для вертикальной кольцевой полости, обогреваемой снизу, с $r_1/d=1$; $r_2/d=2$; $Ra=6000$ и $Pr=10$ [28]

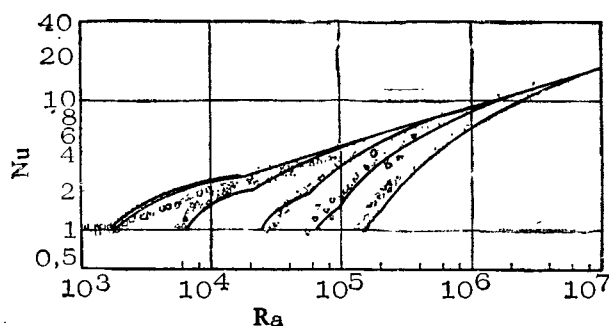


Рис. 9. Сравнение результатов, полученных из (1), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для обогрева снизу, в гексагональных полостях с проводящими боковыми стенками [22]

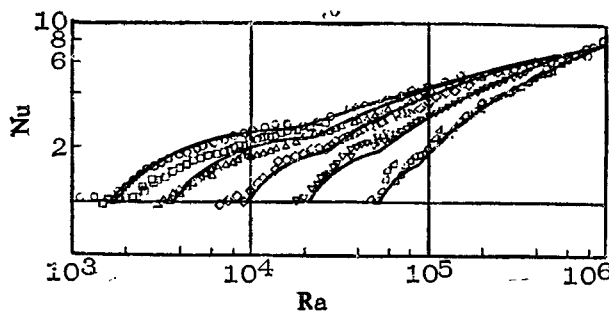


Рис. 10. Сравнение результатов, полученных из (1), с экспериментальными данными (точки) для обогреваемых снизу гексагональных полостей с непроводящими боковыми стенками [22]

ит из вращающихся ячеек с горизонтальными радиально направленными осями, как показано на рис. 7. Даже число ячеек приблизительно равно средней длине окружности, деленной на глубину. Траекториями частиц являются наклонные двойные спирали, примаыкающие к одной половине вращающейся ячейки (рис. 8).

Интенсивность теплообмена. В [6] предлагается использовать уравнение (2) для конечных прямоугольных полостей с соответствующими значениями Ra_{cr} , приведенными в предыдущем разделе. Экспериментальные результаты [22] для различных жидкостей в гексагональных полостях с теплопроводными стенками показаны на рис. 9, а с нетеплопроводными — на рис. 10. Кривые, нанесенные на эти рисунки, представляют расчетные значения, полу-

ченные из уравнения (1). При $Rg \geq 6$ опытные данные несколько отличаются от расчетных. Другие данные находятся в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными. К сожалению, большое число точных результатов для низких чисел Rg невозможно использовать для проверки зависимости.

Соотношение (2) с экспериментальным значением $Ra_{cr} = 3200$, как видно из рис. 11, находится в соответствии с экспериментальными данными [28] для кольцевых полостей с обогреваемой и охлаждаемой горизонтальными поверхностями. Для $Ra < 5000$ уравнение (1) с $Ra_{cr} = 3200$ было использовано вместо (2) с учетом второй точки пересечения составляющих уравнения. Полученные в этой же работе с помощью метода конечных разностей численные результаты лежат несколько выше, но находятся в качественном соответствии с экспериментальными.

С. Прямоугольные полости, обогреваемые и охлаждаемые с боковых сторон. Картины развития течения и интенсивность теплообмена в прямоугольной полости, обогреваемой и охлаждаемой на боковых стенках, существенно зависят от отношений сторон, а также от чисел Релея и Прандтля. Большинство экспериментальных и теоретических результатов получено для длинных каналов, таких, что отношение длин к ширине является очень большим, и им можно пренебречь. Выбор характеристической длины для чисел Нуссельта и Релея является неопределенным, поскольку интенсивность теплообмена для режима теплопроводности главным образом зависит от расстояния d в направлении обогрева; для режима ламинарного пограничного слоя — от вертикального расстояния h , перпендикулярного направлению обогрева; для турбулентного режима не зависит ни от того, ни от другого размера. Для того чтобы избежать путаницы, характеристическую длину для обоих чисел Nu и Ra обозначим с помощью индексов. Если не указано особо, одна сторона полости считается много больше других, так что ее влиянием можно пренебречь.

В 1963 г. авторы [29, 30] с помощью конечно-разностного метода получили решение для двумерной ламинарной естественной конвекции в прямоугольном канале с обогреваемой и охлаждаемой вертикальными стенками и с теплоизолированными или частично теплопроводными горизонтальными стенками. Результаты этого и многих последующих решений, полученных с помощью метода конечных разностей и метода взвешенных невязок, показали их применимость в пределах более широкой области параметров. В этой связи эти результаты использовались здесь вместе с экспериментальными данными для оценки корреляционных уравнений.

Развитие конвекции в полостях с очень большими, средними и малыми отношениями сторон отличается по характеру, и поэтому эти три случая будут рассмотрены отдельно.

Полости с очень большим отношением сторон. В [31] проанализировано развитие конвекции в канале между вертикальными стенками при различных, но постоянных температурах стенок и теплоизолированных горизонтальных торцевых пластинах. Показано, что для $Ra_d < 5000h/d$ жидкость движется вверх в половине полости, примыкающей к обогреваемой стенке, вдоль верхней горизонтальной стенки, вниз в другой половине полости, примыкающей к охлаждаемой стенке, и затем вдоль нижней горизонтальной стенки. При этом имеет место параболическое распределение скорости, показанное на рис. 12, а. Интенсивность теплообмена увеличивается линейно с возрастанием Ra_d по сравнению со случаем чистой теплопроводности вследствие переноса энергии от одной стенки к другой из-за циркуляции. Решение для такого предельного случая можно представить в виде

$$Nu_d = 1 + \frac{Ra_d}{720} \left(\frac{d}{h} \right). \quad (10)$$

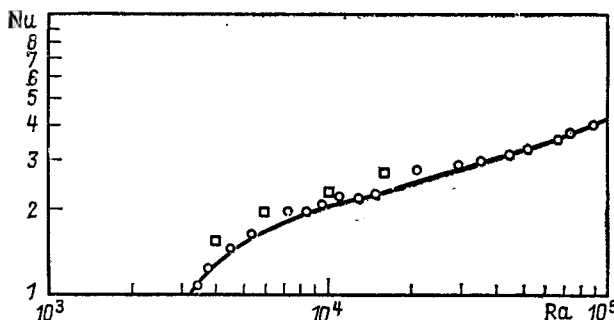


Рис. 11. Сравнение экспериментальной и теоретически определенной интенсивности теплообмена для силиконового масла в круглой кольцевой обогреваемой и охлаждаемой с концов полости с $r_1/d = 0,96$ и $r_2 = 2$;

○ — экспериментальные данные; □ — расчетные значения [22]; — результаты расчета по (2)

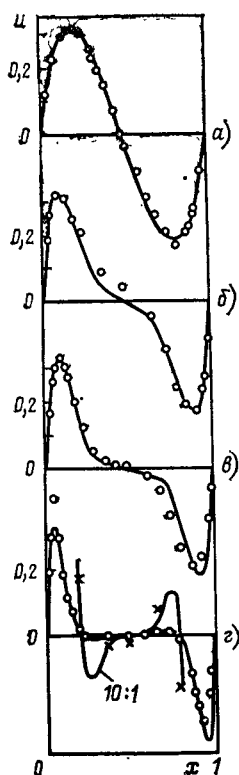
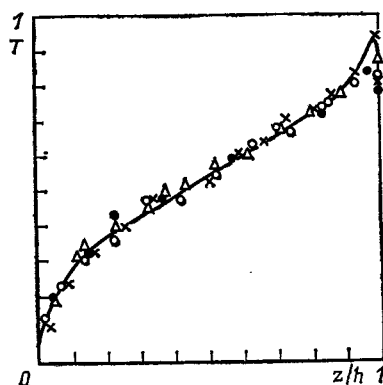


Рис. 12. Профили безразмерной скорости в среднем по высоте сечении прямоугольного канала, обогреваемого и охлаждаемого на вертикальных стенках. Результаты эксперимента взяты из [32]. Используемые в эксперименте параметры приведены ниже:

Рисунок	Ra_d	h/d	$Re_d d/h$
а	$3,08 \cdot 10^4$	19,4	$1,587 \cdot 10^3$
б	$2,95 \cdot 10^4$	13,73	$2,149 \cdot 10^4$
в	$6,56 \cdot 10^4$	13,85	$4,736 \cdot 10^4$
г	$3,61 \cdot 10^4$	7,18	$5,028 \cdot 10^5$

Рис. 13. Вертикальный безразмерный профиль температуры в центральной части прямоугольного канала для $Ra=1,2 \cdot 10^6$

Эксперимент [32]	h/d
○	4,7
×	2,5
●	1,25
▲	0,025



где

$$\Phi \left(Ra_h, \frac{h}{d} \right) = \left\{ 1 + \frac{0,231}{[Ra_h (h/d)^4]^{1/4}} \right\}^2. \quad (14)$$

Для турбулентного режима в [6] предложено следующее соотношение:

$$Nu_h = 0,05 [f(Pr) Ra_h]^{1/3}. \quad (15)$$

В обоих выражениях (13) и (15) $f(Pr)$ является универсальной зависимостью, описываемой соотношением (76), § 2.5.7. Выражение (15) означает, что коэффициент теплоотдачи не зависит от ширины канала и, следовательно, протяженности горизонтальных стенок. Это также видно из уравнения (13) для больших $Ra(h/d)^4$, так что корректирующий множитель Φ приближается к единице. На рис. 15 результаты, полученные из соотношений (10), (13) и (14), сопоставлены с экспериментальными данными и расчетными значениями для больших h/d . Предсказываемая зависимость от Ra , Rg и h/d в общем удовлетворительна, учитывая разброс самих экспериментальных данных. Исключение составляет группа данных для ртути, для которых переход к турбулентному движению происходит в области $10^6 < Ra_d(d/h) < 10^7$. Эти и другие группы данных большей частью скоррелированы в виде степенных зависимостей от Pr , h/d и Ra_d (или Ra_h) с показателем степени, рассчитываемым методом наименьших квадратов. Показатели степени, полученные этим способом разными исследователями, несомненно, отражают корреляцию данных, охватывая два или более режимов конвекции, но также и экспериментальные погрешности. С другой стороны, независимость чисел Nu_h , описываемых уравнением (13), от ширины канала в предельном случае для больших $Ra(h/d)^4$ свидетельствует о некоторой идеализации зависимости от отношения сторон, тогда как в чисто эмпирических соот-

Считая производную от коэффициента теплоотдачи по d равной нулю, получаем, что минимальное значение $Nu_d = 4/3$ имеет место при

$$\frac{d}{h} = \frac{240}{Ra_d} = \left(\frac{240}{Ra_h} \right)^{1/4}. \quad (11)$$

Это важный критерий, используемый для конструирования, например, двойных окон.

По мере увеличения Ra_d циркуляция в конечном счете испытывает переход к режиму течения в тонком ламинарном пограничном слое вдоль стенок или непосредственно к турбулентному пограничному слою. В любом случае (в отличие от Бэтчелора) центральное ядро остается квазинепо движимым с вертикальным градиентом температур, как показано на рис. 13. Критерий Бэтчелора, определяющий переход к турбулентному движению, имеет вид

$$Ra_{dc} \geq \left[18700 Pr, 10^9 \left(\frac{d}{h} \right)^3 \right]_{\max}. \quad (12)$$

Индекс уравнения (12) означает большую из двух функций, разделенных запятой. Границы предельных случаев ламинарного пограничного слоя и турбулентного режимов согласно этому и предыдущему критериям показаны на рис. 14. Режим ламинарного пограничного слоя течения, очевидно, не может существовать для $h/d > 42$.

Измерения профилей скорости [32] в средних по высоте сечениях полостей представлены на рис. 12. Они качественно подтверждают анализ Бэтчелора, хотя параболический профиль скорости продолжает существовать по крайней мере до $d/h = 1587$.

Автор [33] получил асимптотическое разложение и корректирующий множитель для ламинарного пограничного слоя, который в [6] обобщен в виде

$$Nu_h = \frac{0,364 [Ra_h f(Pr)]^{1/4}}{\Phi(Ra_h, h/d)}, \quad (13)$$

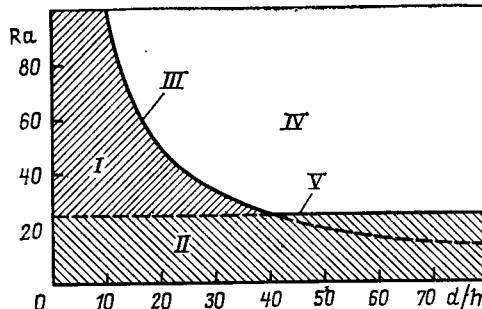


Рис. 14. Режимы естественной конвекции воздуха в высоких прямоугольных каналах, обогреваемых и охлаждаемых на вертикальных стенках [31]:

I — режим ламинарного пограничного слоя; II — ламинарный асимптотический режим; III — граница существования пограничного слоя; IV — турбулентный режим; V — асимптотическая граница для $Pr=0,73$

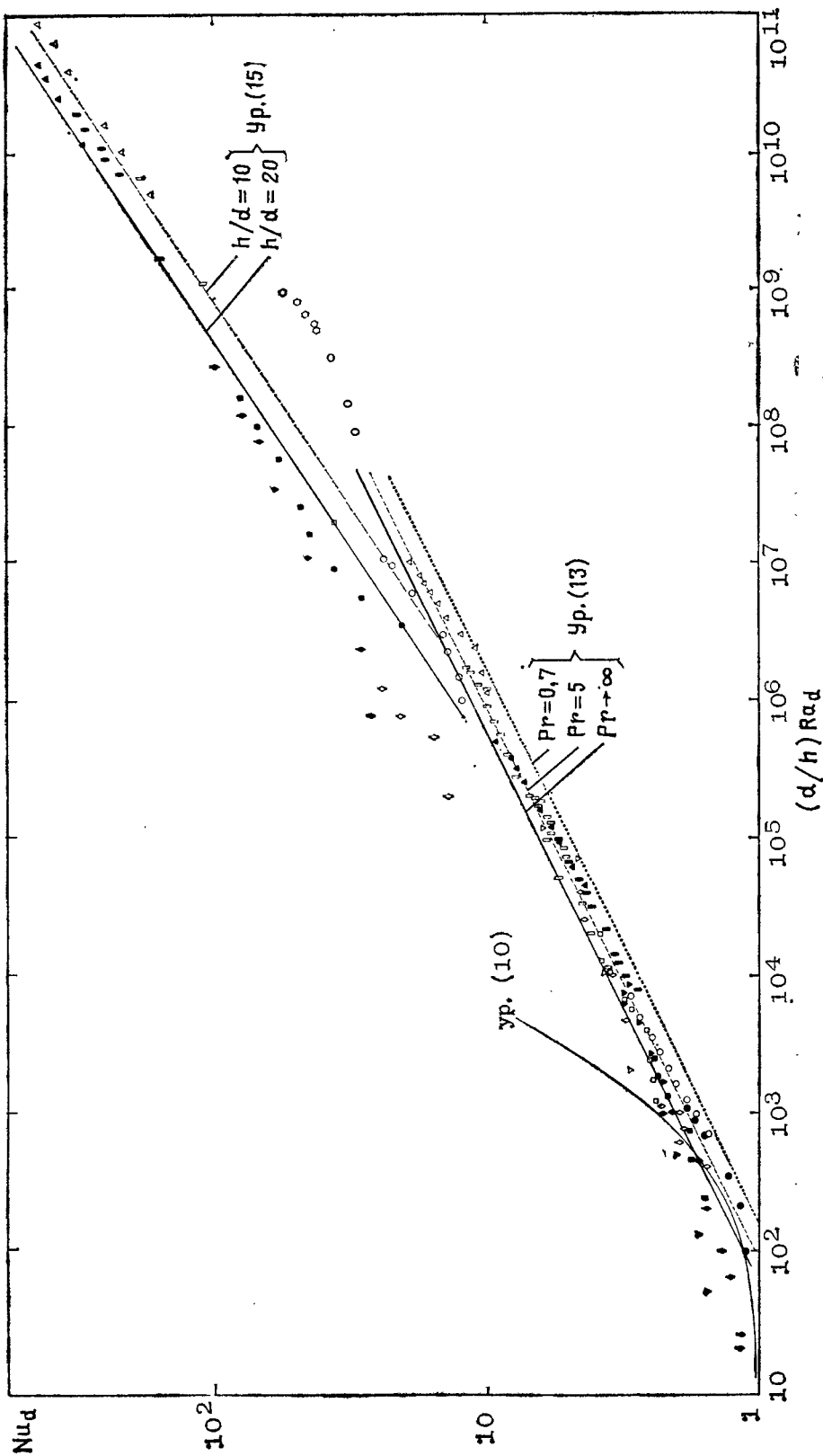


Рис. 15. Сравнение результатов, полученных из (10), (13) и (15), с экспериментальными данными (точка) и расчетными значениями чисел Nu для прямоугольных каналов с большим отношением сторон, обогреваемых и охлаждаемых на вертикальных стенках;

h/d		Вещество	h/d		Вещество
10	20		10	20	
$\square$	$\blacksquare$	Вода	∇	$\bullet$	Красное масло
$\square$	$\blacksquare$	Касторовое масло	∇	$\bullet$	Ртуть
$\square$	$\blacksquare$	Глицерин	∇	$\bullet$	$Pr=0,7$
$\square$	$\blacksquare$	Спирт	∇	$\bullet$	

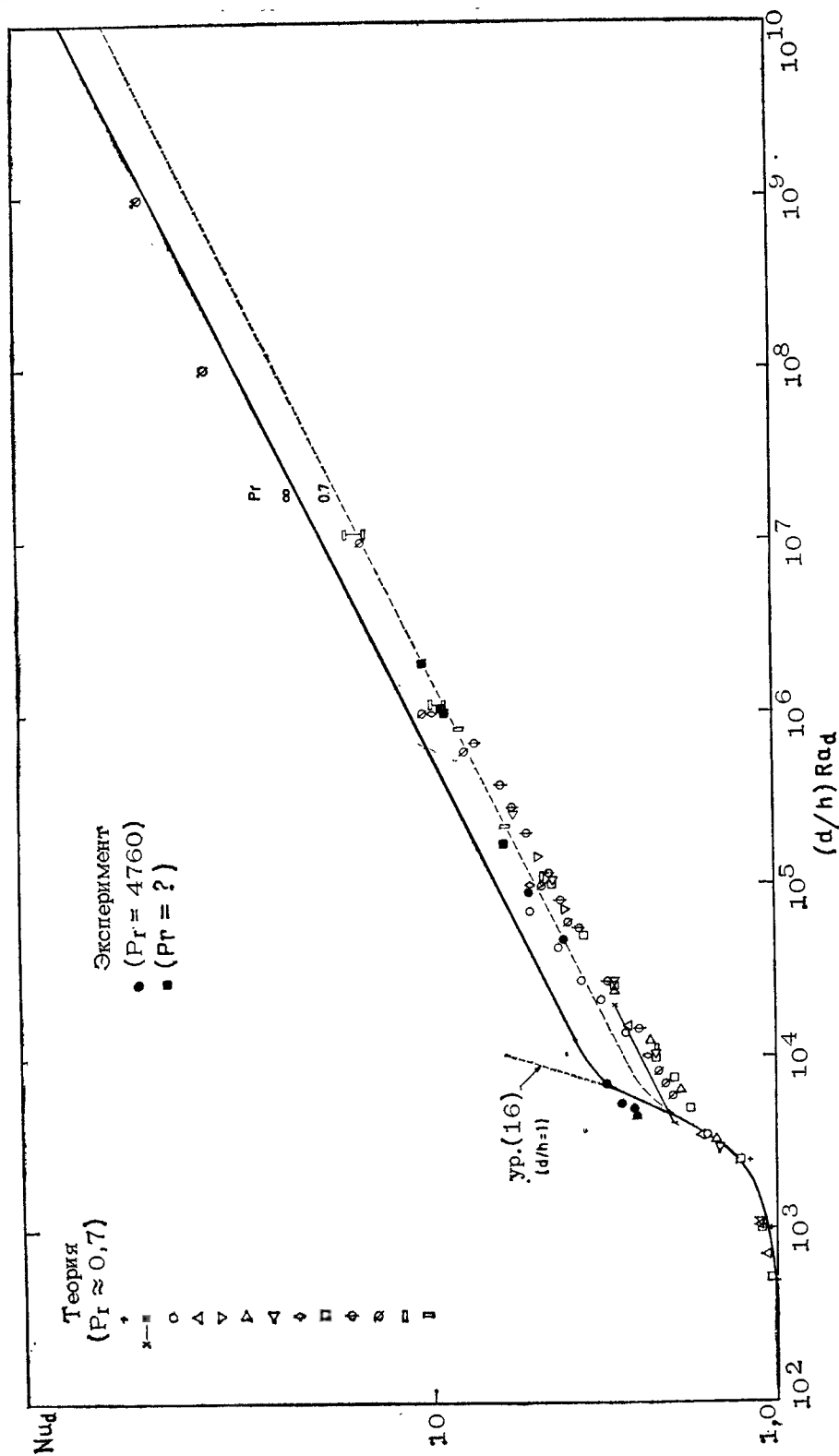


Рис. 16. Сравнение результатов, полученных из (13), (15), (16) и (17), с экспериментальными данными (точки) и расчетными значениями Nu для прямоугольных обогреваемых и охлаждаемых на вертикальных стенках полостей при отношении сторон, близком к единице

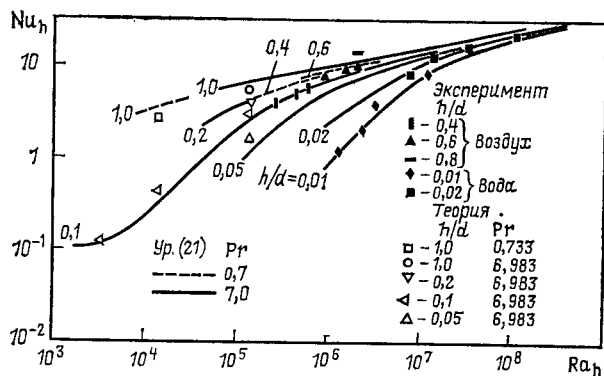


Рис. 17. Сравнение результатов, полученных из (18), (20) и (21), с экспериментальными данными и расчетными значениями чисел Nu для прямоугольных каналов с низким значением отношения сторон, обогреваемых и охлаждаемых на вертикальных стенках

ношениях эта зависимость присутствует в виде степенной функции.

Полости с отношениями сторон, близкими к единице. Для асимптотических режимов течения при низких числах Ra_d в [31] получено

$$Nu_d = 1 + A Ra_d^2 \frac{d}{h}. \quad (16)$$

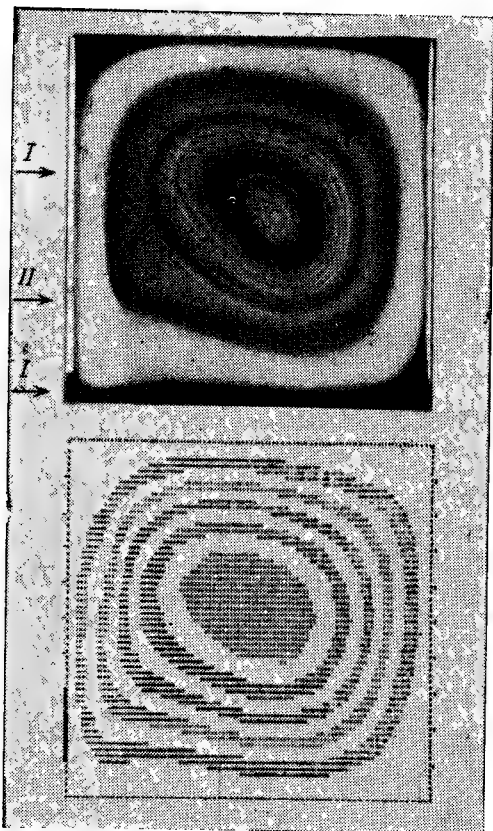


Рис. 18. Сравнение фотографии линий тока с их расчетными значениями для квадратного канала при $Ra=10^6$, обогреваемого по горизонтальной полосе на вертикальной стенке [36];

I — изоляция; II — нагреватель

Предполагается, что константа $A=0$ (10^{-8}) и уравнение (16) справедливо для $Ra_d < 10^3$. Впоследствии в [34] на основе ряда решений найдено значение $A=5 \cdot 10^{-8}$. Авторы [6] скомбинировали соотношение (16) с (13) и (15), которые применимы и для этого случая, чтобы получить следующее соотношение:

$$Nu_d = \left(\left[1 + \left(\frac{Ra_d}{4472} \right)^2 \frac{d}{h} \right]^{-8} \right) + \left[\frac{Ra_d (d/h) f(Pr)}{57\Phi} \right]^{-2} - 3/8 + \frac{Ra_d f(Pr)}{8000} \quad (17)$$

Результаты, полученные из этого соотношения, на рис. 16 сопоставлены с экспериментальными данными (ограниченным их числом) и большим числом расчетных результатов. Соответствие вполне удовлетворительное, однако не проверено для чисел Pr , отличных от 0,7. Кроме того, ни расчетные, ни экспериментальные значения не охватывают полностью турбулентного режима конвекции ($Ra_d > 10^{10}$).

Полости с очень малым отношением сторон. В [35] для $h/d \rightarrow 0$ и малых Ra или $Ra \rightarrow 0$ и малых h/d получено следующее соотношение:

$$Nu_d = 1 + \frac{(Ra_h h/d)^2}{362880}, \quad (18)$$

а для режима ламинарного пограничного слоя

$$Nu_h = 0,623 Ra_h^{1/5}. \quad (19)$$

Поскольку в этой работе в уравнении импульса опущены инерционные члены, соотношение (19) в действительности является асимптотическим разложением для $Pr \rightarrow \infty$. Поэтому это соотношение можно записать в виде

$$Nu_h = 0,623 [Ra_h f(Pr)]^{1/5}, \quad (20)$$

где $f(Pr)$ определяется выражением (72), § 2.5.7. В противоположность соотношению (10) уравнение (18) свидетельствует об уменьшении вклада конвекции в коэффициент теплоотдачи по мере увеличения ширины канала. Однако для режима течения в пограничном слое выражение (18) вновь дает независимость Nu от ширины канала.

Комбинация соотношений (18) и (20) дает следующее выражение для полностью ламинарного режима:

$$Nu = 1 + \left\{ \left(\frac{Ra_h h/d}{602,4} \right)^{-0,8} + \left[\left(\frac{Ra_h f(Pr)}{10,66} \right)^{1/5} \frac{d}{h} \right]^{-0,4} \right\}^{-2,5}. \quad (21)$$

Результаты, полученные из (21), лучше согласуются с экспериментальными данными, представленными на рис. 17, чем с кривыми, являющимися результатом расчетов [35], полученными с помощью интегральной теории пограничного слоя.

Соотношение (20) отличается по форме от (13) и, вероятно, неприменимо при $h/d \gg 1$. В этой связи существенное отклонение экспериментальных данных для $h/d=1$ от расчетных не является неожиданным.

Локальный обогрев. В [36, 37] экспериментально и численными методами исследовалось влияние локального нагрева с помощью горизонтальной полосы на одной из вертикальных стенок прямоугольного канала. Результаты измерений интенсивности теплоотдачи в основном находились в соответствии с расчетами, но не обладали достаточной точностью для того, чтобы стать критическим тестом. Тем не менее наблюдаемые и рассчитанные картины течения (развития) конвекции находятся в хорошем согласии (рис. 18). Влияние на теплоотдачу размера и положения нагревателя показано на рис. 19 и 20. Оптимальное положение нагревающей полосы для обеспечения максимального

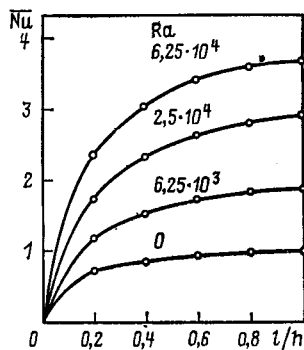


Рис. 19. Влияние размера нагревателя l/h на вертикальной стенке квадратного канала с изолированными горизонтальными стенками на число Nu [36]

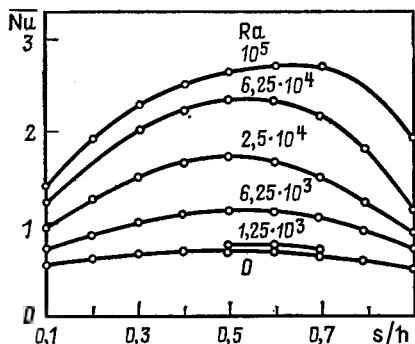


Рис. 20. Влияние места расположения нагревателя s/h на вертикальной стенке квадратного канала с изолированными горизонтальными стенками на число Nu [36]

теплообмена оказывается функцией числа Ra , а не высоты закрепления. Увеличение размера нагревателя также дает незначительное увеличение общей интенсивности теплообмена. На рис. 21 представлена зависимость Nu от интенсивности циркуляции. Он свидетельствует о том, что одну и ту же интенсивность теплообмена можно получить для двух различных скоростей циркуляции или, наоборот, с помощью изменения положения нагревательной полосы.

Д. Вертикальные кольцевые каналы с нагреваемыми или охлаждаемыми поверхностями. В [38] получено конечно-разностное решение для изотермических вертикальных стенок, температура внутренней из которых является более высокой. В [6] показано, что эти расчетные значения для $10^4 \leq Ra \leq 10^6$; $Pr=1$; $h/d=5, 10, 15$ и $r_0/r_i=1, 2$, где $d=r_0-r_i$, можно описать следующим модифицированным соотношением (13):

$$Nu_h = 0,364 (Ra_h f(Pr))^{1/4} \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Как показано на рис. 22, преобладание отклонений, превышающих кривую, объясняется ошибкой дискретизации в численном решении. Эти результаты предлагается осторожно использовать для значений r_0/r_i вне указанной области.

Е. Горизонтальные цилиндры. Поведение жидкости в горизонтальных цилиндрах, обогреваемых и охлаждаемых на различных участках поверхности, является качественно сходным с поведением в прямоугольном канале (см., например, [2]). Результаты расчета интенсивности теплоотдачи, полученные в [39], находятся в хорошем согласии с измеренными значениями [40] и, как показано на рис. 23, согласуются с результатами, полученными при расчете по (13) с коэффициентом 0,28. Указанная область экспериментальных значений представлена числом Ra , рассчитанным при экстремальных значениях температуры.

В [41] получено асимптотическое решение для малых чисел Ra и больших отношений длины к диаметру для

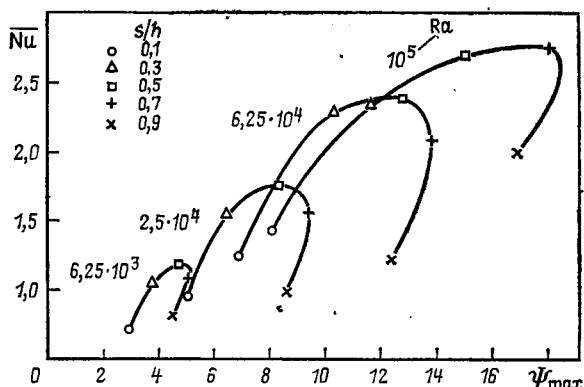


Рис. 21. Соотношение между Nu и скоростью циркуляции $\Psi_{\max}$ в квадратном канале, обогреваемом вдоль горизонтальной полосы на вертикальной стенке [36]

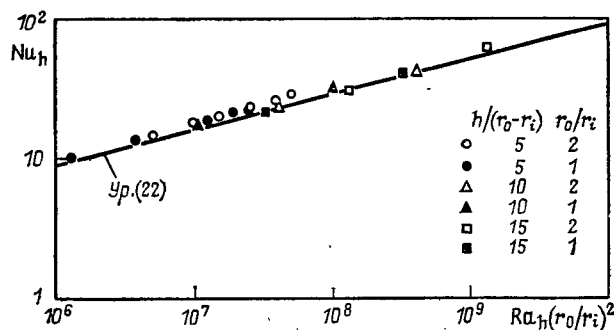


Рис. 22. Сравнение результатов, полученных из (22), с расчетными значениями [38] чисел Nu для круглого кольцевого канала, обогреваемого и охлаждаемого на вертикальных поверхностях, $Pr=1,0$ [6]

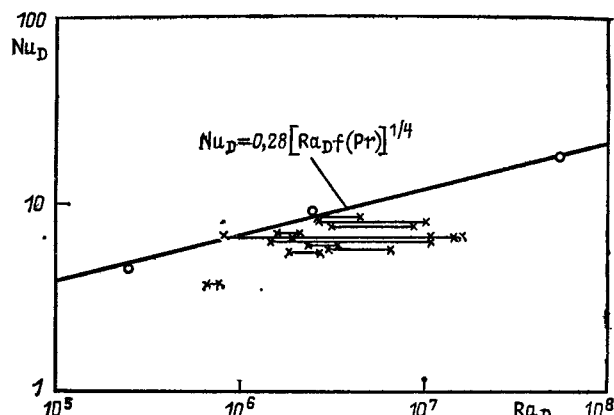


Рис. 23. Сравнение результатов, полученных из (13) (с коэффициентом 0,28), с экспериментальными данными [40] и расчетными значениями [39] для Nu_D в длинном горизонтальном цилиндрическом канале, обогреваемом на вертикальной цилиндрической стенке и охлаждаемом на другой:

○ — расчет; × — эксперимент [40] $Pr=0,7$

горизонтального цилиндра, обогреваемого с концов, аналогичное уравнению (18) для прямоугольного канала. Однако это решение содержит нерассчитанные коэффициенты и поэтому здесь не приводится.

Г. Горизонтальное кольцо. В [42] получено следующее корреляционное уравнение для конвективного теплообмена

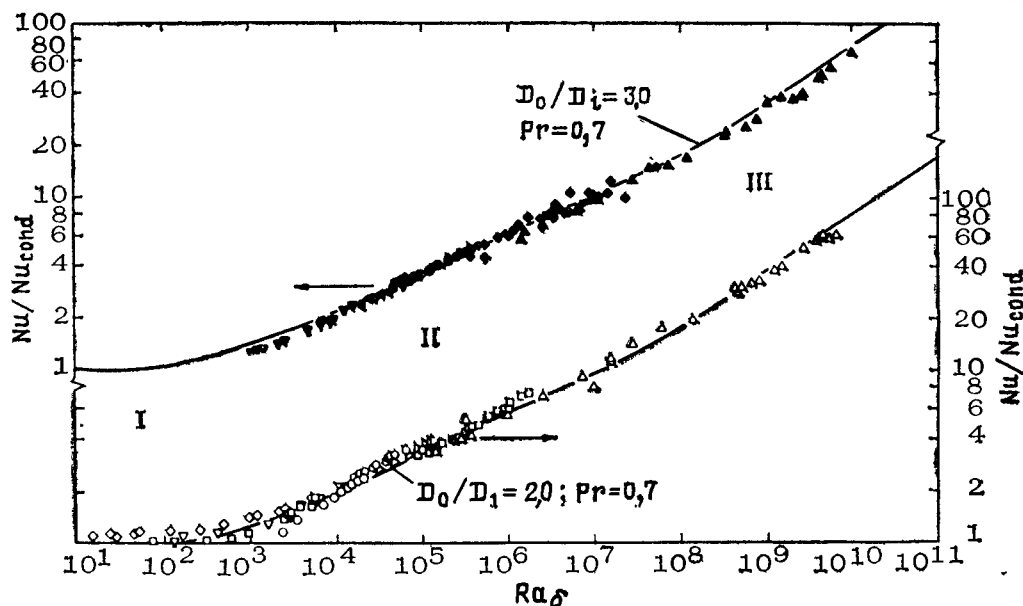


Рис. 24. Сравнение результатов, полученных из (26), с экспериментальными данными (точки) различных авторов по конвекции между концентрическими горизонтальными цилиндрами, температуры стенок которых различны и постоянны, $\delta = (D_0 - D_i)/2$ [42]: I — теплопроводность; II — течение в ламинарном пограничном слое; III — течение в турбулентном пограничном слое

Эксперимент	D_0/D_i	Вещество	Эксперимент	D_0/D_i	Вещество	Эксперимент	D_0/D_i	Вещество
■	3,286	Воздух, H_2CO_2	◀	2,6	Воздух	▽	2,10	Воздух
▼	2,72	Воздух	◆	3,6	Вода, воздух	△	2,0	»
●	3,16	»	□	2,062	Воздух, H_2CO_2	□	2,0	»
▲	3,0	SF_6 , N_2	▽	1,93	Воздух	◇	1,9	»
●	2,86	Воздух	○	1,96	»			»

между концентрическими или эксцентрическими цилиндрами с разными, но постоянными температурами стенок:

$$(Nu_{Di})_{conv} = 2/\ln \left\{ 1 + 2/(\{0,518 Ra_{Di}^{1/4} \times \right. \\ \times [1 + (0,559/Pr)^{3/5}]^{-5/12}\}^{15} + \\ + (0,1 Ra_{Di}^{1/3})^{15} \}^{1/15} / 1.2 / [\{ [2/(1 - e^{-0,25})]^{5/3} + \\ + (0,587 G Ra_{Di}^{1/4})^{5/3} \}^{3/5} + (0,1 Ra_{Di}^{1/3})^{15}]^{1/15} \}, \quad (23)$$

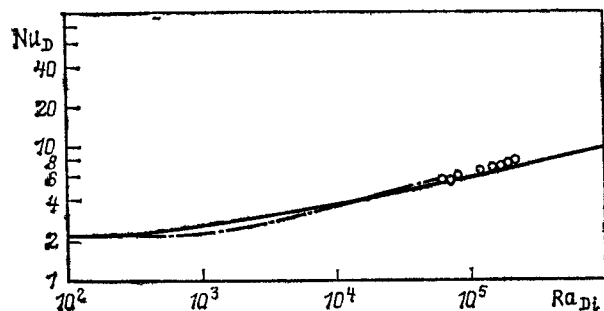


Рис. 25. Сравнение результатов, полученных из (26), с экспериментальными данными для конвекции между концентрическими цилиндрами [42]:

○ — эксперимент, воздух; — — — численные результаты, $Pr = 0,7$; — — — корреляционное уравнение, $Pr = 0,7$

где

$$G = \left[\left(1 + \frac{0,6}{Pr^{0,7}} \right)^5 + (0,4 + 2,6 Pr^{0,7})^5 \right]^{-1/5}; \quad (24)$$

D_i — внутренний диаметр, м; D_0 — наружный диаметр, м.

Соответствующее выражение для чистой теплопроводности имеет вид

$$(Nu_{Di})_{cond} = - \frac{2}{\cos h^{-1} [(D_i^2 + D_0^2 + 4\epsilon^2)/(2D_i D_0)]}, \quad (25)$$

где ϵ — отклонение оси внутреннего цилиндра от концентрического положения, м.

Общая интенсивность теплоотдачи определяется выражением

$$Nu_{Di} = [(Nu_{Di})_{conv} + (Nu_{Di})_{cond}]^{1/15}. \quad (26)$$

Это соотношение сравнивается с экспериментальными данными для концентрических цилиндров на рис. 24 и для эксцентрических цилиндров на рис. 25.

Уравнение (23) можно упростить для получения следующего выражения для квазиустановившейся конвекции внутри горизонтального цилиндра:

$$Nu_{Di} = 2/(-\ln \{ 1 - 2/[\{ [2/(1 - e^{-1/4})]^{5/3} + \\ + (0,587 G Ra_{Di}^{1/4})^{5/3} \}^{3/5} + (0,1 Ra_{Di}^{1/3})^{15}]^{1/15} \}) \}. \quad (27)$$

На рис. 26 результаты, полученные с использованием (27), сравниваются с экспериментальными.

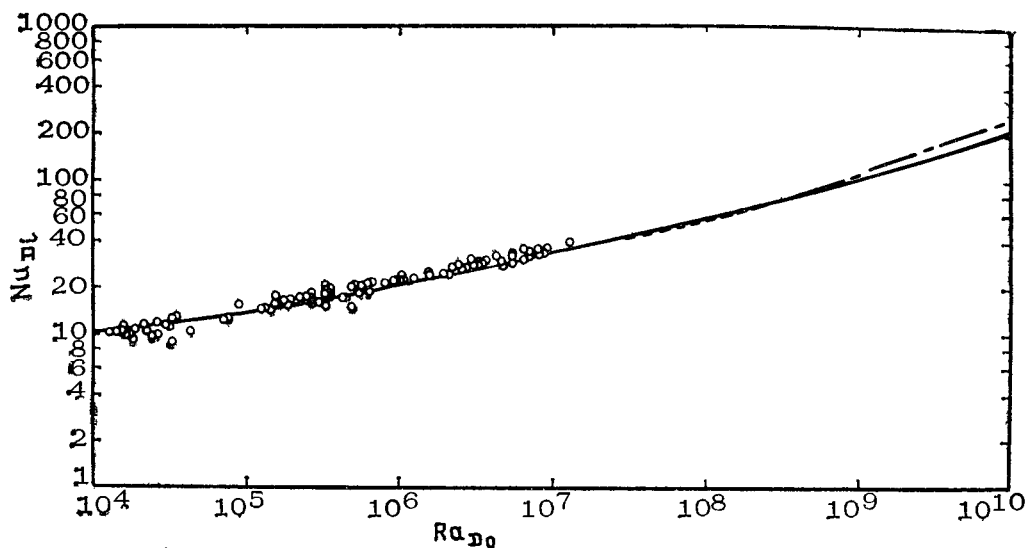


Рис. 26. Сравнение результатов, полученных из (27), с экспериментальными данными различных авторов для воды и глицерола для квазистационарного состояния конвекции в обогреваемых цилиндрических каналах (—○—) и сферах (—□—) [42]. Сплошная кривая — расчет [27]

В [43] получена корреляция более поздних данных для жидкометаллического сплава (56% К и 44% Фа, $Pr=0,02$) в концентрических цилиндрических кольцах в следующем виде:

$$Nu_{De} = \frac{2,45 \cdot 10^{-2}}{\ln(D_0/D_i)} (Ra_{De} Pr)^{0,536}, \quad (28)$$

где $D_e = D_0 - D_i$ — гидравлический диаметр, м.

Из рис. 27 видно, что результаты, полученные из (28), удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными для больших $Ra_{De} Pr$.

Г. Концентрические сферы. Авторы [44] получили корреляционное уравнение для конвективного теплообмена в воздухе между изотермическими концентрическими сферами в виде

$$Nu_d^* = 0,16 Gr_d^{0,27}, \quad (29)$$

где

$$Nu_d^* = \frac{Qd}{\pi \lambda D_i D_0 \Delta T}$$

и

$$d = (D_0 - D_i)/2.$$

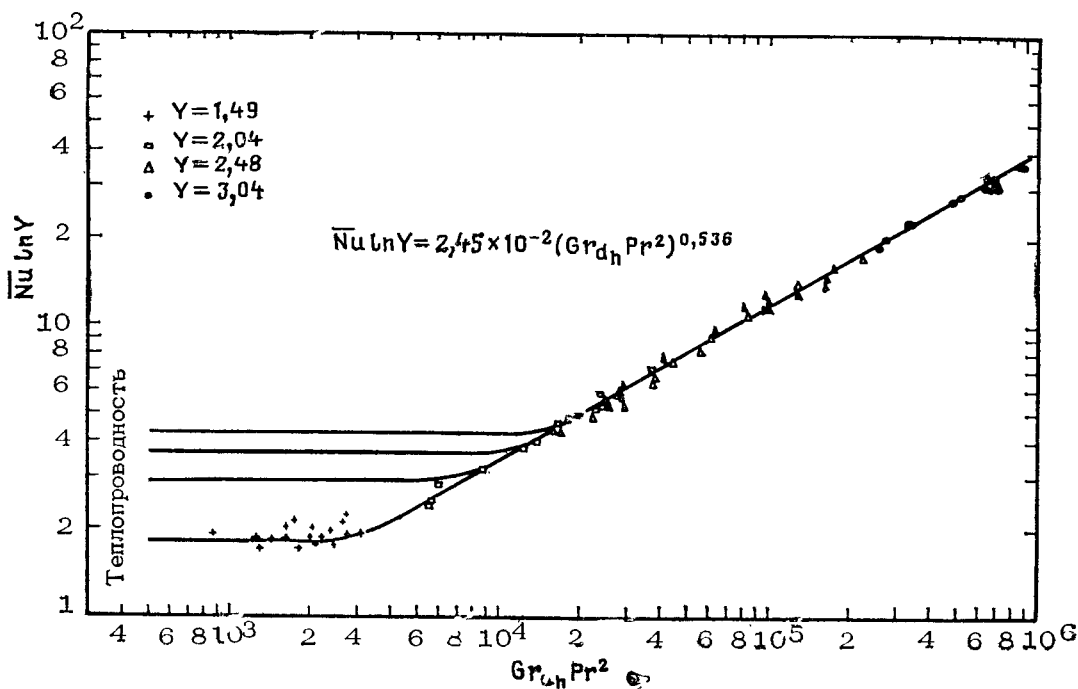


Рис. 27. Сравнение результатов, полученных из (28) для конвекции в горизонтальном кольцевом канале для NaK при $Y = D_0/D_i$, $Gr_{dh} Pr^2 = Ra_{De} Pr$ [43]

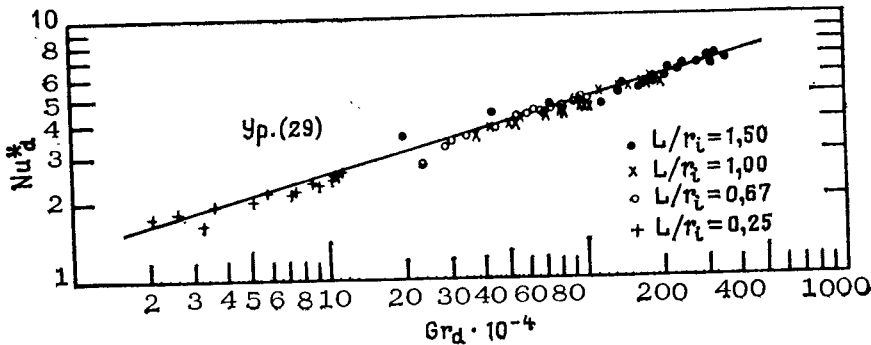


Рис. 28. Сравнение результатов, полученных из (29), с экспериментальными данными по конвекции воздуха в зазоре между концентрическими сферами [44]

Хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных показано на рис. 28. Уравнение (29) можно условно обобщить на соотношение (13)

$$Nu_d = 0,21 (Ra_d f(Pr))^{1/4}, \quad (30)$$

где $f(Pr)$ определяется выражением (72), § 2.5.7.

Н. Наклонные полости. Наклонные прямоугольные полости широко используются в солнечных коллекторах, а следовательно, изучению конвекции в этих условиях уделялось большое внимание. Однако вследствие зависимости теплообмена от углов наклона, поворота, а также от отношений сторон, чисел Рейля и Прандтля поведение конвекции не является полностью описанным. Развитие конвекции в наклонных гексагональных цилиндрических и кольцевых полостях изучалось недостаточно полно.

Большое отношение сторон. Движение жидкости имеет место во всех наклонных полостях, обогреваемых на го-

ризонтальной поверхности. Для $Ra_d \cos \theta < 1708$ жидкость медленно движется вверх вдоль обогреваемой поверхности и вниз вдоль охлаждаемой. Вклад этого движения в интенсивность теплообмена пренебрежимо мал. Здесь θ означает угол наклона обогреваемой поверхности по отношению к нижней горизонтальной поверхности. При $Ra_d \cos \theta > 1708$ возникает ряд вращающихся ячеек; по мере дальнейшего роста Ra_d движение становится трехмерным и неустойчивым. Движение жидкости является более сложным, как показано в [45, 46], при $\theta \geq 5\pi/12$.

В [6] уравнение (2) модифицировано путем замены Ra_d на $Ra_d \cos \theta$, исключения функции $f(Pr)$, введения множителя из корреляционного уравнения, приведенного в [44], и замены показателя степени 15 на 3 для получения следующего выражения для $0 \leq \theta \leq 4\pi/9$:

$$Nu_d = \left\{ 1 + 1,446 \left(1 - \frac{1708}{Ra_d \cos \theta} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{1708 (\sin 1,80)^{1,6}}{Ra_d \cos \theta} \right] \right\}^3 + \frac{Ra_d \cos \theta}{1420} \Bigg)^{1/3}. \quad (31)$$

Для $4\pi/9 \leq \theta \leq \pi/2$ предложено соотношение вида

$$Nu_d = \left[(Nu_{\theta 0}^3 - 1) \frac{\sin \theta}{0,985} + 1 \right]^{1/3}, \quad (32)$$

а для $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ согласно [48]

$$Nu_d = 1 + \left\{ \left[(Nu_{\theta 0}^{1/3} - 1) \frac{\sin \theta}{0,985} + 1 \right]^{1/3} - 1 \right\} \sin \theta. \quad (33)$$

Здесь $Nu_{\theta 0}$ значение Nu_d , вычисленное с помощью (31) для $\theta = 4\pi/9$. Эти соотношения сопоставлены с экспериментальными значениями для больших, но конечных отношений h/d на рис. 29. Расчет находится в соответствии с экспериментом в пределах разброса разных групп данных, за исключением больших θ , для которых соответствие значительно хуже.

Средние значения отношений сторон. В [29, 49—53] экспериментально и на основе численных расчетов показано, что трехмерность оказывает существенное влияние на поведение конвекции в наклонных полостях, в которых одно отношение сторон (или более) близко к единице. Движение в горизонтальных каналах, обогреваемых снизу, состоит из серии вращающихся ячеек, поперечное сечение которых близко к квадрату с осями, параллельными короткой горизонтальной стороне.

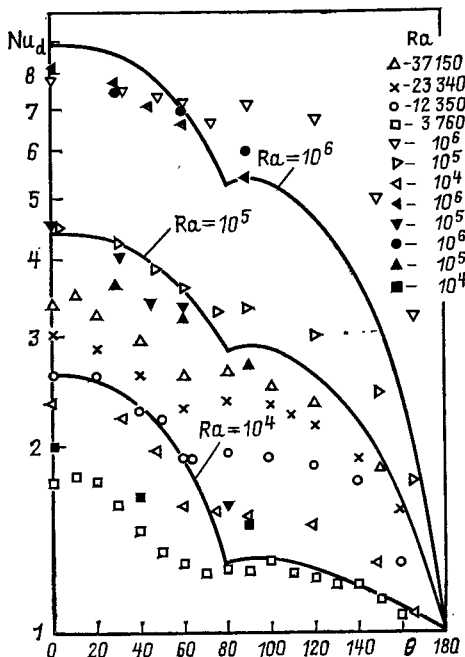


Рис. 29. Сравнение результатов, полученных из (32)—(34), с экспериментальными данными (точки) различных авторов для наклонных прямоугольных полостей с очень большим отношением сторон [6]

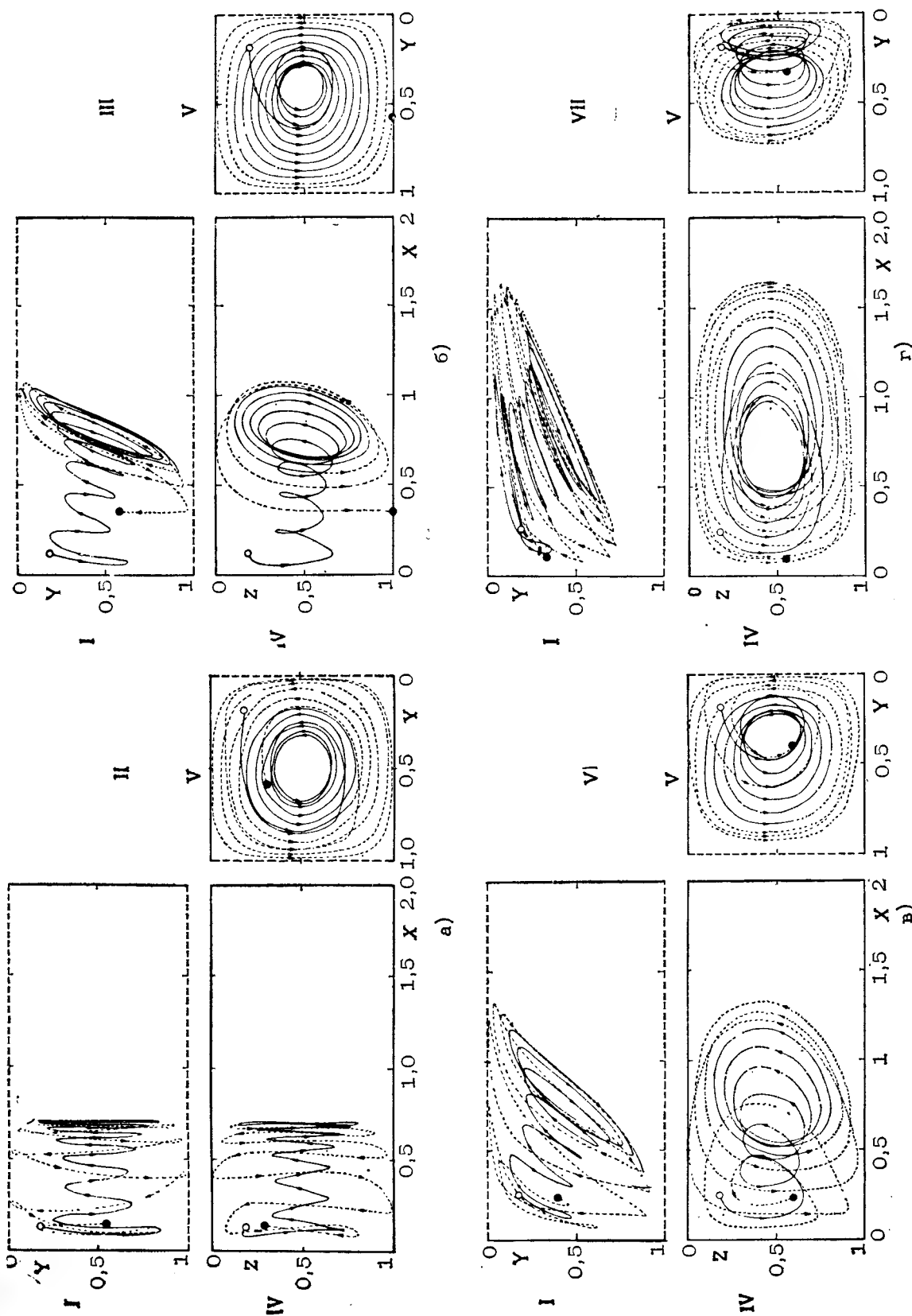


Рис. 30. Расчетные линии движения для 1×2 прямоугольного наклонного по отношению к длинной (бесконечной) стороне канала, обогреваемого снизу, $Ra=4000$, $Pr=10$. Границы, выполненные штриховой линией, — плоскости симметрии [51], I — вид сверху; II — вид сверху; III — горизонтальный; III — наклон 3° ; IV — вид сверху; V — вид сверху; VI — наклон 5° ; VII — наклон 5°

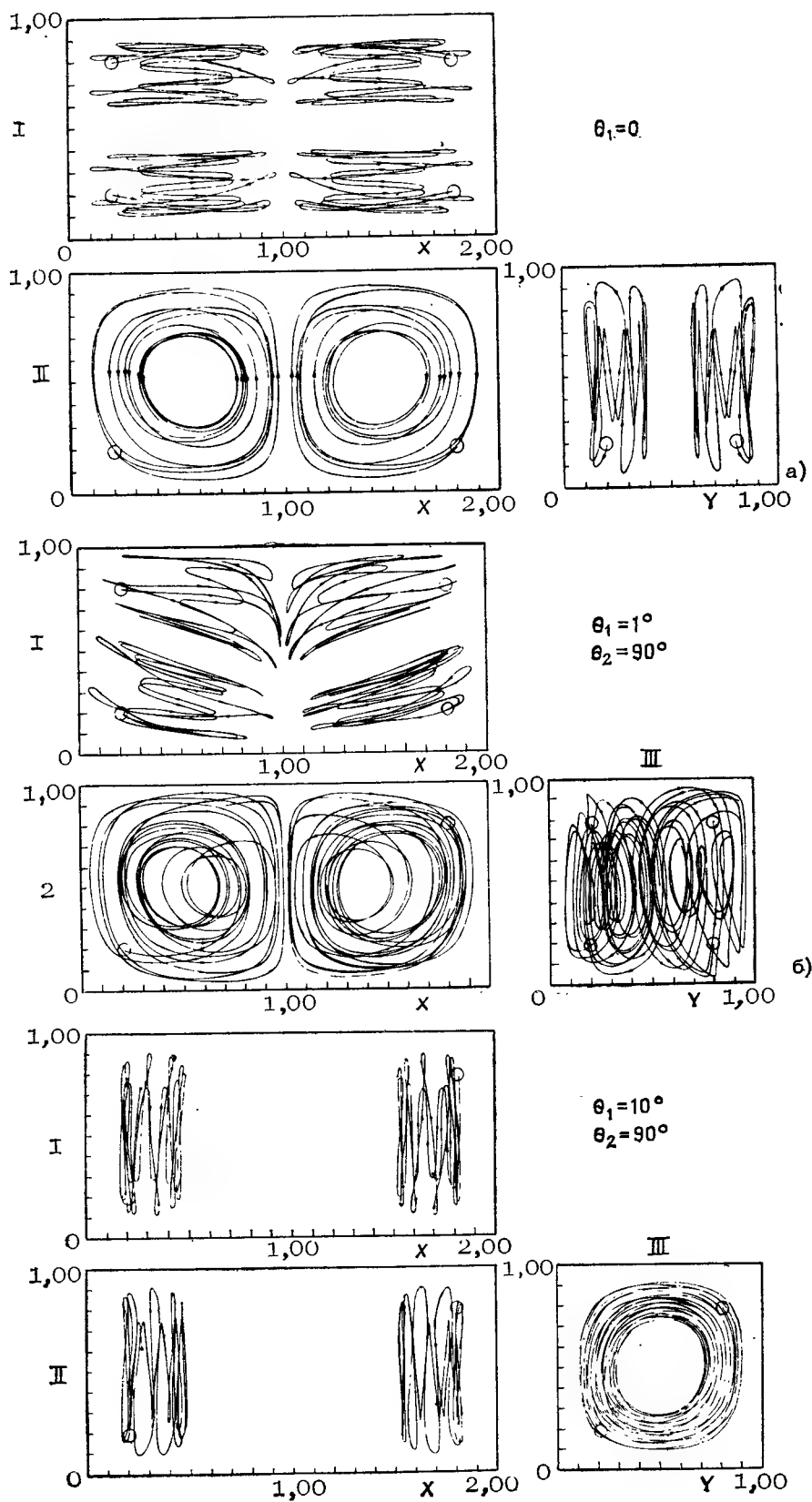


Рис. 31. Расчетные линии движения для $1 \times 1 \times 2$ прямоугольной полости, обогреваемой снизу и наклонной по отношению к длинной горизонтальной стороне, $Ra=6000$, $Pr=10$ [53]; I — вид сверху; II — вид сбоку; III — вид сзади

Как показано на рис. 30, траектории движения частиц в этих вращающихся ячейках наклонны, а по мере увеличения наклона длинной горизонтальной стороны ячейки разрушаются. Когда наклон становится достаточно большим, так что вращающиеся ячейки пересекают диагональную плоскость полости, происходит резкий переход к общей циркуляции (вверх вдоль обогреваемой поверхности и вниз вдоль охлаждаемой). Но когда короткий горизонтальный размер полости $1 \times 1 \times 2$ становится наклонным, две начальные ячейки вращаются до тех пор, пока их оси не совпадут, а затем объединяются, давая общую циркуляцию (вдоль обогреваемой поверхности и вниз охлаждаемой). Это показано на рис. 31. Качественно подобное поведение наблюдается для других значений Ra_d , Pr , отношений сторон и поворотов полости.

В противоположность случаю большого отношения сторон, для которого Nu_d постепенно уменьшается по мере увеличения θ от 0 до π , Nu_d вначале уменьшаются до минимального значения, соответствующего переходу, описанному выше, затем увеличивается до максимума и уменьшается до единицы для обогрева сверху ($\theta = \pi$). В [6] показано, что максимальное значение Nu_d может иметь место при

$$(\theta_1)_{\max} = \text{tg}^{-1} \left(\left[\left(\frac{h_1}{d} \right)^2 + \left(\frac{h_2}{d} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \quad (34)$$

и

$$(\theta_2)_{\max} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{h_2}{h_1} \right), \quad (35)$$

где θ_1 — угол наклона плоской обогреваемой поверхности, рад; θ_2 — угол поворота короткой стороны полости по отношению к горизонтальной линии в обогреваемой поверхности, рад; h_1 — длинная сторона, м; h_2 — короткая сторона, м.

Расчетные значения для углов наклона $(\theta_1)_{\max} = \text{tg}^{-1} \times (\sqrt{2}) = -55^\circ$ и поворота $(\theta_2)_{\max} = \text{tg}^{-1}(1) = 45^\circ$ для кубической полости подтверждены с помощью численных расчетов [6], полученных методом конечных разностей. Максимум Nu_d при $\theta_2 = 0$, соответствующем только наклону длинной стороны, имеет место при

$$(\theta_1)_{\max} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{h_1}{d} \right), \quad (36)$$

а для $\theta_2 = \pi/2$, соответствующего наклону только корот-

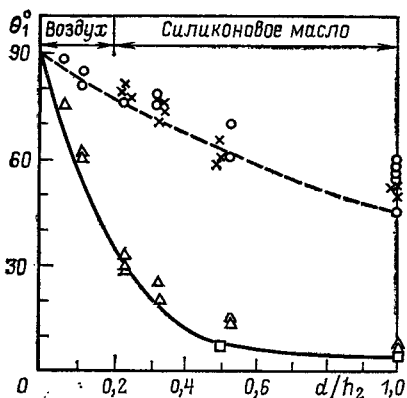


Рис. 32. Экспериментальные и расчетные значения углов наклона при максимальной и минимальной интенсивности теплообмена в наклонных прямоугольных полостях. $Nu_{\max}$: $\circ$ — эксперимент, $\times$ — расчет; $Nu_{\min}$: $\triangle$ — эксперимент, $\square$ — расчет; ———— [54], уравнение (38)

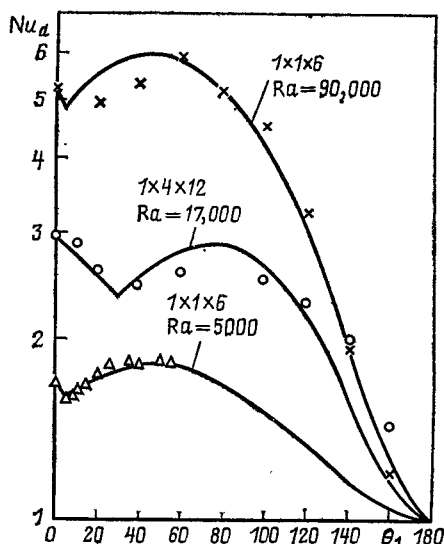


Рис. 33. Сравнение результатов, полученных из (39)–(41), с экспериментальными данными и расчетными значениями [50, 54] для прямоугольных полостей с наклонной более короткой стороной

кой стороны, при

$$(\theta_1)_{\max} = \text{tg}^{-1} \left(\frac{h_2}{d} \right). \quad (37)$$

Зависимости углов наклона, соответствующие минимальным и максимальным значениям Nu_d , определенным экспериментально и полученным с помощью трехмерных численных расчетов в [54], от d/h_2 представлены на рис. 32. Этот график построен для $\theta_2 = \pi/2$, т. е. для наклона более короткой стороны.

Как видно, соотношение (37) обеспечивает неплохое соответствие для $(\theta_1)_{\max}$. Отличие, наблюдающееся для отношений сторон, приближающихся к единице, можно связать с трудностью определения максимума на плоской кривой в зависимости Nu от θ_1 для теоретических и экспериментальных результатов. Кривая $(\theta_1)_{\min}$ является полностью эмпирической.

В [6] предложено следующее выражение для Nu_d при наклоне более короткой стороны:

$$\text{для } 0 \leq \theta_1 < (\theta_1)_{\min} \quad Nu_d = Nu_0 - (Nu_0 - Nu_{\min}) \frac{\theta_1}{\theta_{1\min}}; \quad (38)$$

$$\text{для } (\theta_1)_{\min} \leq \theta_1 \leq (\theta_1)_{\max} \quad Nu_d = 1 + (Nu_{\max} - 1) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} - (\theta_1)_{\max} \right); \quad (39)$$

$$\text{для } \theta_{1\max} \leq \theta_1 \leq \pi \quad Nu_d = 1 + (Nu_{\max} - 1) \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi - \theta_1}{\pi - (\theta_1)_{\max}} \right) \right]. \quad (40)$$

Из соотношения (39) находим

$$Nu_{\min} = 1 + (Nu_{\max} - 1) \sin \left((\theta_1)_{\min} + \frac{\pi}{2} - (\theta_1)_{\max} \right). \quad (41)$$

Число Nu_0 для $\theta_1 = 0$ можно рассчитать из соотношения (2). Корреляции для $Nu_{\max}$ еще не получены, но эти значения можно оценить из (17). Уравнения (38)–(40) с использованием экспериментальных значений $Nu_{\max}$ и $Nu_{\min}$ сопоставлены с несколькими группами данных на рис. 33.

1. Соты. Перегородки из плохо проводящего материала, перпендикулярные нагреваемой и охлаждаемой поверхностям, иногда используются для уменьшения переноса теплоты за счет конвекции. Такие перегородки обычно образуют гексагональные или прямоугольные ячейки, часто называемые сотами. Экспериментальные измерения, такие, как [55, 56] для случая обогрева снизу и [57, 58] для наклонных полостей, показали, что корреляции для единичных полостей с малым значением отношения сторон применимы и для сот, хотя могут быть существенными теплопроводность вдоль перегородок и влияние излучения.

2.5.9. Совместная свободная и вынужденная конвекция около погруженных в жидкость тел¹

С. У. Чарчилл

Теплообмен между жидкостью и погруженными в нее телом при вынужденной конвекции означает существование разности температур, а следовательно, и разности плотностей. Последнее приводит к появлению свободной конвекции. Влияние подъемных сил, совпадающее с направлением вынужденного течения, приводит к увеличению скорости и интенсивности переноса теплоты по сравнению со случаем чисто вынужденной конвекции. Противоположное вынужденной конвекции направление действия подъемных сил приводит к уменьшению скорости и интенсивности теплообмена по сравнению с чисто вынужденной или чисто свободной конвекциями. Следует также заметить, что совпадение направлений потоков замедляет, а их противоположное направление ускоряет процесс отрыва пограничного слоя от поверхности тел. В [1] было обнаружено, что интенсивность теплообмена при турбулентной свободной конвекции вначале уменьшалась, а затем увеличивалась при наложении в том же направлении вынужденного течения. Это уменьшение объясняется подавлением турбулентности. Ввиду сложности этих процессов очевидно, что предположение [2], заключающееся в том, что более высокая интенсивность теплоотдачи одного из накладывающихся двух процессов можно использовать для оценки теплоотдачи в случае смешанного влияния, можно рассматривать только как приближение первого порядка. Более точные корреляционные уравнения для различных режимов предложены ниже.

А. Совпадающие по направлению силы свободной и вынужденной конвекции. Течение в тонком ламинарном пограничном слое. Большая часть теоретических и экспериментальных результатов получена для случая наложения сил свободной и вынужденной конвекции в режиме течения в ламинарном пограничном слое; для ее описания имеется достаточное число соотношений, которые записываются в общем виде как

$$Nu^n = Nu_F^n + Nu_N^n, \quad (1)$$

где $Nu = \alpha l / \lambda$ — число Нуссельта; α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К); λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); l — характерная длина, м; индексы F и N означают вынужденную и свободную (естественную) конвекцию соответственно. Многие исследователи предлагали для показателя степени значение 2, основываясь на векторной сумме скоростей свободного набегающего потока и несколько произвольной, эквивалентной скорости свободной конвекции. Другие предлагали значение 4, опираясь на принцип аддитивности работы сил вынужденной и свободной конвекции. Приближение, принятое в [2], соответствует $n \rightarrow \infty$. В [3] проанализированы различные экспериментальные и теоретические значения для изотермических условий и однородного обогрева вертикальных пластин. На их

основе показано, что $n=3$ дает лучшие результаты, чем $n=2$ или 4. В [4] предложена теоретическая основа для этого выбора и показано, что уравнение (1) с $n=3$ является лучшей аппроксимацией и для погруженных в жидкость тел, и для вертикальных пластин. Следовательно, при постановке этого значения в обобщенное теоретическое выражение для ламинарных пограничных слоев находим, что

$$Nu^3 = (A_F Re^{1/2} Pr^{1/3} f_F(Pr))^3 + [A_N (Ra f_N(Pr))^{1/4}]^3, \quad (2)$$

где $Re = u_\infty l / \eta$ — число Рейнольдса; $Pr = \eta c_p / \lambda$ — число Прандтля; $Ra = g \beta c_p \zeta (T_w - T_\infty) l^3 / \eta \lambda$ — число Релея;

$$f_F(Pr) = [1 + (C_F/Pr)^{2/3}]^{-1/4}; \quad (3)$$

$$f_N(Pr) = [1 + (C_N/Pr)^{9/16}]^{-16/9}; \quad (4)$$

u_∞ — скорость набегающего потока, м/с. Другие обозначения даны как в § 2.5.7. Значения A_F , C_F , A_N и C_N для различных тел и двух упомянутых выше граничных условий приведены в табл. 1. Значения этих коэффициентов определены из теории пограничного слоя. Локальные значения чисел Nu для всех тел получены с использованием в качестве характерной длины x — расстояния от передней кромки или передней критической точки. Средние значения чисел Nu получены с использованием указанных характерных длин.

Уравнения (2)–(4) показывают, что безразмерными комплексами, которые определяют относительный вклад свободной и вынужденной конвекции, являются Ra : $:(Re^2 Pr^{4/3}) = Gr / (Re^2 Pr^{1/3})$ при $Pr \rightarrow \infty$ и $Ra / (Re^2 Pr) = Gr / Re^2$ при $Pr \rightarrow 0$. Здесь $Gr = g \beta \zeta (T_w - T_\infty) l^3 / \eta^2$ — число Грасгофа. Эти два комплекса для предельных случаев определены так

Таблица 1. Рекомендуемые константы и характерные длины для описания смешанной конвекции [3]

Тела	l	A_F	A_N	C_F	C_N	Nu_0
Вертикальная пластина						
Локальные						
$T = \text{const}$	x	0,339	0,503	0,0468	0,492	0,5*1
$q = \text{const}$	x	0,464	0,563	0,0205	0,437	0,5*1
Средние						
$T = \text{const}$	x	0,677	0,67	0,0468	0,492	0,5*1
$q = \text{const}$	$x/2$	0,656	0,669	0,0205	0,437	0,5*1
Горизонтальный цилиндр						
Средние						
$T = \text{const}$	πD	1,08*2	0,690	0,412	0,559	1,0*2
$q = \text{const}$	πD	—	0,694	0,442	—	—
Сфера						
Средние						
$T = \text{const}$	$\pi D/2$	0,69*2	0,659	—	—	π^*3
Обобщенное приближенное значение		0,67*4	0,67*5	0,45*6	0,45	

*1 Экспериментальное значение.

*2 Для потенциального течения [5].

*3 Решение для чистой теплопроводности.

*4 За исключением Nu на пластинах и Nu на цилиндрах.

*5 За исключением Nu на пластинах.

*6 За исключением пластин.

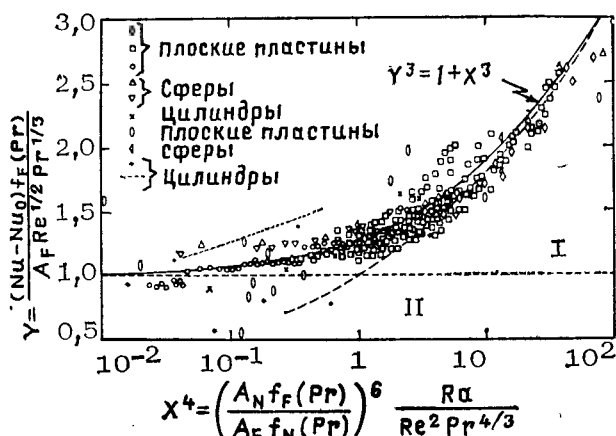


Рис. 1. Проверка уравнения (2) для совпадающих по направлению сил вынужденной I и свободной II конвекции вокруг погруженных в жидкость тел. Результаты получены различными авторами [3]

же, как и в [6]; однако часто использовались или рекомендовались для использования ошибочные комплексы, в особенности Gr/Re^2 для больших Pr .

Результаты, полученные из (2), на рис. 1 сравниваются с экспериментальными данными для различных форм тел и жидкостей. Рассчитанные значения здесь не представлены, поскольку, за исключением нескольких значений, они лежат практически на кривой, представляющей корреляционное уравнение.

Расчетные значения [7] по локальным значениям интенсивности теплообмена при смешанной конвекции около вертикального цилиндра приблизительно представляются уравнением (2), если Nu заменить на $Nu - 0,88 (x/D)$ и в качестве характерной длины выбрать x . Однако эти результаты не проверены экспериментально и область их справедливости не определена.

Приближения теории ламинарного пограничного слоя становятся несправедливыми при приближении чисел Re и Ra к нулю. Это имеет место, когда толщина пограничного слоя достигает значения, равного характерной длине поверхности. Режимы с малыми числами Re и Ra не имеют практической ценности для плоских поверхностей, но могут быть важными для небольших горизонтальных цилиндров (проволок) и частиц. Корреляционное уравнение, полученное в [8] для вынужденной конвекции около цилин-

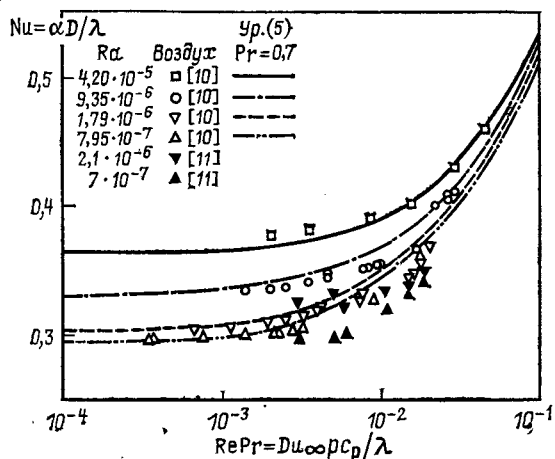


Рис. 2. Проверка уравнения (5) для совпадающих по направлению сил вынужденной и свободной конвекции на горизонтальных цилиндрах в режимах ползущего течения. Экспериментальные данные [10, 11]

дров, показывает, что теорию ламинарного пограничного слоя можно использовать с менее чем 10%-ной погрешностью вплоть до $Re Pr^{2/3} = 50$ для $Pr \rightarrow \infty$ и $Re Pr = 36$ для $Pr \rightarrow 0$. Соответственно границами влияния свободной конвекции, как определено корреляционным уравнением в [9], являются $Ra = 7200$ для $Pr \rightarrow \infty$ и $Ra Pr = 40000$ для $Pr \rightarrow 0$. Эти границы предлагается приблизительно применять и для тел другой формы, а следовательно, и к уравнению (2). Результаты для низких чисел Re и Ra рассмотрены ниже.

Режим ползущего течения ($Re \rightarrow 0$; $Ra \rightarrow 0$). Корреляция для горизонтальных цилиндров в этом режиме конвекции в [3] на основе комбинации отдельных аналитических решений [10] для ползущего течения при чисто свободной и вынужденной конвекциях

$$\frac{2}{Nu} = -\ln \left\{ \frac{Re Pr}{5,20} + \left[\frac{Nu Ra Pr}{49,6 (Pr + 9,4)^{1/2}} \right]^{1/3} \right\}. \quad (5)$$

Здесь D используется как характерная длина в Nu , Re и Ra . Результаты, полученные из (5), которое считается справедливым только при значениях $Re Pr$ и $(Ra Pr)^{1/3}$, меньших 0,2, на рис. 2 сравниваются с экспериментальными данными для воздуха. Соответствие результатов расчета экспериментальным данным [10] для $10000 < L/D < 12500$ является вполне удовлетворительным. Данные [11] для $L/D = 8000$ лежат несколько ниже. Кроме того, эти данные показывают, что L/D может быть параметром при значениях, меньших 16000, для тонких проволок. Эта заметная чувствительность является, по-видимому, результатом присутствия в потоке возмущений. Данные [11] для силиконовых масел ($Pr = 6,3$ и 63) лежат существенно ниже результатов расчета с использованием (5); однако они получены в основном для области, лежащей вне указанных пределов изменения $Re Pr$ и $Ra Pr$.

Режимы с небольшим проявлением инерционного течения. Важная область лежит между верхней границей существования режима ползущего течения и нижней границей существования режима течения в тонком ламинарном пограничном слое. Интерполяция между соотношениями (2) и (5) возможна, но особая точка в (5) является препятствием для получения корреляционного уравнения для этих условий. В [3] предложено аппроксимировать предельное поведение в режиме ползущего течения с помощью константы Nu_0 , а следовательно, интерполяционное выражение имеет следующий вид:

$$(Nu - Nu_0)^3 = [A_F Re^{1/2} Pr^{1/3} f_F(Pr)]^3 + [A_N (Ra f(Pr))^{1/4}]^3. \quad (6)$$

Рекомендованные в [3] значения Nu_0 (соответствующие указанным длинам) приведены в табл. 1. Экспериментальные данные для ползущего и промежуточных режимов течения представлены на рис. 1. Значение Nu_0 для сфер и цилиндров получено на основе теоретических исследований, а для вертикальных пластин путем обобщения экспериментальных данных.

Турбулентный режим. Для построения корреляционного уравнения при полностью турбулентном режиме течения нет достаточного числа экспериментальных данных. В отсутствие таких данных рекомендуется использовать уравнение (1) с $n=3$ и значениями Nu_F и Nu_N , рассчитанными по уравнениям для чисто вынужденной и чисто свободной конвекции для турбулентных режимов. Течение под действием подъемных сил может задержать начало развития турбулентности в вынужденном потоке, и, следовательно, сначала, как упоминалось выше, числа Nu уменьшаются.

В. Противоположное значение сил свободной и вынужденной конвекции. Экспериментальные и теоретические результаты для этого случая менее обширны, чем для совместного влияния сил вынужденной и свободной конвек-

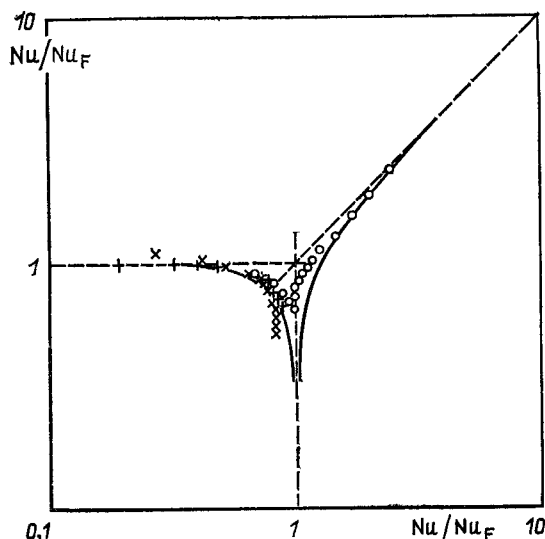


Рис. 3. Проверка уравнения (7) (сплошные кривые) для противоположного направления сил свободной и вынужденной конвекции. Результаты, полученные различными авторами [12]: $\times$ — расчетные значения, клин, $Pr=0,7$; $+$ — расчетные значения, пластина, $Pr=10$; $\circ$ — экспериментальные значения, сфера, $Pr=0,7$

ции. В [12] для этих условий рекомендуется использовать следующее корреляционное уравнение:

$$Nu = [Nu_F^3 - Nu_N^3]^{1/3}, \quad (7)$$

где Nu_F и Nu_N рассчитываются так же, как и при их одинаковой направленности. Как показано на рис. 3, уравнение (7) дает нулевое значение для $Nu_F = Nu_N$, тогда как экспериментальные данные принимают конечное значение, но в остальном соотношение (7) оказывается в состоянии предсказать правильное поведение Nu .

С. Переходная конвекция. При горизонтальном течении поверх плоской поверхности или погруженного тела действие свободной конвекции направлено под прямым углом по отношению к вынужденному течению.

В [13] показано, что направленное вверх движение над обогреваемой (или вниз по охлаждаемой) плоской поверхностью является аналогом влияния положительного градиента давления и тем самым увеличивает интенсивность теплообмена. В то же время направленное вниз движение над охлаждаемой (или вверх под обогреваемой) пластиной является аналогом влияния отрицательного градиента давления и уменьшает интенсивность теплообмена. Первый случай является устойчивым, второй — неустойчивым и приводит к отрыву потока.

Горизонтальные пластины. В [12] предложено следующее корреляционное уравнение для локальных и средних значений интенсивности теплообмена в ламинарном вынужденном потоке вдоль горизонтальных пластин:

$$(Nu - Nu_0)^{7/2} = [A_F Re^{1/2} Pr^{1/3} f_F(Pr)]^{7/2} \pm [A_N (Ra_N f_N(Pr))^{1/5}]^{7/2}. \quad (8)$$

Уравнение (8) применимо для $f_F(Pr)$ и значений Nu_0 , A_F и C_F , приведенных в табл. 1. Значения A_N представлены в табл. 2 вместе с частными значениями C_N , позволяющими пользоваться соотношением (4). Коэффициенты в последней таблице выбраны из теоретических значений, полученных для тонких ламинарных пограничных слоев.

Знак «+» в соотношении (8) используется, когда жидкость течет по верхней стороне обогреваемой или по нижней стороне охлаждаемой пластины, знак «—» — соответственно для противоположных случаев. Отрыв потока

Таблица 2. Рекомендуемые значения констант для описания свободной конвекции на горизонтальной пластине [12]

Коэффициент теплоотдачи (безразмерный)	A_N	C_N
Локальный коэффициент		
$T = \text{const}$	0,456* ¹	0,312* ¹
$q = \text{const}$	0,625* ²	(0,30)* ⁴
Средний коэффициент		
$T = \text{const}$	0,760*	0,312*
$q = \text{const}$	0,760* ³	0,30* ⁴

*¹ Из теории пограничного слоя [14].

*² Оценка по результатам расчетов пограничных слоев [15].

*³ Предполагается для $T_w - T_\infty$ при $x/2$.

*⁴ Предполагаемое значение.

наблюдается прежде, чем член, характеризующий влияние свободной конвекции в (8), превысит член, характеризующий влияние вынужденной конвекции. Следовательно, нулевое значение правой части (8) является пределом применимости этого выражения. Коэффициенты в табл. 2 для

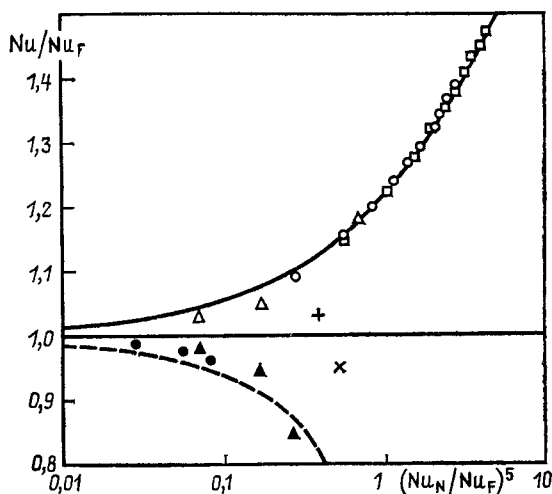


Рис. 4. Сравнение результатов, полученных из (8), с расчетными значениями для смешанной конвекции около горизонтальных пластин [12]. Результаты эксперимента и используемые различными авторами параметры приведены ниже:

Граничные условия	Обогреваемая верхняя сторона	Охлаждаемая верхняя сторона	Охлаждаемая нижняя сторона
$T_w = \text{const}$	$\circ$ — $Pr=0,7$ $+$ — $Pr=10$; $Re=40$	$\bullet$ — $Pr=0,7$	$\times$ — $Pr=10$; $Re=40$
$q_w = \text{const}$	$\square$ — $Pr=0,7$	—	—

Сплошная кривая — результат расчета по (8) для обогреваемой верхней стороны, штриховая кривая — по (8) для охлаждаемой верхней стороны

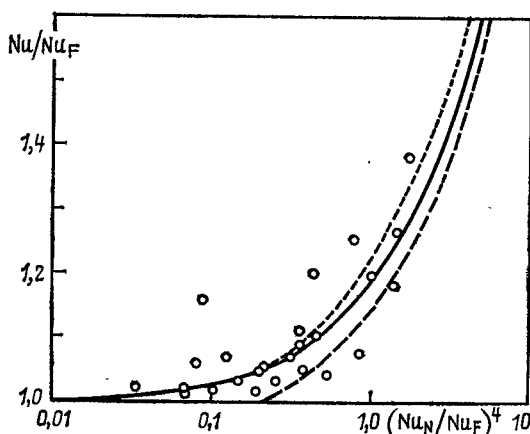


Рис. 5. Проверка уравнения (9) для случая поперечного обтекания воздухом сфер и цилиндров [12]. Точки — экспериментальные данные для сферы; штриховая и пунктирная кривые — средние линии по широкой полосе экспериментальных данных для цилиндров; сплошная кривая — расчет по (8)

локальных значений критерия отрыва на изотермической поверхности дают $Ra f_N(Pr)/(Re^{1/2} Pr^{1/3} f_F(Pr))^5 = 0,226$. Для $Pr=0,7$ это дает $Gr/Re^{5/2} = 0,35$, которое несколько выше, чем значение, полученное в [13] на основе анализа поля скоростей.

Экспериментальные данные для проверки уравнения (8) отсутствуют, но расчетные значения сопоставлены с этим выражением (рис. 4). Соответствие данных является вполне удовлетворительным в режиме тонкого пограничного слоя, но при $Re=40$ для двух значений расчет по (8) оказывается существенно выше. Выражения, используемые для Nu_F и Nu_N в (5), очевидно, непригодны для этого режима. Соотношения (1) и (7) вполне удовлетворительны для режима течения в пограничном слое, если для Nu_F и Nu_N используются подходящие значения.

Погруженные в жидкость тела. В [12] скоррелированы экспериментальные данные для поперечного обтекания сфер и цилиндров, перпендикулярного по отношению к направлению действий сил плавучести, с помощью выражения

$$(Nu - Nu_0)^4 = Nu_F^4 + Nu_N^4. \quad (9)$$

Успех такого представления данных демонстрируется на рис. 5 с учетом разброса трех групп данных. Соответствие можно считать удовлетворительным.

Данные [10] для ползущего течения имеют минимум в распределении Nu при увеличении Re и, следовательно, уравнением (9) не описываются.

2.5.10. Совместные свободная и вынужденная конвекции в каналах¹

С. У. Чарчилл

Разность температур, связанная с переносом теплоты при вынужденной конвекции в каналах, вызывает появление градиента плотности. Влияние появляющегося в результате действия сил плавучести движения на интенсивность теплоотдачи изучено достаточно хорошо, поскольку такие течения в каналах имеют широкую практическую значимость. Но даже в этом случае в связи с рядом дополнительных сложностей не получено достаточно хороших корреляционных уравнений по сравнению со смешанной конвекцией при внешнем обтекании (см. § 2.5.9).

При течении в каналах увеличение или уменьшение скорости вблизи стенки под действием сил плавучести компенсируется соответственно уменьшением или увеличением скорости в центральной части канала, и в предельном случае может возникнуть обратное течение. Влияние изменения вязкости с температурой является дополнительной сложностью и может быть того же порядка величины, что и влияние подъемных сил. Кроме того, для постоянной температуры поверхности разность температур изменяется вдоль канала, и выбор эффективных средних значений чисел Нуссельта и Релея становится произвольным.

Нагрев жидкости при подъемном ламинарном течении в канале (или ее охлаждение при опускном течении) вызывает увеличение градиента скорости вблизи стенки и, следовательно, увеличение интенсивности теплообмена. В то же время компенсирующее уменьшение скорости вблизи центра канала вызывает уменьшение интенсивности переноса при турбулентном режиме. Нагрев жидкости при опускном течении (или ее охлаждение при подъеме) оказывает противоположное влияние на скорость и, следовательно, вызывает увеличение интенсивности теплообмена при ламинарном режиме и уменьшение при турбулентном.

Нагрев жидкости при течении в горизонтальном круглом канале вызывает появление вторичного движения в форме циркуляции вверх вдоль стенок трубы и вниз в центральной области, увеличивая тем самым интенсивность теплообмена. Охлаждение жидкости при течении в горизонтальном канале вызывает аналогичную циркуляцию, но в противоположном направлении и также увеличивает интенсивность теплообмена.

В [1] содержится график, воспроизведенный на рис. 1, на котором показаны области значений чисел Re и $Ra D/L$, в которых движение в вертикальной круглой трубе с постоянной температурой стенки является ламинарным или турбулентным (свободным, смешанным или вынужденным).

Режим смешанной конвекции определяется как режим, в котором тепловой поток отличается на 10 или более % от значения для чисто свободной или вынужденной конвекции. Здесь

$$Re = \frac{Du_b \rho}{\eta};$$

$$Ra_{LM} = \frac{g \rho^2 c_p \zeta (T_w - T_b) L M D^3}{\eta \lambda},$$

где D — диаметр трубы, м; u_b — средняя массовая скорость м/с; ρ — плотность кг/м³; η — динамическая вяз-

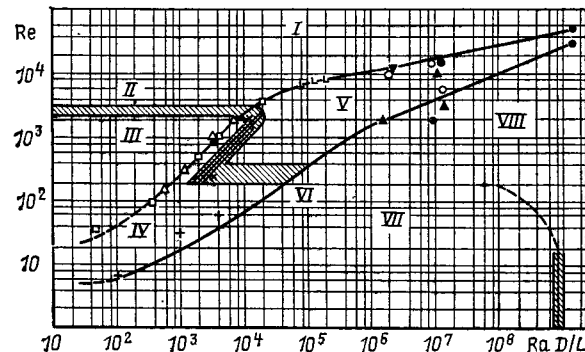


Рис. 1. Режимы конвекции в вертикальных трубах, $10^{-2} < Pr D/L < 1$ из [1];

I — вынужденная конвекция, турбулентное течение; II — переходная область от ламинарного к турбулентному движению; III — вынужденная конвекция, ламинарное течение; IV — смешанная ламинарная конвекция; V — смешанная турбулентная конвекция; VI — расчет по (4); VII — свободная ламинарная конвекция; VIII — свободная турбулентная конвекция; заштрихованные области и точки — экспериментальные данные для UWT, UHF

¹ Пер. с англ. Н. В. Медведкой.

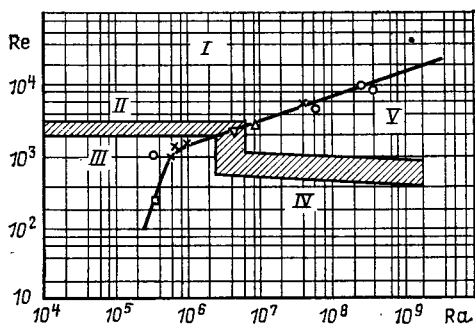


Рис. 2. Режимы конвекции в горизонтальных трубах, $10^{-2} < \text{Pr}D/L < 1$. Обозначения те же, что и на рис. 1

кость, Па·с; g — ускорение силы тяжести, м/с²; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг·К); ξ — температурный коэффициент объемного расширения, К⁻¹; T_w — температура стенки, К; T_b — среднemasовая температура, К; λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); L — длина трубы, м; LM — среднелогарифмическое значение.

Аналогичный график для горизонтальных труб приведен на рис. 2. Здесь рассмотрены границы между смешанной и свободной конвекцией для того, чтобы также исключить неопределенность. Видно, что рис. 1 и 2 имеют ограниченную область применимости: $10^{-2} < \text{Pr}D/L < 1$.

А. Вертикальные каналы. Совпадающие по направлению влияния сил свободной и вынужденной конвекции при ламинарном течении. Большое число корреляционных уравнений предложено для совпадающих по направлению типов конвекции. Соотношение (1), § 2.5.9 с $n=3$, которое имеет вид

$$\text{Nu}^3 = \text{Nu}_F^3 + \text{Nu}_N^3, \quad (1)$$

может во многих случаях удовлетворительно применяться для локальных и средних значений Nu . Здесь $\text{Nu} = \alpha D / \lambda$ — число Нуссельта; α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К), индексы F и N обозначают соотношения для чисто вынужденной и чисто свободной конвекции соответственно.

1. Постоянная температура стенки. Для полностью развитого ламинарного пограничного слоя Nu_F является постоянным и не зависит от Re , Pr и L/D . Для круглой

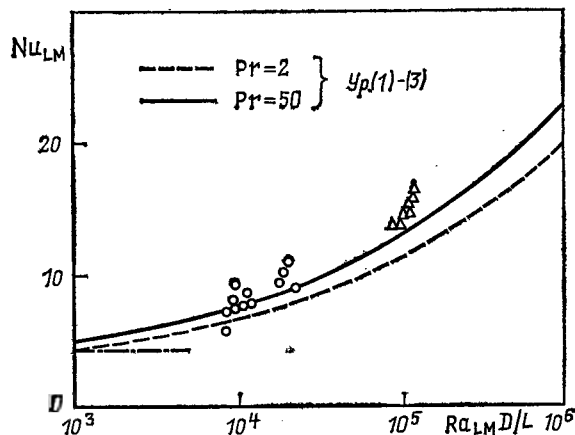


Рис. 3. Сравнение результатов, полученных по (1) с использованием (2) и (3), с экспериментальными данными (точки) [3] для полностью развитой ламинарной конвекции в вертикальных изотермических трубах для совпадающих по направлению сил свободной и вынужденной конвекции:

○ — масло А, $\text{Pr}=49,5$; △ — вода, $\text{Pr}=1,6$

трубы с постоянной температурой стенки

$$\text{Nu}_F = \bar{\text{Nu}}_F = 3,657, \quad (2)$$

где черта означает среднее по длине значение. Для свободной ламинарной конвекции в вертикальной трубе в [2] предложено следующее полуэмпирическое выражение:

$$\bar{\text{Nu}}_N = \frac{0,75 (\text{Ra} D/L)^{1/4}}{[1 + (0,492/\text{Pr})^{9/16}]^{4/9}}. \quad (3)$$

Здесь в $\bar{\text{Nu}}_N$ и Ra , поскольку нет определенных рекомендаций, используется средняя логарифмическая разность температур. Соотношение (1) вместе с (2) и (3) сопоставлено на рис. 3 с выборочными экспериментальными данными [3] для малых Gz . Соответствие является вполне приемлемым, если учесть качественно одинаковый возрастающий характер изменения теплоотдачи и то, что экспериментальные данные получены при существенном изменении физических свойств.

Для входного участка круглой трубы в [4] на основе решения [5] предложено использовать соотношение (1) для $(\text{Nu})_{AM}$ при вынужденной конвекции

$$(\text{Nu}_F)_{AM} = 1,75 F_1 \text{Gz}^{1/3}, \quad (4)$$

а для свободной конвекции эмпирическое выражение

$$(\text{Nu}_N)_{AM} = 0,729 F_1 F_2^{1/3} (\text{Ra} D/L)^{0,28}. \quad (5)$$

Индекс AM означает, что в числе Nu_N используется среднелогарифмическая разность температур $(2T_w - T_i - T_0)/2$; $\text{Gz} = \dot{M} c_p / (\lambda L)$ — число Гретца; $\dot{M}$ — массовый расход, кг/с;

$$F_1 = \frac{Z}{\ln \left(\frac{2+Z}{2-Z} \right)} = \frac{\text{Nu}_{AM}}{\text{Nu}_{LM}}; \quad (6)$$

$$Z = \frac{2(T_0 - T_i)}{(2T_w - T_0 - T_i)} = \frac{\pi \text{Nu}_{AM}}{\text{Gz}}; \quad (7)$$

T_w — температура стенки трубы, К; T_0 — температура жидкости на выходе, К; T_i — температура жидкости на входе, К; Ra_i — число Релея, рассчитанное по разности температур $T_w - T_i$; F_2 — корректирующий множитель для использования входной, а не среднелогарифмической разности температур в числе Релея,

$$F_2 = \frac{5}{4} \int_0^1 \xi^{1/4} e^{-\Phi \xi^{2/3}} d\xi; \quad (8)$$

$$\Phi = \frac{3\pi \text{Nu}_{AM}}{4F_1 \text{Gz}}. \quad (9)$$

Отсутствие индексов N или F означает смешанную конвекцию.

Рекомендуется свойства, входящие в Gz , рассчитывать по среднелогарифмической температуре жидкости $(T_2 + T_0)/2$, а свойства в Nu , входящие и Ra_i , — по температуре стенки. Зависимость функции F_2 , рассчитанная

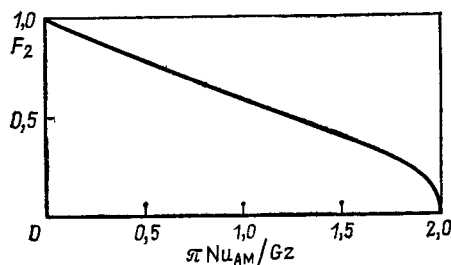


Рис. 4. Корректирующий множитель уравнения (5) при использовании входной разности температур в числе Релея

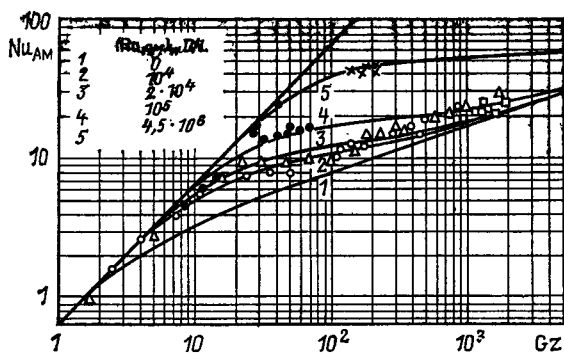


Рис. 5. Сравнение уравнения (1) с использованием (4) и (5) с экспериментальными данными (точки) [3] для нагрева масла и воды при подъёмном ламинарном течении в вертикальной трубе [4]. Ниже приведены параметры, используемые различными авторами в экспериментах:

Эксперимент	$(Ra_{AM})_w D/L$	D , см	L , м	Жидкость
○	$1,05 \cdot 10^4$	1,25	7,56	Масло А
△	$2,13 \cdot 10^4$	1,25	3,72	»
□	$3,1 \cdot 10^4$	1,072	1,35	»
●	$1,05 \cdot 10^5$	1,072	1,35	Вода
×	$4,5 \cdot 10^5$	5,03	1,0	»

Значения параметров, используемых при расчете, указаны на рисунке

по (8) с использованием (6), § 2.5.8 и (9), § 2.5.8 от $\pi \times \times Nu_{AM}/Gr$ представлена на рис. 4. Соотношение (1) вместе с (4), (5), как показано на рис. 5, хорошо согласуется со всеми экспериментальными данными [3], полученными для условий нагрева воды и масла при подъёмном течении. Это сложное корреляционное уравнение требует применения метода последовательных приближений.

В [6] получены аналитические решения для совпадающего по направлению влияния свободной и вынужденной конвекции с учетом изменения вязкости и плотности с температурой. Эти результаты представлены на рис. 6. Влияние вязкости оказывается существенным, хотя и несколько меньшим, чем влияние плавучести. На рис. 7 расчетные значения сопоставлены с экспериментальными данными.

2. Однородный по длине обогрев. Поведение теплоотдачи при однородном по длине обогреве является более простым, чем при постоянной температуре стенки, поскольку в этом случае dT_b/dx постоянна по длине, а для полностью развитого теплообмена постоянны также $T_w - T_b$ и dT_w/dx . Плотность теплового потока и температура вследствие симметрии постоянны по окружности круглой вертикальной трубы. Для каналов некруглого поперечного сечения одна из них или обе эти величины изменяются по периметру. Теоретические результаты получены в основном для двух предельных случаев: для постоянной по периметру температуры, соответствующей бесконечной теплопроводности стенки, и для постоянного по периметру обогрева, соответствующего пренебрежимо малой теплопроводности в стенке. Эти граничные условия дают соответственно нижнюю и верхнюю границы для числа Nu. Экспериментальные результаты для конечной теплопроводности в стенке лежат между результатами для этих условий, но значительно ближе к условиям постоянства температуры по периметру.

Экспериментальные и теоретические результаты для области входа отсутствуют. Для полностью развитого теплообмена при чисто свободной конвекции в круглой трубе

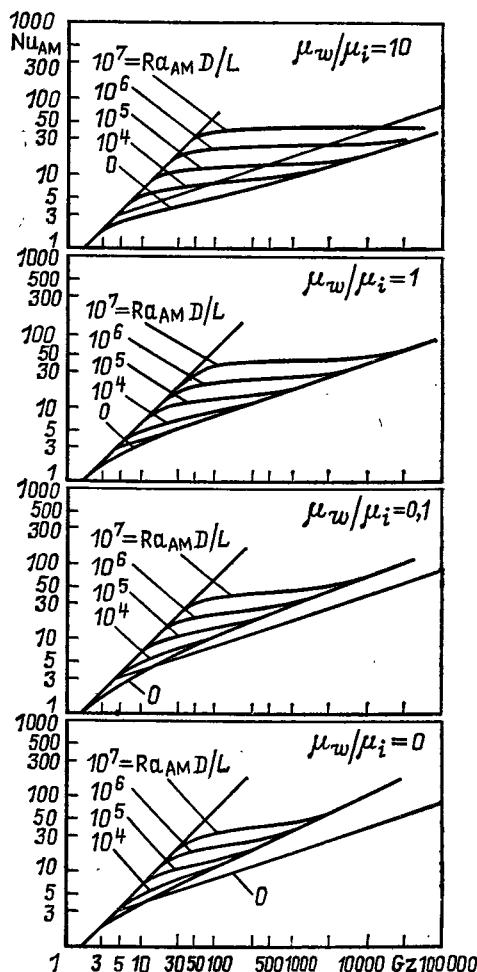


Рис. 6. Результаты теоретического решения, учитывающего влияние переменной вязкости и плотности на развивающееся ламинарное течение в вертикальной изотермической трубе в условиях совпадения по направлению сил свободной и вынужденной конвекции [6]

точное решение получено в [7]

$$Nu_N = 0,846 (Ra^*)^{1/4}, \quad (10)$$

где

$$Ra^* = \frac{g \zeta \rho^2 c_p D^4}{\eta \lambda} \left(\frac{dT_b}{dx} \right), \quad (11)$$

и для чисто вынужденной полностью развитой конвекции

$$Nu_F = 48/11. \quad (12)$$

Экспериментальные данные [8] и значения, рассчитанные на основе решений [7, 8], полученных в виде рядов, сопоставлены на рис. 8 с результатами расчета по уравнению (1) с использованием (10) и (12). Верхнее отклонение теоретических значений Nu для больших Ra^* можно объяснить с помощью численной погрешности при расчете рядов или низким значением коэффициента в (10). Во всяком случае очевидно, что $n=6$ соответствует этим значениям и особенно экспериментальным данным лучше, чем $n=3$. Таким образом, рекомендуемое для однородного обогрева уравнение имеет вид

$$Nu^6 = Nu_F^6 + Nu_N^6. \quad (13)$$

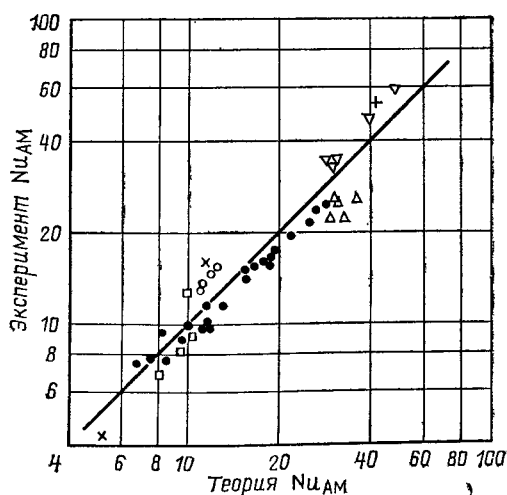


Рис. 7. Сравнение результатов теоретического решения, полученных при ламинарном течении в условиях совпадения по направлению сил свободной и вынужденной конвекции, с экспериментальными данными различных авторов [6] при нагревании:

●, △ — масло; ○, + — вода; при охлаждении: ▽, □ — масло; × — вода («неустойчивая»)

Численные решения при однородном обогреве получены для некоторых других геометрий для двух граничных условий. Некоторые из этих расчетных значений сопоставлены с уравнением (18) на рис. 9 с использованием Nu_F и $Nu_N/(Ra^*)^{1/4}$ в табл. 1. Соответствие в среднем вполне удовлетворительное и снова подтверждает выбор $n=6$. Отклонения в нижней части, возможно, связаны с численной погрешностью в расчетах или значениях Nu_F и Nu_N в табл. 1.

Гидравлический диаметр

$$D_h = 4S/P_w, \quad (14)$$

где S — площадь поперечного сечения в канале, m^2 ; P_w — периметр канала, m , используется в качестве характерной длины в Nu и Ra^* на рис. 9 и в табл. 1.

Противоположно направлению свободной и вынужденной конвекции при ламинарном течении. В [4] считается, что теплоотдача для ламинарной свободной конвекции, противоположно направленной вынужденному движению, может быть описана с помощью (1), в котором знак «+» за-

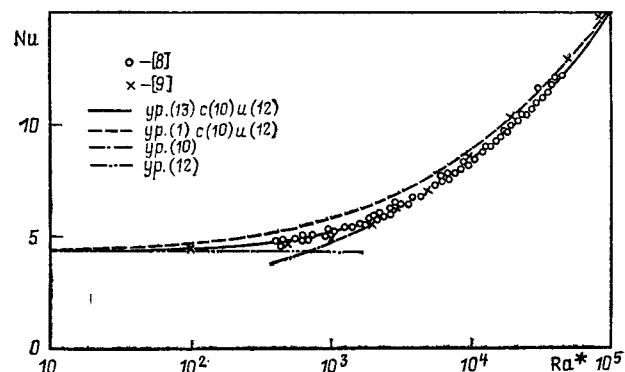


Рис. 8. Сравнение результатов, полученных по (1) и (3), с частично использованном уравнений (10) и (12) для полностью развитого ламинарного течения в однородно обогреваемой вертикальной трубе в условиях совпадения по направлению сил свободной и вынужденной конвекции. Точки — результаты экспериментов [8, 9]

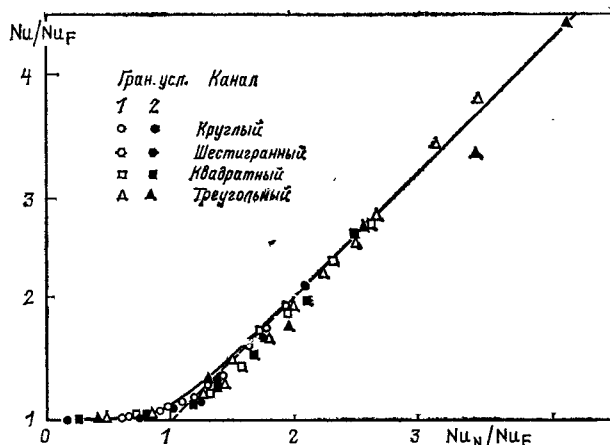


Рис. 9. Сравнение результатов, полученных по (13) с использованием (11) и (12) (сплошная кривая), с результатами численного решения для полностью развитого ламинарного течения и вертикальных однородно обогреваемых каналов в условиях совпадения по направлению сил свободной и вынужденной конвекции. Точки — результат эксперимента при двух граничных условиях. Форма канала соответствует форме точек эксперимента. Значения чисел Nu_N и Nu_F взяты из табл. 1

Таблица 1. Результаты решений для полностью развитой вынужденной и свободной конвекции в однородно обогреваемых каналах

Форма канала	Число сторон	Граничное условие 1		Граничное условие 2	
		Nu_F	$Nu_N/(Ra^*)^{1/4}$	Nu_F	$Nu_N/(Ra^*)^{1/4}$
Многоугольный [10]	3	3,1111	0,827	1,90	0,784
	4	3,6078	0,839	3,23	0,809
	5	3,87	0,842	3,65	0,816
	6	4,01	0,844	3,88	0,815
	7	4,10	0,845	4,02	0,824
	8	4,16	0,846	4,13	0,829
Круглый [7]	12	4,27	0,846	0,28	0,845
	α	4,3636	0,846	4,3636	0,846
Ромбовидный	20	2,4514	0,823	—	—
	30	2,7182	0,825	—	—
	40	2,9692	0,826	—	—
	50	3,1867	0,828	—	—
	60	3,3650	0,829	—	—
	70	3,4884	0,830	—	—
	80	3,5659	0,831	—	—
	90	3,61	0,831	—	—
Треугольный [12]	60—60—60	3,1111	0,829	—	—
	30—60—90	2,8875	0,824	—	—
	45—45—90	2,9819	0,827	—	—

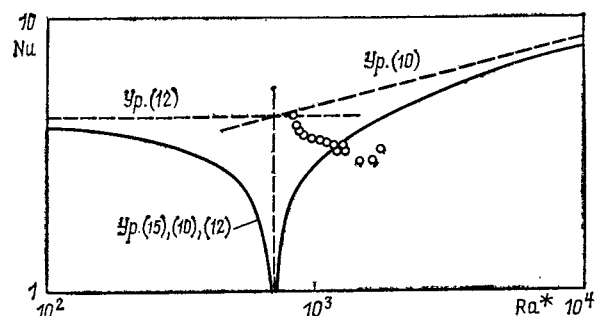


Рис. 10. Сравнение результатов, полученных по (10), (12) и (15), с экспериментальными данными [9] для полностью развитого ламинарного течения в однородно обогреваемой вертикальной трубе в условиях противоположного влияния сил свободной и вынужденной конвекции

меняется на «—». Соответствующее уравнение имеет вид

$$Nu = |Nu_F^3 - Nu_N^3|^{1/3}, \quad (15)$$

где Nu_F и Nu_N определяются из (4) и (5). Соотношение (15) также дает низкие значения для $Nu_F \approx Nu_N$, но вместе с тем дает нижнюю границу и правильный предельный переход для случаев преобладающего влияния либо вынужденной, либо свободной конвекции. Верхней границей являются большие значения Nu_N и Nu_F . Более точная корреляция в настоящее время еще не получена. Данные [10] для однородного обогрева воды при опускном течении в круглой трубе получены в слишком узкой области Ra^* (рис. 10), чтобы служить проверкой (15).

Турбулентная конвекция. Как показано в [13], при совпадении направлений свободной и вынужденной конвекций вначале влияние сил плавучести приводит при турбулентном течении к уменьшению теплообмена вследствие уменьшения скорости, тем самым касательного напряжения и интенсивности турбулентности в ядре потока. Обратное влияние имеет место при противоположном направлении подъемных сил и сил вынужденной конвекции, при

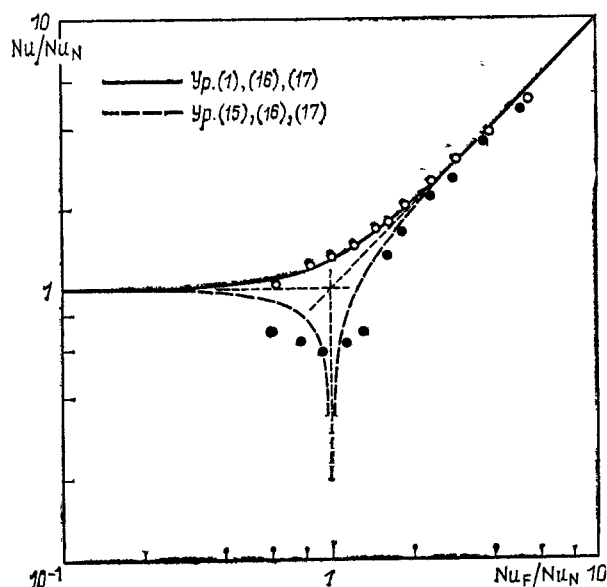


Рис. 11. Сравнение результатов полученных по (1) и (15) с использованием (16) и (17), с экспериментальными данными (точками) [14] при турбулентном течении в изотермической вертикальной трубе в условиях совпадающего по направлению и противоположного влияния сил свободной и вынужденной конвекции: экспериментальные данные [14]: ○ — противоположное (опускное) течение; ● — совпадающее (подъемное) течение

этом интенсивность теплообмена увеличивается. Такое поведение чисел Nu показано на рис. 11, где представлены данные [14] для подъемного и опускного течения воды в обогреваемом канале в области чисел Re от 5800 до 71 000. Число Ra равнялось приблизительно $4 \cdot 10^7$ для всех режимов.

При противоположном направлении сил свободной и вынужденной конвекции эти данные хорошо описываются уравнением (1) с использованием следующих выражений для турбулентной вынужденной конвекции [15] и свободной турбулентной конвекции [16]:

$$Nu_F = \frac{0,0357 Re Pr^{1/3} (1 + Pr^{-4/5})^{-5/6}}{\ln(Re/17)}; \quad (16)$$

$$Nu_N = 0,15 Ra^{1/3} \left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/27}. \quad (17)$$

Для совпадающих по направлению сил свободной и вынужденной конвекции экспериментальные данные качественно следуют за соотношением (15). Такое поведение чисел Nu противоположно поведению теплоотдачи при ламинарном течении.

В. Горизонтальные каналы. Однородная температура стенки. В [17] предложено корреляционное уравнение для теплообмена при течении воздуха во входном участке круглой трубы с постоянной температурой стенки

$$Nu_{LM} = [362 Gz^2 + 0,0277 (Ra_{LM})^{3/2}]^{1/6}. \quad (18)$$

Можно отметить, что эмпирическая константа 362 в (18) соответствует коэффициенту 2,67 при $Gz^{1/3}$ и теоретическому значению 1,75. Такое отличие авторы объясняют, тем, что развитие профиля скорости полностью не завершено. Предлагается физические свойства, входящие в число Gz , определять по средней температуре жидкости, а те, что входят в Nu и Ra , — по температуре стенки. Для удобства среднеарифметическую разность температур в числе Ra можно заменить разностью температур на входе с помощью соотношения, которое получено из энергетического баланса,

$$\frac{(T_w - T)_{LM}}{T_w - T_i} = \frac{Gz}{\pi Nu_{LM}} (1 - e^{-\pi Nu_{LM}/Gz}). \quad (19)$$

Кроме того, Nu_{LM} можно заменить на $Nu_{AM}/F_1(z)$, так же как и для вертикальных каналов. Однако в любом случае, если T_2 не известно, требуется применение метода последовательных приближений.

Результаты, полученные из (18) и выраженные через Nu со средним значением $Ra = 1,65 \cdot 10^6$, сравниваются на рис. 12 с экспериментальными данными [17] для воздуха ($1,1 \cdot 10^6 < Ra < 2,2 \cdot 10^6$). Соответствие является вполне удовлетворительным. Соотношение (18) можно обобщить для других Pr [18], заменяя коэффициент 0,0277 на 0,0905 $[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{-8/3}$.

Однородный вдоль трубы обогрев. Точно так же, как для вертикальных труб, самое большое число результатов получено для однородного обогрева, поскольку влияние подъемных сил является более существенным. Для этого случая получено и больше всего теоретических результатов, наиболее удобных для анализа.

Уравнение (13) можно применять для горизонтальных течений так же, как и для вертикальных. В [19] получено следующее выражение во входном участке круглой трубы для локального коэффициента при вынужденной конвекции:

$$Nu_F = 5,364 \left[1 + \left(\frac{Gz}{55} \right)^{10/9} \right]^{3/10} - 1. \quad (20)$$

В [20] получена эмпирическая корреляция данных для полностью развитой чистой естественной конвекции воздуха в горизонтальной трубе. Это выражение, обобщенное в [18]

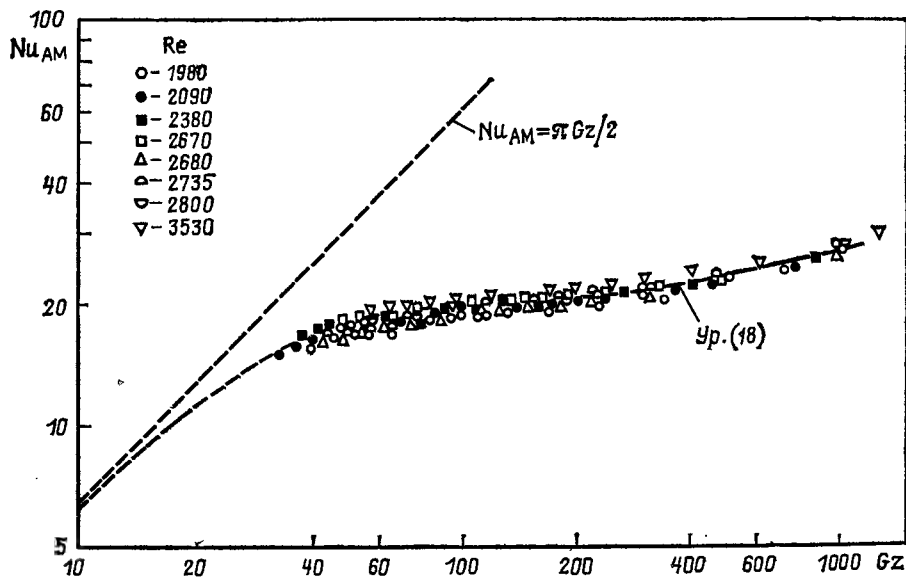


Рис. 12. Сравнение результатов, полученных по (18), записанных относительно Nu_{AM} , с экспериментальными данными для полностью развитого ламинарного течения в изотермической горизонтальной трубе [17]

для произвольной жидкости, записывается следующим образом:

$$Nu_N = 0,847 (Ra^*)^{0,177} \left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{0,315}, \quad (21)$$

где $Ra^* = Ra Nu_N = g \rho^2 c_p \zeta \dot{Q}^4 / (\eta \lambda^2)$.

Уравнение (21) можно записать с помощью числа Ra в виде

$$Nu_N = 0,817 Ra^{0,215} \left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-0,382}. \quad (22)$$

Результаты, полученные из (13), (20) и (21), сопоставлены с экспериментальными данными [21] для воды на рис. 13. Соответствие является вполне удовлетворительным. Это корреляционное уравнение и эти данные находят в хорошем соответствии с результатами теоретических расчетов [22, 23]. В [20] предложено также следующее модифицированное выражение для случая конечной теплопроводности стенки:

$$Nu_F = \frac{0,378 Ra^{0,28} Pr^{0,05}}{f_{0,12}}, \quad (23)$$

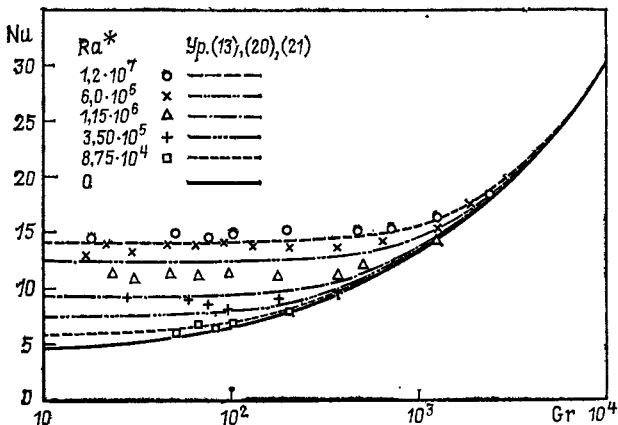


Рис. 13. Сравнение результатов, полученных по (13) с использованием уравнений (20) и (21), с экспериментальными данными (точки) для развивающегося ламинарного течения воды в однородно обогреваемой горизонтальной трубе.

где

$$f = \frac{h D^2}{\delta \lambda_w}; \quad (24)$$

δ — толщина стенки трубы; λ_w — коэффициент теплопроводности материала стенки, Вт/(м·К). Физические свойства в [20] рекомендуется рассчитывать при $(T_w + T)/2$, где T_w — средняя по окружности температура стенки. Проверка применимости соотношения (23) для стеклянной и металлической труб представлена на рис. 14.

Для случая полностью развитого теплообмена в трубе с конечной теплопроводностью стенки в [24] предложено корреляционное уравнение

$$Nu = \left\{ (4,36)^2 + \left[0,055 \left(\frac{Ra Pr^{0,35}}{f^{1/4}} \right)^{0,4} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (25)$$

в котором физические свойства рассчитываются при температуре $(T_w + T)/2$. Различие между показателями степени 6 и 2 в уравнениях (13) и (25) является результатом разных показателей степени при числе Ra . Степень 0,4 в соотношении (25) выбрана с целью описать данные, в том числе более высокие числа Ra и по возможности в турбулентном режиме. На рис. 15 результаты, полученные из (25), сравниваются с экспериментальными данными [24].

В [25] проведены теоретические расчеты ламинарного течения во входном участке однородно обогреваемых прямо-

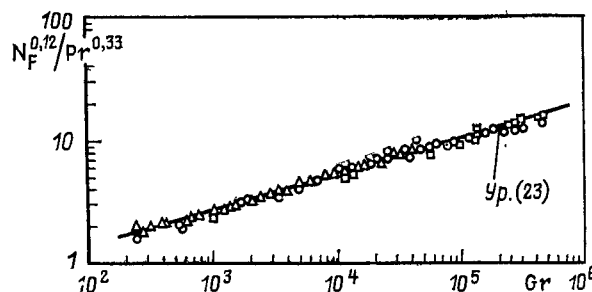


Рис. 14. Сравнение результатов, полученных по (23), с экспериментальными данными (точки) для полностью развитой ламинарной конвекции в однородно обогреваемой горизонтальной трубе: со значительной периферической теплопроводностью стенок [20]; $\circ$ — стеклянная и металлическая трубы, вода; Δ — стеклянная труба, этиленгликоль; $\square$ — металлическая труба, вода

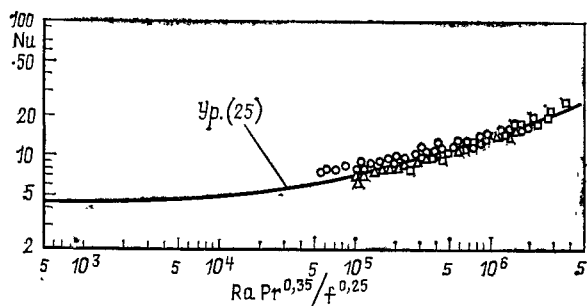


Рис. 15. Сравнение результатов, полученных по (25), с экспериментальными данными (точки) для полностью развитой ламинарной конвекции в однородно обогреваемой горизонтальной трубе с существенной проводимостью стенок [24]:

○ — стеклянная и металлическая трубы, вода; Δ — стеклянная труба, этиленгликоль; □ — металлическая труба, этиленгликоль

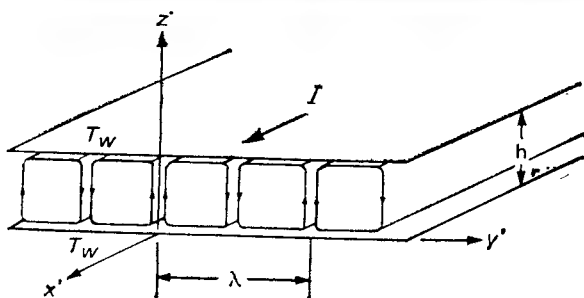


Рис. 16. Циркуляция для полностью развитой ламинарной конвекции в однородно обогреваемом горизонтальном прямоугольном канале [25]. Направление основного течения указано стрелкой

угольных каналов. В противоположность круглой трубе в этих каналах вторичное движение состоит из серии вихрей почти квадратного поперечного сечения, как показано на схеме и фотографии (рис. 16). Полученные в [25] расчетные числа Нуссельта имеют ту же качественную зависимость от Gz и Ra , что и для круглой трубы, но с дополнительным параметром в виде отношения сторон. Эти результаты еще не представлены с помощью корреляционного уравнения и не подтверждены экспериментально.

2.5.11. Интенсификация теплообмена¹

А. Е. Берглс

А. Введение. Желание экономить энергию и материалы, а также учет экономических обстоятельств привели к усилиям, направленным на разработку более эффективного теплообменного оборудования. Обычно задачей термодинамического анализа является уменьшение размеров теплообменника, требуемого для обеспечения заданного теплового режима, увеличение мощности существующего теплообменника, снижение разности температур обменивающихся теплотой потоков или уменьшение мощности, затрачиваемой на прокачку теплоносителей. Улучшение харак-

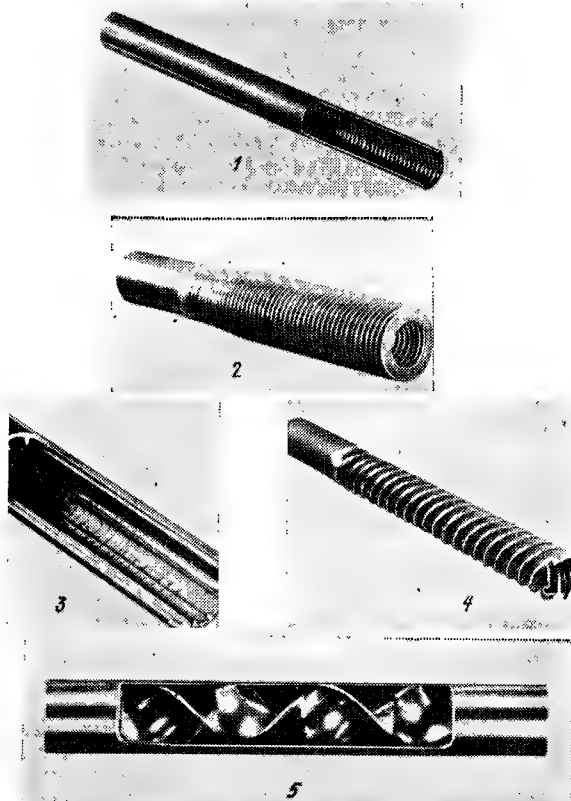


Рис. 1. Трубы с развитыми поверхностями для интенсификации теплообмена в однофазной среде:

1 — внутренние винтовые повторяющиеся ребра; 2 — цельноделанные внешние ребра; 3 — цельноделанные внутренние ребра; 4 — спирально гофрированная труба; 5 — вставка для статического перемешивания

теристик теплообмена называют улучшением, повышением или интенсификацией теплоотдачи. Вообще говоря, все это означает увеличение коэффициента теплоотдачи. Попытки повысить обычные коэффициенты теплоотдачи регистрировались в течение более 100 лет, и в этой области накоплена большая информация. В работе [1] цитируются 1967 технических публикаций, включая патенты и промышленные издания.

Методы интенсификации можно подразделить на пассивные, которые не требуют прямых затрат энергии (рис. 1), и активные, которые требуют затрат энергии извне. Эффективность обоих способов сильно зависит от характера теплообмена, который может изменяться от свободно-конвективного в однофазной среде до дисперсно-пленочного режима кипения. Ниже приведено краткое описание этих методов.

Пассивные методы. 1. Специальная обработка поверхности теплообмена состоит в мелкомасштабном чередовании участков поверхности с чистой обработкой или с покрытиями (непрерывными или прерывными). Такие поверхности используются для кипения и конденсации; высота шероховатости на них меньше, чем высота, обеспечивающая воздействие на перенос теплоты в однофазной среде.

2. Используемые шероховатые поверхности характеризуются различными конфигурациями от случайной шероховатости типа песочной до дискретных выступов. Конфигурация обычно выбирается так, чтобы разрушить вязкий подслон в большей степени, чем увеличить площадь поверхности, на которой происходит теплоотдача. Приме-

¹ Пер. с англ. Е. Б. Эйгенсон.

нене шероховатых поверхностей нацелено главным образом на однофазные течения.

3. В теплообменниках широко применяются развитые поверхности. В этом обзоре основное внимание обращено на новые типы развитых поверхностей, таких, как цельные трубопроводы с внутренним оребрением, и на увеличение коэффициентов теплоотдачи на профилированных или перфорированных поверхностях.

4. Устройства, интенсифицирующие теплообмен за счет турбулизации пограничного слоя, помещаются внутрь канала, по которому течет жидкость, таким образом, чтобы способствовать переносу энергии у нагреваемой поверхности. Они используются при вынужденной конвекции.

5. Устройства, закручивающие поток, включают в себя ряд геометрических устройств или вставок в трубы, которые вызывают вращение потока при вынужденном течении и (или) вторичные течения: змеевики, входные турбулизаторы в виде скрученных лент и изогнутые вставки, размещаемые в ядре потока вдоль оси.

6. Устройства, интенсифицирующие теплообмен за счет эффектов использования поверхностного натяжения, состоят из фитилей или поверхностей, покрытых капиллярами для управления потоком жидкости при кипении и конденсации.

7. Добавки в жидкости включают твердые частицы и газовые пузырьки в однофазных потоках и жидкие добавки для кипящих систем.

8. Добавки в газовые потоки представляют собой капли или твердые частицы, которые образуют разбавленные (суспензии газ-твердая фаза) или плотные (псевдоожидженные слои) смеси.

Активные методы. 1. Интенсификация теплообмена с помощью механических средств включает в себя перемешивание жидкости при помощи механических устройств или вращения поверхности. Очистка поверхности, широко используемая в промышленных химических процессах для порционной обработки вязких жидкостей, применяется и при течении таких разных текучих сред, как высоковязкие пластики и воздух. Показано, что очистка теплообменника вращающимися трубами приносит ощутимый коммерческий эффект.

2. Вибрация поверхности с низкой или высокой частотой используется главным образом для улучшения однофазного переноса теплоты.

3. Вибрация жидкости — более практичный способ интенсификации теплообмена вследствие того, что масса больше, чем теплообменников очень велика. Частота вибраций лежит в интервале от 1 Гц до ультразвука в 10^6 Гц. Этот способ применим прежде всего к однофазным жидкостям.

4. Электростатические поля применяются при теплообмене диэлектрических жидкостей. Обычно электрические поля используются для того, чтобы вызывать большее перемешивание массы жидкости вблизи поверхности теплообмена.

5. Использование вдува осуществляется подводом газа к текущей жидкости через пористую поверхность теплообмена или впрыскиванием сходящей жидкости в направлении, противоположном основному потоку в секции теплообмена. Поверхностная дегазация жидкости может вызвать интенсификацию теплообмена, сходную с процессом вдува газа. Интерес в данном случае представляют только однофазные потоки.

6. Процесс интенсификации теплообмена за счет отсоса основан на удалении пара при пузырьковом или пленочном кипении или на удалении жидкости через пористую поверхность теплообмена при однофазном течении.

Для или более перечисленных выше методов можно применять одновременно для большей интенсификации, чем при использовании каждого метода отдельно. Такие процессы называют комбинированной интенсификацией.

Следует подчеркнуть, что одной из причин изучения

процессов интенсификации теплообмена является необходимость оценивать влияние условий работы теплообменного оборудования на теплообмен. Некоторые примеры из практики говорят о том, что на интенсивность теплообмена влияют шероховатость, образовавшаяся при обычном промышленном изготовлении, дегазация жидкости при высоком содержании газа, вибрация поверхности, вызываемая вращением или колебаниями потока, вибрация жидкости, происходящая в результате пульсаций при перекачке, электрические поля, присутствующие в электрическом оборудовании. Широкий обзор методов интенсификации теплообмена представлен в [2—4].

В. Свободная конвекция. Пассивные методы. За исключением широко распространенного способа, основанного на применении развитых поверхностей, пассивные методы мало что могут дать для интенсификации теплообмена при свободной конвекции. Это связано с тем, что скорости в таких процессах обычно слишком низки, чтобы вызывать отрыв потока или вторичные течения. Выпущенный недавно обзор [3] по ограниченному числу данных для свободной конвекции воздуха, воды и масла, полученных на поверхностях, выполненных промышленными методами, или на поверхностях с искусственно нанесенной шероховатостью, приводит к выводу, что увеличение коэффициентов теплоотдачи вплоть до 100% можно получить только для воздуха, но для жидкостей рост коэффициентов теплоотдачи очень невелик.

Методы конструирования единичных ребер и цепочек ребер хорошо известны (см. § 2.5.3), однако мало внимания уделялось прерывистым развитым поверхностям. Ожидается, что повторное нарастание тепловых пограничных слоев увеличивает коэффициенты теплоотдачи больше, чем требуется для компенсации площади, теряемой при такой организации поверхности. Эффективность этого метода показана на примере использования ребер из провололочных контуров в нагревателях горячей воды или в конвекторах [6]. Эта проблема также представляет интерес для охлаждения электронных приборов, где теплоотдающие поверхности часто имеют вид прерывистых ребер, и для естественного охлаждения оребренных пучков труб за счет тяги, порождаемой потерями мощности вентилятора. Значительный интерес недавно стали представлять характеристики теплообмена в цельнотянутых трубах с оребрением для использования в нагревателях воды и накопителях солнечной энергии. Как показано при исследовании панельных конвекторов, уравнения, описывающие теплообмен воздуха на больших ребрах, в данных случаях неприменимы. В качестве отправной точки при конструировании можно рекомендовать корреляции [7] для единичной трубы

$$Nu_0 = 0,6 (Ra_0)^{0,23} \text{ для } Ra_0 < 2 \cdot 10^7; \quad (1a)$$

$$Nu_0 = 0,155 (Ra_0)^{1/3} \text{ для } Ra_0 > 2 \cdot 10^7. \quad (1б)$$

При использовании этих уравнений для змеевиков и других вертикальных устройств, расположенных в накопительных резервуарах, следует проявлять осторожность. Для характеристики конкретных змеевиков следует обращаться к промышленным данным. По-видимому, единственным примером полезности использования добавок жидкости является нижняя часть пузырьков пара у основания нагреваемой поверхности. В [8] наблюдалось увеличение средних коэффициентов теплоотдачи когда воздух вдували в воду или этиленгликоль. Интенсификация связана главным образом с циркуляцией, вызываемой подъемом пузырей.

Активные методы. Интенсификация теплообмена в результате использования механических средств является стандартным методом в химической и пищевой промышленности, где применяются вязкие жидкости. Данные по этим процессам и методы конструирования описаны в разд. 3.14. Известны некоторые данные для нагреваемых цилиндров, вращающихся вокруг своей оси в объеме неподвижной

жидкости. Для больших вращательных чисел Рейнольдса, т. е. в случае, когда преобладает процесс вращения, в [9] предложено описывать данные по теплообмену некоторых жидкостей с помощью следующего уравнения:

$$Nu = 0,12 \left(\frac{d^2 \omega}{2\nu} \right)^{2/3} Pr^{1/3}. \quad (2)$$

Вибрацию поверхностей широко изучали в лабораторных условиях. Преобладали исследования горизонтальных цилиндров, которые вибрировали как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Коэффициенты теплоотдачи можно увеличить при этом в 10 раз для колебаний как с низкой частотой (высокой амплитудой), так и с высокой частотой (низкой амплитудой). Хотя улучшение теплоотдачи может быть очень значительным, необходимо признать, что естественная конвекция является малоэффективным видом теплообмена. Так как при максимальной интенсификации средняя скорость поверхности по всему цилиндру меньше 1 м/с, более практично организовать стационарное вынужденное течение. Конструкторы обеспокоены также тем, что такие интенсивные вибрации могут привести к разрушению оборудования.

В некоторых работах изучалось воздействие вибраций целой камеры, содержащей нагреваемую секцию, погруженную в жидкость. В [10] наблюдалось улучшение коэффициентов теплоотдачи при свободной конвекции около обогреваемой боковой стенки, достигающее 38%, в [11] зарегистрировано улучшение теплоотдачи до 200% на проволоке малого диаметра.

Так как в промышленном оборудовании обычно трудно применять метод вибрации поверхностей, предлагается альтернативный метод с использованием вибрации жидкости вблизи нагреваемой поверхности. Генераторы, возбуждающие вибрации, характеризуются широким спектром — от прерывателей потока до пьезоэлектрических преобразователей и, таким образом, покрывают интервал частот от пульсаций в 1 Гц до ультразвука в 10^6 Гц. Довольно много исследований посвящено изучению воздействий акустических колебаний на теплоотдачу от горизонтальных цилиндров к газам. Увеличение средних коэффициентов теплоотдачи наблюдалось только при интенсивности колебаний свыше 140 дБ, которая намного выше интенсивности, безопасной для человеческого слуха. Обычно максимальное увеличение теплоотдачи достигало 100—200%. При наличии подходящих конструкций ультразвукового преобразователя возможно на несколько сот процентов улучшить теплоотдачу от простых нагревателей, погруженных в жидкости. Обычно преобладающим механизмом интенсификации теплообмена в данном случае становится кавитация. В качестве примера можно привести работу [12], в которой изучалось влияние ультразвуковых вибраций на теплоотдачу к воде. Описанное максимальное увеличение коэффициента теплоотдачи составляло 500%, однако в дегазированной воде было отмечено очень маленькое улучшение процесса. В общем же при конструировании систем, передающих вибрации на большие поверхности, возникают значительные трудности.

Довольно много работ, посвященных вибрациям жидкости и поверхностей, обсуждается в [2—4]. В нескольких работах, опубликованных в последние годы, отмечаются практические ограничения в применении этого метода. Оказывается, что нет такого промышленного оборудования, в котором вибрации используются в качестве метода интенсификации теплообмена. Для большинства систем более удобным и экономичным способом достижения желаемого улучшения коэффициентов теплоотдачи оказывается организация вынужденного стационарного течения.

Для увеличения коэффициентов теплоотдачи при свободной конвекции можно использовать электрические поля. Конфигурация поля можно задавать при помощи нагре-

ваемой проволоки, помещенной в концентрическую трубу, на стенки которой подается высокое напряжение относительно проволоки, или тонкого проволочного электрода с плоской пластиной. Силы диэлектрорефаза или электрофореза (особенно при ионизации газов) вызывают повышенное перемешивание объема в окрестности поверхности теплообмена. В [2] дана ссылка на исследования, в которых коэффициенты теплоотдачи увеличивались в 40 раз. В [13] приводится хороший пример значительного локального увеличения теплоотдачи.

В последнее время большое внимание уделяют вопросам применения охлаждения коронным разрядом к практическим задачам. В [14] предложено охлаждение режущих инструментов с помощью точечных электродов; в [15] используются параллельные проволочные электроды для улучшения отвода теплоты от стандартных горизонтальных оребренных труб. При достаточной электрической мощности коэффициенты теплоотдачи можно увеличить на несколько сот процентов. Однако оказывается, что эквивалентный эффект можно получить при более низких затратах и без опасности попасть под напряжение 10 000—100 000 В просто путем организации вынужденной конвекции с помощью нагнетателя или вентилятора.

Вдув газа в жидкость через пористую нагреваемую пластину подобно пузырьковому кипению можно также рассматривать как метод интенсификации теплообмена. Хотя при этом коэффициенты теплоотдачи можно увеличить на несколько сот процентов [16], оказывается, что практическое применение вдува довольно ограничено из-за трудностей подачи и удаления газа.

С. Вынужденная конвекция. Пассивные методы. Данное обсуждение ограничено процессами интенсификации теплообмена внутри труб, которые имеют в основном круглое поперечное сечение. Соответствующая информация по внешним течениям, направленным перпендикулярно или параллельно трубам, приводится в § 2.5.3 и 2.8.4.

Для интенсификации теплообмена при вынужденной конвекции широко используются шероховатые поверхности. Шероховатость на поверхности можно создать традиционным способом промышленной обработки, а именно обработкой, формовкой, литьем, сваркой на станках. Различные вставки также могут создавать выпуклости на поверхности. Не удивительно, что из-за огромного числа возможных геометрических форм шероховатости, описанных более чем в 200 работах [1], для них не существует унифицированных технологий.

Данные по ламинарному течению в трубах представлены работами, в которых рассматриваются витые трубы [17, 18] и поперечные ребра в кольцевом зазоре [19]. Наблюдалось увеличение коэффициентов теплоотдачи до 100%. Интенсификация широко используется в плоских теплообменниках. В [20] описано исследование интенсификации процессов теплообмена при номинально ламинарном течении воздуха в плоскопараллельных каналах большого относительного удлинения при помощи нанесения на поверхность мелкой ряби и выступов. В большинстве плоских теплообменников используются рифленые поверхности как для улучшения структуры течения, так и для интенсификации теплообмена. Обычно считается, что характеристики теплопереноса и перепада давления на промышленных гофрированных поверхностях, используемых в плоских теплообменниках, вполне сходны.

Известно, что аналогия между теплообменом и трением для шероховатых поверхностей при турбулентном течении зависит от типа шероховатости. Решение задачи для эквивалентной песочной шероховатости приведено в [21]. Недавно появившаяся работа рассматривает поверхности, которые можно производить промышленным способом. В [22] коэффициенты теплоотдачи для труб с шероховатостью в виде квадратных повторяющихся ребер обобщены на основе корреляций для коэффициента трения с использованием функции подобия Никурадзе U_+^+ , числа Рейноль-

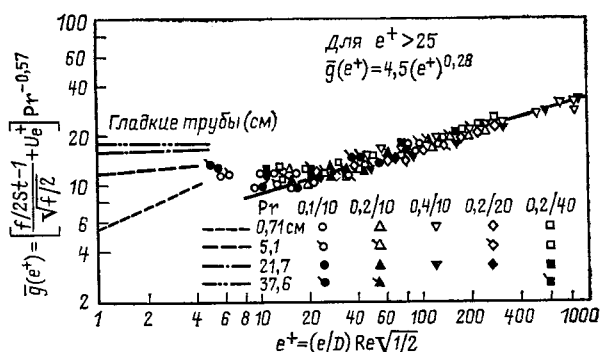


Рис. 2. Корреляция данных по теплоотдаче для труб с внутренним повторяющимся оребрением [22]

дса, рассчитанного по высоте шероховатости e^+ и параметра p/e . Проводя аналогию между переносом теплоты и кинематическими движениями, представим числа Стантона в виде

$$St = \frac{f/2}{1 + (f/2)^{0.5} [\bar{g}(e^+) F(Pr) - U_e^+(e^+, p/e)]}. \quad (3)$$

Как показано на рис. 2, таким образом достигнута прекрасная корреляция их данных. Уравнение (3) также хорошо описывает и данные по воздуху других авторов, даже для других профилей ребер. Данные по турбулентным течениям в трубах с многими типами шероховатости представлены в [24]; увеличение коэффициентов теплоотдачи (отнесенные к основной площади поверхности) достигает 250%.

Развитие поверхностей (в том, что касается большинства применений) относится к старой технологии. Практический интерес вызывает увеличение коэффициентов теплоотдачи на развитых поверхностях. В компактных типа пластинчатых теплообменниках с плавниковыми трубами или трубчатых теплообменниках используется несколько методов интенсификации теплообмена: ленточные ребра, установленные со сдвигом относительно друг друга, ребра в виде жалюзи, перфорированные или гофрированные ребра [25]. Коэффициенты теплоотдачи при этом увеличиваются на несколько сот процентов по сравнению с гладкими трубами; однако перепад давлений также существенно увеличивается, могут возникнуть проблемы с вибрацией и шумом [26]. Для более детального ознакомления с состоянием дел при теплоотдаче с воздушной (внешней) стороны в оребренных трубчатых теплообменниках следует обратиться к обзору [74].

Круглые трубы с внутренним оребрением выполняются из алюминия или меди (медных сплавов). Для ламинарного потока существуют следующие корреляции [27] для труб со спиральным оребрением

$$\frac{Nu_e}{Pr^{1/3} (d_e/L)^{1/3} (\eta_b/\eta_w)^{0.14} \Phi_e} = 19.2 \left(\frac{b}{p} \right)^{0.5} Re_e^{0.28}, \quad (4a)$$

где

$$\Phi_e = \frac{2.25 (1 + 0.01 Gr_e^{1/3})}{\lg Re_e}; \quad (4b)$$

трубы с прямыми ребрами

$$\frac{Nu_e}{Pr^{1/3} (d_e/L)^{1/3} (\eta_b/\eta_w)^{0.14} \Phi_e} = 2.43 \left(\frac{1}{n} \right)^{0.5} Re_e^{0.48}; \quad (5)$$

изотермические коэффициенты трения для всех труб

$$f_e = 16.4 (d_e/L)^{1/4} / Re_e. \quad (6)$$

Эти корреляции основаны на данных для масел, текущих в горизонтальных трубах, имеющих приблизительно оди-

наковую температуру (обогрев паром). Другие данные, полученные для воды и этиленгликоля в трубах, обогреваемых как паром, так и электрическим током, находятся приблизительно в согласии с корреляциями [28].

В нескольких работах была проведена оценка термодинамических характеристик труб с внутренним оребрением (все трубы промышленного изготовления) при турбулентном режиме течения. В самой последней из этих работ [29] рекомендуются следующие уравнения:

$$Nu_e = 0.023 Pr^{0.4} Re_e^{0.8} \left(\frac{A_{fa}}{A_{fc}} \right)^{0.1} \left(\frac{A_n}{A_a} \right)^{0.5} (\sec \psi)^3; \quad (7)$$

$$f = 0.046 Re_e^{-0.2} \left(\frac{A_{fa}}{A_{fn}} \right)^{0.5} (\sec \psi)^{0.75}. \quad (8)$$

Отмечено, что при применении этих уравнений необходимо включать в них поправки на неэффективность ребер. Эти корреляции дают надежное описание имеющихся данных для воздуха, воды и смеси этиленгликоля с водой; однако имеются значительные различия между данными разных авторов, полученные для одинаковых, по существу, труб [4].

В [30] проведен численный анализ турбулентного течения в трубах с идеализированными прямыми ребрами. Необходимые для модели турбулентности константы получены из экспериментальных данных по воздуху. Поскольку ожидается дальнейшее усовершенствование численных методов, можно будет рассчитывать теплообмен для более широкого класса геометрий и жидкостей без обращения к большим экспериментальным программам.

Трубы с внутренним оребрением можно уложить стопами так, чтобы образовались многочисленные внутренние протоки с маленьким гидравлическим диаметром. В [31] демонстрируется большое увеличение коэффициентов теплоотдачи (отнесенных к внешней номинальной площади трубы), которое можно получить в этих трубах при течении воздуха.

Многие оригинальные конфигурации поверхности получаются путем деформации основной трубы. Витые трубы, гофрированные трубы, трубы спиральные или со спиральным рифлением имеют многократно начинающиеся спиральные рифления вдоль длины трубы. В [32] проведено систематическое исследование характеристик одиночной трубы для применяемых в промышленности типов труб, используемых для работы в конденсаторах пара (конденсирующий пар снаружи, вода внутри). Отмечено увеличение номинального внутреннего коэффициента теплоотдачи (отнесенного к диаметру гладкой трубы того же самого максимального внутреннего диаметра) до 400%; однако перепады давления на водной стороне возросли приблизительно в 20 раз.

Устройства, интенсифицирующие теплообмен за счет турбулизации пограничного слоя, обычно выполняются

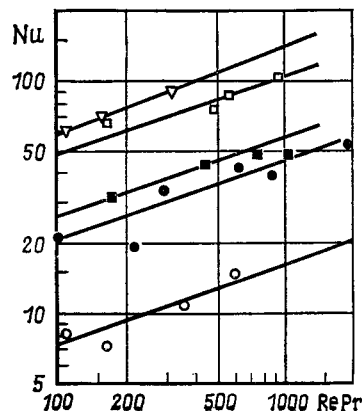


Рис. 3. Данные по теплоотдаче для различных вставок статического перемешивания при ламинарном режиме течения [33]. Светлые кружочки — труба без вставок

в виде вставок с элементами, приспособленными для улучшения поперечного перемешивания (статические смесители). Они используются прежде всего для вязких жидкостей, чтобы способствовать как тепло-, так и массопереносу. На рис. 3 показан типичный уровень интенсификации, который может быть достигнут при использовании статических смесителей [33]. Не существует никаких широко используемых корреляционных зависимостей вследствие множества различных геометрических форм, применяемых для интенсификации, а также сильного влияния свойств жидкости и условий нагрева. В общем, чем больше коэффициент теплоотдачи, тем больше перепад давления; увеличение гидравлического сопротивления обычно больше увеличения теплоотдачи. Например, применение стандартного смесителя *SMX* дает семикратное увеличение теплоотдачи и почти семидесятикратное увеличение перепада давления. Дополнительные данные для смесителей Kenics приведены в [28, 34]. Сходные вставки или набивки использовались для турбулентного течения; однако эти приспособления рекомендуются только для коротких секций с высокими тепловыми потоками, так как потери давления в них слишком высоки [35].

Коэффициенты теплоотдачи могут быть существенно выше в трубах, свернутых спиралью, чем в прямых трубах, из-за вторичных течений, порождаемых искривлениями трубы. Корреляция [36] рекомендуется для расчета осредненных по периметру чисел Нуссельта для полностью развитого ламинарного течения в трубах с однородной температурой стенки

$$Nu = 3,65 + 0,08 \left[1 + 0,08 \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,9} \right] (Re)^\Phi (Pr)^{1/3}, \quad (9a)$$

где

$$\Phi = 0,5 + 0,2903 \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,914}. \quad (9b)$$

Недавно полученные корреляции [37] можно использовать для однородно обогреваемых труб

$$Nu = \left[4,36 + 2,84 \left(\frac{Gz}{Re^2} \right)^{3,94} \right] (1 + 0,0276 De^{0,75} Pr^{0,197}) \times \\ \times \left[1 + 0,9348 \left(\frac{Gr}{De^2} \right)^{2,78} \exp \left(-1,33 \frac{Gr}{De^2} \right) \right] \left(\frac{\eta_b}{\eta_w} \right)^{0,14}. \quad (10)$$

Заметим, что, поскольку в этой работе обнаружено влияние свободной конвекции на теплоотдачу в вертикальных трубах, закрученных вокруг оси, такой же множитель следовало бы учесть и в уравнении (9a).

Корреляция для изотермического коэффициента трения имеет вид [36]

$$f = \left[1 + 0,14 \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,97} (Re)^\gamma \right] \left(\frac{16}{Re} \right), \quad (11a)$$

где

$$\gamma = 1 - 0,644 \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,312}. \quad (11b)$$

Корреляции для теплоотдачи и изотермического коэффициента трения в переходном и турбулентном режимах течения представлены ниже [36]:

для $Re_{cr} < Re < 2,2 \cdot 10^4$

$$Nu = 0,023 \left[1 + 14,8 \left(1 + \frac{d}{d_c} \right) \right] \left(\frac{d}{d_c} \right)^{1/3} (Re)^\chi (Pr)^{1/3}, \quad (12a)$$

где

$$\chi = 0,8 - 0,22 \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,1}; \quad (12b)$$

для $2 \cdot 10^4 < Re < 1,5 \cdot 10^5$

$$Nu = 0,023 \left[1 + 3,6 \left(1 + \frac{d}{d_c} \right) \right] \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,8} (Re)^{0,8} (Pr)^{1/3}; \quad (13)$$

для $Re_{cr} < Re < 2,2 \cdot 10^4$

$$f = [1 + 2,88 \cdot 10^4 (Re)^{-1}] \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,62} [0,0791 (Re)^{-0,25}]; \quad (14)$$

для $2 \cdot 10^4 < Re < 1,5 \cdot 10^5$

$$f = \left[1 + 0,0823 \left(1 + \frac{d}{d_c} \right) \right] \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,53} \times \\ \times (Re)^{0,25} [0,0791 (Re)^{-0,25}]. \quad (15)$$

В приведенных выше формулах число Рейнольдса для перехода задается формулой Ито [38]

$$Re_{cr} = 2 \cdot 10^4 \left(\frac{d}{d_c} \right)^{0,32}. \quad (16)$$

Вставки в виде витых лент широко используются для интенсификации процесса теплообмена при ламинарном и турбулентном режимах течения. Для полностью развитого ламинарного течения в однородно обогреваемой трубе рекомендуется следующая корреляция [39]:

$$Nu = 5,172 [1 + 5,484 \cdot 10^{-3} (Pr)^{0,7} (Re)(y)^{-1,25}]^{0,5}. \quad (17)$$

Заметим, что корреляция установлена для ленты в отсутствие нагрева. По-видимому, эта корреляция неприменима к нагреванию или охлаждению при постоянной температуре стенки [28]. При $Re < 100$ коэффициенты изотермического трения можно аппроксимировать выражением для полукруглой трубы

$$f = 42,2 (Re)^{-1}. \quad (18)$$

Теплоотдача в трубах при турбулентном режиме течения с вставками в виде витой ленты описывается выражением [40]

$$Nu_e = F \cdot 0,023 \left[1 + \left(\frac{\pi}{2y} \right)^2 \right]^{0,4} (Re_e)^{0,8} (Pr)^{0,4} + 0,193 \times \\ \times \left[(Re_e)^2 (y)^{-1} \frac{d_e}{d} \frac{\Delta p}{\rho} Pr \right]^{1/3}. \quad (19)$$

Множитель F , учитывающий ребра, который является отношением полного потока теплоты к потоку теплоты, передаваемой только стенками, можно оценить из расчетов теплопроводности. Изотермические коэффициенты трения задаются следующим выражением [40]:

$$f_c = 0,046 (y)^{-0,046} (Re_e)^{-0,2}. \quad (20)$$

В случае, когда в жидкости добавлялись пузырьки газа или твердые частицы, наблюдалось умеренное улучшение теплообмена. В [41] найдено, что теплоотдача увеличивается до 50% при вдуве пузырьков азота в турбулентный поток воды. Чтобы определить механизм улучшения теплообмена при введении твердых частиц в ламинарные потоки, авторы [42] изучали суспензии полистироловых шариков в масле. Наблюдалось максимальное увеличение коэффициентов теплоотдачи до 40%.

Теплоотдачу с газовой стороны можно улучшить добавлением небольшой объемной доли твердых частиц. Частицы несутся вместе с потоком и отделяются от газа для повторного использования при незамкнутой системе или постепенно циркулируют при замкнутой системе. Увеличение коэффициентов теплоотдачи чистого газа почти в 4 раза, показанное на рис. 4, происходит, по-видимому, в результате уменьшения толщины вязкого подслоя и более высоких коэффициентов теплопроводности в этом слое. Информация по конструированию и перечень широкого круга

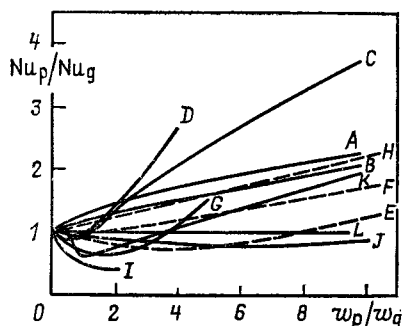


Рис. 4. Данные по теплоотдаче для суспензий газ — твердое тело [43].

Кривая	Re	Материал	Размеры	Газ	d/D
A	18,0	Стекло	60	Воздух	0,011
B	18,0	»	120	»	0,0027
C	19,0	Песок	230	»	0,006
D	19,0	»	80	»	0,0021
E	15,0	Графит	65	»	0,0085
F	53,0	Цинк	40	»	0,0005
G	53,0	»	40	»	0,0008
H	—	Графит	—	—	—
I	53,0	Цинк	40	»	0,0016
J	15,0	Al ₂ O ₃	65	»	0,0085
K	13,5	Стекло	30	»	0,0016
L	13,5	»	200	»	0,0011

работ по этому вопросу приведены в [44]. В настоящее время, по-видимому, не рассматривается никаких практических применений переноса теплоты газовой средой, содержащей твердые частицы в малом количестве.

Псевдооживленные слои рассматриваются для многих промышленных целей. Коэффициенты теплоотдачи к трубам, находящимся внутри слоя, можно увеличить почти в 20 раз по сравнению с коэффициентами теплоотдачи от чистого газа при той же скорости потока. Теплообмен в псевдооживленных слоях рассматривается в § 2.5.5.

Когда в газовый поток добавляют капли жидкости, вследствие заметного нагрева двухфазной смеси, испарения жидкости и разрушения пограничного слоя возрастает перенос теплоты. В [45] показано, что, если на нагреваемой поверхности образуется непрерывная пленка жидкости, коэффициенты теплоотдачи могут вырасти в 30 раз. Более практичный способ интенсификации теплообмена предложен в [46], где применяется охлаждение разбрызгиванием в центральной зоне компактного теплообменника. Увеличение коэффициентов теплоотдачи максимально на 40% связано с образованием жидкой пленки и ошутимым ее нагревом. Вообще же большие требуемые объемы жидкостей приводят к ограничениям в практическом применении этого метода.

Активные методы. Механический метод интенсификации теплообмена путем удаления прогретых слоев жидкости с поверхности может увеличить теплоотдачу при вынужденной конвекции. К сожалению, необходимые для этого способа приспособления не особенно совместимы с большинством теплообменников. Недавно выпущена работа [47], в которой описана интенсификация теплообмена при течении воздуха с помощью такого метода: для ламинарного режима течения вдоль плоской пластины получено десятикратное увеличение коэффициентов теплоотдачи.

Другой разновидностью этого метода являются вращающиеся поверхности. Умеренное увеличение коэффициентов теплоотдачи описано для ламинарного потока в

прямых трубах, вращающихся вокруг собственной оси [42]; в прямых трубах, вращающихся вокруг параллельной оси [49]; во вращающихся кольцевых трубах [50] и во вращающейся криволинейной кольцевой трубе [51]. Увеличение коэффициентов теплоотдачи при турбулентном режиме течения меньше; например, в [50] для ламинарного режима течения зарегистрировано максимальное увеличение на 350%, а для турбулентного режима течения максимальное увеличение достигало 25%. Вообще, существуют примеры в которых интенсификация теплообмена является следствием самих процессов: охлаждение обмоток вращающейся электрической машины, охлаждение лопаток ротора газовой турбины и т. д.

Показано, что вибрация поверхности улучшает теплообмен как при ламинарном, так и при турбулентном режимах течения жидкостей в трубах [2]. Наибольшее увеличение коэффициентов теплоотдачи (до 200%) наблюдалось при ламинарном или переходном режиме течения в трубчатом теплообменнике с концентрическими трубами, внутренняя труба которого вибрировала в поперечном направлении и в прямоугольном канале с гибкой вибрирующей стороной. Сложность оборудования и относительно большие затраты энергии, по-видимому, исключают этот метод из практического применения.

Вибрация текучих сред широко изучалась как для воздуха (громкоговорители и сирены), так и для жидкостей (прерыватели течения, пульсаторы и ультразвуковые преобразователи) [2]. Результаты, полученные для газовых сред, не обнадеживают, так как требуются интенсивности вибраций выше 120 дБ, а влияющие воздействия проявляется главным образом в том, что полностью развитое турбулентное течение начинается при переходных числах Рейнольдса. Важность экспериментов [52] заключается в том, что они показали ограниченность этого метода. Коэффициенты теплоотдачи с газовой стороны даже при высокой интенсивности звуковых колебаний для центральной части компактных теплообменников увеличиваются только на 30%.

На поток жидкости с низкой скоростью относительно просто воздействовать пульсациями, и в этом случае можно получить увеличение коэффициентов теплоотдачи на несколько сот процентов [2]. Оказывается, что важным механизмом интенсификации процесса теплообмена является стимулирование турбулентности и кавитация. Применение высокочастотных вибраций связано с трудностями, при этом зарегистрировано лишь умеренное увеличение коэффициентов теплоотдачи.

Некоторые очень впечатляющие результаты в интенсификации теплообмена были отмечены при наложении электрических полей, особенно при ламинарном режиме течения [2]. Выпущенные недавно работы [53—55] показали, что при наложении на трансформаторное масло разности потенциалов в 10 кВ коэффициенты теплоотдачи увеличиваются по крайней мере на 100%. Хотя было бы желательно воспользоваться любыми электрическими полями, существующими в электрическом оборудовании, по-видимому, ввести этот метод интенсификации теплообмена в практику довольно трудно.

В [56] обнаружено, что даже при большой интенсивности электрического поля в кольцевой трубе с концентрическим внутренним электродом интенсификация исчезает, как только достигается турбулентный режим течения. При низких скоростях воздуха коронарный разряд дает маленький эффект, за исключением экспериментов, проводимых с тремя электродами, расположенными под оребренной трубкой [15]. В последнем случае отмечено увеличение коэффициентов теплоотдачи на 60%.

Процесс теплообмена в однофазной среде можно улучшить вдувом газа в жидкость через пористую нагреваемую поверхность [2]. В [57] показано, что впрыск однородной жидкости в турбулентный поток в трубе увеличивает локальные коэффициенты теплоотдачи в 5 раз. Подобный

эффект наблюдается и при установке диафрагмы; в обоих случаях воздействие на поток пропадает на расстоянии 10L/d.

Предполагается, что можно достичь значительного коэффициента теплоотдачи для ламинарного [58] и турбулентного [59] режимов течения при использовании отсоса с поверхности. Основные характеристики этих процессов подтверждены экспериментами [60]. Однако использовать отсос в промышленном оборудовании трудно.

Комбинированные методы. Медленно развивающуюся область процессов интенсификации теплообмена составляют комбинированные методы, обещающие довольно много при промышленном использовании, так как их воздействие может приводить к большему увеличению коэффициентов теплоотдачи, чем при использовании каждой из его составляющих в отдельности. Некоторые из этих методов перечислены ниже:

труба с шероховатыми стенками и вставками из витых лент [61];

шероховатый цилиндр с акустическими колебаниями [62];

труба с внутренним оребрением и вставками из витых лент [63];

оребрённые трубы в псевдооживлённых слоях [64];

трубы с внешним оребрением, подвергающиеся воздействию вибраций [65];

суспензия газ — твердые частицы в электрическом поле [66];

псевдооживлённый слой с пульсациями потока воздуха [67].

Интересно отметить, что некоторые попытки применения комбинированных методов интенсификации оказались безуспешными. Например, в [68] показано аналитически, что средние числа Нуссельта для труб в виде змеевика с внутренним оребрением ниже, чем для гладких змеевиков.

D. Рабочие оценочные критерии. Можно считать, что использование методов интенсификации теплообмена служит следующим термогидравлическим целям: уменьшению площади поверхности теплообмена; увеличению теплотеплопередающей способности; уменьшению достигаемой разности температур между потоками теплоносителей; уменьшению мощности на перекачивание. Определив основную цель, конструктор устанавливает параметры, которые фиксируются, и основные ограничения, которые необходимо выполнить. Опираясь на данные или корреляции для коэффициентов теплообмена и трения, можно рассчитать рабочие соотношения, например отношение основной площади поверхности теплообменника к площади поверхности обычного или стандартного теплообменника при постоянной мощности на перекачку. Цели конструирования и рабочие соотношения детально обсуждаются в [69—72].

Интенсификация процессов теплообмена обычно не привлекает внимания, если использование теплообменника с улучшенными характеристиками не дает выигрыша в стоимости по сравнению с использованием стандартных образцов. Дополнительными факторами, влияющими на выбор метода интенсификации, являются недостатки материалов, недостаточные возможности, безопасность и надежность теплообменника. Перспективы коммерческого развития и использования методов интенсификации теплообмена обсуждаются в [73].

2.5.12. Теплообмен в неньютоновских жидкостях¹

Р. С. Армстронг, Х. Х. Винтер

A. Введение. В данном параграфе описываются различия теплообмена в неньютоновских и ньютоновских жидкостях. Так как полимеры составляют самый большой класс

неньютоновских жидкостей, сфокусируем наше внимание на них. Кроме того, внимание сосредоточено здесь на различиях в характерных чертах процессов теплообмена в ньютоновских жидкостях и полимерах, которые можно отнести за счет различий в вязкостных свойствах этих двух классов жидкостей. Различия включают и зависимость скорости деформации сдвига, которая обычно наблюдается в неньютоновских жидкостях, и другую величину вязкости в полимерах по сравнению с вязкостью жидкости с малой молекулярной массой. К тому же ясно, что многие интересные изменения в процессах теплопереноса могут происходить вследствие «эластичного» характера жидких полимеров. Например, при течении в каналах, включающих секции с некруглым поперечным сечением, у определенных неньютоновских жидкостей проявляются характеристики вторичных течений, качественно отличные от характеристик ньютоновских жидкостей. Ясно, что это оказывает некоторое влияние на теплообмен. Однако, пока очень мало можно сказать о количественной стороне этих проявлений эластичности¹.

Кроме этих различий в процессах теплопереноса между ньютоновскими и неньютоновскими жидкостями имеются отличия и в том, что информация обычно представляет интерес при неизотермических течениях этих двух типов жидкостей. Разделим возможные расчеты на две категории: интегральные и локальные. Для ньютоновских жидкостей интегральным результатом является коэффициент теплоотдачи, который позволяет связать перепады температур с тепловыми потоками, что представляет в данном случае наибольший интерес. Такой коэффициент теплоотдачи, который используется для определения размеров теплообменного оборудования и оценки изменений среднемаховой температуры, не так полезен для неньютоновских жидкостей по двум причинам: во-первых, в задачах, в которых учитывается значительный нагрев вследствие внутреннего трения, обычных для расплавленных полимеров, коэффициент теплоотдачи нельзя определить по смыслу; во-вторых, из-за специфических физических свойств полимеров теплообмен между текущим полимером и окружающей его средой обычно не учитывается. Имеются, конечно, исключения из этого последнего утверждения, такие, как охлаждение прессов для низкотемпературной штамповки вспениваемых полимеров и реакторов полимеризации.

Для жидких полимеров основной интерес представляет обычно определение локального поля температуры. Из-за чувствительности физических свойств к температуре температурное поле может оказывать резко выраженное влияние на характер течения и, таким образом, на сам процесс. В добавление к этому многие полимеры чувствительны к температуре и деградируют при высокой температуре, допустим, при T_{deg} . Важно быть уверенным, что локальная температура никогда не превышает T_{deg} . И, наконец, релаксационные процессы в полимерах очень чувствительны к температуре, и число и расположение остаточных напряжений и деформаций в продуктах полимеризации зависят от локального изменения температуры полимера.

Кроме интереса, который представляет поле температуры в расплавленных полимерах, имеется множество важных проблем теплопереноса, которые включают фазовое превращение. Полимер вводится почти при всех процессах его обработки твердым, затем расплавленным, сформированным и, наконец, замороженным. Расчеты плавления и затвердевания, требуемые для моделирования этих процессов, могут включать большие изменения свойств, фазовые

¹ Винтер (неопубликованные данные) поставил эксперименты по нагреву расплавленного полиэтилена, текущего через змеевик. Хотя известно, что в таких трубах существуют вторичные течения, не было обнаружено никакого воздействия на радиальное распределение температур по сравнению с распределением при соответствующем нагреве в прямой трубе.

¹ Пер. с англ. Е. Б. Эйгенсон.

превращения, кристаллизацию, движущиеся границы раздела, нагрев за счет трения между твердыми поверхностями и термоупругость (напряжения, вызываемые изменением плотности при охлаждении).

Для того чтобы свободно ориентироваться в дальнейших обсуждениях, ниже приведено краткое описание типичных значений физических свойств полимеров, относящихся к задачам теплообмена. Затем перечислены важные безразмерные критерии, которые описывают качественно природу задач теплопереноса. Затем представлены характерные решения задач теплообмена соответственно с учетом и без учета нагрева вследствие внутреннего трения. Рассматриваемые задачи в большинстве своем ограничиваются течениями в каналах. В конце данного параграфа приведено описание влияния добавок небольших количеств полимеров на теплообмен в трубах или при турбулентном режиме течения.

В. Физические свойства. Наиболее важные физические свойства, которые рассмотрены ниже, — это теплопроводность и аномальная вязкость. Теплопроводность прямо входит в расчеты теплопереноса и вызывает в данном случае особый интерес вследствие того, что у полимеров она низка. Вязкость очень важна из-за своей чувствительности к температуре, которая связывает задачу течения жидкости с задачей теплопереноса. Далее рассматриваются неразбавленные расплавленные полимеры.

Теплопроводность. Расплавы полимеров подобно их твердым двойникам обычно плохо проводят теплоту. Характерные значения коэффициентов теплопроводности λ приведены в табл. 1. Отметим, что значения λ на несколько порядков ниже значений коэффициентов теплопроводности для жидкостей с низкой относительной молекулярной массой (ньютоновские жидкости). В результате таких малых величин перенос теплоты теплопроводностью в полимерах эффективен в большинстве случаев только на очень малых расстояниях. Таким образом, ограничения по скорости отвода теплоты влияют на время цикла при образовании термопластических компонентов и определяют толщину слоя в термореактивных пластиках при экзотермических реакциях.

Оказывается, что расплавленные полимеры изотропны по отношению к процессу теплопроводности, поэтому значения коэффициентов теплопроводности, приведенные в табл. 1, применяются для всех направлений. Эксперименты на образцах из деформированных твердых полимеров [1] демонстрируют более высокие значения теплопроводности в направлении, параллельном деформации, по сравнению с теплопроводностью в направлении, перпендикулярном деформации. Эти различия достаточно сильны в полимерах, способных к кристаллизации, где возможна разница на порядок величины в двух направлениях. Однако в стекловидных полимерах влияние ориентации на λ

выражено не так резко и было бы более показательным для теплопроводности расплавов полимеров.

Таким образом, в потоках, где скорость деформации превышает обратную величину наибольшего времени релаксации полимера $\lambda_0 \|\dot{\gamma}\| \gg 1$, возможно, что теплопроводность до некоторой степени будет зависеть от направления. Однако не существует никаких данных, подтверждающих этот факт, и в любом случае для стекловидных твердых тел различия в значениях теплопроводности в разных направлениях самое большее могут отличаться друг от друга в 2—3 раза.

Следует отметить, что λ нечувствительна к химической природе полимера, молекулярной массе, температуре и давлению [1]. Для многих типичных полимеров λ лежит между 3 и $12 \cdot 10^{-4}$ Вт/мК безотносительно к этим параметрам. Данные по теплопроводности часто приводят в виде коэффициента температуропроводности

$$k = \lambda / (\rho c_p), \quad (1)$$

где ρ — плотность; c_p — удельная теплоемкость. В [3] показано, что k для полимеров почти не зависит от T , p и химических характеристик. Следует заметить, что для λ и k существует гораздо меньше данных, чем для вязкости, так что вполне возможны исключения из указанных здесь тенденций.

Из-за чувствительности λ или k к температуре формулы, используемые в конструкторских расчетах, могут быть заданы для λ , ρ и c_p в виде полиномов низкого порядка. Примеры таких формул для легкого полиэтилена LDPE, тяжелого полиэтилена HDPE и поливинилхлорида PVC, полученные в [4], представлены в табл. 2—4.

Зависимость вязкости от температуры. Вязкость ньютоновских жидкостей зависит от температуры и давления. Это влияние можно описать при помощи метода редуцирования переменных [5]. В этом методе данные по вязкости при различных температурах и давлениях можно свести к единой кривой при базисной температуре T_0 и базисном давлении p_0 путем представления $\lg(\eta(\dot{\gamma}, T, p)/\eta_0 \times (T_0, p_0)/\eta_0(T, p))$ зависимости функций от $\lg(a_T \dot{\gamma})$, где $a_T(T, p)$ — коэффициент смещения, зависящий от материала. Небольшое число известных данных по зависимости η от давления показывает, что температурная зависимость значительно сильнее, чем зависимость от давления. Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать зависимостью от давления, предположив, что $\eta = \eta(\dot{\gamma}, T)$ и $a_T = a_T(T)$.

Согласно молекулярным теориям слабых растворов полимеров [6]

$$a_T = \frac{(\eta_0 - \eta_s) T T_0 \rho(T_0)}{(\eta_0 - \eta_s) T_0 T \rho(T)}, \quad (2)$$

где η_s — коэффициент вязкости растворителя. Если предположить, что это соотношение можно применять и для

Таблица 1. Теплопроводность и теплоемкость некоторых расплавленных полимеров при температурах T_0 [2]

Полимер	T_0 , °C	c_p , 10^{-3} Дж/(кг·К)	λ , Вт/(м·К)
Полиэтилен легкий (LDPE)	150	2,57	0,241
Полиэтилен тяжелый (HDPE)	150	2,65	0,255
Полипропилен (PP)	180	2,80	—
Полихлорвинил (PVC)	100	1,53	0,166
Полистирол (PS)	150	2,04	0,167
Полиметилметакрилат (PMMA)	150	—	0,195

Таблица 2. Зависимость коэффициента теплопроводности λ , Вт/(м·К), от температуры T , К [4], $\lambda = a \cdot 10^{-1} + b \cdot 10^{-4} (T - 273,2) + c \cdot 10^{-6} (T - 273,2)^2 + d \cdot 10^{-8} (T - 273,2)^3 + e \cdot 10^{-10} (T - 273,2)^4$

Полимер	ΔT , °C	a	b	c	d	e
Тяжелый полиэтилен	10—143	4,53	—8,59	—5,29	4,12	—1,98
Легкий полиэтилен	143—200	2,6	0	0	0	0
Легкий полиэтилен	10—126	3,65	—4,07	—7,34	8,28	—5,53
Полихлорвинил	126—200	2,23	0	0	0	0
Полихлорвинил	0—200	1,68	0	0	0	0

Таблица 3. Зависимость плотности ρ , г/см³, от температуры T , К [4]
 $\rho^{-1} = a + 10^{-4} b (T - 273,2) + 10^{-5} c (T - 273,2)^2 + 10^{-7} d (T - 273,2)^3 + 10^{-9} e (T - 273,2)^4 + 10^{-11} \times \times f (T - 273,2)^5$

Полимер	ΔT , °C	a	b	c	d	e	f
Тяжелый полиэтилен	10—133	1,033	17,87	-7,19	16,11	-15,45	5,58
	133—200	1,158	8,09	—	—	—	—
	200	—	—	—	—	—	—
Легкий полиэтилен	10—113,5	1,078	1,24	2,68	-3,95	2,35	—
	113,5—200	1,158	8,09	—	—	—	—
	200	—	—	—	—	—	—
Полихлорвинил	10—110	0,7154	1,02	0,0781	-0,0167	0,0524	—
	110—200	0,6791	5,67	—	—	—	—
	200	—	—	—	—	—	—

больших концентраций или неразбавленных полимеров, то $\eta_s \ll \eta_0$ и приведенное выше выражение сводится к следующему соотношению:

$$a_T = \frac{\eta_0(T) T_0 \rho(T_0)}{\eta_0(T_0) T \rho(T)} \quad (3)$$

Отношение $T_0 \rho(T_0) / (T \rho(T)) \approx 1$ и очень мало изменяется в области обычных температур. Например, для легкого полиэтилена LDPE это отношение при 150 °C по отношению к значению при 200 °C составляет 0,92. Однако полный коэффициент смещения равен 0,32 для тех же двух температур.

Если не существует данных по вязкости для нулевой скорости сдвига, то уравнение (3) нельзя использовать для расчета a_T . В этом случае a_T необходимо определять эмпирически при обработке данных по сдвигу, чтобы построить основную кривую для вязкости. Особенно удобный способ сделать это заключается в использовании того факта, что согласно уравнению (3) касательное напряжение τ при температуре T можно свести к касательному напряжению при

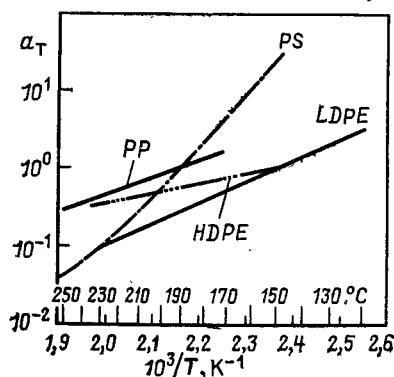


Рис. 1. Коэффициенты сдвига a_T для некоторых расплавленных полимеров, определенные по Мюнстеду [7]. Температура отсечения $T_0 = 150$ °C для легкого LDPE и тяжелого HDPE полиэтилена и $T = 190$ °C для полипропилена PP и полистирола PS

базисной температурой T_0

$$\tau_r = \frac{T_0 \rho_0}{T \rho} \tau, \quad (4)$$

где τ_r — приведенное касательное напряжение. Таким образом, τ совершенно нечувствительно к температуре; более того, оно может быть сдвинуто без знания a_T . Построение основной кривой τ_r в зависимости от $a_T \dot{\gamma}$ будет содержать произвольный сдвиг только вдоль оси скорости сдвига. Типичные зависимости коэффициента сдвига от температуры показаны на рис. 1 и 2.

Для описания температурной зависимости используются два типа экспоненциальных функций. Для некоторых материалов и в некоторых температурных интервалах логарифм a_T линейно зависит от $1/T$ (см. результаты, представленные на рис. 1 для LDPE, HDPE и PP-полипропилен). В этом случае температурная зависимость задается функцией Аррениуса

$$a_T = \exp \left[\frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (5)$$

Такой характер зависимости наблюдается у жидкостей с низкой молекулярной массой и у расплавленных полимеров при температуре выше их температуры стеклования

Таблица 4. Зависимость удельной теплоемкости c_p , кДж/(кг·К), от температуры T , К [4]

$$c_p = a + b (T - 273,2) + c (T - 273,2)^2 + d (T - 273,2)^3 + e (T - 273,2)^4$$

Полимер	ΔT , °C	a	b	c	d	e
Тяжелый полиэтилен	10—88	1,597	$3,61 \cdot 10^{-3}$	$5,96 \cdot 10^{-5}$	$-3,44 \cdot 10^{-8}$	$9,77 \cdot 10^{-9}$
	88—121	$-1,983 \cdot 10^2$	6,17	$-6,34 \cdot 10^{-2}$	$2,19 \cdot 10^{-4}$	—
	121—130	$-2,837 \cdot 10^2$	2,41	—	—	—
	130—133	$1,208 \cdot 10^3$	-9,07	—	—	—
	133—200	1,984	$3,88 \cdot 10^{-3}$	—	—	—
Легкий полиэтилен	10—90	1,943	$5,39 \cdot 10^{-3}$	$2,56 \cdot 10^{-5}$	$-3,23 \cdot 10^{-8}$	$3,53 \cdot 10^{-9}$
	90—105	$8,497 \cdot 10^1$	-1,84	$1,04 \cdot 10^{-2}$	—	—
	105—110	$-1,29 \cdot 10^2$	1,3	—	—	—
	110—113,5	$3,786 \cdot 10^2$	-3,31	—	—	—
	113,5—200	1,98	$3,70 \cdot 10^{-3}$	—	—	—
Полихлорвинил	10—67	0,75	$4,66 \cdot 10^{-3}$	—	—	—
	67—96	$1,361 \cdot 10^2$	-6,64	$1,21 \cdot 10^{-2}$	$-9,71 \cdot 10^{-4}$	$2,90 \cdot 10^{-6}$
	96—200	1,208	$2,96 \cdot 10^{-3}$	—	—	—

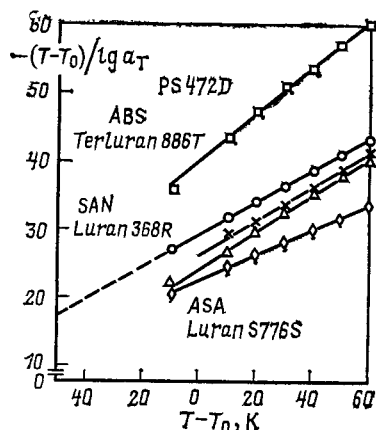


Рис. 2. Коэффициент сдвига для расплавленных полистиролов, определенный по Мюни-Ривлину [7]

на 100 К или даже более. Типичные значения составляют $4,50 \cdot 10^3$ К (LDPE), $2,83 \cdot 10^3$ К (HDPE) и $5,14 \cdot 10^3$ К (PP). Эти значения, конечно, зависят от молекулярных параметров полимера и, таким образом, могут значительно изменяться внутри каждого класса полимеров. Для LDPE наблюдалась [7] линейная зависимость отношения E/R от плотности ρ_{20} (плотность при комнатной температуре)

$$\frac{E}{R} = a_0 + a_1 \rho_{20}, \quad (6)$$

где $a_0 = 8,277 \cdot 10^4$ К и $a_1 = -8,330 \cdot 10^4$ К·см³/г. Обнаружено, что для температур, лежащих в интервале между температурой стеклования T_g и $T_g + 100$ уравнение WLF для a_T справедливо для широкого круга полимеров [8]

$$\lg a_T = \frac{-C_1^0 (T - T_0)}{C_2^0 + (T - T_0)}. \quad (7)$$

Если T_0 выбрано равным температуре стеклования, то $C_1^0 = 17,44$ и $C_2^0 = 51,6$ К. Эти константы полезны, когда не существует конкретных данных для полимера. При наличии некоторых данных лучше взять $C_1^0 = 8,86$ и $C_2^0 = 101,6$ К и затем подобрать T_0 таким образом, чтобы получить наилучшее совпадение с имеющимися значениями.

Полистиролы обычно хорошо описываются уравнением WLF. Согласно данным по a_T с рассчитанными по уравнению WLF лучше всего видны при построении зависимости $(T - T_0)/\lg a_T$ от $T - T_0$ (см. рис. 2) для ряда полистиролов PS.

Полезно привести примеры того, как температурный сдвиг вводится в эмпирические функции для вязкости (см. табл. 4, § 2.2.8). Ниже рассмотрены два случая

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \eta^0 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^0} \right)^{n-1} a_T^n, \quad \eta^0 = \eta(\dot{\gamma}^0, T_0); \quad (8)$$

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \eta_0(T_0) [1 + (\lambda_p(T_0) a_T \dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2} a_T. \quad (9)$$

В уравнении (8) $\dot{\gamma}^0$ — эталонная характеристика скорости сдвига — процесса (см. ниже). В уравнении (9) $\lambda_p(T_0)$ — характерное время для жидкости при температуре T_0 . Следует заметить, что η^0 — эталонная вязкость; η_0 — вязкость при нулевой скорости сдвига.

С. Основные уравнения и безразмерные группы. В большинстве количественных исследований теплопереноса в неньютоновских жидкостях в качестве уравнения состояния принимается уравнение обобщенной модели ньютоновской жидкости (для целей расчета и представления результатов). По этой причине мы ограничимся обсуждением этой модели. Обсуждение течений, для которых эта модель недостаточна, приводится в [9].

Когда уравнение для обобщенной ньютоновской жидкости (см. § 2.2.8) используется вместе с уравнениями сохранения импульса и энергии, результирующие уравнения, описывающие теплообмен и течение этого класса неньютоновских жидкостей (здесь предполагается также, что они несжимаемы и имеют постоянный коэффициент теплопроводности), принимают вид

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + (\nabla \cdot \dot{\gamma}) + \rho g; \quad (10)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \frac{1}{2} \eta (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}). \quad (11)$$

В этих уравнениях $\dot{\gamma} = \nabla v + (\nabla v)^T$ — тензор скоростей деформаций. В уравнении (11) предполагается, что внутренняя энергия элемента жидкости зависит только от мгновенного значения температуры и давления в этом элементе и не зависит, например, от истории развития деформаций в элементе. Хотя не было никаких экспериментальных проверок этого допущения, оно используется повсеместно при расчетах теплообмена.

Для того чтобы использовать (10), (11), необходимо специально определить зависимость вязкости от температуры и скорости сдвига. Различные эмпирические зависимости для $\eta(\dot{\gamma})$ приведены в табл. 4, § 2.2.8. Температурная зависимость η обсуждалась выше.

Прежде чем представлять решения этих уравнений для отдельных задач теплообмена, важно рассмотреть безразмерные группы, которые определяют их.

Приведение (10) к безразмерному виду производится почти так же, как для изотермических потоков [10]. Здесь мы предполагаем, что плотность постоянна и что характерная вязкость $\eta^0 = \eta(\dot{\gamma}^0, T^0)$, где $\dot{\gamma}^0$ и T^0 — характерные скорость сдвига и температура соответственно. В дальнейшем предположим, что p_0 — базисное давление; H — характерная длина (радиус трубки или зазор канала); V — характерная скорость (например, скорость скольжения по стенке и средняя скорость) и t_p — характерное время процесса (время пребывания). Предположение, что существует базисная скорость, означает, что мы сосредоточиваем наше внимание скорее на проблемах вынужденной, а не свободной конвекции. При этих базисных скоростях мы видим, что характерная скорость сдвига принимает вид

$$\dot{\gamma} = V/H \quad (12)$$

и безразмерное давление

$$P = \frac{p - p_0}{\eta^0 V/H}. \quad (13)$$

Отметим, что давление определяется вязкими напряжениями больше, чем силами инерции, так как большинство течений жидких полимеров является течениями с деформацией ползучести. Наконец, можно записать уравнение движения

$$\text{Re} \left(\frac{H}{V t_p} \right) \frac{D^* V^*}{Dt^*} = -V^* P + \nabla^* \left(\frac{\eta}{\eta^0} \right) \dot{\gamma}^* + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left(\frac{g}{g} \right), \quad (14)$$

где $D^*/Dt^* = t_p D/Dt$ — безразмерная субстанциональная производная; $\nabla^* = H \nabla$ — безразмерная пространственная производная; $\dot{\gamma}^* = \dot{\gamma}/(V/H)$. Числа Рейнольдса и Фруда задаются следующим образом:

$$\text{Re} = \rho V H / \eta^0; \quad \text{Fr} = V^2 / (g H). \quad (15)$$

Число Фруда обычно нужно только для течений со свободной поверхностью. Члены, учитывающие силы инерции в левой части (14), определяются умножением числа Re на отношение характерных времен: величины, обратной характерной скорости сдвига $1/\dot{\gamma}^0$, и времени процесса t_p .

В случае, когда $t_p = 1/\dot{\gamma}^0$, в левой части оказывается только число Рейнольдса. Однако если мы рассматриваем течение в канале длиной L , то t_p можно рассматривать как время пребывания L/V . В этом случае члены, описывающие силы инерции, можно выразить через $Re H/L$. Эти различия, протекающие из разных способов выбора t_p , обычно не слишком важны для уравнения импульсов, так как для большинства течений полимеров $Re \ll 1$, и в этом случае инерционными членами пренебрегают. Использование t_p более важно для уравнения энергии.

Для того чтобы привести уравнение энергии к безразмерному виду, надо прежде всего подобрать характерную разность температур ΔT^0 , с которой можно сравнить изменения температуры. Имеются многочисленные возможности для такого выбора, который определяется особенностями задачи; такие ΔT^0 обсуждаются в [11] и перечислены ниже:

$$\Delta T_{proc} = |T_w - T_i|; \quad (16)$$

$$\Delta T_{rheol} = \left| \frac{\eta}{\partial \eta / \partial T} \right|_{T=T_0}; \quad (17)$$

$$\dot{\gamma} = V/H$$

$$\Delta T_{ad} = \Delta p / (\rho c_p); \quad (18)$$

$$\Delta T_{gen} = \eta^0 V^2 / \lambda. \quad (19)$$

Разность температур процесса ΔT_{proc} базируется на ΔT , определяемой рабочими условиями, например температурой стенки T_w и входной температурой T_i . Важность влияния неизоэотермичности на реологию процесса учитывается величиной ΔT_{rheol} , которая дает характерную разность температур, вызывающую ощутимые изменения в вязкости. Величина ΔT_{ad} задает повышение температуры в адиабатном процессе, который мог быть вызван полным перепадом давления Δp . Сравнение тепловыделения из-за внутреннего трения и переноса теплопроводностью дает характерный перепад температур ΔT_{gen} , который можно связать с нагревом при выделении теплоты в процессе вязкой диссипации.

Теперь безразмерим уравнение энергии так же, как мы сделали это с уравнением движения. Определим безразмерную температуру Θ в виде

$$\Theta = (T - T^0) / \Delta T^0. \quad (20)$$

Тогда (11) принимает следующий вид:

$$Re \left(\frac{H}{V t_p} \right) \frac{D^* \Theta}{Dt^*} = \nabla^{*2} \Theta + \frac{1}{2} Gp \left(\frac{\eta}{\eta^0} \right) (\dot{\gamma}^*: \dot{\gamma}^*). \quad (21)$$

Две безразмерные группы, которые появляются здесь, представляют собой число Пекле Pe , учитывающее относительную важность конвекции и теплопроводности, и число Gp , определенное Пирсоном [11] и характеризующее тепловыделение,

$$Pe = \frac{\rho c_p V H}{\lambda}; \quad (22)$$

$$Gp = \frac{\eta^0 V^2}{\lambda \Delta T^0}. \quad (23)$$

Для стационарных задач, в которых $t_p = 1/\dot{\gamma}^0$, число Пекле адекватно описывает конвективный член. Однако если мы касаемся процессов теплообмена в жидкости, текущей вдоль канала длиной L , то для задания t_p лучше выбрать время пребывания L/V . В этом случае конвективный член описывается числом Гретца

$$Gz = \frac{\rho c_p V H^2}{\lambda L} = Pe \left(\frac{H}{L} \right). \quad (24)$$

Заметим, что Gz и Pe различаются только в случае, когда относительное удлинение канала сильно отличается от еди-

ницы. В этом случае число Гретца предпочтительнее, так как сопоставляет конвекцию вдоль оси с теплопроводностью у стенки.

Число Gp , учитывающее тепловыделения, также возьмем в одной из двух стандартных форм, зависящих от выбора ΔT^0 . Если $\Delta T = \Delta T_{proc}$, то Gp становится числом Брикмана

$$Br = \frac{\eta^0 V^2}{\eta \Delta T_{proc}}. \quad (25)$$

Это разумный выбор для ΔT^0 (и Gp) в том случае, если ΔT_{proc} не настолько велико, чтобы существенно изменить вязкость, т. е. при условии, что число Rp мало,

$$Rp = \frac{\Delta T_{proc}}{\Delta T_{rheol}} \ll 1. \quad (26)$$

Для больших Rp значение ΔT^0 следует взять равным ΔT_{rheol} . Таким образом, мы выбираем Gp равным числу Наме — Гриффита

$$Na = \frac{\eta^0 V^2}{\lambda \Delta T_{rheol}} = Br Rp. \quad (27)$$

Детальное обсуждение форм температурных профилей, которые могут появиться в результате различных комбинаций этих безразмерных чисел, приведено в [11]. Следует отметить, что большинство неизотермических технологических течений полимеров является процессами с высокими числами Гретца Gz . Это означает, что мы обычно больше заинтересованы в развивающихся температурных профилях, чем в полностью развитых. Ниже рассмотрены решения уравнения энергии для больших и маленьких чисел Rp .

Д. Процессы теплопереноса в ограниченных каналах при стационарном течении жидкости без выделения тепла за счет вязкой диссипации. Здесь представлены решения уравнений теплопереноса для стационарного неизотермического течения в трубах и щелях при постоянных температуре стенки и тепловом потоке. Предположим, что нагрев при выделении теплоты за счет внутреннего трения не имеет значения, т. е. $Gp \ll 1$, так что можно пренебречь последним членом в правой части (21). В дополнение к сказанному выше следует заметить, что так как большинство потоков полимеров является потоками с деформацией ползучести, то мы выбираем $Re = 0$; кроме того, мы вводим силу тяжести в член уравнения, учитывающий давление, и принимаем $t_p = L/V$, где L — длина трубы или щели. Тогда интересные нас уравнения принимают следующий вид:

$$0 = -\nabla^* P + \nabla^* (\eta / \eta^0) \dot{\gamma}^*, \quad (28)$$

$$Gz \nabla^{*2} \Theta = \nabla^{*2} \Theta. \quad (29)$$

Если решения уравнений (28) и (29) получены, результаты можно представить с помощью числа Нуссельта

$$Nu = 2\alpha H / \lambda, \quad (30)$$

где α — локальный коэффициент теплоотдачи, относящийся к разности локальной температуры стенки и среднemasовой температуры,

$$\alpha = \frac{q_{wall}}{T_{bulk} - T_{wall}}; \quad (31)$$

H — ширина канала при течении в щели или радиус R при течении в трубе.

Постоянные физические свойства ($Rp = 0$). Для того чтобы увидеть влияние неньютоновского характера жидкости на число Нуссельта, представим вначале результаты для вязкости, которая не зависит от температуры, т. е. берем $Rp = 0$. Предположим, что жидкость течет в трубе или щели с однородной температурой T_0 до $z = 0$; при $z \geq 0$ имеем или постоянную температуру стенки T_w , или постоянную плотность теплового потока q_1 (рис. 3). Для этих

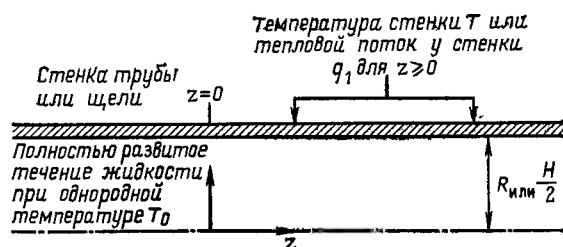


Рис. 3. Перенос теплоты к неьютоновским жидкостям в трубах и щелях

двух типов граничных условий можно получить аналитическое решение для поля температур как на начальном термическом участке (небольшие z), так и в области термически полностью развитого течения (большие z). Эти решения представлены в табл. 5 и 6 через локальные числа Нуссельта. Многие из этих данных получены в [12].

Используемые в табл. 5 и 6 большие и маленькие z в известном смысле демонстрируют важность конвективного члена в (29). В соответствии с принятым $t_p = L/V$ безразмерная, осевая координата

$$z^* = z/L. \quad (32)$$

В области начального термического участка z^* меньше чем расстояние по оси, требуемое для того, чтобы имел место значительный перенос теплоты от стенки. Так как последнее задается числом Gz , получаем, что начальный термический участок определяется соотношением

$$\frac{z^*}{Gz} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{\lambda z}{\rho c_p V H^2} \ll 1. \quad (33)$$

Подобным же образом описывается область полностью развитого в тепловом отношении течения

$$\frac{z^*}{Gz} \gg 1 \quad \text{или} \quad \frac{\lambda z}{\rho c_p V H^2} \gg 1. \quad (34)$$

Как показано ниже, область начального термического участка часто является более важным участком для полимеров в процессах теплообмена.

Пример. Расплавленный полистирол необходимо сформовать в виде прямоугольника путем впрыскивания его в холодную форму, которая имеет длину 30, ширину 7,5 и толщину 0,2 см [13]. Время, требуемое для заполнения этой формы, составляет 2,5 с (t_p), градиент давления $1,33 \times 10^6$ Па/м. Температура расплавленного полимера на входе в форму 250, температура стенок формы 50°C. Для полистирола $\lambda = 1,295 \cdot 10^{-1}$ Дж/(К·м·с) и $\kappa = 7,05 \cdot 10^{-8}$ м²/с [14]. Необходимо найти локальные числа Нуссельта, описывающие теплообмен между полимером и формой.

Решение. Чтобы определить, какую формулу из табл. 6 нужно использовать, начнем с расчета числа Гретца. Средняя скорость

$$\langle V_z \rangle = V = \frac{L}{t_p} = \frac{30}{2,5} = 12 \text{ см/с.}$$

Тогда число Гретца

$$Gz = \frac{V H^2}{\kappa L} = \frac{0,12 \cdot (0,002)^2}{7,05 \cdot 10^{-8} \cdot 0,30} = 22,7.$$

Так как ясно, что $z^* = z/L$ лежит между нулем и единицей получаем, что $z^* \ll Gz$. Таким образом, полимер находится в области начального термического участка.

Таблица 5. Асимптотические решения для локальных чисел Нуссельта при течении в трубах [12]; $Nu = 2\alpha H/\lambda$

Тепловой режим течения	Течение жидкости	Граничные условия	
		Постоянная температура стенки	Постоянная плотность теплового потока на стенке
Начальный термический участок $z^* \ll Gz$	Стержневое	$Nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/2}$ (1)	$Nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/2}$ (7)
	Ламинарное неьютоновское	$Nu = \frac{2}{9^{1/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left[\frac{Gz}{z^*} \left(-\frac{1}{4} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{dv_z^*}{dr^*} \Big _{r^*=1} \right) \right]^{1/3}$ (2)	$Nu = \frac{2 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9^{1/3}} \left[\frac{Gz}{z^*} \left(-\frac{1}{4} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{dv_z^*}{dr^*} \Big _{r^*=1} \right) \right]^{1/3}$ (8)
	Ламинарное ньютонское	$Nu = \frac{2}{9^{1/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/3}$ (3)	$Nu = \frac{2 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9^{1/3}} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/3}$ (9)
Полностью развитый в тепловом отношении участок $z^* \gg Gz$	Стержневое	$Nu = 5,772$ (4)	$Nu = 8$ (10)
	Ламинарное неьютоновское	$Nu = \beta_1^2$, где β — самое низкое собственное значение уравнения $\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left(r^* \frac{dX_n}{dr^*} \right) + \beta_n^2 v_z^*(r^*) X_n = 0$; $X_n'(0) = 0$ (5)	$Nu = \left\{ 2 \int_0^1 \frac{1}{r^*} \left[\int_0^{r^*} \bar{r}^* \times \right. \right. \\ \left. \left. \times v_z^*(\bar{r}^*) d\bar{r}^* \right]^2 dr^* \right\}^{-1}$ (11)
	Ламинарное ньютонское	$Nu = 3,657$ (6)	$Nu = 48/11$

Здесь $v_z^* = v_z/\langle v_z \rangle$; $r^* = r/R$; $z^* = z/L$ и $Gz = \langle v_z \rangle R^2/(\kappa L)$.

Таблица 6. Асимптотические решения для локальных чисел Нуссельта при течении в тонких щелях [12]; $Nu = 2\alpha H/\lambda$

Тепловой режим течения	Течение жидкости	Граничные условия (см. рис. 3)	
		Постоянная температура стенки	Постоянная плотность теплового потока на стенке
Начальный термический участок $z^* \ll Gz$	Стержневое	$Nu = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/2}$	$Nu = \sqrt{\pi} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/3}$ (7)
	Ламинарное неньютоновское	$Nu = \frac{2^{5/3}}{9^{1/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left[\frac{Gz}{z^*} \times \left(-\frac{dv_z^*}{dy^*} \Big _{y^*=1/2} \right) \right]^{1/3}$	$Nu = \frac{2^{5/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{9^{1/3}} \left[\frac{Gz}{z^*} \times \left(-\frac{dv_z^*}{dy^*} \Big _{y^*=1/2} \right) \right]^{1/3}$ (8)
	Ламинарное ньютоновское	$Nu = \frac{2^{4/3}}{3^{1/3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/3}$	$Nu = \frac{2^{4/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3^{1/3}} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/3}$ (9)
Полностью в тепловом отношении развитый участок $z^* \gg Gz$	Стержневое	$Nu = 9,86$	$Nu = 12$ (10)
	Ламинарное неньютоновское	$Nu = 4\beta_1^2$, где β_1 — самое низкое собственное значение уравнения $\frac{d^2 X_n}{dy^{*2}} + 4\beta_1^2 v_z^*(y^*) X_n = 0$; $X_n \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0$	$Nu = \left[2 \int_0^{1/2} \left(\int_0^{y^*} v_z^*(y^*) dy^* \right)^2 dy^* \right]^{1/2}$ (11)
	Ламинарное ньютоновское	$Nu = 7,54$	$Nu = 140/17$ (12)

Здесь $v_z^* = v_z / \langle v_z \rangle$; $y^* = (y/H)$; $z^* = z/L$; $Gz = \langle v_z \rangle H^2 / (\alpha L)$.

При отсутствии любой детальной реологической информации, с помощью которой можно рассчитать градиент скорости на стенке, используем (3) из табл. 6 для оценки чисел Нуссельта

$$Nu = \frac{2^{4/3}}{3^{1/3} \Gamma(4/3)} \left(\frac{Gz}{z^*} \right)^{1/3} = 5,54 z^{*-1/3}, \quad (35)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Этот результат следует рассматривать в качестве грубого приближения, так как мы пренебрегаем скоростью сдвига и зависимостью вязкости от температуры, образованием поверхностного твердого слоя полимера вблизи поверхности формы и влиянием свободной поверхности у фронта на характеристики скорости. Более детальное описание процессов теплообмена при прессовании в форме при впрыске приведено в [15].

Переменные физические свойства ($Pn > 1$). Рассмотрим влияние изменений вязкости с температурой на процессы теплообмена, т. е. задачу, в которой $Pn \sim 1$. Для задачи этого типа (28), (29) надо решать совместно вследствие того, что они связаны через изменения вязкости и скорости. Решение этих уравнений обычно получают с помощью численных методов для каждого интересующего случая. Чтобы проиллюстрировать конечное влияние $\eta(T)$ на Nu , приведем результаты, полученные в [16], для теплообмена степенной жидкости, текущей в трубе с постоянной температурой стенки (см. рис. 3).

Зависимость вязкости от температуры задается в виде функции Аррениуса, сходной с уравнением (5),

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = m \dot{\gamma}^n - 1 e^{nE/(RT)}. \quad (36)$$

Если $\Delta T_{\text{проc}} = T_i - T_0$ и $\Delta T_{\text{теол}} = T_i - T_0$ вычисляется при средней температуре $T_m = \sqrt{T_0 T_i}$

$$\Delta T_{\text{теол}} = \left| \frac{\eta}{\partial \eta / \partial T} \right|_{T_m} = \frac{RT_0 T_i}{nE}, \quad (37)$$

то число Пирсона задается в виде [ср. с (26)]

$$P_n = \frac{nE}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_i} \right). \quad (38)$$

Средние числа Нуссельта Nu_a рассчитываются как функции чисел Gz для интервала значений n и $1/n$ (обозначенных в [16] ψ), число Nu_a определяется, как в уравнении (30), за исключением того, что обычно средние коэффициенты теплоотдачи α_a относятся к среднеарифметическому разности температур по длине L нагреваемой секции,

$$q = \alpha_a \left(T_i - \frac{T_0 + T_L}{2} \right), \quad (39)$$

где T_L — среднемассовая температура при $z=L$.

На рис. 4 и 5 показаны типичные результаты, полученные в этих расчетах. Рисунок 4 соответствует случаю, когда зависимость вязкости от температуры отсутствует ($Pn=0$), и показывает только влияние уменьшения сдвига на Nu_a . На рис. 5 показано влияние Pn на Nu_a для $n=1/3$, типичного для многих расплавленных полимеров. Видно, что на Nu_a аналогичным образом воздействует увеличение чувствительности к скорости сдвига ($n \rightarrow 0$) и температуре ($Pn \rightarrow \infty$). Практически оказывается, что граничные кривые на этих двух рисунках идентичны. Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными для водных

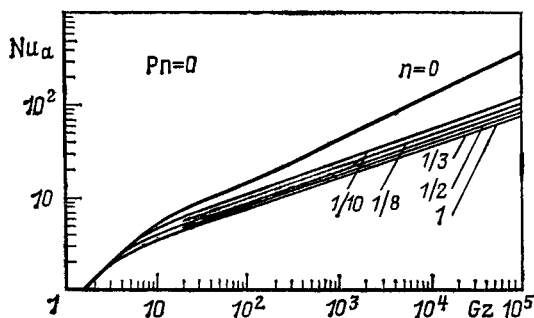


Рис. 4. Зависимость средних чисел Нуссельта [см. (39)] от числа Грета для ламинарного течения в трубе жидкостей, свойства которых описываются степенным законом, и ньютоновских жидкостей. Предполагается, что в этих расчетах вязкость не зависит от температуры ($Pn=0$). В качестве параметра использовался степенной показатель n [16]

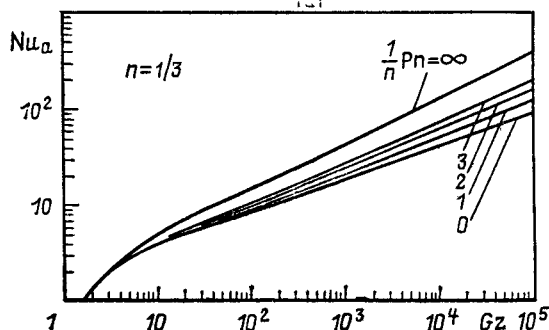


Рис. 5. Зависимость средних чисел Нуссельта [см. (39)] от числа Грета при ламинарном течении в трубе жидкостей, свойства которой описываются степенным законом с $n=1/3$. Численные результаты были получены авторами [16] для различных чисел Пирсона [см. (38)] [16]

растворов полимеров (лучше чем 7%) при условии, что естественная конвекция [16] не учитывается.

Е. Влияние нагрева за счет теплоты выделения при вязкой диссипации на процессы теплообмена. Как упоминалось во введении, одно из важных различий между неизо-термическими течениями жидких полимеров и ньютоновских жидкостей состоит в том, что в первом случае оказывается важным нагрев за счет выделения теплоты из-за вязкой диссипации. Вследствие высокой вязкости этих жидкостей величина Gp [см. (23)] не мала и последний член в правой части уравнения энергии (21) необходимо сохранять. Ниже рассмотрено влияние нагрева за счет тепловыделения при вязкой диссипации на поле температур при течениях двух типов. Сначала рассмотрим еще раз стационарное течение в каналах из последнего раздела, затем обсудим нестационарное кольцевое течение Куэтта и, наконец, обратим внимание на то, как эти результаты влияют на определение числа Нуссельта. Примеры течения в каналах (в плоских и цилиндрических) и течения Куэтта, рассматриваемые здесь, являются иллюстрациями различных задач теплообмена, которые можно проанализировать в качестве предельных случаев винтового течения [2].

Вязкая диссипация при стационарном течении в канале. С учетом вязкой диссипации уравнение (21) решено аналитически только для нескольких предельных случаев течения в канале (см., например, [17 и 18]). Эти решения учитывают зависимость вязкости от температуры при относительно простых граничных условиях. Аналитические решения имеют сложный вид, требующий расчетов на машине, для получения численных значений температуры.

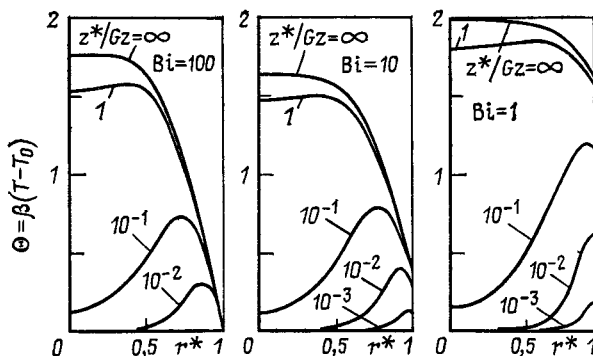


Рис. 6. Развивающиеся профили температур при течении жидкости, описываемой степенным законом ($n=0,4$), в трубах с одинаковыми термическими граничными условиями [см. (43)]. Безразмерная осевая и радиальная координаты $z^*=z/L$ и $r^*=r/R$. Результаты представлены для трех различных чисел Био; $Na=5$ и $\theta_s=0$ [2]

По этой причине, видимо, естественно получить температурное поле путем прямого численного решения уравнения (21). Таким образом, при небольшом дополнительном усилии можно включить зависимость вязкости от температуры и просто получить решение для различных граничных условий.

Ниже приведен пример численного решения уравнения (21) для конкретного случая. В частности, рассматривается течение в трубе жидкости, описываемой степенной зависимостью при $n=0,4$ (см. рис. 3). Базисную температуру T^0 выбирают равной температуре входа T_0 , зависимость вязкости от температуры задается экспоненциальным множителем $e^{-\beta(T-T_0)}$, так что

$$\Delta T_{\text{rheol}} = \frac{1}{\beta} = \frac{RT_0^2}{nE}. \quad (40)$$

Используем безразмерную температуру

$$\Theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_{\text{rheol}}} = \beta(T - T_0), \quad (41)$$

соответствующую условию, что вязкость сильно изменяется с температурой. В дополнение принимаем, что нагрев за счет внутреннего трения значителен

$$Na=5. \quad (42)$$

Вместо двух предельных граничных условий (см. рис. 3) используем более общее соотношение между тепловым потоком в жидкости у стенки и перепадом температур между стенкой Θ_w и окружающей средой Θ_s

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} \right|_{w,f} = Bi(\Theta_w - \Theta_s). \quad (43)$$

Здесь $r^*=r/R$; температурный градиент берется на стенке; Bi — число Био.

Развивающийся профиль температур показан на рис. 6 для трех типичных значений Bi . В этих расчетах принимаем, что температуры входа и окружающей среды идентичны ($\Theta_s=0$). Температура увеличивается с увеличением расстояния от входа по течению потока. Однако увеличение температуры зависит от r^* , поскольку вязкая диссипация не однородна по ширине канала, а имеет максимальное значение у стенки и нулевое значение в центре трубы. Таким образом, создается радиальный перепад температур и теплопроводность в радиальном направлении становится важной. Перенос теплоты теплопроводностью вдоль оси пренебрежимо мал по сравнению с коинективным тепловым потоком.

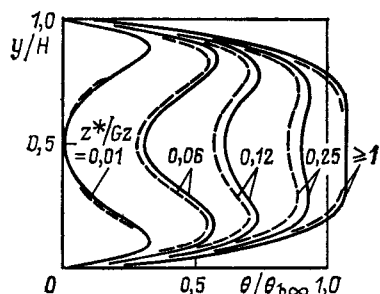


Рис. 7. Развивающиеся температурные профили для жидкости, описываемой степенным законом ($n=0,4$), текущей в щели со стенками при постоянной температуре, равной температуре входа T_0 . Местная безразмерная температура пересчитана на среднемассовую температуру полностью развитого течения $\theta_{b\infty}$ и задается при множестве осевых координат $z^*=z/L$. Для двух рассматриваемых чисел Наме — Грифитса $\theta_{b\infty}=0,5$ ($Na=1$) и $\theta_{b\infty}=4,6$ ($Na=10$) [19]. Сплошная кривая — $Na=1$, штриховая — $Na=10$

Далеко от входного участка ($z^*=z/L \gg Gz^{-1}$) профиль температур становится полностью развитым. Тогда радиальный тепловой поток к стенке уравнивается порождением теплоты в потоке. Для малых чисел Био (почти адиабатная стенка) полностью развитый профиль температур не достигается до тех пор, пока зависимость вязкости от температуры не становится столь слабой, что вязкостной диссипацией можно пренебречь. Для больших чисел Био в жидкости образуется большой радиальный градиент температур, для малых чисел Био — большая разница температур в стенке $\theta_w - \theta_s$. Оба предельных случая показаны на рис. 6.

Заметим, что среднее увеличение температуры в трубе больше при интенсивном ($Bi=100$), чем при среднем охлаждении ($Bi=10$). Это явление наблюдалось экспериментально при обработке полимеров. Возможно, что интенсивное охлаждение вызывает такой эффект из-за увеличения вязкости вблизи стенки. Это в свою очередь уменьшает скорости сдвига вблизи стенки и смещает максимальную скорость сдвига ближе к центру трубы. Таким образом, образуется дополнительный нагрев из-за внутреннего трения во внутренней области и увеличившийся слой медленно движущегося полимера вблизи стенки действует как изолятор.

Прирост температуры существенно зависит от Na , т. е. от интенсивности тепловыделения за счет вязкой диссипации. Однако форма температурного профиля относительно нечувствительна к Na . Пример этого дан на рис. 7, где показаны развивающиеся профили температуры, отнесенной к среднемассовой температуре $\theta_{b\infty}$ при полностью развитом теплообмене для течения в щели жидкости, описываемой степенной зависимостью (для двух различных Na). Хотя $\theta_{b\infty}$ возрастает почти в 10 раз, когда Na увеличивается от 1 до 10, это фактически не оказывает влияния на форму профилей $\theta/\theta_{b\infty}$.

При моделировании нагрева из-за внутреннего трения при течении двухкомпонентной жидкости в трубе [20] отмечено довольно интересное, но не вызывающее удивления явление. Область течения разделялась на центральную часть с жидкостью, обладающей высокой вязкостью, и тонкий слой жидкости с низкой вязкостью вблизи стенки. Из расчетов получено, что скорость нагрева из-за внутреннего трения в жидкости с низкой вязкостью может быть на порядок величины больше, чем в центральной части потока, обладающей высокой вязкостью. Это объясняется, конечно, очень высокими скоростями сдвига, которые могут иметь место в смазочном слое с низкой вязкостью вблизи стенки.

Вязкая диссипация в кольцевом течении Куэтта. Рассмотрим течение, образующееся в кольцевом зазоре между двумя концентрическими цилиндрами при относительном вращении вокруг их общей оси. Развитие профилей температуры задается уравнением энергии (21), в котором характеристическое время процесса t_p можно было бы выбрать из продолжительности эксперимента. Развитие температурного поля описывается числом Фурье

$$Fo = t_p \kappa / H^2, \quad (44)$$

которое эквивалентно Gz^{-1} для течений в каналах ограниченной длины. Заметим, что безразмерное время $t^* = t/t_p$ мало по сравнению с Fo^{-1} , распределение температур все еще изменяется, тогда как для $t^* \gg Fo^{-1}$ достигаются стационарные условия.

Известно относительно мало приложений расчетов нагрева за счет вязкой диссипации в кольцевом течении Куэтта. Одно интересное приложение эти расчеты находят в ротационном вискозиметре, где нагрев за счет внутреннего трения иногда ограничивает самые большие скорости сдвига, которые могут быть использованы в приборе. Полностью развитые поля температур и скорости привлекают много внимания из-за существования неоднозначного решения, найденного в [21]. Касательные напряжения не должны превышать определенного значения, даже если при этом неограниченно увеличиваются скорости сдвига. При высоких скоростях сдвига уменьшение температурной зависимости вязкости компенсируется увеличением напряжения вследствие роста скорости сдвига. Зависимость скорости сдвига V_0/H (относительная скорость между поверхностями, разделяемыми зазором) от касательного напряжения показана на рис. 8 для жидкости, описываемой степенной зависимостью [20]. Для данного касательного напряжения имеются два режима для проведения эксперимента: один при высоких и второй при низких скоростях сдвига.

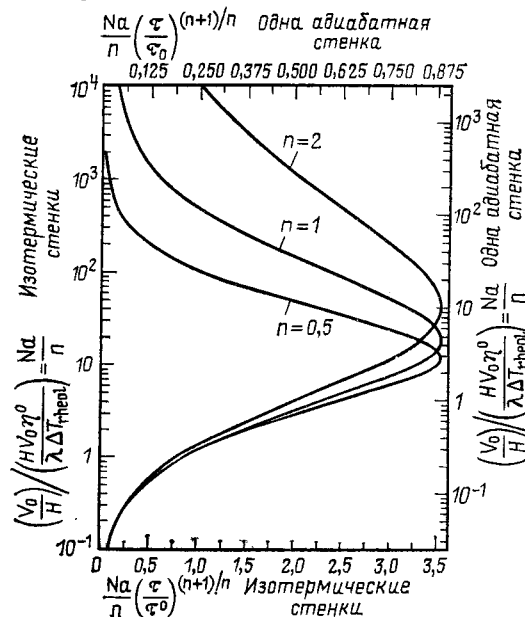


Рис. 8. Зависимость безразмерной скорости сдвига Na/n от безразмерного касательного напряжения $(Na/n) \times (\tau/\tau_0)^{(n+1)/n}$ для стационарного течения со сдвигом жидкости, описываемой степенным законом, между параллельными пластинами. Одна пластина скользит относительно другой со скоростью V_0 , расстояние между ними равно H . Показаны два набора тепловых граничных условий: две стенки изотермические (при температуре T_w), две другие стенки адиабатные (при той же температуре). Базисная вязкость $\eta^0 = \eta(V_0/H, T_w)$, базисное касательное напряжение $\tau^0 = \eta^0 V_0/H$; n — показатель степенной функции; $\Delta T_{\text{rheol}} = (E/R T_w^2)^{-1}$; $Na = V_0^2 \eta^0 / (\lambda \Delta T_{\text{rheol}})$

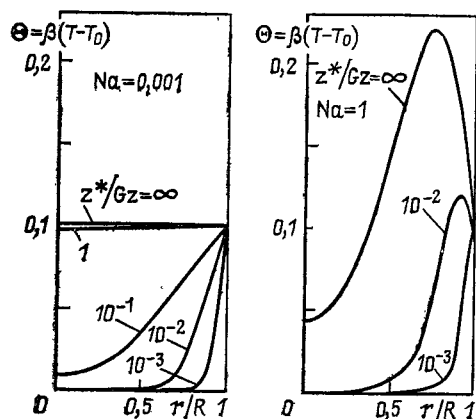


Рис. 9. Развивающиеся профили температур при тчении в трубе жидкости, описываемом степенной функцией ($n=0,4$), с нагревом за счет внутреннего трения ($Na=1$) и без ($Na=0,001$). Местоположение по оси задается $z^*=z/L$. Температура стенок трубы несколько выше температуры входа $\Theta_w=0,1$ [2]

Определение Nu при нагреве за счет вязкой диссипации. Во многих промышленных процессах интенсивности нагрева за счет вязкой диссипации особенно велики вблизи стенок, как, например, при течениях, обусловленных перепадом давления, в каналах. Маленькие скорости (условие отсутствия скольжения) делают конвекцию в этой области второстепенным фактором, так что локальная температура определяется из баланса между вязкой диссипацией и теплопроводностью. Из-за низких коэффициентов теплопроводности возникают большие температурные градиенты, в результате чего распределение температур у стенок довольно слабо зависит от среднemasовой температуры жидкости. Поэтому использование коэффициентов теплоотдачи [см. (31)] или числа Nu [см. (30)], отнесенного к среднemasовой температуре, может привести к физически ненадежным значениям этих величин. Ниже мы проиллюстрируем это утверждение на примере и затем повторно определим число Нуссельта, чтобы сделать его приемлемым для течений с существенным нагревом из-за внутреннего трения.

На рис. 9 показаны развивающиеся профили температур при тчении в трубах с пренебрежимо малым нагревом в результате вязкой диссипации ($Na=0,001$) и с существенным нагревом за счет нее ($Na=1,0$). Для тчения без заметной диссипации (левый график) температура жидкости постепенно приближается к температуре стенки, тепловой поток у стенки можно описать при помощи числа Нуссельта, используя среднюю разность температур между стенкой и жидкостью. Однако если вязкая диссипация существенно изменяет развивающийся профиль температур (правый график), тепловой поток у стенки необходимо описывать при помощи градиента температур у стенки, а не по средней разности температур. Можно ясно увидеть, что градиент температур у стенки изменяет свой знак, когда средняя температура жидкости все еще намного ниже температуры стенки. Образуется необычная ситуация, в которой жидкость нагревает стенку, даже если ее средняя температура много ниже температуры стенки. В этих условиях число Нуссельта в своем классическом определении может стать отрицательной величиной.

В [2] было предложено более полезное определение числа Нуссельта, которое возвращается к первоначальному определению числа Нуссельта как безразмерного градиента температур в жидкости у стенки,

$$Nu = \frac{H}{\Delta T^0} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{w,f} = \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} \Big|_{w,f} \quad (45)$$

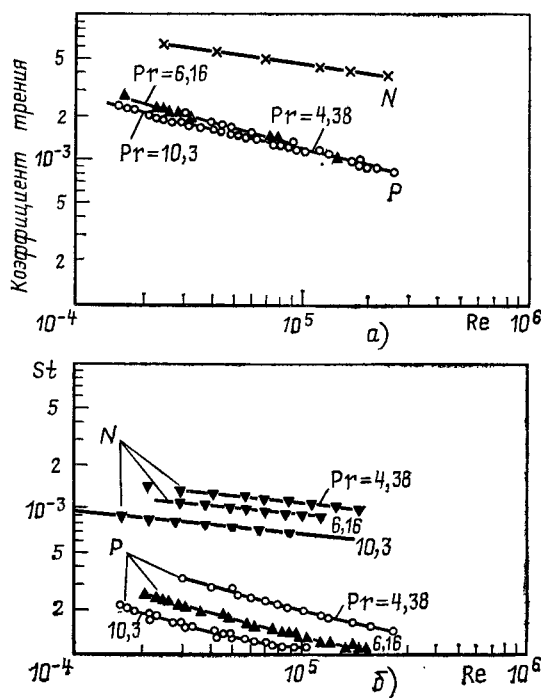


Рис. 10. Коэффициент трения и число Стантона для турбулентного тчения в трубах воды N и 50 частей оксида полиэтилена на миллион частей воды P при трех различных числах Прандтля: a — коэффициент трения для раствора полимера показывает слабую зависимость от Pr ; кривая воды для всех трех Pr ; b — уменьшение St при добавке полимера одинаково для каждого Pr [12]

Здесь ΔT^0 нужно выбрать так, чтобы оно было равно той же самой характеристической разности температур, которая используется для приведения уравнения энергии к безразмерному виду.

Г. Теплообмен в турбулентных потоках слабых растворов полимеров. Хорошо известно (см. § 2.2.8), что добавление малых количеств полимеров, имеющих высокую молекулярную массу, к турбулентному потоку в трубах может привести к существенному снижению коэффициента трения при заданном числе Рейнольдса. Неудивительно, что тот же самый механизм, который дает это снижение торможения среды, мог бы также воздействовать на тепло- и массоперенос к стенке в турбулентном потоке.

На рис. 10 приведены результаты, полученные в [23], которые подтверждают это утверждение. На рис. 10 a , показан коэффициент трения для воды с добавкой и без добавки $50 \cdot 10^{-6}$ долей окиси полиэтилена (РЕО); видно, что добавление полимера вызывает уменьшение силы сопротивления (f уменьшается приблизительно на 75% при $Re=10^6$), а число Прандтля ($Pr=c_p \mu / \lambda$) не имеет, как и ожидалось, никакого влияния на f . На рис. 10, b представлен коэффициент теплоотдачи в виде числа Стантона

$$St = \frac{q_0}{(T_w - T_b) c_p G} = \frac{\alpha}{c_p G}, \quad (46)$$

в котором q_0 — постоянный тепловой поток, приложенный к стенке трубы; $T_w - T_b$ — локальная разность температуры стенки и среднemasовой температуры; α — локальный коэффициент теплоотдачи; G — массовая скорость. Ясно, что имеется существенное снижение переноса теплоты при добавлении полимера. Хотя число St зависит от числа Pr , изменение в St , вызываемое полимером, приблизительно одно и то же при каждом Pr . При $Re=10^6$, например, число St уменьшается приблизительно на 82% при всех трех числах Прандтля.

Другие данные о влиянии добавки полимеров на St при высоких Re можно найти в [24—29]. Эти данные подтверждают уменьшение теплопереноса при добавлении полимера, снижающего сопротивление, но они не совпадают в оценке относительного воздействия на St и f . Таким образом, необходима осторожность при обобщении результатов, показанных на рис. 10.

2.5.13. Теплообмен в жидких металлах¹

В. М. Боришанский, Е. В. Фирсова

Жидкие металлы отличаются от газов и других жидкостей тем, что их температуропроводность значительно выше их кинематической вязкости, т. е. $Pr \ll 1$. Молекулярный перенос теплоты в ламинарных и турбулентных потоках жидких металлов играет существенную роль как в пограничном слое, так и в турбулентном ядре. Число Нуссельта является функцией числа Пекле: $Nu = f(Pe)$.

А. Течение в каналах. Трубы. Числа Нуссельта $(0,007 \leq Pr \leq 0,03)$ для жидких металлов, движущихся в трубах с $ld \geq 30$ описываются выражениями

$$Nu = 7,5 + 0,005 Pe, \quad 300 \leq Pe \leq 10^4, \quad (1)$$

когда $q_w = \text{const}$ [1, 2], и

$$Nu = 5 + 0,025 Pe^{0,8}, \quad 100 \leq Pe \leq 2 \cdot 10^4, \quad (2)$$

когда $t_w = \text{const}$ [3, 4]. В интервале $30 \leq Pe \leq 300$ для определения Nu рекомендуется использовать следующую формулу (при $q_w = \text{const}$):

$$Nu = 4,36 + 0,016 Pe. \quad (3)$$

Эта формула позволяет определить предельный переход к рассчитываемому значению числа Нуссельта для полностью развитого ламинарного течения.

Эти формулы верны для нагрева и охлаждения трубы при условии, что концентрация примеси (кислород, азот и т. д.) в жидком металле меньше, чем предел растворимости окиси при рабочей температуре. Если это неверно, коэффициент теплоотдачи сильно уменьшается вследствие увеличения сопротивления теплопереносу на границе стенки — жидкость. Минимальное значение числа Нуссельта при нагревании жидкого металла, загрязненного примесями, можно найти в [1]

$$Nu = 4,3 + 0,0021 Pe, \quad \text{если } 100 \leq Pe \leq 10^4. \quad (4)$$

Термическое сопротивление на границе раздела стенки — жидкость может иметь различные значения, зависящие от физико-химических свойств охладителя. Несколько случаев, в которых учитывается влияние термического контактного сопротивления на число Нуссельта, дано в [5].

Кольцевые каналы. Число Нуссельта для турбулентного течения жидких металлов ($0,007 \leq Pr \leq 0,03$) в кольцевых каналах в отличие от Nu для течения в трубах зависит от отношения диаметров труб, образующих канал, так же как от характера подвода теплоты (с внутренней стороны, с внешней стороны или с обеих сторон).

При неравных тепловых потоках необходимо проверить рассчитанную температуру стенки, так как при определенных условиях теплопереноса понятие коэффициента теплоотдачи теряет свое значение (температура стенки T_1 или T_2 становится равной среднemasсовой температуре жидкости T_b). Имеется также возможность передачи теплоты от одной стенки к другой. Как показано при помощи специального анализа [6], даже при равных тепловых потоках или равных температурах для практического использования не рекомендуются кольцевые каналы с $d_2/d_1 \geq 3$.

Числа Нуссельта для турбулентного течения чистого металла в кольцевом канале для внешней стенки Nu_2 и

внутренней стенки Nu_1 с односторонним или двусторонним нагревом или охлаждением рассчитывались в [6] и представлены в виде

$$Nu = a + b(\bar{\epsilon} Pe)^c \quad (5)$$

где a, b, c — функция отношения внешнего диаметра канала к внутреннему диаметру и характера подвода или отвода теплоты. Численные значения коэффициентов a, b, c приведены в табл. 1. Характерным размером, используемым при определении числа Нуссельта, является гидравлический диаметр. Уравнение (5) справедливо для $\bar{\epsilon} \geq 0$ [7], где

$$\bar{\epsilon} = 1 - \frac{1,82}{Pr (v_T/v)_{\max}^{1,4}}. \quad (6)$$

Отношение $(v_T/v)_{\max}$ для кольцевого зазора выражается соотношением

$$\left(\frac{v_T}{v}\right)_{\max} = 4,0 + 0,002897 Re^{0,919}; \quad (7)$$

$$Re = \frac{w(d_2 - d_1)}{v}.$$

Поперечное обтекание. Число Нуссельта для поперечного обтекания жидким металлом трубных пучков, расположенных в шахматном порядке и в одну линию, для $0,007 \leq Pr \leq 0,03$ и $10 \leq Pe \leq 1300$ можно рассчитать, используя [8],

$$Nu = 2Pe^{0,5}, \quad (8)$$

где Re определяется с использованием скорости потока, натекающего на пучок. Характерным размером является внешний диаметр труб пучка. Теплофизические свойства охладителей вычисляются при среднemasсовой температуре.

Числа Нуссельта для течения жидкого металла в простых трубных пучках, когда угол ψ (острый угол между направлением течения и осью трубы) лежит в интервале $30-90^\circ$, для $0,007 \leq Pr \leq 0,03$ и $10 \leq Pe \leq 700$ определяются в [9] следующим образом:

$$Nu_\psi = Nu(\sin\psi)^{0,4}, \quad (9)$$

где Nu — число Нуссельта для поперечного обтекания из (8). Характерным размером, используемым для чисел Нуссельта и Пекле, является внешний диаметр трубы.

Теплофизические свойства вычисляются при средней температуре потока.

Обтекание пучков стержней. Число Нуссельта для поперечного потока жидких металлов через пучок труб, расположенных в виде равностороннего треугольника, для $0,007 \leq Pr \leq 0,03$ и $1,1 \leq P/d \leq 1,5$ можно рассчитать согласно [10]:

для ламинарного течения, $30 \leq Pe \leq 200$

$$Nu_{mc} = 24,15 \lg \left[-8,12 + 12,76 \frac{P}{d} - 3,65 \left(\frac{P}{d} \right)^2 \right]; \quad (10)$$

для турбулентного течения, $200 \leq Pe \leq 2000$

$$Nu = Nu_{mc} + 0,0174 \left\{ 1 - \exp \left[-6 \left(\frac{P}{d} - 1 \right) \right] \right\} \times (Pe - 200)^{0,9}, \quad (11)$$

где Nu_{mc} рассчитывается из уравнения (10). Характерным размером для расчета Nu и Pe является эквивалентный диаметр пучка в виде равностороннего треугольника с бесконечным числом труб

$$D_k = d \left[1,1 \left(\frac{P}{d} \right)^2 - 1 \right]. \quad (12)$$

¹ Пер. с англ. Е. Б. Эйгенсон.

Таблица 1. Эмпирические константы в уравнении (5) для теплообмена в жидких металлах в коаксиальном кольцевом зазоре при условиях однородности тепловых потоков и полностью развитых профилях скорости и температуры (турбулентное течение)

Условия теплопереноса	Число Нуссельта	$d_2/d_1=y$	a	b	c
Теплообмен только на внутренней стенке	Nu_1	1—7	$4,82+0,697y$	0,0222	$0,758y^{0,053}$
Теплообмен только на внешней стенке	Nu_2	1—7	$5,54-0,023y$	$0,0189+0,003y$ $+0,0000867y^2$	$0,758y^{-0,0204}$
Равные тепловые потоки на обеих стенках	Nu_1	1,0	9,49	0,0596	0,688
		1,25	10,53	0,0662	0,698
		1,50	11,81	0,0726	0,701
		2,0	15,30	0,0855	0,704
		3,0	27,0	0,1095	0,707
		4,0	50,0	0,1278	0,708
Равные тепловые потоки на обеих стенках	Nu_2	1,0	9,49	0,0596	0,688
		1,25	8,72	0,0490	0,707
		1,50	8,24	0,0420	0,723
		2,0	7,60	0,0379	0,735
		3,0	6,94	0,0360	0,741
		4,0	6,64	0,355	0,743
Теплообмен на обеих стенках при $T_1=T_2$ в любом сечении	Nu_1	1—7	$7,82+1,72y$ $-0,051y^2$	$0,0592-0,000342y$ $+0,000723y^2$	$0,655+0,363y$ $-0,0037y^2$
		Nu_2	1—7	$7,11+3,22/y$ $-0,842/y$	$0,746-0,864/y$ $+0,0282/y^2$

где P/d — относительный шаг равностороннего пучка труб. Теплофизические свойства охладителей рассчитываются при средней температуре потока.

Для относительных шагов $P/d < 1,1$ среднее число Нуссельта зависит от тепловых граничных условий [1, 11].

В. Теплообменники на жидких металлах. Жидкометаллические теплообменники существенно отличаются от теплообменников с теплоносителями обычного типа, потому что жидкометаллические теплоносители имеют маленькие теплоемкости и большие коэффициенты теплопроводности и проводимость теплоты в направлении течения потока может быть много больше, чем между теплоносителями (если значения Pe не очень велики). В результате неупорядоченность температуры поперек теплообменника играет важную роль и ведет к уменьшению эффективности теплообменника [1].

Использование обычной формулы

$$Q = UA\Delta T_{LM} \quad (13)$$

для расчета переноса теплоты в жидкометаллических теплообменниках требует, чтобы коэффициент U был определен эмпирически для конкретного устройства. Как правило, это значение существенно ниже значения, рассчитанного по этой формуле.

Например, соответствующие значения U для натрий-натриевого теплообменника реактора «Эприко Ферми» составляют 3700 и 8200 Вт/(м²·К) [12], а для теплообменника реактора «Феникс» — 8600 и 11 200 Вт/(м²·К) [13, 14]; в последнем случае значения были рассчитаны с использованием рекомендаций [5].

Неэффективное использование теплопередающей поверхности вызывается тем, что локальные скорости охладителя неоднородно распределены поперек пучка. Среди факторов, вызывающих эту неоднородность, — деформация труб в пучке, происходящая в результате различного их теплового расширения. Это изменяет упаковку труб в пучке и вызывает образование областей, имеющих более или менее плотную упаковку, которая сравнима со средней плотностью по пучку. Дополнительные эффекты вызваны боковым впуском и выпуском охладителя на сто-

роне кожуха, неоднородным входом охладителя вдоль периметра пучка, утечками вдоль кожуха и неоднородным распределением охладителя в трубах. В [11, 15, 16] в общих чертах описан подход к решению этих задач с учетом влияния сложного характера течения охладителя на теплообмен в пучках труб. Предлагается также полуэмпирический метод для определения поправочного множителя, представленного в (13), который применим для инженерных расчетов [15, 16]. Параметры неоднородности теплообменника дают количественную характеристику влияния упомянутого множителя на уменьшение эффективности теплообмена [16]. Для расчета используются следующие формулы:

$$\dot{Q} = UA\Delta T_m; \quad (14)$$

$$\dot{Q} = Cp_2\dot{M}_2(T_{2, out} - T_{2, in}) = \eta_2 Cp_2\dot{M}_2(T_{1, in} - T_{2, in}), \quad (15)$$

где $\Delta T_m = \psi\Delta T_{LM}$; $\psi < 1$ — поправочная функция, $\psi = \psi(\eta_2, m, \varepsilon)$;

$$\psi = \frac{m - \varepsilon}{m - 1} \frac{\ln[(m - \eta_2)/(m(1 - \eta_2))]}{\ln[\varepsilon(m - \eta_2)/(m(\varepsilon - \eta_2))]} \quad \text{для } \eta_2 < m; \quad (16)$$

$$\psi = \frac{\varepsilon - \eta_2}{1 - \eta_2} \quad \text{для } \eta_2 = m; \quad (17)$$

$$\psi = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \eta_2)}{\eta_2(1 - \varepsilon)} \ln \frac{\varepsilon(1 - \eta_2)}{\varepsilon - \eta_2} \quad \text{для } m = \varepsilon; \quad (18)$$

$$\psi = \frac{\eta_2(1 - \varepsilon)}{1 - \eta_2} \frac{1}{\ln[\varepsilon(1 - \eta_2)/(\varepsilon - \eta_2)]} \quad \text{для } m = 1. \quad (19)$$

Здесь $m = \frac{Cp_1\dot{M}_1}{Cp_2\dot{M}_2}$ — отношение водяных эквивалентов

нагрева и нагреваемых охладителей; η_2 — эффективность теплообменника, определяемая как повышение температуры холодного теплоносителя [см. (15)]. Коэффициент неоднородности определяется эмпирически [15]. Рекомендуется использовать $\varepsilon = 0,85$ [17]. Для противоточных теплообменников $\eta_2 < \varepsilon < 1$.

Раздел 2.6

КОНДЕНСАЦИЯ¹

2.6.1. Общие сведения

Д. Баттеруорт

А. Типы конденсации. Конденсат может образовываться из пара различными путями, которые показаны на рис. 1 и рассмотрены ниже.

1. **Пленочная конденсация.** Конденсат образует непрерывную пленку на охлаждаемой поверхности. Это наиболее важный тип конденсации, встречающийся в промышленном оборудовании; он обсуждается в § 2.6.2.

2. **Гомогенная конденсация.** Пар конденсируется на каплях, взвешенных в газовой фазе, создавая таким образом туман. Для того, чтобы это происходило, температура пара должна быть ниже температуры насыщения. Этого

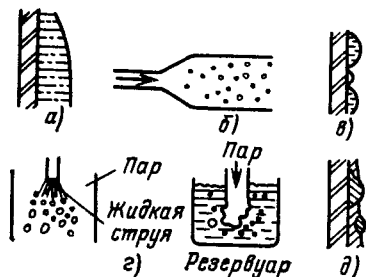


Рис. 1. Виды конденсации:

а — пленочная конденсация; б — гомогенная конденсация — образование тумана; в — капельная конденсация; г — конденсация при прямом контакте; д — конденсация паров, образующих несмешивающиеся жидкости

можно достигнуть, повышая давление пара и пропуская его через устройства с плавным увеличением площади сечения. Обычно это происходит в конденсаторах при конденсации паров с высокой относительной молекулярной массой при наличии неконденсирующегося газа. Этот вопрос обсуждается в § 2.6.7.

3. **Капельная конденсация.** Она происходит в том случае, когда конденсат образуется в виде капель на охлаждаемой поверхности вместо непрерывной пленки. При капельной конденсации можно получить высокие коэффициенты теплоотдачи, но в теплообменниках ее трудно поддерживать в течение продолжительного времени. Этот вопрос рассмотрен в § 2.6.5.

4. **Конденсация при прямом контакте.** Она наблюдается, если пар контактирует с холодной жидкостью.

5. **Конденсация смесей паров, образующих несмешивающиеся жидкости.** Например, конденсация смеси паров углеводородов. Структуры, образуемые в жидкой фазе, при этом сложны; изменения описаны в § 2.6.4.

В. Термические сопротивления при конденсации. Во всех только что рассмотренных типах конденсации в жидкой фазе или жидкой и парогазовой фазах возникают термические сопротивления. Эти возможности можно проиллюстрировать, рассмотрев пленочную конденсацию. На рис. 2 изображена пленочная конденсация чистого пара и пара в смеси с неконденсирующимся газом.

В первом случае показан предел температуры, изменяющейся от температуры пара до температуры охладителя в условиях, когда пар насыщен. Для выполнения условия термодинамического равновесия необходимо, чтобы температура границы раздела пар — жидкость T_I была равна температуре насыщения T_{sat} . Иногда возможны исклю-

чения, которые обсуждаются далее. Следовательно, профиль температуры в газовой фазе плоский. Иначе говоря, в газовой фазе нет термического сопротивления.

Однако в пленке конденсата, в стенке и в охладителе происходит падение температуры, хотя мы рассматриваем здесь только изменение температуры в конденсатах. В ламинарной пленке конденсата профиль температуры — прямая линия (или очень близок к ней, исключая особые условия). В турбулентных пленках профиль искривлен (рис. 2).

Можно определить коэффициент теплоотдачи α для пленки конденсата следующим образом:

$$\alpha = \dot{q} / (T_I - T_w) = \dot{q} / (T_{sat} - T_w), \quad (1)$$

где $\dot{q}$ — плотность теплового потока, передаваемого через пленку (и стенку). В § 2.6.2 показано, как рассчитать этот коэффициент в различных случаях пленочной конденсации. В процессе капельной конденсации профиль температуры и тепловой поток изменяются во времени очень быстро, но осредненный по времени коэффициент теплоотдачи можно определить, считая тепловой поток и температуру стенки в уравнении (1) осредненными во времени величинами. Расчет этого коэффициента теплоотдачи приведен в § 2.6.8.

В случае, если в смеси с паром имеется какой-либо неконденсирующийся газ, в парогазовой среде появляется дополнительное падение температуры (рис. 2). Этот температурный перепад возникает потому, что необходимо создать перепад парциального давления для движения пара через неконденсирующийся газ к границе раздела. Этот перепад парциального давления связан с перепадом температуры, потому что парциальное давление пара на границе раздела (p_{VI}) равно давлению насыщения, соответствующему T_I , следовательно, единственный путь понижения p_{VI} — уменьшение T_I . Это обсуждается в § 2.6.3 вместе с методами расчета теплоотдачи и скорости конденсации. Подобное понижение температуры в газовой фазе происходит и при конденсации паровых смесей и также рассматривается в § 2.6.3.

Проведенное выше обсуждение предполагало, что на границе раздела имеет место термодинамическое равновесие пара и жидкости. Строго оно возможно только в стационарной системе, т. е. при нулевой суммарной конденсации. В действительности на границе раздела при конденсации имеется падение температуры, однако оно обычно так мало, что им можно с уверенностью пренебречь. Этот температурный перепад обсуждается в § 2.6.2.

Необходимо сделать одно дополнительное замечание относительно равновесия пар — жидкость. Обычные кривые насыщения и соответствующие кривые равновесия для смесей предполагают, что конденсация происходит при плоских границах раздела. Однако эти кривые могут из-

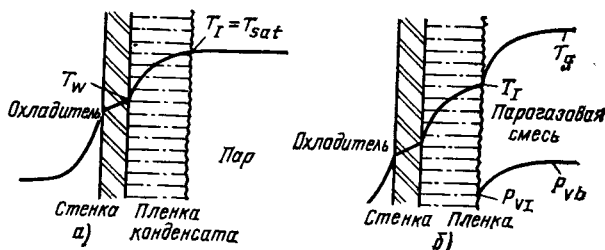


Рис. 2. Термические сопротивления при конденсации: а — чистый (насыщенный) пар; б — пар при наличии неконденсирующегося газа

¹ Пер. с англ. Ю. А. Кузнец-Кичты.

мениться, если граница раздела имеет большую кривизну. Указанные эффекты становятся значительными в случае, если образуются очень маленькие капли (около 10 мкм), как при появлении тумана (см. § 2.6.7).

2.6.2. Пленочная конденсация чистого пара

Д. Баттеруорт

А. Введение. В § 2.6.1 описаны различные термические сопротивления со стороны конденсации. Там показано, что при конденсации чистого пара основное термическое сопротивление связано с пленкой конденсата, образующейся на охлаждаемой поверхности. Вообще, чем тоньше пленка, тем выше коэффициент теплоотдачи при прочих равных условиях. При одинаковой толщине медленно движущаяся ламинарная пленка обладает большим сопротивлением, чем быстро движущаяся турбулентная пленка. Важным фактором в получении быстро движущихся пленок является сдвигающее усилие пара. Другие факторы, которые могут изменить коэффициент теплоотдачи, — это волны, разбрызгивание и переохлаждение конденсата.

Ниже рассматривается качественно конденсация на вертикальной поверхности, которой в теплообменниках служит обычно вертикально расположенная труба. На рис. 1 показаны основные особенности конденсации на такой поверхности при неподвижном паре, т. е. при незначительном сдвигающем усилии. Расход конденсата, текущего вниз, равен нулю в верхней части поверхности и с удалением от нее увеличивается по мере того, как накапливается конденсат. В верхней части поверхности существует область с очень малыми числами Re конденсата, где течение ламинарное и безволновое. В некоторой расположенной ниже по поверхности точке число Re достигает такого значения, при котором на границе раздела пар — жидкость образуются неустойчивости, приводящие к появлению волн на пленке. Еще ниже по поверхности число Re возрастает до значения, когда возникает турбулентность. В области ламинарного течения коэффициент теплоотдачи уменьшается с увеличением толщины конденсатной пленки, хотя в области волнового движения скорость уменьшения снижается вследствие перемешивающего эффекта волн. Турбулентность приводит к резкому утолщению пленки в до-

полнение к утолщению в результате накопления конденсата. Однако утолщение обычно с избытком компенсируется лучшим переносом теплоты в турбулентном потоке. Поэтому в этой области обнаруживается тенденция к увеличению коэффициента теплоотдачи. В случае жидких металлов имеются некоторые особенности, которые рассмотрены ниже.

Скорость движущегося вниз пара стремится увеличить коэффициент как посредством утоньшения пленки, так и в результате увеличения турбулентности, и этот вопрос обсуждается ниже. Скорость движущегося вверх пара ведет к противоположному эффекту, но это не имеет значения, так как уже при скоростях, меньших значения, которое заметно воздействует на теплоотдачу, имеет место явление захлебывания. Это явление возникает в случае, когда конденсат не стекает в нижней части поверхности в результате действия восходящего потока пара. Оно обсуждается ниже.

В п. С рассмотрена конденсация на горизонтальных и расположенных под небольшим углом к горизонту трубах. Сначала обсуждается наиболее простой случай — одиночная горизонтальная труба. На рис. 2 показана конденсация, которая имеет место в этих условиях. Скорость пара вокруг трубы может быть при этом достаточной для того, чтобы влиять на пленку конденсата и, следовательно, на коэффициент теплоотдачи. Наиболее распространенные направления потока пара — опускное и горизонтальное, их результирующие эффекты рассмотрены также ниже. При анализе пучков труб возникают трудности, связанные с тем, что конденсат с верхних труб стекает на нижние, этот вопрос также рассмотрен ниже.

В п. D рассмотрена конденсация в горизонтальных трубах. Известно, что в этом случае коэффициент теплоотдачи существенно зависит от структуры двухфазного потока и потому сначала рассматриваются его режимы. Два важных режима потока (расслоенный и кольцевой) приведены на рис. 3. Они соответствуют относительно большому и относительно малым скоростям течения в трубе. Для каждого режима даны методы расчета коэффициента теплоотдачи и критерии, позволяющие определять эти режимы.

Как отмечалось в § 2.6.1, на границе раздела пар — жидкость имеется малое термическое сопротивление, вызванное молекулярно-кинетическими эффектами. Метод его расчета рассмотрен в п. Е. Это сопротивление на границе раздела обычно намного меньше значения, имеющего какое-либо практическое значение. Исключения составляют: пленочная конденсация обычных жидкостей при давлении ниже 0,002 МПа; пленочная конденсация жидких металлов при давлении ниже 0,01 МПа; капельная конденсация пара при давлении ниже 0,01 МПа (см. § 2.6.8); конденсация при прямом контакте и давлении 0,095 МПа (см. § 2.6.5).

Некоторые методы, используемые для расчета теплоотдачи при конденсации обычных паров, не применимы в случае паров жидких металлов. Поэтому в п. D обсуждаются особые эффекты, возникающие в жидких металлах.

В. Вертикальные поверхности, включая вертикальные трубы. Ламинарная безволновая конденсация пленка с пренебрежимо малой скоростью пара. Эта проблема впервые проанализирована в [1], где получено следующее выражение для локального коэффициента α на расстоянии z от вершины пластины или трубы¹:

$$\alpha = \left[\frac{\lambda_l^3 (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v}{4 \eta_l (T_{sat} - T_w) z} \right]^{1/4} \quad (1)$$

где λ_l — коэффициент теплопроводности конденсата;

¹ Подъемной силой, вызванной газовой фазой, обычно автор [1] пренебрегал, но здесь она включена (см. [2]).

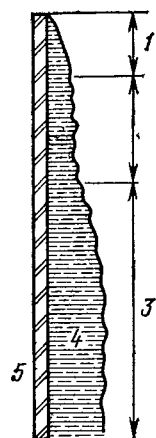


Рис. 1. Конденсация на вертикальной поверхности (без сдвигающего усилия пара): 1 — ламинарная безволновая пленка; 2 — ламинарная волновая пленка; 3 — турбулентная пленка; 4 — пленка конденсата; 5 — охладитель

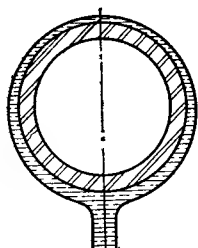


Рис. 2. Конденсация на горизонтальной трубе (без сдвигающего усилия пара)

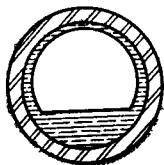


Рис. 3. Конденсация при расслоенном (слева) и кольцевом (справа) режимах течения

ρ_l — плотность конденсата; ρ_g — плотность пара; g_n — ускорение силы тяжести; η_l — вязкость конденсата; T_{sat} — температура насыщения; T_w — температура стенки. Средний коэффициент α по высоте L определяется выражением

$$\bar{\alpha} = 0,943 \left[\frac{\lambda_l^3 \rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v}{\eta_l (T_{sat} - T_w) L} \right]^{1/4} \quad (2)$$

где предполагается, что T_w постоянна на этом расстоянии.

В [3] это выражение модифицировано для учета изменения температуры стенки, которое описывается следующим образом:

$$T_w = T_{sat} - az^n. \quad (3)$$

В результате

$$\bar{\alpha} = \frac{4}{3-n} \left(\frac{n+1}{4} \right)^{1/4} \left[\frac{\lambda_l^3 \rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v}{\eta_l \Delta T L} \right]^{1/4}, \quad (4)$$

где $\Delta T = T_{sat} - T_w$ на расстоянии L вниз по поверхности.

Приведенные выше уравнения применяются даже в случае, если имеются значительные изменения свойств в конденсатной пленке, причем: 1) Δh_v и ρ_g определяются при температуре насыщения; 2) λ_l и ρ_l — среднеарифметические значения при температуре стенки и насыщения; 3) согласно [4—6]

$$\eta_l = (3\eta_w + \eta_{sat})/4. \quad (5)$$

Иногда необходимо знать расход образующегося конденсата; он записывается для единицы ширины поверхности следующим образом:

$$\dot{\Gamma}_L = \dot{M}/s, \quad (6)$$

где s — ширина пластины или для трубы $s = \pi D$, где D — наружный диаметр при конденсации снаружи трубы и внутренний диаметр при конденсации внутри трубы. С учетом теплового баланса у основания поверхности

$$\dot{\Gamma}_L = \bar{\alpha} (T_{sat} - T_w) L / \Delta h_v. \quad (7)$$

Приведенные выше уравнения применяются при конденсации насыщенного пара. Если пар перегрет, то средний коэффициент теплоотдачи определяется согласно [2, 3]

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{Nu} \left[1 + \frac{c_{pg} (T_g - T_{sat})}{\Delta h_v} \right]^{1/4}, \quad (8)$$

где $\bar{\alpha}_{Nu}$ — коэффициент, определяемый из решения Нуссельта; c_{pg} — удельная теплоемкость пара; T_g — температура в объеме пара. Это выражение дает больший коэффициент, чем величина, полученная для насыщенного пара, но количество образующегося конденсата уменьшается, так как часть отводимой теплоты поглощается при охлаждении пара, а не идет на образование конденсата. Количество полученного конденсата определяется согласно [2]

$$\dot{\Gamma}_L = \frac{\bar{\alpha} (T_{sat} - T_w) L}{\Delta h_v + c_{pg} (T_g - T_{sat})}. \quad (9)$$

Приведенные выше уравнения не учитывают следующие (несущественные) эффекты: нелинейность температурного профиля в конденсатной пленке; инерционные эффекты в конденсатной пленке; эффекты инерционности и трения в паре, прилегающем к конденсатной пленке.

Для учета этих эффектов в [7] уравнение Нуссельта [1] скорректировано. Поправки зависят от числа $Pg = c_{pl} \eta_l / \lambda_l$ конденсата и параметра переохлаждения ϵ , определяемого выражением

$$\epsilon = c_{pl} (T_{sat} - T_w) / \Delta h_v. \quad (10)$$

Здесь c_{pl} — удельная теплоемкость конденсата. Корректирующие множители для коэффициента теплоотдачи представлены в графической форме на рис. 4. Видно, что эти

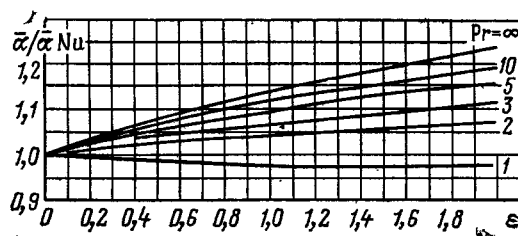


Рис. 4. Поправки на эффекты переохлаждения и инерции (согласно [7])

корректирующие множители малы для многих обычно встречающихся конденсатов с числами Pg , заключенными в интервале от 1 до 5. Расход образующегося конденсата определяется выражением

$$\dot{\Gamma}_L = \frac{\bar{\alpha} (T_{sat} - T_w) L}{\Delta h_v (1 + 0,375\epsilon)}. \quad (11)$$

При проектировании конденсаторов часто более важно знать коэффициент теплоотдачи, выраженный через расход конденсата $\dot{\Gamma}_L$, чем через перепад температуры в пленке. Он определяется путем исключения разности $T_{sat} - T_w$ из (2) и (7)

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3} = 1,47 Re_L^{-1/3}, \quad (12)$$

где Re_L — число Рейнольдса конденсатной пленки на расстоянии L вниз от начала пластины (у основания поверхности), причем

$$Re_L = 4 \dot{\Gamma}_L / \eta_l. \quad (13)$$

Соответствующее соотношение для локального коэффициента теплоотдачи имеет вид:

$$\frac{\alpha}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3} = 1,1 Re^{-1/3}, \quad (14)$$

где

$$Re = 4 \dot{\Gamma} / \eta_l. \quad (15)$$

Здесь $\dot{\Gamma}$ — локальный расход конденсата на единицу ширины поверхности. Это уравнение, являясь выражением для локальных величин, используется, когда разность температур и физические свойства изменяются по высоте поверхности. Вызвано это тем, что при указанных условиях допущения, использованные при получении среднего коэффициента в соотношении (12), не выполняются. Однако уравнение (14) можно применять, последовательно продвигаясь по поверхности. На каждом шаге коэффициент теплоотдачи рассчитывается из (14), затем расход конденсата, необходимый для расчета числа Re в следующем шаге, определяется из теплового баланса.

Уравнения (12) и (14) отличаются от соответствующих известных выражений тем, что число Re входит в них в явном виде. Это значит, что сразу можно установить, имеются ли в пленке волны или турбулентность и справедливы ли поэтому указанные соотношения. В действительности волны начинают влиять на коэффициент при числах $Re \approx 30$ [8—10], что является таким образом верхним пределом применения указанных зависимостей.

Влияние волн и турбулентности. С. С. Кутателадзе [9] предложил следующий корректирующий множитель в уравнении [14] в области волнового ламинарного течения:

$$\text{поправка} = 0,8 \left(\frac{Re}{4} \right)^{0,11}. \quad (16)$$

Эта поправка согласуется с большим числом данных, приведенных в [11]. При введении ее в (14) получаем

$$\frac{\alpha}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3} = 0,756 Re^{-0,22}. \quad (17)$$

В некоторых случаях необходим средний по поверхности коэффициент, который охватывает области волнового и безволнового движения. Общим определением указанной средней величины является

$$\frac{Re_L}{\alpha} = \int_0^{Re_L} \frac{dRe}{\alpha}. \quad (18)$$

Это уравнение можно решить при α из (14) для $Re < 30$ и затем с помощью соотношения (17) для $Re > 30$. Результатом является соотношение

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3} = \frac{Re_L}{1,08 Re_L^{1,22} - 5,2}. \quad (19)$$

Уравнения (17) и (18) можно использовать до возникновения турбулентного течения. Относительно пленок, стекающих под действием силы тяжести, существуют различные мнения о числе Re , определяющем возникновение турбулентности. Однако принято считать, что турбулентность начинает существенно влиять на коэффициент теплоотдачи при конденсации при числах $Re \approx 1600 \div 1800$ [11—15]. Ниже в расчетах используется нижнее значение.

Конденсация при турбулентных стекающих пленках рассмотрена в большом числе работ; наиболее известные из них — [9, 12—17]. В некоторых [11, 16, 17] предполагают, что существенная турбулентность возникает уже при числах $Re < 1600$, поэтому они не рекомендуются, в особенности для чисел $Pr > 2$. Ниже выбран самый простой метод, который легко применять при проектировании и в расчетных программах. Вряд ли усложнение метода при-

ведет к существенно лучшим предсказаниям. Поэтому рекомендуется полуэмпирический метод [14], согласно которому локальный коэффициент теплоотдачи определяется выражением

$$\frac{\alpha}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3} = 0,023 Re^{0,25} Pr^{0,5}. \quad (20)$$

Коэффициент теплоотдачи, осредненный на участках с ламинарным безволновым, ламинарным волновым и турбулентным течениями, получается из уравнений (14), (17), (18) и (20)

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3} = \frac{Re_L}{8750 + 58 Pr^{-0,5} (Re_L^{0,75} - 253)}. \quad (21)$$

На рис. 5 приведена зависимость безразмерно локального коэффициента теплоотдачи от числа Re для ламинарного, ламинарного волнового и турбулентного течений. На рис. 6 приведена та же зависимость для среднего коэффициента теплоотдачи.

Уравнения (20) и (21) завышают коэффициент теплоотдачи для $Pr > 10$. Поэтому рекомендуется в маловероятном случае образования турбулентной конденсатной пленки при $Pr > 10$ приведенные выше соотношения использовать со значением $Pr = 10$.

Влияние касательных напряжений на границе раздела. Существенным эффектом направленного вниз сдвигающего усилия пара на границе раздела является снижение критического числа Re возникновения турбулентности. Данные и анализы по этой теме недостаточны; имеется единственный важный источник [13]. Их анализ незначительно изменен, чтобы сделать его согласующимся по критическим числам Re , используемым в этом подразделе для очень больших и очень малых сдвигающих усилий. Результатом является выражение

$$Re_c = 1600 - 226 \tau_l^+ + 0,667 (\tau_l^+)^3 \quad (\text{для } \tau_l^+ \leq 9,04) \quad (22)$$

и

$$Re_c = 50 \quad (\text{для } \tau_l^+ > 9,04), \quad (23)$$

где Re_c — критическое число Re возникновения турбулентности; τ_l^+ — безразмерное касательное напряжение на границе раздела, определяемое как

$$\tau_l^+ = \frac{\rho_l \tau_l}{[\rho_l (\rho_l - \rho_g) \eta_l g_n]^{2/3}}, \quad (24)$$

где τ_l — сдвигающее усилие на границе раздела. Результат расчета по (22) и (23) приведен на рис. 7.

Рассмотрим сначала случай, когда сдвигающее усилие на границе раздела превосходит гравитационные силы в пленке. При этих условиях локальный коэффициент теплоотдачи согласно [18] для ламинарной пленки имеет вид:

$$\alpha^+ = 1,41 Re^{-1/2} (\tau_l^+)^{1/2}, \quad (25)$$

для турбулентной пленки

$$\frac{\alpha^+}{(\tau_l^+)^{1/2}} = \left[\left(\frac{1,41}{Re^{1/2}} \right)^m + \left(\frac{0,071 Pr^{1/2}}{Re^{1/24}} \right)^m \right]^{1/m}, \quad (26)$$

где

$$m = \frac{1}{2} (Pr + 3). \quad (27)$$

Выбор между указанными соотношениями зависит от того, меньше или больше число Re величины Re_c , определяемой выражениями (22) и (23). Безразмерный коэффициент теп-

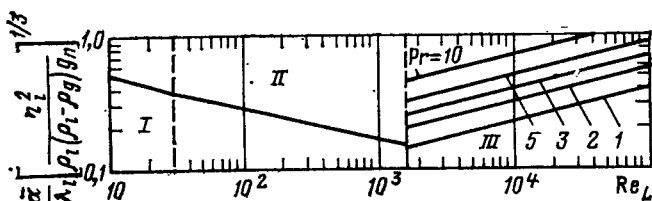


Рис. 5. Локальные коэффициенты теплоотдачи при конденсации на вертикальной поверхности:

I — ламинарная безволновая пленка; II — ламинарная волновая пленка; III — турбулентная пленка

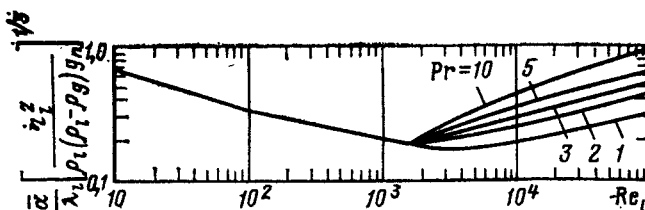


Рис. 6. Средние коэффициенты теплоотдачи при конденсации на вертикальной поверхности

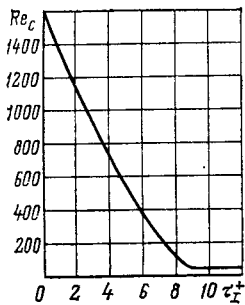


Рис. 7. Влияние касательных напряжений на границе раздела на критическое число Рейнольдса

лоотдачи α^+ находят из выражения

$$\alpha^+ = \frac{\alpha}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3}, \quad (28)$$

он представляет собой тот же комплекс, который фигурирует в левых частях многих предыдущих соотношений. Результат расчета по (25)–(27) представлен на рис. 8.

При использовании (26) и (27) коэффициент теплоотдачи при $Pr > 10$ получается завышенным. Поэтому рекомендуется число Pr брать равным 10 всякий раз, когда оно больше этой величины.

Теперь необходимо рассмотреть случай, когда существенны как сдвигающее усилие пара, так и сила тяжести. Это можно сделать [18], используя зависимость

$$\alpha = (\alpha_{sh}^2 + \alpha_{grav}^2)^{1/2}, \quad (29)$$

где α_{sh} — коэффициент теплоотдачи, рассчитанный для потока с преобладанием сдвигающего усилия, и α_{grav} — для потока с преобладанием силы тяжести [с помощью (14), (17) и (20)]. Простым правилом, достаточным для предварительных расчетов, является выбор в качестве α большей из α_{sh} и α_{grav} .

Прежде чем использовать зависимости (22)–(26), необходимо знать касательные напряжения на границе раздела τ_l . Наиболее простой метод их расчета представлен ниже

$$\tau_l = \frac{D}{4} \left(-\frac{dp_F}{dz} \right), \quad (30)$$

где D — внутренний диаметр трубы при течении в трубах или гидравлический средний диаметр для опускного потока пара снаружи труб в пучке. Градиент давления dp_F/dz — часть общего перепада давления, определяемого из баланса количества движения, затрачиваемая на преодоление трения (см. § 2.3.2). Хотя этот метод расчета τ_l не точен,

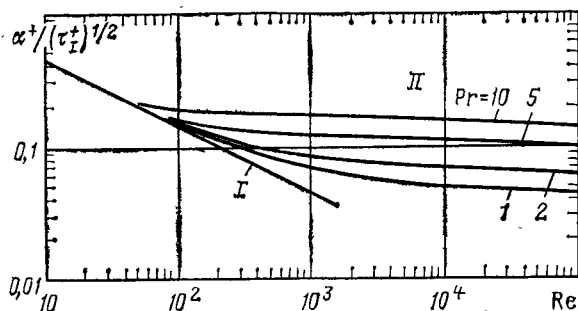


Рис. 8. Коэффициенты теплоотдачи для пленок (преобладание сдвигающего усилия пара):

I — ламинарное течение; II — турбулентное течение

он дает разумные оценки, когда сила тяжести в пленке становится существенной.

Более строгий метод расчета τ_l — метод [19], согласно которому τ_l определяется по коэффициенту трения на границе раздела f_l

$$\tau_l = \frac{1}{2} f_l \rho_g \dot{v}_g^2, \quad (31)$$

где $\dot{v}_g$ — объемный поток паровой фазы (или приведенная скорость). Коэффициент трения на границе раздела можно определить по коэффициенту для потока газа следующим образом:

$$\frac{f_l}{f_g} = 1 + 1400F \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{G} \frac{(1 + 1400F)^{3/2}}{13.2F} \right] \right\}, \quad (32)$$

где

$$F = \frac{\gamma}{Re_g^{0.9}} \frac{\eta_l}{\eta_g} \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{1/2}; \quad (33)$$

$$G = \frac{\rho_l g_n D}{\rho_g \dot{v}_g f_g}; \quad (34)$$

$$Re_g = \frac{\rho_g \dot{v}_g D}{\eta_g} \quad (35)$$

и

$$\gamma = [(0.707 Re^{1/2})^{2.5} + (0.037 Re^{0.9})^{2.5}]^{0.4}. \quad (36)$$

Коэффициент трения для одного газа f_g можно рассчитывать, например, из

$$f_g = 0.046 Re_g^{-0.2}, \quad (37)$$

где D — внутренний диаметр трубы при конденсации в трубе или гидравлический диаметр при конденсации снаружи трубы.

Названные выше методы расчета касательных напряжений на границе разделов предполагают, что скорость конденсации низка. При больших скоростях конденсации касательные напряжения на границе раздела увеличиваются [20]

$$\frac{\tau_l}{\tau_{l0}} = \frac{H}{1 - e^{-H}}, \quad (38)$$

где

$$H = \dot{m}_c \dot{v}_g / \tau_{l0}, \quad (39)$$

τ_{l0} — касательные напряжения, рассчитанные с помощью указанного метода; $\dot{m}_c$ — массовый поток конденсации:

$$\dot{m}_c = \alpha (T_{sat} - T_w) / \Delta h_v. \quad (40)$$

Следует отметить, что метод расчета, приведенный здесь, относится к локальному коэффициенту теплоотдачи. Поэтому он используется как часть последовательного расчета любой конструкции конденсатора. В принципе можно рассчитать средний коэффициент теплоотдачи, используя уравнение (18), и представить результаты в форме графиков, пригодных для конструкторов. Трудность возникает в определении τ_l^+ в зависимости от Re , так как τ_l^+ зависит также от других параметров. Это значит, что следовало бы получить большое число графиков, чтобы охватить все важные случаи.

Явление захлебывания. Выше была рассмотрена конденсация при направленном вниз потоке пара. Здесь идет речь о направленном вверх потоке пара и сначала обсуждается проблема конденсации в трубе.

Когда скорости потока пара очень малы, конденсат свободно достигает основания трубы. Если скорость пара постепенно увеличивается, то наступает момент, когда большие волны и возмущения возникают у основания трубы с периодической задержкой жидкости потоком пара. Часть жидкости отделяется в верхней части трубы. Это явление известно как захлебывание, и самая низкая скорость захлебывания. Дальнейшее увеличение скорости пара приводит к росту возмущения пленки на большей длине, и конденсат отделяется на обоих концах трубы. С увеличением скорости все меньше и меньше конденсата вытекает у основания трубы, пока не возникает восходящий поток обеих фаз. Этот восходящий поток очень хаотичен, но с дальнейшим увеличением скорости пара он становится менее беспорядочным, и при высоких скоростях устанавливается относительно спокойный кольцевой восходящий поток.

Падение давления в трубе конденсатора обычно резко увеличивается при захлебывании и продолжает возрастать с увеличением скорости пара, пока не возникает общий восходящий поток. Тогда падение давления перестает расти и может даже немного понизиться. Оно начинает опять существенно увеличиваться только после того, как устанавливается восходящий кольцевой поток. Беспорядочный характер течения в режиме между возникновением захлебывания и образованием восходящего кольцевого потока приводит к большим колебаниям падения давления.

Обычно конденсаторы работают при скоростях пара, меньших скорости захлебывания. Сдвигающее усилие пара при этом слишком мало, чтобы воздействовать на конденсатную пленку, таким образом можно обоснованно применять методы расчета коэффициента теплоотдачи, изложенные выше. Обычно работа конденсатора в диапазоне параметров от возникновения захлебывания до образования восходящего кольцевого потока не предполагается, но она возможна при восходящем кольцевом течении. Однако последний режим течения обычно не рекомендуется, так как трудно обеспечить достаточно высокую скорость пара, покидающего верхнюю часть трубы, для сохранения кольцевого потока. Если необходимо работать в условиях восходящего кольцевого течения, то их следует установить. В пленке преобладает тогда сдвигающее усилие и, следовательно, коэффициенты можно найти из (25)–(27).

Несомненно, важно знать скорости пара при захлебывании и при установлении кольцевого течения. Простая и приемлемо точная корреляция для захлебывания дана в [21]

$$(\dot{v}_g^+)^{1/2} + (\dot{v}_l^+)^{1/2} = C; \quad (41)$$

$$\dot{v}_g^+ = \frac{\dot{v}_g \rho_g^{1/2}}{[g_n D (\rho_l - \rho_g)]^{1/2}}; \quad (42)$$

$$\dot{v}_l^+ = \frac{\dot{v}_l \rho_l^{1/2}}{[g_n D (\rho_l - \rho_g)]^{1/2}} \quad (43)$$

где $\dot{v}_g^+$, $\dot{v}_l^+$ — соответственно приведенные скорости пара и жидкости, которые следует рассчитывать в условиях, когда они имеют наибольшие значения (у основания трубы).

Параметр C считается постоянным для данной формы трубы (равный, например, 0,725 для воздушно-водяного потока в условиях низких давлений в трубах с концами, срезаемыми под прямым углом), хотя согласно данным, полученным в [22], C уменьшается с поверхностным натяжением.

Для расчета конденсатора часто удобно записать уравнение (41) в виде

$$\dot{v}_g^+ = \frac{C^2 [g_n D (\rho_l / \rho_g - 1)]^{1/2}}{[1 + (\dot{m}_l / \dot{m}_g)^{1/2} (\rho_g / \rho_l)^{1/4}]^2}, \quad (44)$$



Рис. 9. Конец трубы, срезаемый под углом для увеличения скорости захлебывания (стрелкой показано направление движения пара)

Таблица 1. Корректирующие множители F_2 , учитывающие захлебывание, для трубы с концами, срезанными под углом

θ°	$D, \text{ мм}$			
	14	16	25	50
30	—	1,05	—	—
60	1,5	1,3	1,2	1,0
75	—	1,5	—	—

где $\dot{m}_l$ и $\dot{m}_g$ — приведенные массовые скорости жидкости и пара у основания трубы ($\dot{m}_l / \dot{m}_g$ — отношение массы полученного конденсата к массе подведенного пара). Это соотношение необходимо скорректировать для учета концевых эффектов трубы и поверхностного натяжения жидкости. Коррекцию удобно сделать с помощью поправки C^2 следующим образом:

$$C^2 = 0,53 F_1 F_2, \quad (45)$$

где 0,53 — значение C^2 для воздушно-водяного потока в трубе с концами, срезанными под прямым углом в условиях низких давлений.

Корректирующий фактор F_1 зависит от поверхностного натяжения. Предлагается следующая простая его форма:

$$F_1 = \left(\frac{\sigma}{\sigma_w} \right)^n, \quad (46)$$

где σ — поверхностное натяжение конденсата; σ_w — поверхностное натяжение воды при комнатной температуре (0,072 N/m). Корреляция [23] предполагает, что $n \approx 0,1$; в [24] рекомендуется величина 0,5. Кривые, полученные в [25], согласуются с промежуточным значением $n \approx 0,2$. Для надежности в случае жидкостей с малым поверхностным натяжением следует использовать большее значение n ; здесь рекомендуется использовать $n = 0,5$.

Корректирующий фактор $F_2 = 1$ для трубы с концами, срезанными под прямым углом, но может быть и больше в случае труб, срезанных под другим углом (рис. 9). Значения F_2 зависят от диаметра трубы и от угла среза θ ; табл. 1 получена с использованием корреляции [23] и кривых из [25]. К сожалению, таблица неполная, поэтому при заполнении пробелов конструктор должен руководствоваться здравым смыслом.

Скорость захлебывания увеличивается при отклонении трубы от вертикального положения.

Другими важными параметрами для расчета конденсаторов являются скорости, при которых предотвращается возвратный поток жидкости и устанавливается режим вертикального кольцевого течения. Рассмотрим скорость пара в верхней части трубы, где она является наименьшей. Скорость пара, необходимая для предотвращения возвратного потока жидкости, определена в [21]

$$\dot{v}_g^+ = 0,525. \quad (47)$$

Скорость, при которой устанавливается стабильное кольцевое течение, определена в [26]

$$\dot{v}_g^+ = 1,12. \quad (48)$$

В [27] принято, что (47), (48) неприменимы для труб большого диаметра (например, больше 30 мм), особенно когда жидкая пленка тонкая. Лучшим соотношением, описываю-

щим начало кольцевого течения при указанных условиях, является выражение [28]

$$\dot{v}_g = 3,2 [g_n \sigma (\rho_l - \rho_g) / \rho_g^2]^{1/4}. \quad (49)$$

Приведенные выше результаты относятся к течению внутри труб, тогда как конденсация с восходящим потоком пара может происходить и снаружи труб. В случае, когда отсутствуют данные по захлебыванию в этих условиях, предполагают, что можно использовать рассмотренные методы, приняв за диаметр D средний гидравлический диаметр. Ясно, что тогда в расчетах должен быть принят больший запас надежности.

С. Наружная поверхность горизонтальных и наклонных труб. Ламинарный поток конденсата на одиночной трубе без сдвигающего усилия пара. Нуссельт [1] был первым исследователем проблемы конденсации на горизонтальной трубе; им получена следующая формула для среднего по периметру трубы коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = 0,725 \left[\frac{\lambda_l^3 \rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v}{\eta_l (T_{sat} - T_w) D} \right]^{1/4}, \quad (50)$$

где D — наружный диаметр трубы; другие символы определены раньше [см. (2)]. Постоянная 0,725 получена при численном интегрировании; более точное значение было установлено позднее. Указанная формула подтверждена неоднократно экспериментами со множеством жидкостей.

Коэффициент теплоотдачи можно также выразить через расход конденсата на единицу трубы за единицу времени $\dot{\Gamma}$ следующим образом:

$$\frac{\alpha}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3} = 1,51 \left(\frac{4\dot{\Gamma}}{\eta_l} \right)^{-1/3}. \quad (51)$$

Указанные зависимости можно применять к наклонным трубам при условии, что g_n заменяется на $g_n \cos \theta$, где θ — угол между осью трубы и горизонталью [29, 30.] Это простое соотношение применяется, если $L/D > 1,8 \operatorname{tg} \theta$, где L — длина трубы.

Эти уравнения занижают коэффициент теплоотдачи, если

$$\frac{4\dot{\Gamma}}{\eta_l \cos \theta} > 3200,$$

так как в пленке будет возникать турбулентность. Это маловероятно для одиночной трубы, хотя возможно для вертикальной колонны труб. Данный вопрос обсуждается ниже.

Анализ, который приводит к соотношениям (50), (51), основывается на допущении, что температура стенки постоянна по периметру трубы. Это верно только в случае, если термическое сопротивление сосредоточено в слое конденсата. Если в другом крайнем случае все сопротивление приходится на стенку трубы (слой отложений) и на охладитель, то соответствующее граничное условие, которое применяют при анализе, — постоянная плотность теплового потока на стенке (охладитель однофазный). Указанный крайний случай анализировался в [10, 31], где получены идентичные результаты, за исключением того, что вместо константы 0,725 в уравнении (50) получено 0,70, а вместо постоянной 1,51 в соотношении (51) — не менее 1,47. Поэтому различие между двумя крайними случаями для всех практических приложений мало.

Формулы (50) и (51) можно скорректировать для учета эффектов переохлаждения и перегрева пара, инерции, изменения свойств, используя те же корректирующие множители, что и для вертикальной поверхности.

Влияние сдвигающего усилия пара для одиночной трубы. Известно несколько последних работ [31—35] по влиянию поперечного потока на коэффициент теплоотдачи при конденсации на горизонтальной трубе. В [31] предложена

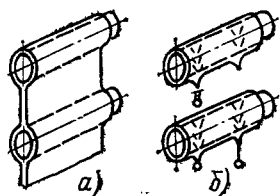


Рис. 10. Конденсация на горизонтальных трубах: а — упрощенная схема; б — реальная картина

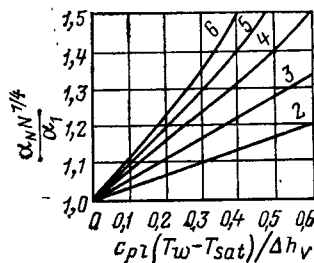


Рис. 11. Поправки на увеличение импульса и теплоотдачи в слое конденсата между трубами. Цифры у кривых соответствуют числу труб

полуэмпирическая зависимость, которая представляется правильно обоснованной и хорошо предсказывает полученные в разных экспериментах данные в широком диапазоне параметров. Их результат можно представить в виде

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1,4 \left[\frac{u_g^2 (T_{sat} - T_w) \lambda_l}{g_n D \Delta h_v \eta_l} \right]^{0,05}, \quad (52)$$

где α_0 — коэффициент, определяемый (50); u_g — скорость подхода пара. Указанная зависимость используется только в случае, когда $\alpha/\alpha_0 > 1$, в противном случае применяется соотношение (50). Данные, использованные при получении формулы (52), ограничены случаями, когда $\alpha/\alpha_0 < 1,7$. При $\alpha/\alpha_0 > 1,7$ указанной формулой следует пользоваться с осторожностью.

В [31 и 33] показано теоретически, что осредненный по окружности коэффициент при горизонтальном потоке пара почти такой же, как в случае опускного течения пара, хотя локальные коэффициенты совершенно различны. Поэтому можно считать, что уравнение (52) применяется для вертикального и горизонтального потоков пара при условии, что он перпендикулярен трубе и что труба горизонтальная.

Применение моделей к пучкам горизонтальных труб. Применение рассмотренных выше моделей к пучкам труб требует решения следующих вопросов: как учесть конденсат, стекающий с одной трубы на другую, и как определить скорость u_g , используемую в уравнении (52). Рассмотрим сначала первый вопрос для случая пренебрежимо малой скорости пара.

Если считать, что конденсат стекает с одной трубы на другую непрерывным слоем, как показано на рис. 10, а, тогда соотношение (51) все еще применимо и дает теперь средний коэффициент для N труб

$$\frac{\bar{\alpha}_N}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3} = 1,51 \left(\frac{4\dot{\Gamma}_N}{\eta_l} \right)^{-1/3}, \quad (53)$$

где $\bar{\alpha}_N$ — средний коэффициент теплоотдачи; $\dot{\Gamma}_N$ — расход конденсата у нижней трубы. Эта формула основывается на обычных допущениях Нуссельта; в частности, что пленка ламинарная и температура стенки на каждой трубе одинаковая. Она приводится обычно в другой форме, которая получена путем исключения $\dot{\Gamma}_N$ из приведенного выше соотношения и использования следующего выражения для расхода конденсата у нижней трубы:

$$\dot{\Gamma}_N = N \pi D \bar{\alpha}_N (T_{sat} - T_w) / \Delta h_v. \quad (54)$$

Результат можно записать в виде

$$\bar{\alpha}_N / \alpha_1 = N^{-1/4}, \quad (55)$$

где α_1 — коэффициент для верхней трубы, рассчитанный по зависимости (50). Коэффициент для N -й трубы α_N

следует из выражения (55)

$$\frac{\alpha_N}{\alpha_1} = N^{-3/4} - (N-1)^{3/4}. \quad (56)$$

Большая часть экспериментальных данных показывает, что коэффициенты теплоотдачи превосходят указанные выше величины. Два источника погрешностей в рассмотренных моделях состоят в том, что не учитываются перенос теплоты в слое конденсата между трубами и увеличение количества движения слоя, когда он падает свободно под действием силы тяжести. В [36] выполнен анализ с учетом этих эффектов и получены поправки к формуле (55) (рис. 11).

Однако большинство данных лежит еще выше, чем предсказывают результаты [36], и необходимо дальнейшее выяснение существующих противоречий. Наиболее вероятное объяснение показано на рис. 10, б. На нем более реальная картина стока конденсата с падением капель с трубы на трубу вместо стекания непрерывного слоя. Это приводит к уменьшению толщины пленки между точками падения капель и турбулентности под каплями. Оба эти эффекта способствуют повышению коэффициента теплоотдачи по сравнению со значением, предсказываемым простой теорией.

На основе экспериментов в [37] предложена эмпирическая коррекция простой теории, которая эквивалентна записи уравнений (55) и (56) в виде

$$\bar{\alpha}_N/\alpha_1 = N^{-1/6}; \quad (57)$$

$$\alpha_N/\alpha_1 = N^{5/6} - (N-1)^{5/6}. \quad (58)$$

В [38] показано в опытах с водой и хладоном-11, что формула (51) применима к любой трубе в пучке при условии, что $\dot{G}$ взят как сток с трубы ($\dot{G}_N$):

$$\frac{\alpha_N}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l(\rho_l - \rho_g)g_n} \right]^{1/3} = 1,51 \left(\frac{4\dot{G}_N}{\eta_l} \right)^{-1/3}. \quad (59)$$

Этот результат часто неверно интерпретируют: коэффициент теплоотдачи на нижних трубах такой же, как и на верхней. Ясно, что это неверно, так как $\dot{G}_N$ увеличивается с расстоянием вниз по пучку. Следует быть внимательным, чтобы не смешивать выражения (53) и (59): одно дает теоретическое среднее значение для N труб, тогда как другое — эмпирический коэффициент для N -й трубы.

Когда N невелико ($N > 10$), соотношение (18) можно использовать совместно с уравнением (59) для получения среднего коэффициента для N труб. Результат представим в виде

$$\frac{\bar{\alpha}_N}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l(\rho_l - \rho_g)g_n} \right]^{1/3} = 2,01 \left(\frac{4\dot{G}_N}{\eta_l} \right)^{-1/3}. \quad (60)$$

Комбинируя это выражение с (54), получаем

$$\bar{\alpha}_N/\alpha_1 = 1,24N^{-1/4} \quad (61)$$

и

$$\alpha_N/\alpha_1 = 1,24[N^{3/4} - (N-1)^{3/4}]. \quad (62)$$

Напомним, что последние три соотношения верны только при $N \geq 10$. Значения $\bar{\alpha}_N/\alpha_1$ для меньших N можно рассчитать численно, используя уравнение (59), шаговым методом вниз по пучку. На рис. 12 показаны результаты численного расчета в сравнении с (61) и (57). Видно, что результаты, полученные по (61), согласуются хорошо с зависимостью (57).

Теперь количество конденсата $\dot{V}_N$, образующееся на единицу длины N -й трубы, определяется выражением

$$\dot{V}_N = \frac{\pi D \alpha_N (T_{\text{sat}} - T_N)}{\Delta h_v}, \quad (63)$$

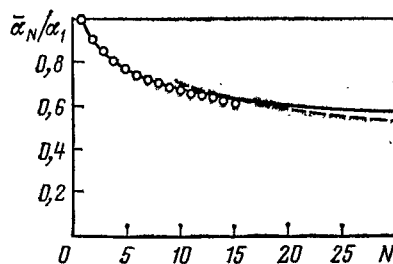


Рис. 12. Сравнение данных, полученных по методу [37] (сплошная кривая), с результатами [38] при конденсации в пучках труб для малых N (точки) и больших N (штриховая кривая)

которое совместно с зависимостями (59) и (50) дает следующее соотношение:

$$\alpha_N/\alpha_1 = (\dot{G}_N/\dot{G}_1)^{-1/4}. \quad (64)$$

Авторы [39] к этому результату пришли непосредственно в экспериментах, в которых конденсат возвращался и направлялся к верхней части исследуемой трубы. В действительности они не получили точно показатель $1/4$, но полученное значение $0,223$ настолько близко к нему, что нет необходимости обсуждать различие. Поэтому эти экспериментальные результаты являются дополнительным подтверждением справедливости (59).

В литературе имеются данные, согласно которым коэффициенты теплоотдачи существенно больше, чем значения, полученные по формулам (57)–(59) или (64). В [40] предполагается, что различие возникает из-за того, что экспериментаторы не исключают эффекты сдвигающего усилия пара. Влияние динамического воздействия пара на пленку рассмотрено ниже. Кроме того, различие в значениях может быть вызвано тем, что пленка может быть полностью турбулентной. Этот вопрос обсуждается ниже.

Выражение $4\dot{G}_N/\eta_l$ является удвоенным числом Рей для пленки, текущей по любой стороне N -й трубы. Выше было принято, что турбулентность возникает при числах $Re = 1600$, которым соответствует $4\dot{G}_N/\eta_l = 3200$. Стоит заметить, что наибольшая величина этого выражения, полученная в [38], составляла около 500, в [39] около 2200.

К сожалению, до сих пор в литературе не известен метод решения проблемы конденсации при турбулентной пленке снаружи труб. Метод будет надежным при выборе $4\dot{G}_N/\eta_l$ равным 3200 всякий раз, когда значение больше указанного. Здесь предлагается и другой пробный метод. Уравнение (59) можно записать через число Рей пленки (для одной стороны трубы) в виде

$$\frac{\alpha_N}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l(\rho_l - \rho_g)g_n} \right]^{1/3} = 1,2 Re^{-1/3}, \quad (65)$$

где

$$Re = 2\dot{G}_N/\eta_l. \quad (66)$$

Это почти точно согласуется с соотношением (14) для локальной теплоотдачи на вертикальной поверхности. Действительно, если использовать (14) вместо (65), то получим значение на 9% ниже. Поэтому можно (вероятно, с малой надежностью) применять то же самое уравнение для горизонтальных труб и вертикальных поверхностей, когда пленка конденсата становится турбулентной. Таким образом, можно рассчитать коэффициент для N -й трубы по формуле [14], приводимой здесь применительно к горизонтальным трубам в виде

$$\frac{\alpha_N}{\lambda_l} \left[\frac{\eta_l^2}{\rho_l(\rho_l - \rho_g)g_n} \right] = 0,023 \left(\frac{2\dot{G}_N}{\eta_l} \right)^{0,25} Pr^{0,5}. \quad (67)$$

Теперь необходимо рассмотреть влияние сдвигающего усилия пара. Выше приведено уравнение (52) для изолированной трубы, попробуем выяснить, применимо ли оно к пучку труб. Важный вопрос состоит в том, как рассчитывать u_g . Ясно, что следует использовать ее локальное значение, так как количество пара уменьшается по пучку. Однако остается еще выяснить, можно ли использовать значение u_g для самого узкого поперечного сечения потока (когда пар проходит между трубами) или для самого широкого или, может быть, некоторого среднего между ними. В [34] (для опусного потока) и в [41] (для горизонтального) установлено, что применение максимальной площади поперечного сечения дает хорошие оценки. Фактически сравнение данных [34, 41] проводилось не с уравнением (52), а с результатами [32], в некоторой степени подобными, хотя и являющимися теоретическими. Используемые в экспериментах два пучка имели достаточно большие отношения шага к диаметру (1,57 и 1,87), поэтому не ясно, применимо ли то же самое определение u_g для меньших отношений шага к диаметру. Однако использование определенной выше скорости пара не дает полного согласования во всех случаях и авторы [41] сочли необходимым уменьшить найденные коэффициенты на 20%, чтобы обеспечить совпадение с данными для корндорного пучка труб. Вероятно, эта поправка не нужна для шахматного пучка.

Очевидно, нет необходимости в поправке в случае пучков с высокой скоростью пара при конденсате, падающем (или стекающем) с трубы на трубу. По-видимому, двухфазные эффекты не надо учитывать при расчете сдвигающего усилия пара. Однако не ясно, пренебрежимо малы они или просто гасятся.

Приведенное выше уравнение дает увеличение коэффициента с ростом скорости пара, но в некоторых экспериментах установлено повышение коэффициента при увеличении скорости от низких до умеренных значений и его понижение в случае очень высоких скоростей [42, 43]. Хотя этот эффект наблюдался только в пучках труб, он может иметь место также и на изолированных трубах. Эффект возникал как при горизонтальном, так и опусном потоках пара. Однако непонятно, почему происходит это ухудшение и как его надежно предсказать. В [44] предложен его возможный механизм, который приводит к критерию начала ухудшения.

Д. Внутренняя поверхность горизонтальных труб. Режимы течения при конденсации в трубе. Вопросы структуры двухфазного потока рассматриваются здесь кратко, дополнительная информация приведена в § 2.3, а обзор режимов течения при конденсации выполнен в [45].

На рис. 13 показаны режимы течения, обычно имеющиеся место при конденсации в трубе. Диапазон наблюдаемых режимов течения зависит от общей скорости течения в трубе. Для потоков с большой скоростью возникающий сначала конденсат образует кольцевую пленку. Часть конденсата уносится в виде капель с потоком пара. Далее вдоль трубы скорость пара падает вследствие конденсации, что приводит к соответствующему снижению динамического

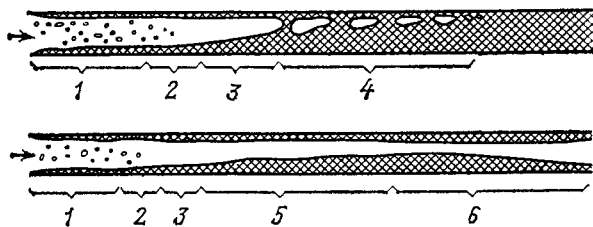


Рис. 13. Типичные режимы течения при конденсации в горизонтальных трубах для потока с большой скоростью (сверху) и потока с малой скоростью (снизу):

1 — дисперсно-кольцевой; 2 — кольцевой; 3 — кольцевой с сильной стратификацией; 4 — снарядный с вытянутыми пузырями; 5 — волновой; 6 — расслоенный

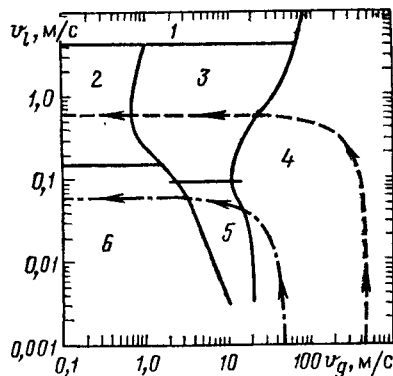


Рис. 14. Примеры путей конденсации на карте режимов течения при потоке с большой скоростью (сплошная кривая) и потоке с малой скоростью (штрихпунктирная):

1 — пузырьковый; 2 — пузырьковый с вытянутыми пузырями; 3 — снарядный; 4 — кольцевой, дисперсно-кольцевой; 5 — волновой; 6 — расслоенный

воздействия пара. Это порождает два эффекта: первый — уменьшение уноса, так как сдвигающее усилие, отрывающее капли, ослабляется; второй — заметная асимметрия пленки, вызванная тем, что действие силы тяжести становится преобладающим. С увеличением расхода конденсата может установиться снарядное течение, которое сменяется течением пробковым или с вытянутыми пузырями. Труба полностью заполняется конденсатом за точкой, в которой конденсируется вся жидкость. Для потоков с малой скоростью последовательность режимов сначала такая же, но кольцевое течение сменяется волновым, последнее — расслоенным. В области расслоенного течения жидкость движется к концу трубы под действием главным образом градиента давления. Данное описание потока с малой скоростью предполагает, что жидкость может стекать вниз на конце трубы. Если конденсат вытекает в водосборник, то действительное расслоенное течение не может быть установлено, так как выход жидкости затрудняется, она накапливается в трубе и периодически вытесняется паром в виде пробки. Последовательность режимов течения можно наблюдать, нанеся последовательность режимов конденсации на одну из диаграмм режимов течения [46—48]. На рис. 14 показаны типичные последовательности режимов конденсации для потоков с малой и высокой скоростями, нанесенные на карту [47]. Указанная карта режимов применима к пару, конденсирующемуся при давлении, близком к атмосферному, но лучше использовать зависимости [48] при построении необходимой диаграммы для другой жидкости или давления. Следует отметить, что карты режимов течения неточны и поэтому должны применяться только для качественного анализа.

Теоретические и полужемпирические модели для предсказания коэффициента теплоотдачи разработаны для двух важных режимов течения: кольцевого и расслоенного. Они описаны ниже.

Расслаивающееся течение. Термин «расслаивающееся» вводится здесь вместо расслоенного, потому что новый конденсат образуется непрерывно в верхней части трубы и затем расслаивается под влиянием силы тяжести. На рис. 15 приведена идеализированная схема конденсации при расслаивающемся течении, которая принимается в теоретическом анализе. Средний по периферии коэффициент α_d в верхней области стока определяется теорией Нуссельта [49, 50] в виде

$$\alpha_d = \beta \left[\frac{\lambda_l \rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v}{\eta_l D (T_{sat} - T_w)} \right]^{1/4}, \quad (68)$$

где β зависит от угла ϕ (рис. 16). В [51] показано, что течение в области стока происходит не обязательно по всей

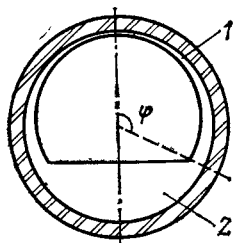


Рис. 15. Идеализированная схема конденсации при расслаивающемся течении:

1 — область стока; 2 — слой, образующийся при стратификации

периферии, для которой указанное уравнение справедливо, и что на него может накладываться осевой поток пара. Однако если названный осевой поток имеет большую скорость, то в пленке возникает турбулентность и уравнение (68) следует скорректировать с помощью методов, описанных в [51].

Средний по всему периметру коэффициент определяется выражением

$$\alpha = \frac{\varphi}{\pi} \alpha_A + \frac{\varphi - \pi}{\pi} \alpha_B, \quad (69)$$

где угол φ выражен в радианах, а α_B — коэффициент в слое, образовавшемся при стратификации. Разумно принять, что $\alpha_B \ll \alpha_A$, тогда уравнения (68) и (69) примут вид:

$$\alpha = \Omega \left[\frac{\lambda_l \rho_l (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v}{\eta_l D (T_{\text{sat}} - T_w)} \right]^{1/4}, \quad (70)$$

где

$$\Omega = \varphi \beta / \pi. \quad (71)$$

В [52] показано, что Ω можно просто связать с объемным паросодержанием ε_g

$$\Omega = 0,728 \varepsilon_g^{3/4}. \quad (72)$$

Объемное паросодержание можно рассчитать с помощью корреляций, приведенных в § 2.3.2, хотя в [52] рекомендовано уравнение [53]

$$\varepsilon_g = \frac{1}{1 + [(1 - x_g)/x_g] (\rho_g/\rho_l)^{2/3}}, \quad (73)$$

где x_g — массовое газосодержание в потоке.

Кольцевое течение является потоком с преобладанием касательных напряжений, и методы, представленные в п. В для пленок с большим сдвигающим усилием в вертикальном потоке, будут применяться для него. Заметим, что коэффициент теплоотдачи рассчитывается согласно уравнению (25) для ламинарного течения или (26) для турбулентного. Критическое число Re пленки, соответствующее возникновению турбулентности, следует взять здесь равным 50. Метод определения коэффициента теплоотдачи и безразмерных касательных напряжений изменяется слабо в случае горизонтального течения, так как эффект подъемной силы пара исчезает. Следовательно, τ_l^+ и α^+ определя-

ются теперь выражениями:

$$\tau_l^+ = \frac{\rho_l \tau_l}{(\rho_l^2 \eta_l g_n)^{2/3}}; \quad (74)$$

$$\alpha^+ = \frac{\alpha}{\lambda_l} \left(\frac{v_l^2}{g_n} \right)^{1/3}, \quad (75)$$

где v_l — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Как и выше, касательные напряжения на границе раздела можно рассчитать, используя (30). Согласно более строгому методу [19] для горизонтальных труб коэффициент трения на границе раздела имеет вид:

$$\frac{f_l}{f_g} = 1 + 850F, \quad (76)$$

где F рассчитано из (33) и (35)–(37).

Коррекция в случае высокой скорости конденсации с помощью зависимостей (38)–(40) применима также к горизонтальным течениям.

Критерий для определения расслаивающегося и кольцевого течения. Как уже обсуждалось выше, картами режимов течения можно пользоваться для выяснения структуры потока, возникающего при конденсации. Однако разработаны специальные методы для определения, какой моделью пользоваться: расслаивающегося течения или кольцевого, которые описаны ниже.

В методе [52] для установления типа течения используется отношение усилия сдвига к силе тяжести в предположении кольцевой пленки. Указанное отношение представим в виде

$$F_{JK} = \frac{\tau_l}{(\rho_l - \rho_g) g_n s}, \quad (77)$$

где s — толщина пленки в случае ламинарного течения, которая определяется следующим соотношением:

$$s = \frac{\Gamma \eta_l}{(\rho_l \tau_l)^{1/2}}, \quad (78)$$

где Γ рассчитывается по числу Re конденсата (36).

На основании данных по конденсации пара при низком давлении в [52] показано, что модель кольцевого течения применяется, если $F_{JK} \geq 29$, а модель расслаивающегося течения — при $F_{JK} \leq 5$. В промежуточной области они предлагают следующую интерполяционную зависимость для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = \alpha_{\text{an}} + \frac{F_{JK} - 29}{24} (\alpha_{\text{an}} - \alpha_{\text{str}}), \quad (79)$$

где α_{an} и α_{str} — коэффициенты соответственно согласно модели кольцевого и расслаивающегося течения.

Хотя критерий перехода основан только на данных по конденсации при низких давлениях, в [44] показано, что он согласуется с другим критерием, полученным в [54] для хладона-12. Следовательно, есть основание предположить, что критерий справедлив и в более общем случае.

В [45] предложен другой критерий, основанный на безразмерной приведенной скорости газовой фазы $\dot{v}_g^+$, определяемой из (42). Авторы использовали собственные данные, а также данные других исследователей [54–56] для получения следующего критерия: поток с преобладанием силы тяжести осуществляется при $\dot{v}_g^+ \leq 0,5$, поток с преобладанием касательных напряжений — при $\dot{v}_g^+ \geq 1,5$. Это наводит на мысль, что модель кольцевого течения можно применять для $\dot{v}_g^+ \geq 1,5$, модель расслаивающегося течения для $\dot{v}_g^+ \leq 0,5$. Вероятно, при $0,5 < \dot{v}_g^+ < 1,5$ применима следующая интерполяция для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = \alpha_{\text{an}} + (\dot{v}_g^+ - 1,5) (\alpha_{\text{an}} - \alpha_{\text{str}}). \quad (80)$$

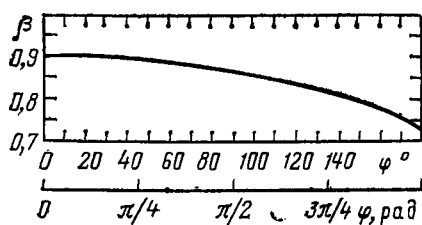


Рис. 16. Функция $\beta(\varphi)$ для конденсации в трубах

Таблица 2. Сравнение критериев перехода

X	$\dot{v}_g^+$				Литература
	Переход к расслоенному течению		Переход к кольцевому течению		
0,01	1,55	1,07	3,45	2,39	[52]
0,1	2,38	2,41	5,32	5,37	[52]
1	2,14	2,63	4,77	5,87	[52]
10	0,81	0,84	1,81	1,88	[52]
100	0,14	0,13	0,32	0,29	[45]
	0,5		1,5		

На первый взгляд критерии [52 и 45] совершенно различны. Однако, в [57] показано, что их можно сравнить непосредственно и они подобны, тогда как в [45] предложены постоянные значения $\dot{v}_g^+$ для перехода. Согласно методу [52] $\dot{v}_g^+$ при переходе слабо зависит от параметра Локкарта — Мартинелли, определяемого выражением

$$X^2 = \frac{(dp/dz)_l}{(dp/dz)_g}, \quad (81)$$

где $(dp/dz)_l$ и $(dp/dz)_g$ — градиенты давления на трение, которые возникают, если в трубе течет либо одна жидкость, либо один газ. В табл. 2 показано изменение $\dot{v}_g^+$ от X согласно [57] с использованием [52]. В таблице приведены также значения $\dot{v}_g^+$, полученные в [42]. Ввиду неточности данных по критериям перехода согласование между методами довольно близкое.

Е. Сопротивление на границе раздела (молекулярно-кинетическое). Молекулярно-кинетические эффекты при конденсации могут привести к дополнительному небольшому падению температуры в газовой фазе. Это падение температуры происходит в пределах нескольких средних длин свободного пробега молекул поверхности жидкости и может быть выражено через эффективный коэффициент теплоотдачи на границе раздела α_l следующим образом [58]:

$$\alpha_l = \frac{2\sigma_c}{2 - \sigma_c} \left(\frac{\tilde{M}}{2\pi \tilde{R}T} \right)^{1/2} \frac{\Delta h_{vp} \tilde{M}}{\tilde{R}T^2}, \quad (82)$$

где $\tilde{M}$ — относительная молекулярная масса конденсирующегося пара; Δh_{vp} — скрытая теплота конденсации; p — давление в системе; T — соответствующая температура насыщения; $\tilde{R}$ — газовая постоянная; σ_c — коэффициент accommodation, который является отношением числа молекул, остающихся на поверхности жидкости, к числу молекул, падающих на нее.

Согласно современным данным σ_c близка к единице при любых условиях [59, 60]. Полученные ранее очень низкие значения σ_c (меньше 0,05) — результат погрешности эксперимента [61] и присутствия в паре неконденсирующегося газа [60]. Влияние неконденсирующегося газа обсуждается в § 2.6.3. Для расчетов аппаратов рекомендуется использовать $\sigma_c = 0,8$.

Г. Некоторые особенности, характерные для жидких металлов. Резкое отличие свойств жидких металлов от свойств обычных жидкостей может привести к усилению особых эффектов, не рассмотренных до сих пор. Например, коэффициент теплопроводности у жидких металлов намного выше, чем у обычных жидкостей, а следовательно, коэффициенты теплоотдачи намного больше. Это приводит к тому, что другие составляющие термического сопротивления, которые обычно пренебрежимо малы, могут быть существ-

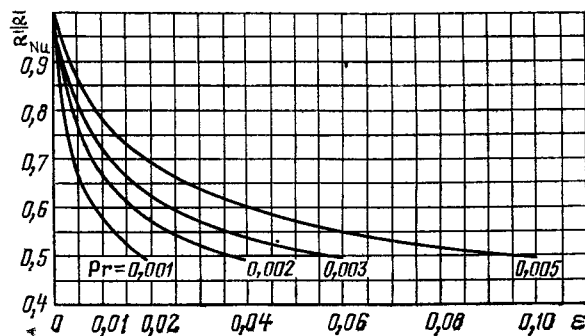


Рис. 17. Поправка для учета переохлаждения и инерции при конденсации жидких металлов

ственным; например, таким является только что рассмотренное термическое сопротивление границы раздела. Кроме того, по общему мнению металлическая стенка может иметь окисный слой, обладающий сопротивлением, сравнимым с сопротивлением жидкой металлической пленки.

Несмотря на отмеченные различия, коэффициент теплоотдачи слоя конденсата для ламинарного течения определяется так же, как и для обычных конденсатных пленок, т. е. уравнением (2). Однако когда градиент температуры в пленке велик, коэффициент теплоотдачи становится ниже вследствие эффектов переохлаждения и инерции в жидкости. Поправка для коэффициента теплоотдачи приведена в [7]

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_{Nu}} = \left(\frac{1 + 0,68\varepsilon + 0,020\varepsilon^2/Pr}{1 + 0,85\varepsilon/Pr - 0,15\varepsilon^2/Pr} \right)^{1/4}, \quad (83)$$

где $\bar{\alpha}_{Nu}$ — коэффициент, определяемый уравнением (2); ε — параметр переохлаждения, определяемый уравнением

$$\varepsilon = \frac{c_{pl}(T_{sat} - T_w)}{\Delta h_v}. \quad (84)$$

Эта поправка представлена на рис. 17. Расход конденсата в основании поверхности составляет

$$\dot{V}_L = \frac{\bar{\alpha}(T_{sat} - T_w)L}{\Delta h_v(1 + 3\varepsilon/8 + 0,02\varepsilon^2/Pr - 0,0005\varepsilon^3/Pr^2)}. \quad (85)$$

Приведенные уравнения применимы при $\varepsilon < 2$ и $\varepsilon/Pr < 20$ для $1 < Pr < 0,05$. Это охватывает диапазон чисел Pr для обычных конденсатов; на рис. 4 представлены результаты, полученные с помощью (83).

Турбулизация жидких металлических пленок не дает резкого увеличения коэффициента теплоотдачи, как для обычных конденсатов. Это связано с тем, что эффективная турбулентная теплопроводность имеет такое же значение, как и молекулярная. Кроме того, слой конденсата утолщается при турбулизации и понижение коэффициента вследствие утолщения может быть больше, чем увеличение эффек-

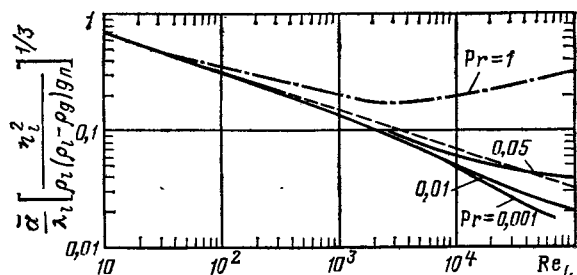


Рис. 18. Конденсация жидких металлов при турбулентной пленке

тивной теплопроводности. В [16] проанализированы отмеченные выше эффекты; результаты показаны на рис. 18. Решение Нуссельта для ламинарной пленки дано для сравнения, как и результат для обычной жидкости (при $Pr = 1$).

2.6.3. Конденсация паровых смесей

Д. Баттеруорт

А. Введение. Конденсация смеси имеет два отличия от конденсации чистого пара: во-первых, температура, при которой происходит конденсация, изменяется по конденсатору; во-вторых, имеют место эффекты переноса массы кроме переноса теплоты. Эти два отличия проиллюстрированы ниже, сначала для конденсации однокомпонентного пара при наличии неконденсирующегося газа.

На рис. 1 показана кривая равновесной конденсации при конденсации пара в присутствии неконденсирующегося

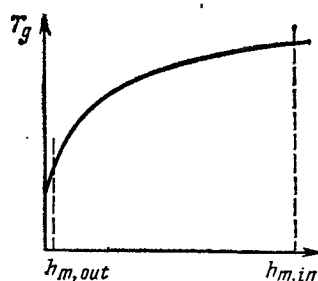


Рис. 1. Типичная кривая равновесной конденсации для однокомпонентного пара, конденсирующегося при наличии неконденсирующегося газа

газа. Такая кривая дает простой метод наблюдения направления процесса конденсации в конденсаторе. Однако следует подчеркнуть, что действительное развитие конденсации может не следовать точно этому направлению, основанному на термодинамическом равновесии, поскольку конденсация является процессом неравновесным. Тем не менее из кривой, приведенной на рис. 1, следует, что, когда через конденсатор течет парогазовая смесь, температура ее конденсации понижается, вызывая тем самым уменьшение температуры равновесной конденсации. Практическое значение указанного обстоятельства при проектировании конденсаторов заключается в том, что разность температур поверхности конденсации и охлаждающей среды уменьшается, приводя к соответствующему уменьшению локального коэффициента теплопередачи.

Теперь рассмотрим детально процесс конденсации в некоторой точке кривой. При этом будем считать, что конденсация описывается этой кривой (хотя она и не всегда верна), которая позволяет изучить основной процесс.

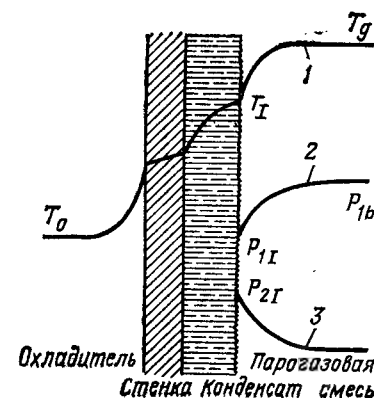


Рис. 2. Конденсация при наличии неконденсирующегося газа: 1 — профиль температуры; 2 — профиль парциального давления пара; 3 — профиль парциального давления неконденсирующегося газа

На рис. 2 показан профиль температуры от объема парогазовой смеси до охлаждающей среды. Парциальное давление пара в объеме парогазовой смеси обозначим p_{1g} , соответствующую ему температуру конденсации T_g . Температура границы раздела $T_I < T_g$, потому что концентрация пара и соответствующая температура конденсации здесь ниже. Поэтому неконденсирующийся газ увлекается по направлению к границе раздела потоком пара, оставаясь здесь только до тех пор, пока пар конденсируется. Неконденсирующийся газ стремится переместиться от границы раздела против потока пара. Напротив, пар движется через неконденсирующийся газ под действием градиента своего парциального давления. Результирующие профили парциального давления пара и газа показаны на рис. 2. Возникновение температурного градиента $T_g - T_I$ можно рассматривать как введение дополнительного термического сопротивления, снижающего соответственно локальный тепловой поток. Метод его расчета описан ниже.

Здесь следует напомнить о важном эффекте неконденсирующихся компонентов, который следует учитывать. Необходимо обеспечить удаление этих компонентов из конденсатора, иначе концентрация их будет увеличиваться со временем, вызывая описанные выше эффекты. Поэтому обычно предусматривают выпускную линию, которая позволяет отводить газ, насыщенный паром, с холодного конца конденсатора.

Конденсация смеси паров также приводит к явлениям, описанным выше. Например, характер кривых равновесной конденсации свидетельствует о том, что при энтальпии смеси возникает падение температуры равновесной конденсации, потому что температура конденсации остающегося пара понижается, когда менее летучие пары конденсируются. Кроме того, более летучие компоненты накапливаются на границе раздела, образуя тем самым слой, через который менее летучие компоненты должны диффундировать. Методы предсказания этих эффектов обсуждаются в п. Д для бинарных смесей паров и в п. Е для более сложных систем.

Расчетные методы, рассмотренные ниже, сложны; кроме того, чтобы их использовать, нужна детальная информация о потоках жидкости и их физических свойствах. Особая проблема состоит в том, что для расчетов необходимы данные по коэффициентам диффузии, которые часто трудно найти. С учетом этих проблем в п. В рассмотрены более простой метод.

В. Приближенный общий метод. Построение кривых конденсации. Первый шаг метода — получение кривой равновесной конденсации. Существуют различные методы построения кривой; один из них — построение кривой температура равновесной конденсации T_g^* — удельная энтальпия двухфазной смеси h_m . Такая кривая для однокомпонентного пара, конденсирующегося при наличии неконденсирующегося газа, показана на рис. 1, другие слу-

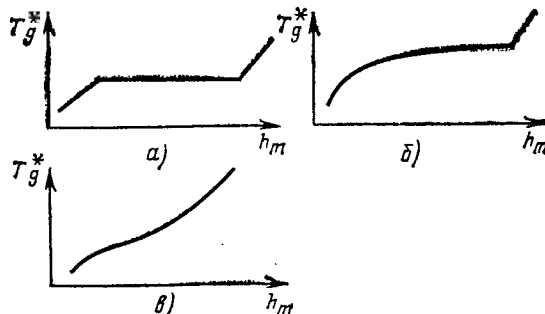


Рис. 3. Кривые равновесной конденсации:

а — чистый пар с зонами снятия перегрева, конденсации и переохлаждения; б — однокомпонентный пар при наличии неконденсирующегося газа (с зоной снятия перегрева); в — кривая для смеси паров

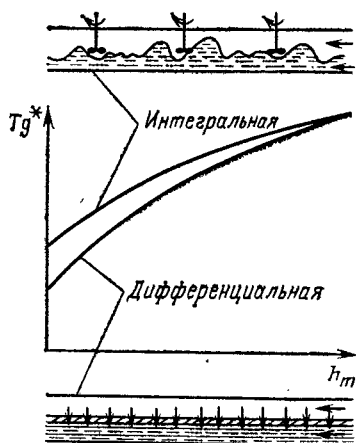


Рис. 4. Интегральная и дифференциальная кривые конденсации

чай рассмотрены на рис. 3. Для сравнения на рис. 3 приведена также кривая, полученная при конденсации чистого пара. Часто используется другой путь построения кривых равновесной конденсации — построение кривой T_g^* от тепловыделения Q , связанного с h_m

$$\dot{Q} = \dot{M} (h_{m, \text{in}} - h_m), \quad (1)$$

где $\dot{M}$ — суммарный массовый расход; $h_{m, \text{in}}$ — энтальпия на входе.

Кривые равновесной конденсации можно разделить на два основных типа: интегральные (гомогенные — *прим. пер.*) и дифференциальные (расслоенные) (рис. 4). При расчете интегральной кривой предполагается, что конденсат и пар, когда они проходят через конденсатор, перемешаны. В случае же дифференциальной кривой считается, что образовавшийся конденсат отделен от пара, хотя течет параллельно ему и имеет ту же самую температуру. Это разделение может быть простым, так как конденсат отделяется от поверхности сразу после образования, иначе он может остаться на поверхности, а плохой перенос массы в жидкой фазе может означать, что вновь образовавшийся конденсат не смешивается с образованным ранее.

Не ясно, какую кривую, интегральную или дифференциальную, следует использовать при заданных условиях. Можно предположить, что при конденсации внутри труб лучше использовать интегральную кривую, так как жидкость и пар находятся близко друг к другу. Однако в случае конденсации на горизонтальных трубах жидкость может отделяться от пара, поэтому дифференциальная кривая представляется более обоснованной. На практике большая часть конденсаторов рассчитывается в предположении интегральной конденсации. Хотя этот подход чаще всего успешен, он может привести к значительным погрешностям.

Кривые конденсации рассчитываются в предположении постоянного давления. Поэтому следует быть внимательным, если имеется большой градиент давления в конденсаторе, потому что это может привести к более низким температурам равновесия на выходе по сравнению с ожидаемой по кривой конденсации. Надежным методом в этом случае является расчет кривой конденсации при самом низком предполагаемом давлении.

Расчет интегральной кривой конденсации. Расчет кривых конденсации связан с использованием информации о равновесии пар — жидкость (детальное описание см. в § 4.2.1). Ниже обсуждаются только основные моменты расчета для наиболее простого случая идеальных в термодинамическом отношении смесей.

Основное уравнение для равновесия фаз имеет вид:

$$\bar{y}_i = K_i \bar{x}_i, \quad (2)$$

где $\bar{y}_i$ и $\bar{x}_i$ — мольные доли i -го компонента соответственно в паровой и жидкой фазах; K_i — постоянная равновесия, которая является действительно постоянной только для идеальной смеси при заданных температуре и давлении.

По определению имеем

$$\bar{y}_i = \dot{N}_{gi} / \dot{N}_g \quad (3)$$

и

$$\bar{x}_i = \dot{N}_{li} / \dot{N}_l, \quad (4)$$

где $\dot{N}_g$ и $\dot{N}_l$ — мольные потоки паровой и жидкой фаз соответственно; $\dot{N}_{gi}$ и $\dot{N}_{li}$ — мольные потоки i -го компонента в паровой и жидкой фазах соответственно. Комбинируя уравнения (2)–(4), получаем

$$\dot{N}_{gi} = K_i (\dot{N}_g / \dot{N}_l) \dot{N}_l, \quad (5)$$

Теперь общий поток i -го компонента является суммой расхода жидкой и паровой фаз

$$\dot{N}_{Ti} = \dot{N}_{gi} + \dot{N}_{li}. \quad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) имеем

$$\dot{N}_{li} = \frac{\dot{N}_{Ti}}{K_i (\dot{N}_g / \dot{N}_l) + 1}. \quad (7)$$

Таким образом, $\dot{N}_{li}$ можно просуммировать для получения общего мольного потока жидкости

$$\dot{N}_l = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{N}_{Ti}}{K_i (\dot{N}_g / \dot{N}_l) + 1}, \quad (8)$$

где n — число компонентов. Принимая во внимание, что общий поток

$$\dot{N}_T = \dot{N}_l + \dot{N}_g = \left(1 + \frac{\dot{N}_g}{\dot{N}_l}\right) \dot{N}_l, \quad (9)$$

и комбинируя его с уравнением (8), получаем

$$\dot{N}_T = \left(1 + \frac{\dot{N}_g}{\dot{N}_l}\right) \sum_{i=1}^n \frac{\dot{N}_{Ti}}{K_i (\dot{N}_g / \dot{N}_l) + 1}. \quad (10)$$

Другой формой этого уравнения, иногда более удобной для применения (особенно на входе в конденсатор, где $\dot{N}_g / \dot{N}_l$ велико), является

$$\dot{N}_T = \left(\frac{\dot{N}_l}{\dot{N}_g} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\dot{N}_{Ti}}{K_i + \dot{N}_l / \dot{N}_g}. \quad (11)$$

Первым шагом в расчете интегральной кривой конденсации является выбор числа температур, охватывающих диапазон конденсации. Для каждой температуры выполняются следующие расчеты.

1. Решается (10) для $\dot{N}_g / \dot{N}_l$. Решение ищется путем проб и ошибок.

2. Рассчитываются мольные потоки компонентов в жидкой фазе путем применения уравнения (7) к каждому компоненту.

3. Рассчитываются мольные потоки компонентов в газовой фазе путем применения уравнения (6) к каждому компоненту.

4. Рассчитывается удельная энтальпия смеси из уравнения

$$h_m = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n (\bar{h}_{gi} \dot{N}_{gi} + \bar{h}_{li} \dot{N}_{li}), \quad (12)$$

где $\bar{h}_{gi}$ — мольная энтальпия i -го компонента в паре; $\bar{h}_{li}$ — его мольная энтальпия в жидкой фазе. Обе, конечно, определяются при выбранной температуре.

После повторения этих расчетов при каждой температуре получим зависимость энтальпии смеси от температуры и эту информацию представим в обратной форме (зависимость температуры от энтальпии) для кривой конденсации.

Расчет дифференциальной кривой конденсации. Дифференциальная кривая конденсации рассчитывается последовательно, начиная с известных входных условий. Достигнув заданной точки на кривой, мы определяем потоки жидкости и пара, их состав и температуру. Затем выбираем температуру, немного меньшую найденного значения, и уравнение (11) используем в следующей форме:

$$\dot{N}_T = (R + 1) \sum_{i=1}^n \frac{\dot{N}_{gi, \text{old}}}{K_i + R}, \quad (13)$$

чтобы найти R — мольную долю жидкости, образуемую в конденсаторе. Количество $\dot{N}_{li}$ каждого компонента, образующегося при конденсации за шаг, определяется с помощью (8), записанного в следующей форме:

$$\Delta \dot{N}_{li} = \sum_{i=1}^n \frac{R \dot{N}_{gi, \text{old}}}{K_i + R}. \quad (14)$$

Затем можно рассчитать новые значения потоков компонентов в жидкой и паровой фазах для данного шага:

$$\dot{N}_{li} = \dot{N}_{li, \text{old}} + \Delta \dot{N}_{li} \quad (15)$$

и

$$\dot{N}_{gi} = \dot{N}_{gi, \text{old}} - \Delta \dot{N}_{li}. \quad (16)$$

Эта информация используется как начальное условие для следующего шага, и таким образом процесс продолжается вдоль кривой. Затем можно использовать уравнение (12) для определения соответствующих значений h_m .

Приближенный расчет теплоотдачи. Метод заключается в расчете эффективного коэффициента теплоотдачи α_{ef} со стороны конденсации, который можно затем комбинировать с другими коэффициентами и сопротивлениями для получения общего локального коэффициента теплопередачи U :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{\alpha_0} + r + \frac{1}{\alpha_{ef}}, \quad (17)$$

где α_0 — коэффициент со стороны охлаждающей среды; r — термическое сопротивление стенки трубы и отложений. Коррекцией для учета различных внутренних и наружных поверхностей трубы в этом уравнении пренебрегают, хотя ее нетрудно и учесть (если она значительна). Из U можно определить теплоотдающую поверхность A_T , интегрируя следующее уравнение:

$$A_T = \int_{h_{\text{out}}}^{h_{\text{in}}} \frac{\dot{M} dh_m}{(T_g^* - T_0) U}. \quad (18)$$

Здесь h_m и T_g^* связаны кривой конденсации. Методы определения соответствующих значений T_0 и интегрирования этого уравнения рассмотрены в разд. 3.4.

Методы расчета α_{ef} предложены в [1—4]. Метод [3] в основном идентичен методу [1]; оба они даны в более общей форме, чем метод [2]. Хотя метод [4] можно выразить в форме, очень похожей на другие методы, он дает отличающиеся результаты. Здесь дан метод [1, 3], согласно которому α_{ef} определяется из соотношения

$$\frac{1}{\alpha_{ef}} = \frac{1}{\alpha_l} + \frac{Z_g}{\alpha_g}, \quad (19)$$

где α_l — коэффициент для слоя конденсата (см. § 2.6.2); α_g — коэффициент теплоотдачи в газовой фазе.

При расчете коэффициента в газовой фазе обычно делают два допущения.

1. Считают, что перенос массы, который происходит при конденсации, не влияет на коэффициент теплоотдачи. Соответствующая поправка предложена в [5].

2. Полагают, что любой образующийся конденсат исчезает, препятствуя таким образом возможной интенсификации, связанной с взаимодействием двух фаз. Соответствующая поправка предложена в [6], хотя в [7] показано, что лучшее согласование с экспериментальными данными получено без учета этой интенсификации.

Параметр Z_g задан уравнением

$$Z_g = \dot{x}_g c_{pg} \frac{dT_g^*}{dh_m}, \quad (20)$$

где $\dot{x}_g$ — отношение массовых потоков газа и пара $\dot{M}_g/\dot{M}$; c_{pg} — удельная теплоемкость парогазовой фазы; dT_g^*/dh_m — наклон кривой конденсации. Конечно, все величины в этом уравнении могут изменяться с положением вдоль кривой конденсации и поэтому их следует определять локально. Удельная теплоемкость газовых смесей обсуждается в § 4.2.

С. Однокомпонентный пар с неконденсирующимся газом. Массоперенос. Конденсация при наличии неконденсирующегося газа сопровождается переносом массы в газовой фазе, как указано в п. А. Обычно их описывают аналитически, рассматривая фиктивный ламинарный слой, прилегающий к конденсатной пленке. Принимается, что все сопротивления переносу теплоты и массы в газовой фазе сосредоточены в этом слое. Диффузия через слой описывается уравнением

$$\dot{n}_i = \delta_{12} \bar{\rho} \frac{d\bar{y}_1}{ds} + \dot{n}_1 \bar{y}_1, \quad (21)$$

где $\dot{n}_i$ — мольный поток конденсирующегося пара; δ_{12} — коэффициент диффузии пара по отношению к неконденсирующемуся газу; $\bar{\rho}$ — общая молярная концентрация; $\bar{y}_1$ — мольная доля пара; s — расстояние от поверхности жидкости. Указанное уравнение можно преобразовать и проинтегрировать по ламинарному слою для получения $\dot{n}_i$:

$$\dot{n}_i = \beta \ln \frac{1 - \bar{y}_{1l}}{1 - \bar{y}_{1b}}, \quad (22)$$

где $\bar{y}_{1l}$ и $\bar{y}_{1b}$ — мольные доли пара на границе раздела фаз и в объеме газа соответственно; β — коэффициент массопереноса, который связан с толщиной фиктивного ламинарного слоя:

$$\beta = \delta_{12} \bar{\rho} / s_F, \quad (23)$$

где s_F — толщина слоя.

Уравнение (22) записывается иногда в другой форме

$$\dot{n}_i = \beta \cdot \frac{\bar{y}_{1b} - \bar{y}_{1l}}{1 - \bar{y}_{1b}}, \quad (24)$$

где β^* — коэффициент, зависящий от потока массы, который можно получить коррекцией β :

$$\beta^* = \xi \beta. \quad (25)$$

Поправочный множитель ξ определяется из уравнений (22), (24) и (25)

$$\xi = \varphi / (e^\varphi - 1), \quad (26)$$

где

$$\varphi = \dot{n}_1 / \beta. \quad (27)$$

Уравнение (24) применимо при малых скоростях конденсации, так как $\xi \rightarrow 1$ и, следовательно, $\beta^* \rightarrow \beta$. Это позволяет использовать простое уравнение вместо (22).

Коэффициент массопереноса β получается большей частью обычно из аналогии между переносом теплоты и массы [8]:

$$\beta = \frac{\alpha_g}{c_{pg}} \left(\frac{\delta_{12}}{k_g} \right)^{2/3}, \quad (28)$$

где α_g — коэффициент теплоотдачи в газовой фазе; c_{pg} — молярная удельная теплоемкость в объеме газовой фазы; k_g — коэффициент теплопроводности в объеме газовой фазы.

Комбинированный тепло- и массоперенос. Если эффекты переохлаждения в слое конденсата (которые обычно довольно малы) не учитываются, то из теплового баланса для слоя конденсата получаем

$$\alpha_{0I} (T_I - T_0) = \alpha'_g (T_g - T_I) + \Delta \tilde{h}_{v1} \beta^* \frac{\tilde{y}_{1b} - \tilde{y}_{1I}}{1 - \tilde{y}_{1b}}, \quad (29)$$

где T_I — температура границы раздела фаз; T_0 — температура охлаждающей среды; T_g — температура объема газовой фазы; $\Delta \tilde{h}_{v1}$ — молярная скрытая теплота конденсации пара. Коэффициент теплоотдачи α_{0I} описывает теплообмен между охлаждающей средой и поверхностью конденсации, т. е.

$$\frac{1}{\alpha_{0I}} = \frac{1}{\alpha_0} + r + \frac{1}{\alpha_I} \quad (30)$$

(обозначения см. в п. В); α'_g — коэффициент в газовой фазе, скорректированный для учета эффектов переноса массы,

$$\alpha'_g = \alpha_g \frac{a}{1 - e^{-a}}, \quad (31)$$

где

$$a = \dot{n}_1 \tilde{c}_{p1} / \alpha_g. \quad (32)$$

Уравнение (29) получено в [9] (здесь оно представлено в другой форме); поправка для α_g — в [10, 11].

Следует отметить, что корректирующий множитель для теплоотдачи в уравнении (31) имеет ту же самую форму, что и поправка для переноса массы в уравнении (26). Оба являются примерами функции

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} \quad (33)$$

при положительных и отрицательных значениях x . Эта функция приведена на рис. 5.

Уравнение (29) представим в виде

$$\alpha_{0I} (T_I - T_0) = \alpha'_g (T_g - T_I) + \Delta \tilde{h}_{v1} \beta^* \frac{\tilde{y}_{1b} - \tilde{y}_{1I}}{1 - \tilde{y}_{1b}}, \quad (34)$$

где α'_g — корректирующий коэффициент:

$$\alpha'_g = \alpha_g \frac{a}{e^a - 1}. \quad (35)$$

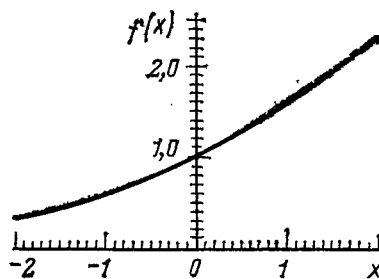


Рис. 5. Функция $f(x)$ для описания ξ , α'/α или α/α' в зависимости от x (в качестве x берется $-\varphi$, $-a$ или a соответственно)

Корректирующий множитель опять является функцией в уравнении (33). Другое отличие уравнений (29) и (34) состоит в том, что разность $\Delta \tilde{h}_{v1}$ заменена на $\Delta \tilde{h}_1$, представляющую собой разность энтальпий:

$$\Delta \tilde{h}_1 = \tilde{h}_{g1} - \tilde{h}_{l1}, \quad (36)$$

где $\tilde{h}_{g1}$ — энтальпия пара в объеме газа; $\tilde{h}_{l1}$ — его энтальпия $\tilde{y}$ поверхности жидкости.

Уравнения (29) и (34) являются двумя различными формами записи одного результата. Уравнение (29) обычно используется в проектных расчетах, а уравнение (34) вводится здесь для прямого сравнения с методами массопереноса для многокомпонентных сред (см. п. Е).

Уравнения (29) и (34) можно решить с помощью итераций для T_I при условии, что температура охлаждающей среды известна вместе с состоянием газовой фазы (в терминах $\tilde{y}_{1b}$ и T_g). Чтобы решить это уравнение, необходима следующая зависимость между T_I и $\tilde{y}_{1I}$:

$$\tilde{y}_{1I} = \frac{p^s(T_I)}{p}, \quad (37)$$

где $p^s(T_I)$ — давление пара при температуре T_I ; p — общее давление. Наиболее простой метод определения $\tilde{y}_{1b}$ и T_g состоит в допущении, что процесс конденсации следует кривой равновесной конденсации (см. пп. А и В). После решения уравнения (29) можно определить коэффициент теплопередачи U :

$$U (T_g - T_0) = \alpha_{0I} (T_I - T_0) \quad (38)$$

и использовать его в (18).

Уравнения для газовой фазы. Обычно использование кривой равновесной конденсации не очень точно, если имеются большие различия в относительных молекулярных массах неконденсирующегося газа и пара. Кроме того, надо интегрировать уравнения теплового и массового баланса в газовой фазе по пути движения пара. Из баланса теплоты и массы находим соответственно

$$\frac{dT_g}{dA} = \frac{\alpha_g (T_g - T_I)}{\dot{M}_g c_{pg}}, \quad (39)$$

$$\frac{d\dot{N}_{g1}}{dA} = -\dot{n}_1, \quad (40)$$

где $\dot{N}_{g1}$ — мольный расход пара, по которому определяется $\tilde{y}_{1b}$:

$$\tilde{y}_{1b} = \frac{\dot{N}_{g1}}{\dot{N}_{g1} + \dot{N}_{g2}}, \quad (41)$$

где $\dot{N}_{g2}$ — мольный расход неконденсирующегося газа, равный его входному значению. Уравнения (39) и (40) надо интегрировать численно. Температура конденсации

объеме газа падает с уменьшением $\tilde{y}_{1b}$ и может падать быстрее или медленнее, чем действительная температура T_g . Следовательно, газовая фаза может стать перегретой или пересыщенной, что более вероятно для паров с высокой относительной молекулярной массой. Пересыщение является необходимым (хотя и недостаточным) условием для образования тумана; этот вопрос обсуждается в § 2.6.7.

Часто полезно при исследовании образования тумана иметь уравнение, в котором сравниваются непосредственно парциальное давление пара в газовой фазе с температурой газовой фазы. Это получается при делении уравнения (40) на (39) и использовании зависимостей (28) и (41). Если затем обе стороны уравнения умножить на общее давление p , то получается следующее уравнение:

$$\frac{dp_{1b}}{dT_g} = \frac{(p_{1b} - p_{1l})}{T_g - T_l} \xi \left(\frac{\delta_{12}}{k_g} \right)^{2/3} \left(\frac{e^a - 1}{a} \right), \quad (42)$$

где p_{1b} и p_{1l} — парциальные давления пара в объеме газа и на границе раздела соответственно. Это уравнение впервые получено в [12].

Д. Бинарные смеси паров. В [11] уравнение (34) применялось для описания конденсации бинарных смесей

$$\alpha_{0l} (T_l - T_0) = \alpha_g (T_g - T_l) + \Delta \tilde{h}_z \beta \cdot \frac{\tilde{y}_{1b} - \tilde{y}_{1l}}{z_1 - \tilde{y}_{1b}}, \quad (43)$$

где

$$\Delta \tilde{h}_z = z_1 \Delta \tilde{h}_1 + (1 - z_1) \Delta \tilde{h}_2 \quad (44)$$

и

$$z_1 = \dot{n}_1 / (\dot{n}_1 + \dot{n}_2). \quad (45)$$

Поправочные множители для получения α_g и β по α_g и β снова определяются из (26) и (35), но теперь ϕ и a равны соответственно:

$$\phi = \dot{n}_t / \beta \quad (46)$$

и

$$a = (\dot{n}_1 \tilde{c}_{pg1} + \dot{n}_2 \tilde{c}_{pg2}) / \alpha_g, \quad (47)$$

где $\dot{n}_t$ — общий поток массы при конденсации ($\dot{n}_1 + \dot{n}_2$).

Сначала рассмотрим простую ситуацию, при которой происходит небольшое смещение в жидкой фазе, при этом состав жидкости вблизи границы раздела остается таким же, как и в паре:

$$\tilde{x}_i = z_i, \quad (48)$$

где $\tilde{x}_i$ — мольная доля i -го компонента жидкости; $z_i = \dot{n}_i / \dot{n}_t$. Эта ситуация подобна дифференциальной конденсации (см. п. В) и может возникнуть, если конденсат, образующийся в какой-либо точке, быстро стекает с поверхности теплообменника, в результате чего не происходит смешения с конденсатом, образующимся в другом месте. Она может возникнуть также в том случае, когда коэффициенты массопереноса в жидкой фазе очень низки.

Состав газовой фазы на границе раздела рассчитывается по x_i с использованием зависимостей для равновесия пар — жидкость, подобных указанным в § 4.2.1. Например, для идеальных смесей

$$\tilde{y}_i = \frac{p_i^s(T_l)}{p} \tilde{x}_i. \quad (49)$$

Если состояние газовой фазы известно, то уравнения (43), (44), (48) и (49) можно решить с помощью итераций для z_i , T_l , $\tilde{y}_{1b}$ и других величин с использованием дополнительного уравнения неразрывности

$$\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 1. \quad (50)$$

Состояние газовой фазы определяется интегрированием уравнений (39) и (40) со следующим дополнительным уравнением неразрывности для второго компонента:

$$\frac{d\dot{N}_{g2}}{dA} = -\dot{n}_2. \quad (51)$$

Теперь рассмотрим другую ситуацию, когда жидкая и газовая фазы движутся в одном направлении и жидкая пленка перемешана по всей ее толщине. Этот случай характеризуется очень высокими коэффициентами массопереноса в жидкой фазе в отличие от случая с очень низкими коэффициентами переноса, рассмотренного выше. Названные два крайних случая могут приводить к одним и тем же результатам [13]. Состав жидкой фазы $\tilde{x}_i$ рассчитывается по формуле

$$\tilde{x}_i = \frac{\dot{N}_{li}}{\dot{N}_{li} + \dot{N}_{i2}}, \quad (52)$$

где $\dot{N}_{li}$ — мольный расход жидкости, причем

$$\dot{N}_{li} = (\dot{N}_{gi})_{in} - \dot{N}_{gi}, \quad (53)$$

где $(\dot{N}_{gi})_{in}$ — входные мольные потоки пара.

Е. Многокомпонентные смеси. Применение указанных методов в случае многокомпонентных смесей не очевидно. В литературе имеется группа методов, основанных на уравнениях диффузии Стефана — Максвелла, здесь рассмотрен один из них [13, 14]. Полезно сравнить этот метод для многокомпонентных смесей с простым методом для однокомпонентного пара с неконденсирующимся газом, описанным в п. С.

Уравнение (24) запишем в виде

$$\dot{n}_1 = \beta \cdot (\tilde{y}_{1b} - \tilde{y}_{1l}) + \dot{n}_1 \tilde{y}_{1b}. \quad (54)$$

Применяя его к многокомпонентным смесям, получаем

$$\dot{n}_1 = \sum_{i=1}^{n-1} k_{ij} (\tilde{y}_{ib} - \tilde{y}_{il}) + \dot{n}_1 \tilde{y}_{1b}, \quad (55)$$

где рассмотрим случай $n-1$ конденсирующихся паров при наличии n -го неконденсирующегося компонента. Общий мольный поток конденсата

$$\dot{n}_t = \sum_{j=1}^{n-1} \dot{n}_j. \quad (56)$$

Величины k_{ij} — элементы матрицы коэффициентов переноса массы паровой фазы $[k \cdot]$ размерностью $(n-1) \times (n-1)$. Эта матрица получена коррекцией другой матрицы $[k]$ для учета эффектов переноса массы

$$[k \cdot] = [k] [\Xi]. \quad (57)$$

Данное выражение является общей формой уравнения (25). Общей формой зависимости (26), необходимой для получения матрицы поправочных множителей $[\Xi]$, является

$$[\Xi] = [\Phi] (\exp[\Phi] - [I])^{-1}, \quad (58)$$

где $[I]$ — единичная матрица. Экспоненциальную функцию матрицы можно определить с помощью теоремы разложения Силвестера, которая дана, например, в [15]. Диагональные элементы $[\Phi]$ получены в виде выражения

$$\Phi_{ii} = n_i / \beta_{in} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \dot{n}_k / \beta_{ik}, \quad (59)$$

которое является общей формой уравнения (27). В бинарных системах нет аналога недиагональным элементам, которые определены следующим образом:

$$\Phi_{ij} = -n_i \left(\frac{1}{\beta_{ij}} - \frac{1}{\beta_{in}} \right), \quad (60)$$

причем β_{ij} являются бинарными коэффициентами переноса массы, найденными из уравнения (28)

$$\beta_{ij} = \frac{\alpha_g}{c_{pg}} \left(\frac{\delta_{ij}}{k_g} \right)^{2/3}. \quad (61)$$

Элементы матрицы $[k]$, входящей в уравнение (57), задаются с помощью другой матрицы

$$[k] = [B]^{-1}. \quad (62)$$

Запишем диагональные и недиагональные элементы соответственно:

$$B_{ii} = \frac{\tilde{y}_{ib}}{\beta_{in}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\tilde{y}_{kb}}{\beta_{ik}}; \quad (63)$$

$$B_{ij} = -\tilde{y}_{ib} \left(\frac{1}{\beta_{ij}} - \frac{1}{\beta_{in}} \right). \quad (64)$$

Ввиду сложности указанных уравнений упростим выражение (55)

$$\dot{n}_i = \beta_{in}(\tilde{y}_{ib} - \tilde{y}_{ir}) + \dot{n}_i \tilde{y}_{ib}. \quad (65)$$

В [13] приведен пример, в котором этот подход оказался не точнее, чем более простой приближенный метод, указанный в п. А.

Уравнения (55)–(64) можно решить с помощью итераций для получения $\dot{n}_i$ при условии, что составы пара в объеме и на границе раздела известны. Рекомендации по решению этих уравнений приведены в [13]. Состав в объеме определен таким же способом, как и для бинарных систем, т. е. путем интегрирования уравнений неразрывности массы вдоль направления движения пара

$$\frac{d\dot{N}_{gi}}{dA} = -\dot{n}_i. \quad (66)$$

После этого $\tilde{y}_{ib}$ определяют из соотношения

$$\tilde{y}_{ib} = \dot{N}_{gl} \left/ \sum_{i=1}^n \dot{N}_{gi} \right. \quad (67)$$

Следует отметить, что уравнение (66) не надо интегрировать при $i=n$, так как $\dot{N}_{gn}$ — постоянная для неконденсирующегося компонента. Состав пара на границе раздела определяется по составу жидкой фазы методом, подобным рассмотренному в п. С для бинарных смесей. Для этого необходимы данные по равновесию пар — жидкость и допущение относительно смешения в жидкой фазе. Температура же границы раздела нужна для установления зависимости равновесия пар — жидкость и определяется из следующей общей формы уравнения (34):

$$\alpha_{0i}(T_I - T_0) = \alpha_g(T_g - T_I) + \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{h}_{gi} - \tilde{h}_{li}) \dot{n}_i, \quad (68)$$

где $\tilde{h}_{gi}$ и $\tilde{h}_{li}$ — мольные удельные энтальпии в объеме газа и жидкости соответственно. Это уравнение надо решать с помощью итераций вследствие нелинейной зависимости $\dot{n}_i$ от T_I .

Температура T_g в объеме газовой фазы определяется, как и прежде, интегрированием уравнения (39). Параметр α_g , входящий в выражение (35) для расчета α_g , запишем в виде

$$\alpha_g = \frac{1}{\alpha_g} \sum_{i=1}^{n-1} \dot{n}_i \tilde{c}_{pgi}. \quad (69)$$

2.6.4. Конденсация смесей паров, образующих несмешивающиеся жидкости

Р. Дж. Сардесаи

При конденсации смеси паров несмешивающихся жидкостей возникают режимы течения конденсата, существенно отличные от ламинарных пленок, образуемых часто при конденсации чистых паров или смесей паров смешивающихся жидкостей. Режимы течения конденсата сложны настолько, что строгое гидродинамическое моделирование потоков несмешивающихся конденсатов пока не осуществлено. Однако некоторые исследователи представили эмпирические или полуэмпирические уравнения, описывающие их экспериментальные данные.

Процесс конденсации может развиваться по трем различным направлениям, которые определяются составом пара и температурой на границе раздела пар — жидкость. Направления конденсации лучше всего описывать, используя диаграмму температура — состав бинарной системы.

Рассмотрим диаграмму температура — состав для полностью несмешивающейся бинарной системы, как показано на рис. 1. Хотя в реальных системах будет происходить частичное смешение, удобно рассматривать полностью несмешивающуюся систему. Главная точка на рис. 1 соответствует существованию гетерозеотропной смеси (точка E). Она называется эвтектической точкой по аналогии с системами твердое тело — твердое тело. Ниже рассмотрим три возможных направления конденсации.

1. Конденсация эвтектической смеси (линия OE на рис. 1).

2. Конденсация неэвтектической смеси с конденсацией только одного пара, другой ведет себя как неконденсирующийся газ (линия MI на рис. 1).

3. Конденсация неэвтектической смеси с образованием несмешивающихся жидкостей (линия ME на рис. 1).

Если в системе кроме двух паров присутствует неконденсирующийся газ, то процессы конденсации усложняются, потому что эвтектический состав на границе раздела и в объеме газа изменяется и становится неодинаковым в результате градиентов концентрации. Кроме того, эвтектический состав на границе раздела может изменяться по длине конденсатора в зависимости от концентрации неконденсирующегося газа на границе раздела. Пути конденсации и расчетные методы в случае паров несмешивающихся жидкостей при наличии неконденсирующегося газа рассмотрены в п. D. В п. В описаны механизм и корреляции при конденсации эвтектической бинарной смеси паров; в п. С — процессы и методы моделирования конденсации бинарной неэвтектической смеси паров.

В. Конденсация эвтектических смесей. Рассмотрим перегретую эвтектическую смесь, которой соответствует точка O на рис. 1. Если температура стенки конденсатора

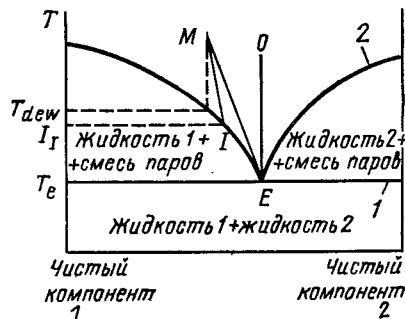


Рис. 1. Диаграмма температура — состав для полностью несмешивающейся системы:
1 — кипение; 2 — конденсация

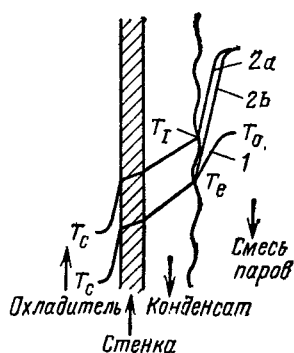


Рис. 2. Температурные профили при конденсации бинарных паров не смешивающихся жидкостей

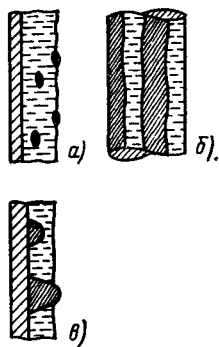


Рис. 3. Три идеализированных механизма конденсации: а — пленка с каплями; б — разделение на зоны; в — неподвижные капли

достаточно низка, чтобы конденсация имела место, то она будет происходить по линии 1 (рис. 2) и оба компонента будут конденсироваться одновременно при постоянной температуре (эвтектической температуре). Конденсат будет состоять из двух жидких фаз с таким же полным составом, как в паре. Эта ситуация подобна конденсации чистого пара, за исключением сложного поведения конденсатной пленки.

Механизм конденсации. Механизм течения несмешивающихся конденсатов очень сложен. Предложен ряд возможных моделей для этого механизма. Большинство этих моделей идеализируют реальные физические изменения, наблюдаемые в эксперименте (рис. 3). Из этих моделей наиболее важными являются следующие.

1. *Модель пленки с каплями* предполагает непрерывную пленку одной жидкой фазы (обычно органической) с каплями другой жидкости (обычно воды в случае смесей вода — органическая жидкость), распределенными в ней и текущими с ней.

2. *Модель с разделенными зонами (ручейковая модель)* предполагает, что одна жидкость занимает часть поверхности конденсации, другая — остальную поверхность. Обе жидкие пленки могут быть дискретными и в этом случае будут образовываться чередующиеся ручейки.

3. *Модель неподвижной капли* предполагает, что капли одной жидкости (обычно воды) прилипают к холодной поверхности и время от времени погружаются в пленку другой жидкости. Эти капли остаются на поверхности твердого тела, увеличиваются в размере и, возможно, скатываются по ней вниз.

Действительный механизм течения может быть намного более сложным, чем предполагают три идеализированные модели, описанные выше. Так, например, очень маленькие подвижные капли органической жидкости могут находиться на поверхности больших неподвижных капель воды [1]. Реальный механизм течения может быть также комбинацией идеализированных механизмов.

Зависимость механизма конденсации от свойств системы, таких как поверхностное натяжение, полностью не ясна. Наблюдения в экспериментах показали, что при высоких скоростях конденсации или при большой концентрации водяного пара можно использовать модель с разделенными зонами. Если обе жидкости смачивают поверхность, то наиболее вероятным будет ручейковое течение. На поверхностях, на которых одна жидкость не смачивает стенку также хорошо, как другая, режим течения с неподвижными каплями более вероятен; однако при увеличении скорости конденсации он может смениться ручейковым.

Природа поверхности конденсации также играет важную роль. Установлено, что при конденсации на политетрафторэтиленовой (ПТФЭ) поверхности коэффициенты теплоотдачи выше, чем на медной поверхности [2]. Это связано с тем, что силы адгезии для ПТФЭ-поверхности намного меньше, чем для медной. Отмечено, что в случае трубы, покрытой ПТФЭ, термическое сопротивление, возросшее из-за самого покрытия, возмещается более высокими коэффициентами теплоотдачи со стороны конденсации [3].

Корреляция для коэффициента теплоотдачи. Теперь рассмотрим корреляции для расчета коэффициента теплоотдачи от конденсатной пленки, содержащей две несмешивающиеся жидкие фазы. При конденсации на наружной поверхности можно использовать методы для горизонтальных и вертикальных труб. Однако они применимы только при ламинарном течении конденсата; для случая турбулентного течения методы расчета и данные отсутствуют.

Ниже приведены корреляции, полученные авторами [1, 4]. Обе зависимости описывают большинство данных (для всех режимов течения) в пределах $\pm 30\%$ [1]. Однако для потока с разделенными зонами они скорее консервативны; но отсутствуют методы для предсказания режимов течения, хотя ручейковый механизм (который дает более высокие коэффициенты теплоотдачи [5, 6]) кажется более вероятным в промышленном оборудовании.

Полуэмпирическая корреляция, полученная автором [1], основана на модели с разделенными зонами. Коэффициент теплоотдачи пленки несмешивающихся конденсатов определяется как

$$\bar{\alpha} = V_1 \bar{\alpha}_1 + (1 - V_1) \bar{\alpha}_2, \quad (1)$$

где V_1 — объемная доля жидкости 1 в конденсате; $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ — средние по пленке коэффициенты теплоотдачи для жидкостей 1 и 2 соответственно. Коэффициенты α_1 и α_2 рассчитываются на основе теории Нуссельта (см. § 2.6.2). Уравнение (1) можно также использовать для определения локальных коэффициентов теплоотдачи, в этом случае следует знать местные величины V_1 , α_1 , α_2 .

Полуэмпирическая корреляция [4] рассматривает несмешивающиеся конденсаты как гомогенную жидкость с соответствующими осредненными свойствами. Для коэффициента теплоотдачи дано уравнение, подобное (12), § 2.6.2:

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda_{av}} \left(\frac{\eta_1^2}{\rho_{av} (\rho_{av} - \rho_g) g_n} \right)^{1/3} = C Re_T^{-1/3}, \quad (2)$$

где $C=1,47$ и $1,51$ соответственно для вертикальных и горизонтальных труб; λ_{av} — коэффициент теплопроводности, осредненный с учетом объемных долей жидкостей; ρ_{av} — плотность, осредненная с учетом массовых долей жидкостей; g_n — ускорение силы тяжести; η_1 — вязкость компонента, образующего пленку (органического компонента);

$$Re_T = 4 \dot{G}_T / \eta_1, \quad (3)$$

где для вертикальной поверхности $\dot{G}_T$ — расход конденсата на единицу ширины поверхности конденсации, для горизонтальной трубы — расход конденсата на единицу длины трубы.

В случае конденсации внутри горизонтальных труб или на пучках труб отсутствуют методы для предсказания коэффициента теплоотдачи от конденсата. Предполагается, что в таких случаях следует применять подход [4]. Коэффициенты теплоотдачи можно рассчитать, используя соответствующие корреляции для чистого пара и рассмотренные выше свойства. Конденсацию с учетом касательных напряжений в паре можно рассмотреть аналогичным образом.

С. Конденсация неэвтектических смесей. Описание процесса. Рассмотрим перегретую неэвтектическую смесь, которой соответствует точка M на рис. 1. В зависимости от температуры границы раздела пар — жидкость и, следовательно, температуры стенки конденсатора возможны два процесса конденсации.

Если температура стенки такова, что температура границы раздела пар — жидкость выше эвтектической (кривая конденсации 2а на рис. 2), то конденсироваться может лишь один компонент. Другой компонент ведет себя как неконденсирующийся газ. Если точка M лежит слева от эвтектической точки E , то конденсирующийся пар будет первым компонентом, если точка M находится справа от точки E , то конденсирующийся пар — вторым компонентом. Температура границы раздела T_I будет всегда лежать между температурами конденсации T_{dew} и эвтектической T_e [7]. Таким образом, наклон соединительной линии MI будет отрицательным, если M слева от E , и положительным, если M справа от E .

При достаточно низкой температуре стенки оба компонента могут конденсироваться одновременно при эвтектической температуре (кривая конденсации 2б на рис. 2). Полный состав жидкости определяется скоростями переноса массы двух компонентов через паровую фазу. Это (по крайней мере в паровой фазе) подобно конденсации бинарной смеси паров, как описано в § 2.6.3. Однако жидкая пленка состоит из двух фаз. В этом случае температура конденсации или более характерная температура границы раздела пар — жидкость является эвтектической температурой, так как она единственная, при которой пар и двухфазная жидкость могут быть в равновесии. Избыток в концентрации пара отдельного компонента отразится на общем составе конденсата; концентрация этого компонента в конденсате будет больше, чем в эвтектическом составе.

Методы моделирования. Рассмотрим перегретую неэвтектическую смесь, которой соответствует точка M на рис. 4. Пусть поверхностные условия соответствуют точке 1, так что только первый компонент конденсируется, а второй компонент ведет себя как неконденсирующийся газ. Температура поверхности раздела равна T_I . Когда конденсация первого компонента продолжается, условия в объеме и на поверхности раздела изменяются в направлениях, показанных на рис. 4, пока не достигнут точки E , где начинают конденсироваться оба пара. На участке от 1 до E (исключая точку E) на поверхности раздела на рис. 4 процессы переноса массы и теплоты идентичны описанным в § 2.6.3, и рассмотренную в этом параграфе методику можно использовать лишь в расчете скоростей переноса теплоты и массы. Конденсат будет однофазной жидкостью. Решение уравнения (34), § 2.6.3 сводится к определению с помощью итераций температуры границы раздела T_I . Следующие пределы применимы к температуре границы раздела:

$$T_{\text{dew}} > T_I > T_e. \quad (4)$$

В точке E пар, который вел себя как неконденсирующийся газ, начинает конденсироваться. Метод расчета по

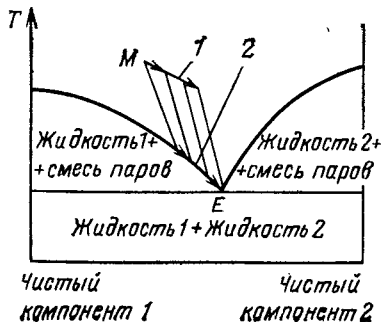


Рис. 4. Диаграмма температура — состав, показывающая путь конденсации, когда однокомпонентный пар конденсируется из бинарной неэвтектической смеси:
1 — условия в объеме;
2 — условия на границе раздела

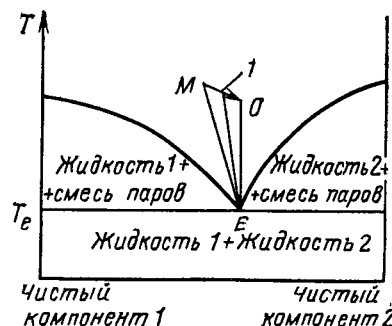


Рис. 5. Диаграмма температура — состав, показывающая путь конденсации, когда два пара конденсируются из бинарной неэвтектической смеси (1 — условия в объеме)

этому должен включать проверку скоростей переноса на границе раздела, где конденсируется только один пар. Проверку следует проводить, если $T_I < T_e$. При выполнении этого условия конденсируются оба пара и различные алгоритмы следует использовать для расчета скоростей конденсации.

Теперь рассмотрим перегретую неэвтектическую смесь, которой соответствует точка M на рис. 5. Пусть условия на границе раздела определяются эвтектической точкой E , так что оба пара конденсируются. При конденсации условия в объеме изменяются по направлению к точке 0, тогда как условия на границе раздела соответствуют по-прежнему точке E . Сопротивление массопереносу со стороны пара быстро уменьшается, пока условия в объеме не будут определяться точкой 0, где сопротивление переносу массы равно нулю. На участке условий в объеме от M до 0 (исключая точку 0) на рис. 5 расчетные процедуры для скоростей тепло- и массопереноса подобны описанным в разд. 2.6 для бинарных смесей паров. Однако имеются два важных отличия, которые следует отметить.

1. В уравнение (43), § 2.6.3 для коэффициента теплоотдачи α_{0I} входит коэффициент теплоотдачи от конденсатной пленки α_I , как показано в уравнении (30), § 2.6.3. Этот коэффициент следует определить, используя уравнение (1).

2. Температура границы раздела T_I и состав пара $\tilde{y}_I$ остаются постоянными и равны соответственно эвтектической температуре T_e и составу $\tilde{y}_{Ie}$, поэтому обсуждение, проведенное в § 2.6.3 по расчету состава пара на границе раздела $\tilde{y}_I$ [уравнение [49], § 2.6.3], излишне. Также не применимо в этом случае описание переноса массы со стороны жидкости уравнениями (48) и (52), § 2.6.3.

Решение уравнения (43), § 2.6.3 требует определения z_i с помощью итераций. Пределы по z_i можно установить, изучая зависимость $\tilde{y}_{Ib}$ от $\tilde{y}_{Ie}$. Таким образом, если

$$\tilde{y}_{Ib} > \tilde{y}_{Ie}, \text{ то } z_i > \tilde{y}_{Ib}, \quad (5)$$

и если

$$\tilde{y}_{Ib} < \tilde{y}_{Ie}, \text{ то } z_i < \tilde{y}_{Ib}. \quad (6)$$

На рис. 5, когда условия в объеме соответствуют точке 0, сопротивление переносу массы равно нулю и процесс переноса аналогичен описанному в п. В.

Д. Конденсация смесей паров несмешивающихся жидкостей при наличии неконденсирующегося газа. Описание процесса. Схематическая диаграмма профилей концентрации и температуры при конденсации смеси паров несмешивающихся жидкостей при наличии неконденсирующегося газа представлена на рис. 6. На диаграмме показано, что конденсат образован из несмешивающихся жидкостей. Однако возможны также ситуации, в которых конденсируется один из паров. Таким образом, в зависимости

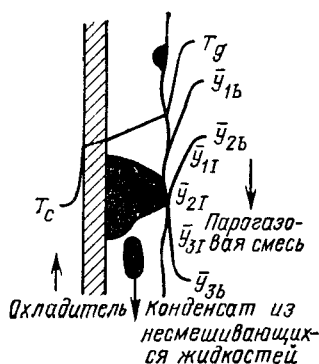


Рис. 6. Профили концентрации и температуры при конденсации паров несмешивающихся жидкостей при наличии неконденсирующегося газа

от конкретного процесса в конденсате могут присутствовать одна или две фазы. Обычно, пока температура охлаждающей среды высока, оба компонента должны конденсироваться, образуя несмешивающиеся конденсаты. В таком случае температура и состав смеси паров на границе раздела являются эвтектическими, соответствующими концентрации $\tilde{y}_{3I}$ на границе раздела неконденсирующегося газа. В общем, при концентрации y_3 неконденсирующегося газа эвтектическая температура определяется выражением

$$p_1^s(T_e) + p_2^s(T_e) = p(1 - \tilde{y}_3), \quad (7)$$

где $p^s(T_e)$ — давление пара компонента при температуре T_e ; p — общее давление системы.

Эвтектический состав задан уравнениями:

$$\tilde{y}_{1e} = \frac{p_1^s(T_e)}{p}; \quad \tilde{y}_{2e} = \frac{p_2^s(T_e)}{p}. \quad (8)$$

Поскольку концентрация на границе раздела неконденсирующегося газа отличается от состава пара в объеме, соответствующие эвтектические составы различны. Следовательно, диаграмму температура — состав бинарной системы, использованную выше, нельзя применить для описания процесса конденсации в данном случае. Пути конденсации теперь задаются с помощью треугольной диаграммы (рис. 7). Три компонента системы изображены тремя углами треугольной диаграммы: 1 и 2 — конденсирующийся газ; 3 — неконденсирующийся газ. Линия ZE является эвтектической, точка E соответствует эвтектическому составу в отсутствие неконденсирующегося газа. Установлено, что для большого числа систем эвтектическая линия ZE близка к прямой [7]. Условия на границе раздела должны соответствовать линии ZE , когда оба пара конденсируются. Любая другая точка границы раздела на диаграмме будет соответствовать случаю, когда конденсируется только один из трех компонентов.

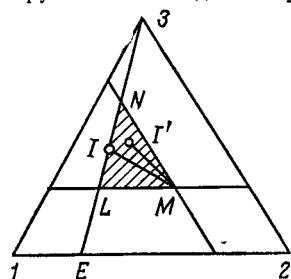


Рис. 7. Треугольная диаграмма, иллюстрирующая пути конденсации для смеси паров несмешивающихся жидкостей при наличии неконденсирующегося газа

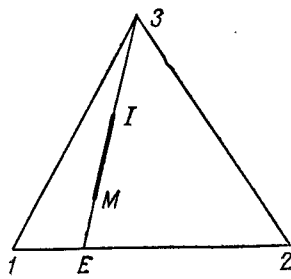


Рис. 8. Треугольная диаграмма, иллюстрирующая путь конденсации, когда условия в объеме парагазовой смеси соответствуют эвтектической линии

Теперь рассмотрим парагазовую смесь, которая изображена точкой M на рис. 7. Показано, что условиям на границе раздела может соответствовать только заштрихованная площадь ΔLMN на рис. 7 [7, 8]. Возможны два пути конденсации. Если температура стенки достаточно низка, то будут конденсироваться оба пара (линия MI) и условиям на границе раздела I будет соответствовать участок LN линии ZE . При высокой температуре будет конденсироваться только один из компонентов (линия MI') и условия на границе раздела I' будут находиться в пределах ΔLMN на линии LN . Конденсирующимся будет второй компонент, если точка M лежит справа от эвтектической линии ZE , и первый компонент, если точка M — слева от эвтектической линии ZE . Если точка M находится на эвтектической линии, то конденсируются оба компонента, и только этот путь конденсации является возможным. Составу I на границе раздела (рис. 8) также будет соответствовать эвтектическая линия ZE .

Методы моделирования. Рассмотрим парагазовую смесь, показанную точкой M на рис. 7. В зависимости от температуры стенки и, следовательно, температуры охлаждающей среды выделим два различных процесса конденсации.

1. Конденсируется только второй компонент; этот процесс конденсации показан линией MI' на рис. 7. Компоненты 1 и 3 ведут себя как неконденсирующиеся газы. Скорость переноса массы

$$\dot{n}_2 = \beta_{2,ef} \frac{\tilde{y}_{2b} - \tilde{y}_{2I}}{1 - \tilde{y}_{2b}}, \quad (9)$$

где

$$\beta_{2,ef} = \xi \beta_{2,ef}. \quad (10)$$

Корректирующий множитель ξ задан уравнениями (11) и (12):

$$\xi = \varphi / (\varphi - 1), \quad (11)$$

где

$$\varphi = \dot{n}_2 / \beta_{2,ef}. \quad (12)$$

Эффективный коэффициент переноса массы $\beta_{2,ef}$ получен на основе аналогии между переносами теплоты и массы [9]

$$\beta_{2,ef} = \frac{\alpha_g}{c_{pg}} \left(\frac{\delta_{2,ef}}{k_g} \right)^{2/3}, \quad (13)$$

где $\delta_{2,ef}$ — эффективный коэффициент диффузии, предложенный в [10]:

$$\delta_{2,ef} = \frac{1 - \tilde{y}_{2b}}{(\tilde{y}_{1b}/\delta_{12}) + (\tilde{y}_{3b}/\delta_{23})}. \quad (14)$$

Следует отметить, что уравнения (9)–(13) подобны уравнениям (24), § 2.6.3 и (28), § 2.6.3 для конденсации пара при наличии неконденсирующегося газа; различие между ними в том, что первые основаны на эффективном коэффициенте диффузии, тогда как вторые — на бинарном коэффициенте диффузии.

Для решения уравнения (9) необходимо знать состав на границе раздела. Для этого в свою очередь надо знать температуру на границе раздела, которую можно определить, приняв во внимание сохранение энергии на границе раздела, что выражается уравнением (34), § 2.6.3.

2. Конденсируются первый и второй компоненты; путь конденсации показан линией MI на рис. 7. Скорости конденсации заданы выражением (55), § 2.6.3, которое определяет поток конденсации первого компонента, но верно для любого конденсирующегося компонента. Указанное уравнение можно также использовать для расчета скоро-

стей конденсации, если условия в объеме (точка *M*) находятся на эвтектической линии *ZE* (как на рис. 8), потому что в этом случае возможный процесс конденсации приводит к совместной конденсации первого и второго компонентов. Условия на границе раздела находят, рассматривая сохранение энергии на границе раздела [см. уравнение (68), § 2.6.3]. В выражении (68), § 2.6.3 коэффициент теплопередачи содержит коэффициент теплоотдачи пленки конденсата, что видно из уравнения (30), § 2.6.3. Локальное значение коэффициента конденсатной пленки следует находить из (1).

Изменение состава в объеме по длине конденсатора определяется интегрированием уравнения сохранения массы (66), § 2.6.3 по пути движения пара.

2.6.5. Капельная конденсация

П. Гриффитс

А. Введение. Капельная конденсация — один из видов теплопередачи с высоким коэффициентом теплоотдачи. Если типичные коэффициенты теплоотдачи при пленочной конденсации составляют 5000 Вт/(м²·°C), то коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации обычно составляет 50 000 Вт/(м²·°C). Это значит, что применение капельной конденсации в теплообменниках, по-видимому, приведет к настолько малым термическим сопротивлениям со стороны конденсации, что скорость передачи теплоты будет определяться сопротивлениями жидкости, окисной пленки и трубы. Поэтому точный расчет коэффициента теплоотдачи при капельной конденсации себя не оправдывает, даже если это нетрудно сделать.

Ниже проведена оценка коэффициента теплоотдачи при капельной конденсации; дано описание механизма капельной конденсации и рекомендуемых методов расчета коэффициента теплоотдачи при капельной конденсации, предложены некоторые активаторы конденсации, используемые для водяного пара.

В. Порядок величины коэффициентов теплоотдачи. Данные по капельной конденсации для многих поверхностей и экспериментальных систем собраны в [1] и представлены на рис. 1. Основная масса результатов относится к конденсации пара на вертикальных поверхностях из меди или из медного сплава. Разброс обусловлен в основном наличием неконденсирующихся примесей. Для обеспечения хорошего их удаления необходим устойчивый направленный поток пара. Изменения площади проходного сечения для пара и резкие изменения направления потока приводят к образованию скоплений неконденсирующегося газа и к ухудшению теплоотдачи.

С. Механизм капельной конденсации. Капельная конденсация происходит на плохо смачиваемых поверхностях (имеющих краевые углы больше 90°). Конденсация начинается на чрезвычайно маленьких каплях (диаметр порядка 10⁻⁶ м), улавливаемых впадинами на поверхности [2]. Огромное число этих капель (порядка 10⁹/см²) образуется при переохлаждении поверхности, составляющем примерно 0,3°С. Они растут при конденсации на них самих и при слиянии с соседними каплями, пока не становятся настолько большими, что отрываются, падают или уносятся от поверхности паром. Конденсация происходит на каплях, но не на небольших участках между ними. В общем теплота передается через ряд сопротивлений; первым является слой неконденсирующегося газа, окружающий каплю, вторым — сама капля; наконец, теплота передается через шейку в основании капли. Если имеется толстый слой активатора, то теплота должна передаваться также и через него.

Переохлаждение, необходимое для возникновения капельной конденсации, настолько мало, что его здесь не учитывают. Ниже даны рекомендации для расчета теплоотдачи при различных сопротивлениях.

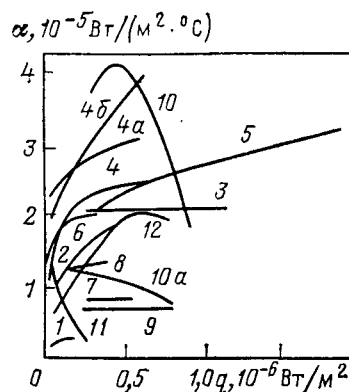


Рис. 1. Зависимость от тепловой нагрузки коэффициента теплоотдачи при капельной конденсации [1, 2]

Номер кривой	Расположение	Материал поверхности	Обработка поверхности	Активатор	Устройство для продувки	Концентрация газа
1	Вертикальное	Медь	Зеркально-гладкая	Стеариновая кислота	Неизвестно	Неизвестно
2	»	»	»	Смешанные бензилмеркаптан и олеиновая кислота	Непрерывный дренаж	»
3	»	Хром, нанесенный на латунь	Полированная	Олеиновая кислота	Неизвестно	»
4	»	Медь	Зеркально-гладкая	Диоктадецилди-сульфид	Обдувка поверхности, различные скорости	2-млн. части
5	»	»	»	Диоктадецилди-сульфид	Закрытие при продувке	Очень низкая
6	»	»	»	Диоктадецилди-сульфид	Обдувка поверхности	То же
7	Вертикальные трубы	Хром, нанесенный на медь	Неизвестна	Олеиновая кислота	Непрерывный дренаж	Неизвестна
8	Вертикальное	Медь	»	То же	Обдувка поверхности	»
9	»	Медные трубы	»	Бензилмеркаптан	Непрерывный дренаж	»
10, 10a	»	Медь	Полированная	»	Обдувка поверхности	»
11	»	»	»	Олеиновая кислота	Неизвестно	»
12	»	»	Неизвестна	Бензилмеркаптан	Обдувка	»

Д. Расчет теплоотдачи при капельной конденсации. Коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации слабо зависит от ориентации и длины поверхности. В результате для хорошо активированных медных поверхностей при давлениях, равных и меньших атмосферного, справедливо простое выражение [2]:

$$\alpha = \alpha_{dco}, \quad (1)$$

где

$$\alpha_{dco} = 51 \cdot 10^4 + 2044 T_s, \quad (2)$$

до тех пор, пока

$$20^\circ\text{C} < T_s < 100^\circ\text{C}, \quad (3)$$

$$\text{и } \alpha_{dco} = 255 \cdot 10^4,$$

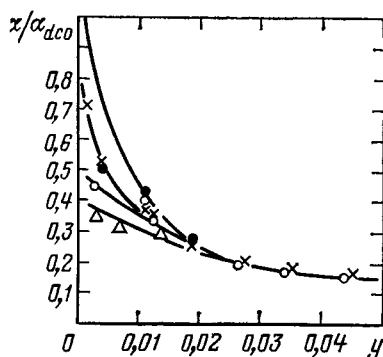


Рис. 2. Влияние концентрации некоонденсирующихся добавок (в мольных долях) на коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации [3] с различной скоростью поступающего пара: ● — 0,61 м/с; × — 0,40 м/с; ○ — 0,23 м/с; △ — 0,00

до тех пор, пока $T_s > 100^\circ\text{C}$.

Здесь T_s , $^\circ\text{C}$; α , Вт/(м 2 · $^\circ\text{C}$).

Неконденсирующиеся примеси в паре, конденсирующемся на медной поверхности, учтены в [3] (рис. 2). Чтобы воспользоваться этой кривой, считают, что знаменатель величины, отложенной по оси ординат, есть α_{dco} , который определяется из (2) или (3). Скорость пара (рис. 2) является локальной у поверхности конденсации. В общем, имеются лишь ограниченные данные и, как видно из рис. 2, необходима их экстраполяция. Однако ясно, что некоонденсирующиеся примеси оказывают большое влияние на теплоотдачу при капельной конденсации.

Если поверхность конденсации не является столь хорошим проводником теплоты, как медь или серебро, возникает одна из компонент термического сопротивления. Это — сопротивление шейки капли. На рис. 3 представлены данные по теплоотдаче [4]. Здесь знаменателем величины, откладываемой по вертикальной оси, является коэффициент теплоотдачи, определяемый согласно уравнению (2) или (3). Указанное сопротивление учитывает дополнительное падение температуры, возникающее на поверхностях с низким коэффициентом теплопроводности в результате сгущения линии теплового потока вблизи активных центров поверхности конденсации.

Неясно, что будет происходить, если конденсируется пар, содержащий газ, на поверхности с низким коэффициентом теплопроводности. Из физических соображений следует, что оба фактора могут уменьшить коэффициент теплоотдачи. При данных условиях предполагается использовать следующее уравнение:

$$\alpha = \alpha_{dco} \left(\frac{\alpha}{\alpha_{dco1}} \right) \left(\frac{\alpha}{\alpha_{dco2}} \right), \quad (4)$$

где (α/α_{dco1}) получено с помощью рис. 2 и (α/α_{dco2}) — рис. 3.

Слой активатора обычно настолько тонок, что он оказывает пренебрежимо малое влияние на теплоотдачу. Однако если используется постоянный активатор, такой как тефлон, теплоотдача может заметно понизиться. В этом случае α_p , определяемый из (5), следует подставить в (6), которое учитывает сопротивления капли и активатора

$$\alpha_p = \lambda_p / X_p; \quad (5)$$

$$(1/\alpha) = (1/\alpha)_{\text{ур. (4)}} + 1/\alpha_p. \quad (6)$$

Е. Активаторы. Большое число активаторов опробовано для капельной конденсации, но удовлетворяющего требованиям не найдено. Хороший активатор прочно удерживается металлами и является гидрофобной поверх-

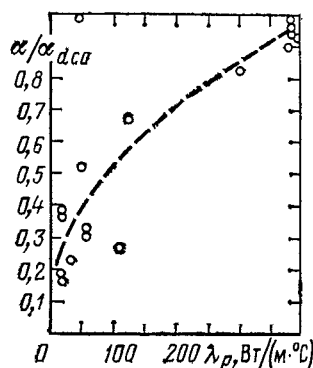


Рис. 3. Влияние теплопроводности теплоотдающей поверхности на коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации [4]. Штриховая линия — результат осреднения

ностью по отношению к воде. Хотя любое масло будет активатором капельной конденсации, оно в течение нескольких часов или дней вымывается с поверхности. Однако масла с серой удерживаются металлами более прочно. Обзор активаторов представлен в [5]. Установлено, что наиболее эффективный из них — соединение $(\text{C}_{18}\text{H}_{37}\text{S})_4\text{Si}$, разбавленное в 1%-ном растворе октановой кислоты. Активатор можно ввести в поток или в испаритель. Оба метода распределения активатора оказались эффективными.

Данные [2] получены на медной поверхности с 1%-ным раствором ди-*n*-октадецилдисульфида в CCl_4 . Этот же активатор оказался эффективным для золотой поверхности [4]. Из различных исследованных активаторов, как описано в [2], наиболее эффективный — тефлон.

Очень тонкий, нанесенный в вакууме, слой золота также дал хорошие результаты [5]. Конечно масла, имеющиеся в паре, прилипают очень прочно к золоту, так что в действительности скорее осевшие на поверхности масла, чем само золото, действуют как активаторы.

2.6.6. Интенсификация конденсации

Артур Е. Берглс

Отдельные пассивные и активные методы усиления эффективны для конденсации в объеме пара и при вынужденной конвекции [1—5]. Некоторые системы, успешно испытанные в лаборатории, нашли применение в промышленных конденсаторах. Наибольший интерес вызывает конденсация органических жидкостей, теплофизические свойства которых обеспечивают относительно низкие коэффициенты теплоотдачи при конденсации.

А. Конденсация в объеме пара. Здесь обсуждается в основном конденсация на наружной поверхности горизонтальных труб. Капельную конденсацию можно рассматривать как метод интенсификации пленочной конденсации путем обработки поверхности. Эта техника рассмотрена в § 2.6.8. Следует отметить, что реальное ее применение имеется лишь для конденсаторов водяного пара, так как для большинства других рабочих жидкостей несмачивающиеся вещества отсутствуют. Например, не найдены стимуляторы капельной конденсации для хладонов [6]. Другой вопрос — ослабление интенсификации при затоплении больших пучков труб. Интенсификация капельной конденсации (помимо обеспечения этого процесса путем выбора эффективного длительно работающего активатора), бесполезна, так как коэффициенты теплоотдачи уже высоки.

В [7] показано, что средние коэффициенты теплоотдачи при пленочной конденсации пара на горизонтальных трубах можно увеличить на 20%, определенным образом размещая полосы тефлона или другого несмачиваемого материала на поверхности. Шероховатые поверхности увеличивают конденсацию в основном в результате турбу-

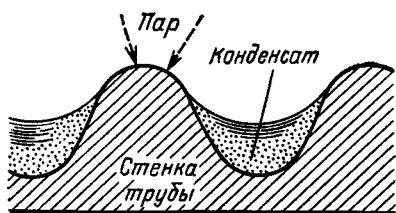


Рис. 1. Профиль поверхности конденсации, предложенный в [10]

лизации пленки. В [8] установлено, что коэффициент теплоотдачи для пара, конденсирующегося снаружи вертикальной трубы, можно удвоить посредством насечки поверхности.

Развитие поверхностей можно осуществлять путем использования подвижно закрепленных проволок, профилированием поверхности и применением сплошных ребер. Управление потоком с помощью поверхностного натяжения и отсоса конденсата надо рассматривать для всех этих методов развития поверхности. В [9] показано, что поверхности, снабженные вертикально расположенными проволоками, увеличивают коэффициенты на 800 %. Конденсат взаимодействует с проволоками, так что превалирует эффективная конденсация в тонкой пленке на большей части поверхности. Рост коэффициента теплоотдачи ограничивается затоплением поверхности.

Трубы конденсатора могут быть профилированными, как показано на рис. 1, с целью использования эффекта Грегориго, в результате чего конденсация происходит в основном на вершинах выпуклых гребней. Затем под действием сил поверхностного натяжения конденсат стекает в вогнутые канавки и отводится. Результирующий усредненный коэффициент теплоотдачи значительно выше, чем при постоянной толщине пленки. Недавно в [11] был представлен анализ оптимальной поверхности Грегориго. Много профилированных труб разработано для испарителей, используемых при обессоливании, и некоторые из них в настоящее время выпускаются промышленностью. Общие коэффициенты (конденсация пара в объеме на наружной поверхности и испарение стекающей пленки внутри) даны для девяти типов выпускаемых промышленностью труб, предложенных в [12]. Для нескольких типов труб наблюдалось увеличение теплоотдачи больше чем на 200%. Недавно представлены обзоры [13, 14] по этим вопросам.

Теплоотдача для горизонтальных труб с эллиптической формой выше, чем для круглых труб [15]. Горизонтальные трубы могут быть также профилированными; для установок обессоливания или конденсаторов пара известны трубы с накаткой или с волнистой поверхностью [16, 17]. В кожухотрубных теплообменниках обычно используются трубы с низкими сплошными круглыми ребрами. Для их расчетов следует использовать работу [18]. Сред-

ние коэффициенты теплоотдачи при конденсации (отнесенные к общей поверхности) для оребренных труб выше, чем для гладких такого же диаметра. Эффекты затопления [17] и сдвигающего усилия пара [19] должны быть учтены в большинстве случаев, однако общие расчетные уравнения отсутствуют. Результаты по конденсации водяного пара, полученные в [17], показывают, что эффект затопления более ярко выражен в волнистых трубах.

Для конденсаторов с горизонтальными трубами предложены трубы с профилированными ребрами [20]. На рис. 2 показана поверхность выпускаемой промышленностью трубы, описанной в [21]. На рис. 3 ее характеристики сравнены с характеристиками оребренных горизонтальных труб. В [22] недавно представлено аналитическое обоснование улучшенных характеристик поверхностей конденсации с трехмерными ребрами.

Хотя имеется обстоятельная литература по интенсификации конденсации в объеме пара активными методами [1—5], перспективы для их использования в реальных системах ограничены. Исследованные методы включают использование вращающихся цилиндров, дисков и квадратных труб; вибрацию горизонтальных труб; использование электрических полей, приложенных к горизонтальной трубе; удаление пленки конденсата на вертикальной поверхности путем отсоса; удаление при конденсации неконденсирующихся примесей на границе раздела путем отсоса; использование электрического поля, приложенного к вертикальным и наклонным пластинам, электрических и магнитных полей, приложенных к вертикальным пластинам; применение вращающихся труб с профилированными ребрами, вращающихся шероховатых дисков, вращающихся дисков с отсосом. Имеющаяся информация в основном относится к ситуациям, когда имеется внешнее влияние, например к вращающемуся или вибрирующему оборудованию.

В. Конденсация при вынужденной конвекции. Здесь рассмотрена конденсация внутри труб при вынужденном течении. Трубы, имеющие шероховатые внутренние поверхности, обогреваемые конденсирующимся паром, установлены в испарителях горизонтально и на их наружной поверхности испаряется рассол.

Трубы с внутренними желобками и накаткой испытаны в [23]; существенная интенсификация конденсации наблюдалась для нескольких конфигураций. При этом необходима оптимизация шероховатости. Трубы с повторяющейся шероховатостью увеличивают коэффициенты конденсации для хладона-113 более чем на 100% [24].

Многие исследователи изучали выпускаемые промышленностью трубы с внутренним оребрением, а некоторые также и с внешней интенсификацией. В [25] описаны эксперименты в горизонтальном двойном испарителе, с котлом, работающем на этилене, конденсирующемся в трубах с внутренним оребрением. Коэффициент теплопередачи при этом возрос в 4 раза.

В [26] исследована конденсация хладона-12 в горизонтально расположенных трубах с внутренним оребрением. Коэффициент теплоотдачи, отнесенный к условной площади поверхности, увеличился на 200%. В [27] также исследована конденсация хладона-12 (с некоторым содержанием масла) в трубах с внутренним оребрением с поверхностью, увеличенной на 175%. Номинальный коэффициент теплоотдачи при этом увеличился до 300%. В [28, 29] представлены данные по теплоотдаче и падению давления и корреляции для теплоотдачи при конденсации пара внутри труб с прямыми или спиральными ребрами. Установлено увеличение до 150% средних коэффициентов теплоотдачи при полной конденсации (рис. 4, трубы D, E, F и G). Подобную интенсификацию получили авторы [30] на таких же трубах для хладона-113.

В [31] недавно сообщалось о данных по конденсации в трубах, имеющих стандартные неподвижные перемещающиеся вставки. Эти вставки рассматриваются как устрой-

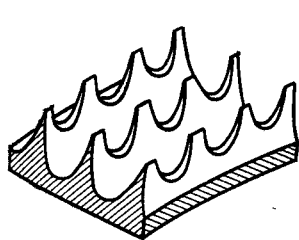


Рис. 2. Отформованная и механически обработанная поверхность конденсации [21]

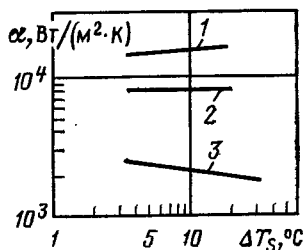


Рис. 3. Сравнение характеристик труб конденсатора для хладона-113 [21]:

1 — труба THERMOEXCEL-C; 2 — труба с низкими ребрами; 3 — гладкая труба

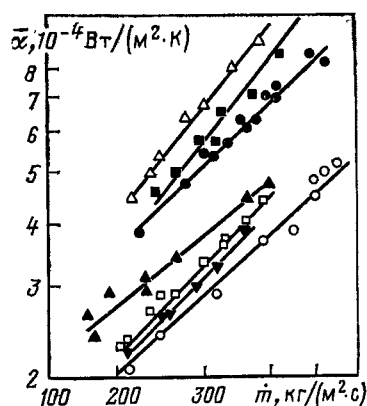


Рис. 4. Интенсификация конденсации в трубе с помощью ребер и вставок с скрученной лентой [28] для хладагента-113 ($p = 0,49$ МПа): $\circ$ — труба гладкая, $D = 13,8$ мм; $\square$ — со скрученной лентой, $D = 13,8$ мм, шаг 91 мм; ∇ — со скрученной лентой, $D = 13,8$ мм, шаг 193 мм; $\blacktriangle$ — с ребрами, $D = 14,7$ мм, 32 ребра высотой 0,599 мм, шаг 610 мм; $\blacksquare$ — с ребрами, $D = 11,8$ мм, 6 ребер высотой 1,735 мм, шаг 343 мм; $\bullet$ — с ребрами, $D = 11,5$ мм, 6 ребер высотой 1,631 мм; Δ — с ребрами, $D = 14$ мм, 16 ребер высотой 1,448 мм, шаг 560 мм

ство интенсификации вследствие перемешивания потока в объеме элементами, которые имеют правые или левые спирали. Отмечены существенные улучшения коэффициентов теплоотдачи, однако увеличение падения давления при этом было очень большим.

Конденсация в спиральных трубах исследовалась также в [32], конденсация в трубных коленах — в [33]. В обеих работах отмечено умеренное увеличение скоростей конденсации относительно прямолинейных труб.

В [28, 29] установлено, что вставки из скрученной ленты улучшили конденсацию в трубе на 30% (рис. 4, трубы В и С); однако падение давления было также высоким. Авторы [30] получили подобные результаты на хладоне-113.

В [34] использован интересный метод изменения направления потока для образования спирального движения пара, конденсирующегося на наружной поверхности труб пучка. При скоростях пара, приближающихся к звуковой, коэффициенты конденсации были велики.

Имеются некоторые данные по активным методам [5]: использование вращающихся труб с ускорением, нормальным к оси трубы конденсатора; применение акустических колебаний, направленных по нисходящему потоку пара в трубе; приложение электрического поля к конденсатной пленке в вертикальных каналах; вращение труб с внутренними пористыми покрытиями. Практическое применение этих методов маловероятно вследствие необходимости в дополнительном оборудовании и связанного с этим уменьшения надежности системы.

2.6.7. Образование туманов

Д. Чисхолм

А. Введение. Туман может возникнуть, когда пар или парогазовая смесь охлаждается ниже температуры насыщения с образованием маленьких капелек конденсата (0,1—40 мкм). При некоторых условиях в конденсаторах туман может образоваться при конденсации не только на охлаждаемой поверхности, но и в объеме пара.

В. Пересыщение. Рассмотрим каплю жидкости в ее собственном паре. Вследствие эффектов поверхностного натяжения [1, 2] при равновесии давление пара (p_v) превышает нормальное, соответствующее насыщению ($p_{v, \text{sat}}$):

$$p_v - p_{v, \text{sat}} = \frac{p_v}{p_l - p_v} \frac{2\sigma}{r} \quad (1)$$

где p_v — плотность пара; p_l — плотность жидкости; σ — поверхностное натяжение; r — радиус капли. Пар будет пересыщенным, когда для данного давления p_v температура пара ниже температуры насыщения. При этом, так как пар находится при температуре, меньшей температуры насыщения, его называют переохлажденным.

Уравнение (1) получено в предположении, что пар несжимаем. Учет эффектов сжимаемости приводит [1, 2] к уравнению

$$\ln \frac{p_v}{p_{v, \text{sat}}} = \frac{2g\sigma\bar{M}}{r p_l R T} \quad (2)$$

где $\bar{M}$ — относительная молекулярная масса; R — газовая постоянная; T — температура. Если пересыщенный пар содержит жидкие капли различного размера и радиус капли r_c получен из уравнения (1) или (2), то капли с радиусом, меньшим r_c , будут испаряться, а капли большего радиуса — расти. Таким образом, пересыщенный пар с каплями, имеющими радиус, больший критического r_c , будет приближаться к условию насыщения; при этом будет образовываться туман. Когда все капли имеют радиус, меньший критического, они испаряются и существует устойчивый пересыщенный пар.

В случае парогазовых смесей происходит тот же процесс, но теперь определяющим является парциальное давление рассматриваемого пара.

Символ S обычно используется [3] для обозначения коэффициента пересыщения

$$S = p_v / p_{v, \text{sat}} \quad (3)$$

Этот коэффициент больше единицы, когда происходит пересыщение, как видно из уравнения (1).

С. Образование центров парообразования. Чистый пар. В пересыщенном паре, сначала полностью свободном от равновесных капелек или частиц, равновесные капли будут образовываться со скоростью [3, 4]

$$J = K_A C - W / kT, \quad (4)$$

где k — постоянная Больцмана; W — энергия, необходимая для образования капли, причем

$$W = \frac{16\pi\sigma^3 \bar{M}^2}{3R^2 T^2 p_l^2 \ln^2(S)} \quad (5)$$

Для воды K_A можно взять не зависящей от давления и температуры и равной 10^{31} центров/(м³·с). Поэтому время образования 10^6 центров/(м³·с) [1 центр/(см³·с)] согласно [5] равно 10^6 лет, 10 с и 10^{-8} с для пересыщений S , составляющих 3, 4 и 5. Можно показать, что в случае воды на практике для получения тумана требуется пересыщение, равное примерно четырем.

Другая теоретическая разработка, приводящая к уравнению (4), дана в [6, 7]. В ней учтены вклады в свободную энергию образования критического центра, не включенные в прежние разработки.

Если необходимо критическое пересыщение для появления тумана S_c берется как величина, дающая скорость образования капли J

$$J = 10^6 \text{ центров/(м}^3 \cdot \text{с)}, \quad (6)$$

то согласно [7] из (4)—(6) имеем

$$S_c = \exp \left[C \frac{\bar{M}}{p_l} \left(\frac{\sigma}{T} \right)^{3/2} \right], \quad (7)$$

где C — характеристика жидкостн, не зависящая от давления и температуры. В случае полярных молекул, подобных воде, $C = 1,76 \cdot 10^7$; для неполярных молекул $C = 1,38 \cdot 10^7$.

Когда в паре имеются смачиваемые частицы пыли, они значительно снижают коэффициент необходимого крити-

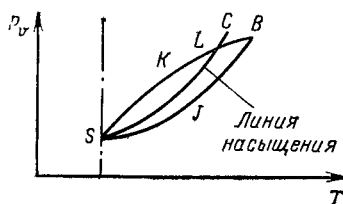


Рис. 1. Парциальное давление пара и давление насыщения

ческого пересыщения для появления тумана. Если размер частиц пыли больше критического размера капли, происходит спонтанная конденсация на частицах. Если размер частицы меньше критического значения, спонтанного роста не наблюдается, но энергия, требуемая для образования равновесных капель, уменьшается, снижая коэффициент критического пересыщения.

Присутствие ионов также понижает критическое пересыщение. В [3] изложены кратко теоретические разработки, представленные в [5, 9, 10].

Присутствие веществ, уменьшающих давление пара на капли, таких как серная, азотная, хлористоводородная кислота, хлористый аммоний [2], увеличивает тенденцию к образованию тумана, так же как наличие веществ, понижающих поверхностное натяжение капли.

В [3] отмечено, что турбулентность также снижает пересыщение, необходимое для образования центров. Однако в настоящее время невозможно оценить значение этого эффекта.

В [1] считают, что большая часть процессов в промышленном оборудовании характеризуется присутствием центров в форме пыли, унесенных частиц или центров, предполагаемых во многих расчетных приложениях; при этом, когда температура становится ниже температуры насыщения, соответствующей парциальному давлению пара, происходит конденсация и образование тумана.

Д. Условия, вызывающие пересыщение. На рис. 1 схематически показано изменение парциального давления с температурой при конденсации на охлаждаемой поверхности из парогазовой смеси. Точка В представляет собой условия в объеме смеси; точка S — условие на границе конденсатного слоя на охлаждаемой поверхности; SC — кривая насыщения пара; давление пара уменьшается по направлению к поверхности конденсата вследствие накопления там газов. Линии SJB и SKB представляют собой два возможных распределения температура — давление для смеси, когда пар движется к поверхности. В случае линии SJB пар перегрет, пока приближается к слою конденсата, линия SKB соответствует условиям переохлаждения смеси (при температуре ниже температуры насыщения) по мере приближения к поверхности конденсата. На участке SKL имеется возможность для возникновения тумана.

Согласно рис. 1 критерий пересыщения на поверхности имеет вид:

$$\left(\frac{dp_v}{dT}\right)_s > \left(\frac{dp_{v, \text{sat}}}{dT}\right)_s.$$

В [3] получено следующее уравнение для градиента парциального давления по температуре на поверхности конденсата:

$$\left(\frac{dp_v}{dT}\right)_s = \frac{p_{vB} - p_{vs}}{T_B - T_s} \frac{p - p_{vs}}{\Delta p_{g, LM}} \left(\frac{\lambda}{c_p \rho D}\right)^{1/3} \frac{e^e - 1}{e}, \quad (8)$$

$$\text{где } e = \frac{mc_{pv}}{h}.$$

Величина $\Delta p_{g, LM}$ — перепад давления газа, соответствующий среднетемпературной разности температур по пленке; λ — коэффициент теплопроводности парогазовой смеси; ρ — плотность парогазовой смеси; D — коэффициент

диффузии; c_{pv} — теплоемкость пара. Градиент $(dp_{v, \text{sat}}/dT)_s$ — физическая характеристика смеси.

Из (8) следует, что для ведения к минимуму склонности к образованию тумана температурный напор должен быть малым. Приняв, что смесь в объеме сначала перегрета, можно показать [12], что туман начинает возникать всегда на поверхности раздела. Когда туман образуется вблизи стенки, улучшение теплоотдачи у стенки (вследствие излучения) [13] приведет к росту пересыщения и распространению тумана. В [12] детально исследуется аналитическое определение распределения температуры в пограничных слоях и указаны условия образования тумана в парах воды, *n*-бутилового спирта и серы.

Если смесь в объеме насыщена, она стремится к пересыщению при

$$\left(\frac{dp_v}{dT}\right)_B < \left(\frac{dp_{v, \text{sat}}}{dT}\right)_B. \quad (9)$$

Отметив, что в случае насыщенной смеси

$$\left(\frac{dp_{v, \text{sat}}}{dT}\right)_B \approx \frac{p_{vB} - p_{vs}}{T_B - T_s}, \quad (10)$$

можно показать, что [14—16] приближенно

$$\left(\frac{dp_v}{dT}\right)_B = \left(\frac{dp_{v, \text{sat}}}{dT}\right) \frac{p - p_{vs}}{\Delta p_{g, LM}} \left(\frac{c_p \rho D}{\lambda}\right)^{2/3} \frac{e^e - 1}{e}. \quad (11)$$

Для малых концентраций пара члены

$$(p - p_{vs})/\Delta p_{g, LM}, (e^e - 1)/e$$

приближаются к единице; следовательно, когда смесь насыщена, она стремится к пересыщению, если $(c_p \rho D/\lambda)^{2/3} < 1.0$. Значит, число Льюиса для пересыщения должно быть меньше единицы.

Расчетные методы для проектирования систем с образованием тумана описаны в [8, 11].

Е. Эффекты образования тумана. По отношению к характеристике при условиях пересыщения температурный напор и градиент парциального давления в паре уменьшаются с образованием тумана, но, вероятно, коэффициенты тепло- и массоотдачи увеличиваются. Указанные эффекты невозможно определить точно, и если ими пренебрегают, то значит образование тумана будет приводить к снижению тепло- и массоотдачи и изменять отношение физической теплоты к скрытой. Рекомендуется определять коэффициенты тепло- и массоотдачи для тумана, рассматривая капли и пар как гомогенную смесь.

С эксплуатационной точки зрения большим неудобством в случае тумана является отвод конденсата разделенными газами и парами.

Ф. Меры по уменьшению тумана. Склонность к возникновению и распространению тумана можно уменьшить следующими методами: обеспечивать низкие степени пересыщения; отсутствие пыли, выноса капель и ионов; поддерживать перегрев (например, нагревом [17]); поддерживать малыми температурные напоры; поддерживать высокую температуру поверхности конденсата; обеспечивать малую толщину парогазовой пленки, дающую небольшое время диффузии (образование тумана занимает время); увеличение турбулентности может, однако, уменьшать критическое пересыщение; обеспечивать отсутствие вторичных веществ, которые уменьшают давление пара на капли или поверхностное натяжение; предупреждать затопление, если туман может возникнуть, для исключения уноса конденсата газом или паром.

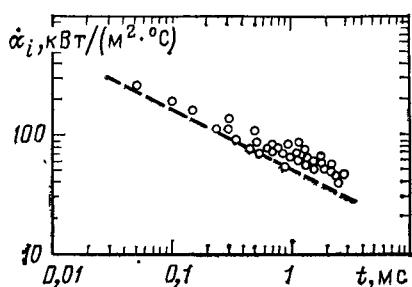


Рис. 2. Коэффициент теплоотдачи на границе раздела для воды в зависимости от времени выдержки. Точки — результат эксперимента [38]; штриховая кривая — расчет по (5)

ниями (2) и (4) соответственно. Однако недавние эксперименты показали, что как для неполярных, так и для полярных жидкостей [1] и даже для воды [2, 3] достигаются максимальные величины; сообщения об очень низких их значениях определялись неточностями экспериментального определения температуры поверхности. Установлено, что скорость испарения быстро падает с увеличением времени выдержки поверхности испарения. В жидкой фазе, прилегающей к границе раздела, возникают температурные градиенты, чтобы обеспечить перенос скрытой теплоты результирующего потока пара. Простой анализ нестационарной теплопроводности [4], основанный на подходе Плессета — Цвика (см. п. F), приводит к следующему уравнению для эффективного коэффициента теплоотдачи на границе раздела, изменяющегося со временем t :

$$\alpha_i = \sqrt{3} \lambda_l / \sqrt{\pi k t}. \quad (5)$$

Для воды коэффициент теплоотдачи на границе раздела падает от своего максимального значения, описываемого уравнением (4), до значений, определяемых выражением (5), за несколько миллисекунд (рис. 2).

С. Гомогенная нуклеация. Образование пара из метастабильной жидкости или неустойчивого состояния равновесия начинают изучать обычно с уравнения, определяющего механическое равновесие сферических зародышей пара (радиусом r^*) в жидкости при постоянных температуре T_g и давлении p_l :

$$p_g - p_l = 2\sigma / r^*, \quad (6)$$

где p_g — давление пара внутри зародыша; p_l — давление жидкости, соответствующее температуре насыщения T_{sat} . Для определения перегрева жидкости $T_g - T_{sat}$, соответствующего разности давлений $p_g - p_l$, можно использовать уравнение Клаузиуса — Клапейрона и закон идеального газа. В результате получаем

$$T_g - T_{sat} = \frac{\tilde{R} T_{sat} T_g}{\Delta h_v \tilde{M}} \ln \left(1 + \frac{2\sigma}{p_l r^*} \right). \quad (7)$$

Если $(2\sigma / p_l r^*) \ll 1$, то (7) упрощается

$$T_g - T_{sat} = \frac{\tilde{R} T_{sat}^2}{\Delta h_v \tilde{M}} \frac{2\sigma}{p_l r^*}. \quad (8)$$

Из этого уравнения видно, что радиус равновесного зародыша пара r^* уменьшается с ростом перегрева, т. е. в результате уменьшения давления системы p_l вдоль линии ВС (рис. 1). Вблизи точки С размер равновесного зародыша приближается к размерам молекул. В метастабильной жидкости происходят тепловые флуктуации и имеется небольшая, но конечная вероятность скопления молекул с энергиями, как у пара, сближающихся для образования зародыша пара с размером равновесного центра. Вероятность определяется числом центров радиусом r^* , образу-

Таблица 1. Гомогенная нуклеация: предельные перегревы при 0,1 МПа * [7]

Вещество	$T_{\text{sat}},$ °C	$T_g, \text{ }^\circ\text{C}$		Эксперимент $T_g/T_c,$ К/К	Литература
		Эксперимент	Расчет		
Нормальные алканы					
Метан	-161,5	—	-107,5	—	[33]
Этан	-88,6	-4	-3,5	0,881	[33]
Пропан	-42,1	53,0	55,3	0,882	[33, 34]
Бутан	-0,5	105,0	105,2	0,890	[31, 34]
Пентан	36,0	147,8	148,3	0,896	[6, 29, 35, 36]
Гексан	68,7	184	184,3	0,901	[6, 28, 29, 36]
Гептан	98,0	214	214,5	0,902	[6, 28, 31, 36]
Октан	125,7	239,8	242,7	0,902	[6]
Нонан	150,8	265,3	262,0	0,906	[31]
Декан	174,1	285,1	282,8	0,904	[31]
Разветвленные алканы					
2-Метилпропан	-11,8	87,8	87,7	0,884	[33]
2,2-Диметилпропан	9,5	113,4	—	0,891	[31]
2-Метилбутан	27,9	139	—	0,895	[6, 36, 37]
2,3-Диметилбутан	58,0	173,2	175,9	0,893	[31]
2,2,4-Триметилпентан	99,2	215,3	214,9	0,898	[31]
Циклические углеводороды					
Циклопропан	-32,9	77,5	—	0,882	[33]
Циклопентан	49,3	183,8	173,2	0,893	[31]
Циклогексан	80,7	219,6	216,3	0,890	[6, 31, 36]
Циклооктан	148,5	287,5	—	—	[31]
Метилциклопентан	71,8	202,9	—	0,894	[31]
Метилциклогексан	100,9	237,2	232,0	0,892	[31]
Бензол	80,1	225,3	—	0,887	[6, 32, 35]
1,3-Диметилбензол	139,1	235	—	0,824	[32]'
Алкены и алкины					
Пропилен	-47,7	52,4	50,3	0,882	[33]
Пропилен	-34,5	73,0	—	0,881	[33]
Пропин	-23,2	83,6	88,2	0,887	[33]
1-Бутан	-6,3	97,8	100,2	0,884	[33]
Цис-2-Бутан	3,7	112,2	—	0,885	[33]
Транс-2-Бутан	0,9	106,5	—	0,886	[33]
2-Метилпропан	-6,9	96,4	99,3	0,884	[33]
1,3-Бутадиен	-4,4	104,1	—	0,888	[33]
1-Пентан	30	144	141,9	0,898	[31]

Продолжение табл. 1

Вещество	$T_{\text{sat}}, ^\circ\text{C}$	$T_g, ^\circ\text{C}$		Эксперимент $T_g/T_c, \text{K/K}$	Литература
		Эксперимент	Расчет		
1-Октан	121,3	237,1	—	0,901	[31]
1-Гексан	71,3	192	—	—	[31]
Циклопентан	44,2	178,2	—	0,892	[31]
Галоидоуглеводороды					
Хлористый метил	-24,2	93,0	—	0,880	[33]
1,1-Дифторэтан	-24,7	70,4	—	0,889	[33]
Хлорэтан	13,9	100,9	—	0,867	[33]
Фторэтан	-72,2	16,9	—	0,885	[33]
Хлористый этил	12,3	126	—	0,867	[37]
Хлороформ	61,7	173	—	0,832	[32]'
Хлорбензол	132	250	—	0,827	[32]'
Бромбензол	156	261	—	0,797	[32]'
Гексафторбензол	74,5	194,7	195,4	0,905	[6, 34]
Перфторпентан	27,0	108,3	108,9	0,904	[6]
Перфторгексан	50,9	136,6	137,4	0,915	[6]
Перфторгептан	70,9	161,6	161,2	0,916	[6]
Перфтороктан	94,8	183,8	185,2	0,910	[6]
Перфторнонан	114,5	205,3	205,7	0,913	[6]
Перфтордекан	133,0	223,9	223,1	0,917	[6]
Метанол	65,0	186,0	186,5	0,836	[6, 30, 32]'
Этанол	78,5	189,5	191,8	0,896	[6, 30, 32]'
Ацетон	56,2	174	—	0,879	[32]'
Сероуглерод	46,3	168	—	0,803	[32]'
Двуокись серы	-10	50	—	0,750	[32]'
Анилин	184,1	262	—	0,766	[32]'
Диэтилэфир	34,5	147	145	0,901	[6, 32, 36, 37]

* Все измерения проведены с помощью метода капли, за исключением отмеченных штрихом в последнем столбце.

шихся в единице объема за единицу времени

$$\frac{dn}{dt} = N \left(\frac{2\sigma}{\pi m} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{-16\pi\sigma^3}{3kT_g(p_g - p_l)^2} \right]. \quad (9)$$

Скорость гомогенной нуклеации dn/dt сильно зависит от температуры перегретой жидкости T_g . При низких перегревах скорость мала, но она быстро растет с его увеличением. Значительная нуклеация происходит при значениях dn/dt в интервале от 10^8 до $10^{13} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Для бензола этим значениям соответствует очень узкий диапазон температур — от 224 до 225,2°C. В табл. 1 приведены значения предельного перегрева для других органических жидко-

стей, рассчитанные по уравнению (9) (при $dn/dt \approx 10^{12} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$), и измеренные значения.

Уравнение (9) неудобно для определения T_g . Более простое выражение, достаточно точное для многих приложений, получено экспериментально в [5, 6]:

$$T_{r,g} - T_{r,\text{sat}} = 0,905 - T_{r,\text{sat}} + 0,095 T_{r,\text{sat}}^2, \quad (10)$$

где индекс r относится к приведенной величине (к абсолютной температуре, деленной на критическую).

Для воды при атмосферном давлении значению $dn/dt = 10^{13} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ соответствует температура жидкости 320,7°C, т. е. перегрев составляет 220,7°C. Эта температура намного выше любого экспериментального значения для воды даже при тщательно контролируемых условиях. По крайней мере в случае воды гомогенную нуклеацию из метастабильного состояния как механизм парообразования можно не учитывать. Однако гомогенная нуклеация возможна и происходит в органических жидкостях. Читателю рекомендуется обзор [7] для более подробного ознакомления с гомогенной нуклеацией.

Д. Гетерогенная нуклеация. Неконденсирующиеся газовые пузыри или посторонние частицы, находящиеся в жидкости, вместе с заполненными газом или паром трещинами или впадинами в поверхностях контейнеров, обычно образуют достаточно зародышей, действующих как центры парообразования. Присутствие растворенного газа в жидкости делает необходимым учет парциального давления газа, когда рассматривается механическое равновесие парового зародыша. Таким образом, уравнение (6) модифицируется к виду

$$p_g + p_a - p_l = \frac{2\sigma}{r^*}, \quad (11)$$

а уравнение (7) приобретает вид:

$$T_g - T_{\text{sat}} = \frac{\bar{R} T_{\text{sat}} T_g}{\Delta h_v \bar{M}} \ln \left[1 + \left(\frac{2\sigma}{p_l r^*} - \frac{p_a}{p_l} \right) \right]. \quad (12)$$

Присутствие растворенного газа снижает перегрев, необходимый для поддержания пузыря радиусом r^* в неустойчивом равновесии. На практике определение парциального давления может быть осложнено наличием температурных градиентов и конечностью скоростей диффузии газа через жидкость.

На любой поверхности контейнера имеются углубления, впадины с относительно небольшими углами при вершине (рис. 3). Рассмотрение последовательных положений границы раздела в такой узкой впадине показывает, что радиус кривизны r_b увеличивается, пока граница раздела не достигнет края впадины. Если объем пузыря продолжает увеличиваться, радиус кривизны временно уменьшается и определяется размерами устья впадины r_c , прежде чем снова стать больше. Существенная особенность заключается в том, что тогда как вся кривая зависит от геометрии впадины и краевого угла β , минимальный радиус кривизны, ограничивающий перегрев, необходимый для возникновения пузыря в этой впадине, всегда определяется устьем при условии, что $\beta < 90^\circ$ (жидкость смачивает поверхность). Этот факт проверен экспериментально [8].

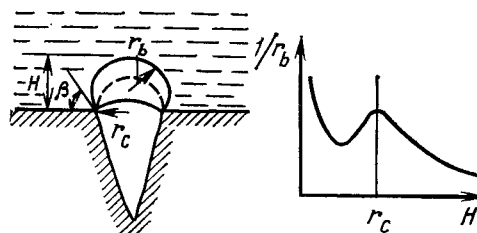


Рис. 3. Зависимости кривизны границы раздела от объема пузыря для центра парообразования

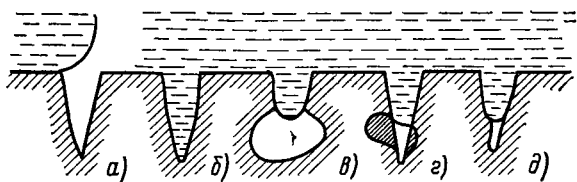


Рис. 4. Образование на поверхности активных центров: а — впадина перед заполнением жидкостью; б — смоченная впадина; в — резервуарная впадина; г — несмачиваемое включение; д — несмачиваемое отложение

Е. Классификация активных центров парообразования. Только очень небольшая часть щелей и впадин на поверхности действуют как активные центры парообразования. Для пояснения этого необходимо рассмотреть, что происходит, когда сухая поверхность смачивается жидкостью (рис. 4). Поступающая жидкость будет захватывать смесь воздуха и пара в щели (рис. 4, а). Воздух быстро растворится, и если жидкость смачивает стенки впадины ($\beta < 90^\circ$), то давление оставшегося пара будет недостаточным для уравнивания сил поверхностного натяжения, что приведет к проникновению жидкости к основанию впадины (рис. 4, б). Впадина, полностью заполненная жидкостью, не может действовать как центр парообразования. Если, однако, стенки впадины плохо смачиваются или имеют неправильную форму, то кривизна границы раздела может измениться так, что силы поверхностного натяжения противостоят дальнейшему проникновению даже тогда, когда давление пара во впадине крайне мало. При последующем нагреве давление пара резко повышается и граница раздела смещается к устью впадины. Стабилизация границы раздела во впадине может происходить, если внутри впадины имеются расширения (рис. 4, в), несмачивающиеся включения, например в металлической поверхности (рис. 4, г), или несмачиваемые пленка и отложения на стенке (рис. 4, д). В последнем случае вся поверхность может быть покрыта пленкой или отложениями. Когда поверхность затопливается, жидкость поступает во впадину. Если поверхность затем нагревается, «смачивание» может произойти в результате растворения пленок смазки в жидкостях-растворителях или (в случае жидких металлов) в результате химической реакции между ними и несмачиваемыми окислами поверхности. Парообразование начинается с размера зародыша пара, определяемого минимальным радиусом, при котором жидкость проникает во впадину. Таким образом,

$$r = \frac{2\sigma}{p_l - (p_g + p_a)}. \quad (13)$$

Эта зависимость дает также минимальный радиус шейки активной резервуарной впадины для случая $\beta \leq 90^\circ$. Был предпринят ряд экспериментальных проверок этого метода определения размера активных центров [9—11].

Недавно в [12] разработана модель, которая учитывает смачиваемость поверхности через краевой угол β и геометрическую форму впадины через угол при ее вершине ψ . Согласно модели рассматривается коническая впадина, которая затопливается перемещающимся фронтом жидкости (рис. 5, а). При движении жидкости во впадине граница раздела принимает форму зародыша пара с радиусом r (рис. 5, б). Сохранение объема пара обуславливает зависимость r от β и ψ (рис. 5, в). Эта модель полезна, поскольку, если размер активных центров на поверхности известен для одной жидкости, можно получить эквивалентную величину r для других жидкостей с различными краевыми углами.

Е. Рост пузыря. Когда зародыш пара в перегретой жидкости достигнет размера, большего, чем в случае неустойчивого равновесия, он будет спонтанно расти. Скорость роста ограничена на ранних стадиях инерцией ок-

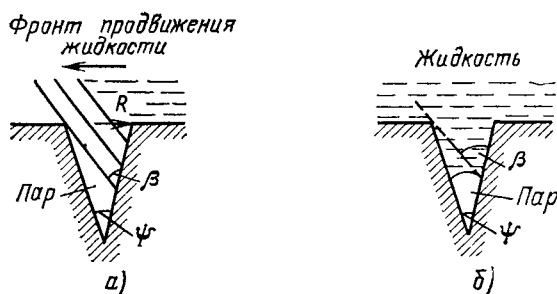


Рис. 5. Модель захвата пара [12] для активных впадин

ружающей жидкости, на поздних стадиях — скоростью, с которой скрытая теплота испарения может передаваться к границе раздела пар — жидкость. В [13] исследован аналитически рост парового пузыря у поверхности и в жидкости. Для пузыря, растущего в первоначально однородной перегретой жидкости от начального радиуса, большего критической величины r^* , определяемой уравнением (7), получено следующее выражение:

$$R^+ = \frac{2}{3} [(t^+ + 1)^{3/2} - (t^+)^{3/2} - 1], \quad (14)$$

где

$$R^+ = RA/B^2; \quad t^+ = tA^2/B^2;$$

$$A = \left(b \frac{\Delta T_{\text{sat}} \Delta h_{\text{fg}}}{T_{\text{sat}} \rho_l} \right)^{1/2}; \quad B = \left(\frac{12}{\pi} \text{Ja}^2 k_l \right)^{1/2}.$$

Для пузыря, растущего в бесконечной среде, $b=2/3$ и $\Delta T_{\text{sat}} = T_g - T_{\text{sat}}$. В области $t^+ \ll 1$, где преобладают силы инерции, (14) принимает вид:

$$R^+ = t^+, \quad (15)$$

что является хорошо известным решением Рейля [14]. Для области, где преобладает диффузия ($t^+ \gg 1$), уравнение (14) имеет следующий вид:

$$R^+ = (t^+)^{1/2}, \quad (16)$$

что является асимптотическим решением, полученным в [15]. Справедливость уравнения (14) подтверждена экспериментально в [16], авторы которой изучали рост паровых пузырей в перегретой воде в диапазонах давлений от $1,22 \cdot 10^3$ до $3,8 \cdot 10^4$ Н/м², перегревов от 8,3 до 15,5 °С и $58 < \text{Ja} < 2690$. Из рис. 6 видно, что получено хорошее согласование экспериментальных и расчетных данных.

Авторы [13] применили полученные результаты к случаю паровых пузырей, растущих в неоднородных температурных полях вблизи поверхности нагрева. В этом случае $b = \pi/7$ и $\Delta T_{\text{sat}} = T_w - T_{\text{sat}}$. Для области с преобладанием сил инерции уравнение (15) остается справедливым, а для области с преобладанием влияния диффузии

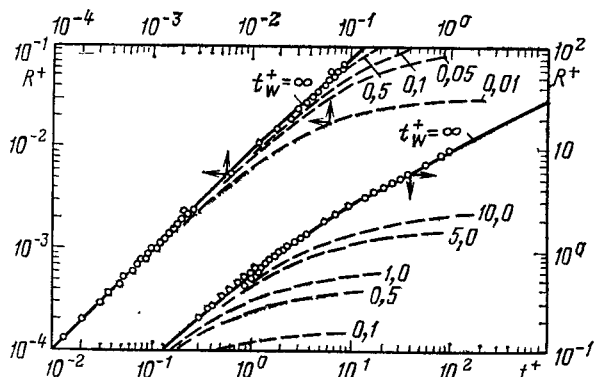


Рис. 6. Уравнение роста пузыря для воды при различных давлениях. Сравнение результатов, полученных в [13] — штриховые кривые и [14] — сплошные кривые, с результатами эксперимента [16] — точки (в интервале давлений 0,18 — 5,6 Па)

применимо следующее выражение:

$$R^+ = (t^+)^{1/2} - \theta [(t^+ + t_w^+)^{1/2} - (t_w^+)^{1/2}], \quad (17)$$

где t_w^+ — безразмерное время от момента, когда жидкость при однородной температуре T_l контактирует с поверхностью при температуре T_w , до момента начала роста пузыря (время ожидания); $\theta = (T_w - T_l)/(T_w - T_{sat})$. Влияние времени ожидания на скорость роста пузыря показано на рис. 6. Экспериментальная информация о росте парового пузыря в неоднородных температурных полях при условиях, где измерялось время ожидания t_w , ограничена, но полученные результаты показывают, что экспериментальные скорости роста меньше рассчитанных по уравнению (14) примерно в 2 раза. Этот результат качественно согласуется с значением, полученным согласно модифицированному выражению (17).

Приведенные выше зависимости верны только для условий, когда $\rho_g \ll \rho_l$. Для больших значений отношения ρ_g/ρ_l необходимо поправку [17]. Более детально динамика пузыря рассмотрена в [18].

Г. Отрыв пузыря и частота образования пузырей. Размер и форма паровых пузырей, отрывающихся от поверхности нагрева, резко зависят от того, как они образуются. Главные силы, действующие на паровой пузырь на последних стадиях его роста, — это подъемная и гидродинамическая, стремящиеся оторвать его от поверхности, поверхностное натяжение и сила инерции жидкости, препятствующие отрыву. Скорость роста пузыря и тем самым силы инерции сильно зависят от перегрева жидкости, который обратно пропорционален размеру активной впадины. Таким образом, в маленькой впадине образуется пузырь, растущий с большей скоростью, чем в большой. В [19] рассмотрены все силы, действующие на растущий пузырь, и показано, что для маленьких впадин ($r_c < 10$ мкм для воды при атмосферном давлении) размер пузыря при отрыве определяется главным образом балансом сил — подъемной и инерции жидкости. Для больших впадин скорость роста уменьшается, динамические силы ослабевают и размер пузыря при отрыве определяют из баланса сил — подъемной и поверхностного натяжения [20]. В [21] впервые рассмотрен последний случай и предложено уравнение

$$D_b = 0,0208 \beta \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Когда силы поверхностного натяжения преобладают, отрывающиеся пузыри имеют форму, близкую к сферической. При преобладании сил инерции форма пузырей близка к полусферической; когда обе силы существенны, пузырь имеет сплюснутую форму [22].

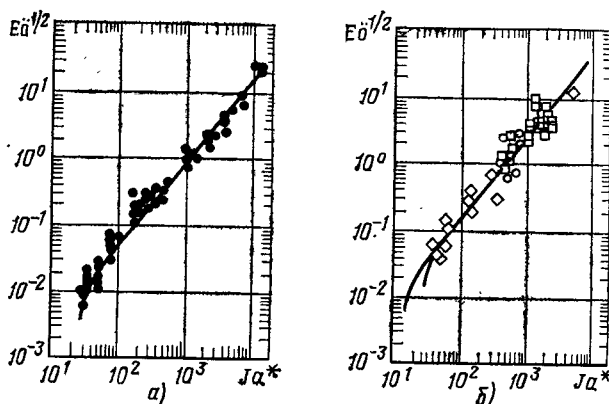


Рис. 7. Корреляция для диаметра пузыря [23] при его отрыве от поверхности для воды (а) и для других жидкостей (б)

Уравнение (18) не описывает удовлетворительно отрывные диаметры пузырей, наблюдаемые в экспериментах. Полезная корреляция данных для различных жидкостей ($\rho/\rho_c < 0,2$) получена в (23) (рис. 7):

для воды

$$Eö^{1/2} = 1,5 \cdot 10^{-4} (Ja^*)^{5/4}; \quad (19)$$

для других жидкостей

$$Eö^{1/2} = 4,65 \cdot 10^{-4} (Ja^*)^{5/4},$$

где

$$Eö = \frac{g_n (\rho_l - \rho_g) D_b^2}{\sigma}; \quad Ja^* = \frac{\rho_l c_{pl} T_{sat}}{\rho_g \Delta h_v}.$$

Недавно в [24] исследовано поведение паровых пузырей, растущих на плоской стенке в неподвижной однородно перегретой жидкости в условиях действия силы тяжести и без нее. Получены выражения для формы и времени отрыва пузыря и толщины микрослоя жидкости между растущим пузырем и стенкой. В отличие от существующих теорий отмечается, что в некоторых условиях поверхностное натяжение может способствовать отрыву пузыря, а в других случаях — задерживать отрыв.

Пузыри отрываются от отдельных центров с постоянной частотой, значение которой изменяется от центра к центру.

В [25] установлено, что произведение частоты образования пузырей f на отрывной диаметр D_b постоянно. Недавно в [26] показано, что это выполняется приблизительно и форма этого произведения зависит от того, чем определяется рост пузыря: силой инерции или процессом диффузии. При условиях, когда процесс отрыва пузыря управляется динамическими силами, зависимость принимает вид $D_b f^2 = \text{const}$. В [27] предложено следующее соотношение:

$$D_b f^2 = \frac{4}{3} \frac{g_n (\rho_l - \rho_g)}{C_{drag} \rho_l}, \quad (20)$$

которое для пузырей пара в воде при атмосферном давлении ($C_{drag} \approx 1$, $\rho_g \ll \rho_l$) принимает вид

$$D_b f^2 = 1,32 g_n. \quad (21)$$

В области, где рост пузыря ограничивается диффузией теплоты к границе раздела, зависимость имеет вид $D_b f^2 = \text{const}$. Розенау, используя анализ роста пузыря [13], получил следующее выражение для этой области:

$$D_b f^{1/2} = \frac{3}{4} (\pi k_l)^{1/2} Ja. \quad (22)$$

Поскольку не проведена широкая проверка указанных уравнений путем сопоставления с экспериментальными данными, их следует рассматривать как приближенные. Для воды при атмосферном давлении отрывной диаметр пузыря составляет 1—2,5 мм, частота образования пузыря 20—40 с⁻¹.

2.7.2. Кипение в большом объеме

Дж. Г. Колльер

Кипение в большом объеме определяется как кипение на поверхности нагрева, погруженной в большой объем неподвижной жидкости. Эта жидкость может находиться при ее точке кипения, и в этом случае говорят о кипении насыщенной жидкости в большом объеме или ниже ее точки кипения, когда говорят о кипении недогретой жидкости в большом объеме. Результаты исследования теплоотдачи при кипении в большом объеме обычно представляются в виде зависимости плотности теплового потока $\dot{q}$ от температуры поверхности стенки нагревателя T_w , т. е. в виде кривой кипения. Кривая кипения воды при атмосферном давлении показана на рис. 1. Возможно другое представление с использованием перегрева стенки $(T_w - T_{sat})$ вместо температуры стенки.

Ниже рассмотрены следующие области кривой кипения.

1. Область свободной конвекции AB , где температурные градиенты создаются в объеме и теплота передается естественной конвекцией к свободной поверхности жидкости и отсюда испарением в паровое пространство.

2. Начало пузырькового кипения ONB , где перегрев становится достаточным для образования пара на поверхности нагрева. Это может происходить вблизи точки, где кривые AB и $B'C$ сближаются, как в случае воды при атмосферном и более высоких давлениях. Иначе, это может происходить при намного больших перегревах, чем те, которые требуются для поддержания полностью развитого пузырькового кипения, и проявляется в резком падении температуры поверхности от B до B' при постоянной плотности теплового потока. Это последнее изменение характерно для жидкостей при очень низких приведенных давле-

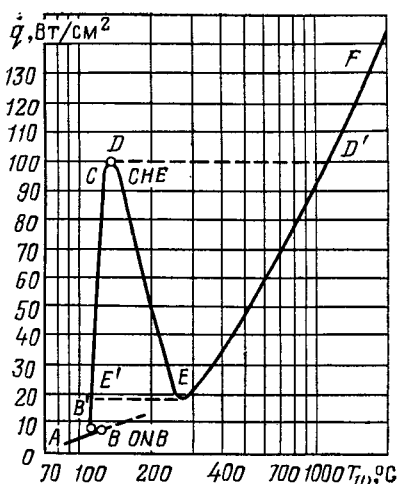


Рис. 1. Кривая кипения в большом объеме для воды при атмосферном давлении:
 AB — свободная конвекция; $B'C$ — пузырьковое кипение; ONB — начало пузырькового кипения; CHE — критический тепловой поток; DE — переходное кипение; EF — пленочное кипение

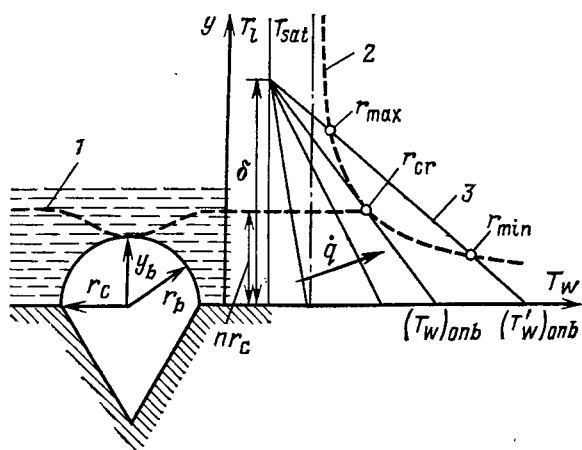


Рис. 2. Начало образования пузырей при кипении в большом объеме:

1 — изотерма при температуре пузыря; 2 — кривая равновесия пузыря, уравнение (12) § 2.7.1; 3 — профили температуры в жидкости при увеличении тепловой нагрузки

ниях, например для воды при давлении ниже атмосферного и в особенности для жидких металлов.

3. Область пузырькового кипения $B'C$, где образование пара происходит на поверхности нагрева. Структура паровых образований изменяется при увеличении плотности теплового потока от образования пара на нескольких отдельных центрах при небольших тепловых потоках до слияния пузырей и, наконец, до образования вблизи поверхности скопления и столбов пара при высоких тепловых нагрузках.

4. Критический тепловой поток (точка D) обозначает верхнюю границу пузырькового кипения, где вследствие взаимодействия потоков жидкости и пара ограничивается подача жидкости к поверхности нагрева.

5. Участок переходного кипения DE характеризуется существованием неустойчивого слоя пара на поверхности нагрева, от которого отделяются большие образования пара с более или менее регулярными интервалами. Полагают, что происходит периодическое смачивание поверхности. Эту область можно исследовать только при условии постоянной температуры поверхности.

6. Область пленочного кипения EF , где устойчивая паровая пленка покрывает всю поверхность нагрева и пар отделяется периодически от пленки в форме регулярно расположенных пузырей. Перенос теплоты осуществляется в основном теплопроводностью и конвекцией через паровую пленку; излучение становится важным механизмом при увеличении температуры поверхности.

В области свободной конвекции жидкость может находиться при температуре насыщения или при более низкой температуре. Температурный градиент у поверхности можно установить из данных по однофазной свободной конвекции (см. § 2.5.7). Остальные области кривой кипения будут рассмотрены более детально.

А. Начало пузырькового кипения. При увеличении плотности теплового потока температура поверхности превышает температуру насыщения. Для фиксации начала пузырькового кипения необходим критерий образования пузыря в неоднородном температурном поле жидкости, прилегающей к поверхности нагрева. Рассмотрим рис. 2, на котором показан конический активный центр парообразования с полусферическим паровым зародышем радиусом r_c (соответствующим краевому углу $\beta = 90^\circ$), находящимся в устье впадины. При других краевых углах существует простая геометрическая зависимость для высоты пузыря

$$y_b = C_1 r_c = (H \cos \beta) r_c \quad (1)$$

и радиуса кривизны пузыря

$$r_b = C_2 r_c = \frac{1}{\sin \beta} r_c. \quad (2)$$

Там же показан профиль температуры в жидкости вблизи поверхности. Температура жидкости на значительном расстоянии от поверхности равна T_{∞} , температура стенки — T_w . Температурный градиент считается линейным в тепловом пограничном слое толщиной δ . Если коэффициент теплоотдачи при однофазной свободной конвекции α , то δ определяется приближенно из выражения

$$\delta = \lambda_f / \alpha. \quad (3)$$

Для воды δ может составлять 0,1—0,5 мм.

В [1] предложено считать критерием для нуклеации из центра превышение температуры жидкости, окружающей вершину пузыря, над значением, необходимым, чтобы зародыш оставался в равновесии [(12), § 2.7.1] (см. диаграмму на рис. 2 с учетом искажения изотерм в результате присутствия пузыря). Если линия, изображающая профиль температуры в жидкости, пересекает кривую равновесия пузыря, то происходит образование пузырей. Первый центр, который становится активным, соответствует точке касания кривой равновесия пузыря и профиля температуры в жидкости. Температура стенки, соответствующая этому условию, равна $(T_w)_{\text{онб}}$. Положение изотермы в жидкости для T_g связано с критическим радиусом пузыря. В [1] это расстояние выбрано равным $2r_c$, но в [2] предложено считать его равным $1,5 r_c$ согласно выводам теории потенциального потока. Уравнение для критического размера центра парообразования, полученное в [2] на основе этого допущения, имеет вид

$$r_c = \frac{\delta (T_w - T_{\text{sat}})}{3 (T_w - T_{\infty})} \left[1 \pm \sqrt{\frac{12 (T_w - T_{\infty}) T_{\text{sat}} \sigma}{(T_w - T_{\text{sat}})^2 \delta \rho_g \Delta h_v}} \right]. \quad (4)$$

Часто удобно считать, что изотермы не искажаются на расстоянии от стенки y_b . С учетом последнего допущения при $\beta = 90^\circ$ и при температуре насыщения ($T_{\infty} = T_{\text{sat}}$) в объеме жидкости размер впадины, удовлетворяющий условию касания, $r_c = \delta/2$, что приближенно составляет 50—250 мкм для воды при атмосферном давлении. Перегрев для воды, соответствующий этому диапазону размеров впадин, меньше 1°C . На практике для возникновения кипения воды на плоской металлической поверхности при атмосферном давлении обычно требуется перегрев 10—15 $^\circ\text{C}$.

Отмеченное противоречие возникает из-за того, что впадины радиусом 50—250 мкм обычно не являются активными центрами парообразования (они не содержат зародыша пара). Возвращаясь опять к рис. 2, заметим, что если активный центр размером r_c не существует на поверхности нагрева, то температура стенки должна увеличиваться до тех пор, пока профиль температуры в жидкости не пересечет кривую равновесия пузыря в точке, где существуют активные впадины [до $(T_w)_{\text{онб}}$]. В [3] измерено распределение активных центров на различных поверхностях, причем реальные плотности активных центров (больше чем 1 центр на 1 см²) возможны только для впадин радиусом, меньшим 10 мкм.

Размер активных центров парообразования можно оценить с помощью юметодов, изложенных, в частности, в § 2.7.1 [см. (13)]. В качестве приближенных оценок можно взять следующие значения активных центров парообразования на гладких металлических поверхностях: для воды примерно 5 мкм; для органических жидкостей и хладагентов примерно 0,5 мкм; для криогенных жидкостей на алюминии или меди примерно 0,1—0,3 мкм. Эти значения могут быть значительно больше на шероховатых поверхностях, специально приготовленных пористых поверхностях или пористых слоях, образованных отложениями.

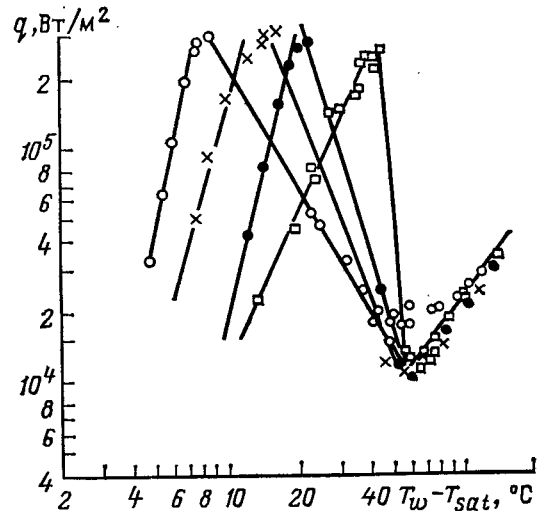


Рис. 3. Влияние обработки медной поверхности на кривую кипения пентана [4].

○ — притирка; × — обработка наждачной бумагой 60; ● — обработка наждачной бумагой 320; □ — зеркальная полировка

В. Пузырьковое кипение. В области пузырькового кипения температура поверхности увеличивается медленно при относительно больших изменениях плотности теплового потока (см. рис. 1). Изменение температуры поверхности можно выразить в форме простой зависимости, основанной на степенном законе,

$$T_w = T_{\text{sat}} + \psi \dot{q}^m, \quad (5)$$

где ψ и m — постоянные, зависящие от физических свойств жидкости и пара и парообразующих свойств поверхности; m лежит обычно в диапазоне 0,25—0,5 (наиболее вероятное значение) (0,3—0,33).

Следует сразу же подчеркнуть важное влияние условий на поверхности на пузырьковое кипение в большом объеме. Для примера на рис. 3 приведены экспериментальные данные, полученные в [4], для кипения *n*-пентана на медной поверхности. Различная обработка поверхности вызывает при заданном тепловом потоке изменение перегрева стенки $\Delta T_{\text{sat}} = (T_w - T_{\text{sat}})$ примерно в 15 раз.

Интенсивность теплоотдачи выражают обычно через коэффициент теплоотдачи α . В процессах конвекции он представляет собой отношение плотности теплового потока $\dot{q}$ к разности температур поверхность — жидкость ΔT . Преобразуя теперь уравнение (5) для получения простого выражения для α , заметим, что коэффициент теплоотдачи при кипении в условиях свободной конвекции сам является функцией плотности теплового потока $\dot{q}$. Таким образом,

$$\alpha = \frac{1}{\psi} \dot{q}^{(1-m)} = A \dot{q}^n, \quad (6)$$

где $n \approx 0,7$; A зависит от физических свойств жидкости и пара и условий на поверхности.

Многие из имеющихся корреляций для теплоотдачи при пузырьковом кипении в условиях свободной конвекции основываются на упрощенной модели процесса кипения и включают ряд безразмерных групп. Соответствующие характеристики размеров и скоростей, такие как отрывной диаметр пузыря или скорость его роста, используются при составлении этих безразмерных групп. Одна из них предложена Розенау [5]

$$\frac{c_p \Delta T_{\text{sat}}}{\Delta h_v} = C_{sf} \left\{ \frac{\dot{q}}{\eta_f \Delta h_v} \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2} \right\}^r \left(\frac{c_p \eta}{\lambda} \right)_l, \quad (7)$$

Таблица 1. Значения C_{sf} в уравнении (7) при различных комбинациях жидкость — поверхность ($r=0,33$) [6] *

Жидкость	Поверхность	C_{sf}	s
Вода	Полированная медь	0,0128	1,0
»	Притертая медь	0,0147	1,0
»	Шероховатая медь	0,0068	1,0
»	Шлифованная и полированная нержавеющая сталь	0,0080	1,0
»	Нержавеющая сталь, покрытая тефлоном	0,0058	1,0
»	Химически травленая нержавеющая сталь	0,0133	1,0
»	Механически полированная нержавеющая сталь	0,0132	1,0
»	Никель	0,006	1,0
»	Платина	0,013	1,0
»	Латунь	0,006	1,0
n-Пентан	Полированная медь	0,0154	1,7
То же	Полированный никель	0,0127	1,7
»	Притертая медь	0,0049	1,7
»	Медь, обработанная наждачной бумагой	0,0074	1,7
»	Хром	0,015	1,7
Четыреххлористый углерод	Полированная медь	0,0070	1,7
Бензол	Хром	0,101	1,7
Этиловый спирт	Хром	0,0027	1,7
Изопропиловый спирт	Медь	0,0025	1,7
n-Бутиловый спирт	»	0,0030	1,7
35% K_2CO_3	»	0,0054	1,7
50% K_2CO_3	»	0,0027	1,7

* Рекомендуется, если возможно, провести эксперименты по кипению в большом объеме для определения применимости величины C_{sf} к конкретным условиям. При отсутствии такой информации как первое приближение можно использовать $C_{sf}=0,013$.

где $r=0,33$, $s=1,7$. Однако позже для воды было предложено $s=1$. Величина C_{sf} — произвольная постоянная, введенная для учета различия характеристик парообразования при любом сочетании поверхность — жидкость. Значения C_{sf} для различных комбинаций поверхность — жидкость приведены в табл. 1. Детальное исследование C_{sf} и r для различных комбинаций поверхность — жидкость и способов подготовки поверхности проведено в [6, 7].

Другой хорошо проверенной корреляцией, основанной на подобных представлениях, является уравнение Форстера и Зубера [8]

$$\frac{\dot{q}}{\rho_g \Delta h_v} \left(\frac{\pi}{k_l} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_l r^*}{2\sigma} \right)^{1/4} = 0,0015 \left[\frac{\rho_l}{\eta_l} \left(\frac{\Delta T_{sat} \lambda_l}{\rho_g \Delta h_v} \right)^2 \frac{\pi}{k_l} \right]^{5/8} \left(\frac{c_p \eta}{\lambda} \right)^{1/3} \quad (8)$$

где r^* — радиус равновесия пузыря согласно уравнению (8), § 2.7.1. Коэффициент 0,0015 определен по данным для воды при давлении от 0,1 до 5 МПа, для n-бутилового спирта при 0,34 МПа, для анилина при 0,24 МПа, для ртути от 0,1 до 0,3 МПа. По-видимому, влияние условий на поверхности описывается также с помощью C_{sf} , но систематических исследований этой проблемы пока нет.

Таблица 2. Коэффициенты и показатели степени, используемые в различных корреляциях для пузырькового кипения в условиях свободной конвекции [уравнение (9)], разработанных в СССР

A	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	Автор
$1,04 \cdot 10^{-4}$	0	0,7	0,7	0	0,125	И. А. Кичигин, Н. Ю. Тобилович
$7,0 \cdot 10^{-4}$	-0,35	0,7	0,7	0	0	С. С. Кутателадзе
$8,7 \cdot 10^{-4}$	0	0,7	0,7	0	0	В. М. Боришанский; Ф. П. Мищенко
0,082	-0,5	0,7	0	0,377	0	Г. Н. Кружилин, Е. К. Аверин
0,125	-0,32	0,65	0	0,35	0	Д. А. Лабунцов
1,14— $2,74 \cdot 10^{-2}$ (хладоны)	0	0,706	0	0,588	0	А. А. Волошко

Примечание:

$$Nu^* = A Pr^{n_1} Re^{n_2} K_p^{n_3} K_t^{n_4} Ar^{n_5};$$

$$Nu^* = \frac{\alpha}{\lambda_l} \left[\frac{\sigma}{\rho_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2}; Re^* = \frac{\dot{q}}{k_l \rho_g \Delta h_v} \left[\frac{\sigma}{\rho_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2};$$

$$K_p = \frac{p}{[g \sigma (\rho_l - \rho_g)]^{1/2}}; K_t = \frac{1}{Jc_{pl} T_{sat} \rho_l [g \sigma (\rho_l - \rho_g)]^{1/2}};$$

$$Ar^* = \frac{g_n}{\nu^2} \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{3/2} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l} \right).$$

Хотя уравнения (7) и (8) появились более 20 лет назад, они еще широко используются и являются основными уравнениями методов расчета теплоотдачи при кипении в большом объеме (см. § 2.7.3).

Различными исследователями в СССР предложены следующие корреляции [9]:

$$Nu^* = A Pr^{n_1} Re^{n_2} K_p^{n_3} K_t^{n_4} Ar^{n_5} \quad (9)$$

с коэффициентами и показателями степени, приведенными в табл. 2. Коэффициент A не является постоянным, а зависит от взаимодействия поверхность — жидкость.

В [10, 11] показано, что распределение размеров впадин на поверхности сильно влияет на положение кривой кипения. Если принять, что распределение размеров впадин можно установить для конкретного сочетания жидкость — поверхность при одном давлении, то можно построить кривую кипения для некоторого другого давления. Измерение распределения размеров впадин для многих используемых в промышленности жидкостей и поверхностей нагрева непрактично.

В [11] получена следующая корреляция, описывающая данные при кипении в условиях свободной конвекции воды, органических жидкостей, хладагентов и жидких металлов:

$$\left(\frac{\alpha r_c}{\lambda_l} \right) = 0,07 \left(\frac{\dot{q} r_c^2 \Delta h_v \rho_g}{\sigma T_{sat} \lambda_l} \right)^{0,7} \times \left[\frac{\rho_l \sigma T_{sat} c_{pl}}{(\Delta h_v \rho_g)^2 r_c} \right]^{0,25} \left\{ \frac{r_c [p (v_g - v_l)]^{1/2}}{\nu_l} \right\}^{0,35} \quad (10)$$

Эта зависимость учитывает условия на поверхности через радиус активных центров парообразования r_c . В случае, если информация о размере среднего активного центра парообразования отсутствует, рекомендуется взять $r_c=20$ мкм.

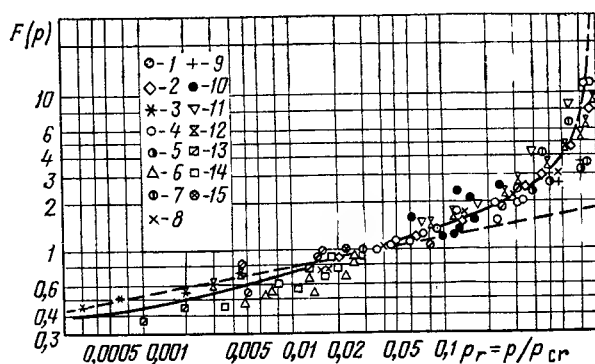


Рис. 4. Влияние давления на пузырьковое кипение в большом объеме [12]. Штриховая кривая — результаты, полученные согласно (13); точки — результаты эксперимента (см. табл. 3)

Безразмерные корреляции, рассмотренные выше, имеют ряд недостатков. Чтобы пользоваться ими, необходимо знать физические свойства фаз, они сложны для использования, им присуща значительная неопределенность, вызванная условиями на поверхности. Для отдельных жидкостей на основе данных экспериментальных исследований можно рекомендовать простые размерные уравнения. Они основаны на [12], где использован закон соответственных состояний. Коэффициент теплоотдачи определяется из

выражения

$$\alpha = A^* q^{0,7} F(p), \quad (11)$$

где $F(p)$ — функция приведенного давления p_r , показанная на рис. 4; A^* — постоянная, определенная при давлении $p_r^* = 0,0294$.

На основе этого метода в [13] предложены следующие выражения для A^* и $F(p)$:

$$\left. \begin{aligned} A^* &= 0,1011 p_{cr}^{0,69}; \\ F(p)_1 &= 1,8 p_r^{0,17} + 4 p_r^{1,2} + 10 p_r^{10}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Значения A^* , найденные по уравнению (12) при $p_r^* = 0,0294$, приведены в табл. 3 для сравнения с экспериментальными значениями. В [14] отмечено, что корреляция (12) является лучшей из рассмотренных зависимостей, основанных на физических свойствах. Однако при применении к испарителям с кипением в условиях свободной конвекции (см. § 3.3.4) рекомендуется для повышения надежности расчета опустить последние два члена в полиноме уравнения (12):

$$F(p)_2 = 1,8 p_r^{0,17}. \quad (13)$$

Эта рекомендация обусловлена большим разбросом и увеличивающейся неопределенностью характеристик кипения по мере приближения к критической точке.

Исследователи из университета в Карлсруе [15] нашли, что для хладагентов (хладон-11, хладон-12, хладон-113,

Таблица 3. Простые размерные уравнения для теплоотдачи при пузырьковом кипении в условиях свободной конвекции [46]¹

Жидкость	Диапазон давлений, 10^5 Па	Характерное давление p_r^* ($p_r = 0,0294$), 10^5 Па	A^* из эксперимента	A^* из (12)	$p_{cr}, 10^5$ Па	Точки на рис. 4	Литература
Вода	1—70	6,5	4,09	4,21	221,2	1	[44]
»	1—196	6,5	4,02	4,21	221,2	2	[45, 46]
»	0,09—1	6,5	5,80	4,21	221,2	3	[47]
»	1—72,5	6,5	4,47	4,21	221,2	4	[45]
»	1—170	6,5	4,44	4,21	221,2	5	[47]
»	1—5,25	6,5	5,74	4,21	221,2	6	[48]
Пентан	1—28,6	0,98	1,09	1,14	33,4	7	[44]
Гептан (80%)	0,45—14,8	0,78	1,18	0,967	26,4	8	[44]
n-Гептан	0,45—21,7	0,78	1,63	0,967	26,4	9	[44]
Бензол	1—44,4	1,44	1,06	1,48	49,0	11	[44]
»	0,9—20,7	1,44	1,32	1,48	49,0	—	[49]
Дифенил	0,9—8	0,91	1,12	1,08	31,0	—	[49]
Метанол	0,08—1,39	2,33	(0,69)	2,07	79,5	13	[50]
Этанол	1—7,9	1,87	1,83	1,78	63,8	10	[44]
»	1—59	1,87	2,59	1,78	63,8	12	[45, 46]
Бутанол	0,17—1,38	1,31	(0,44)	1,39	44,7	14	[50]
Хладон-11 (CFCl ₃)	1—3	1,28	1,95 [1,73]	1,37	43,7	—	[52]
Хладон-12 (CF ₂ Cl ₂)	1—4,87	1,21	2,43	1,31	41,1	15	[51]
»	6—40,5	1,21	3,49 [2,57]	1,31	41,1	—	[54]
Хладон-13 (CF ₃ Cl)	2,8—10,5	1,13	{1,79}	1,26	38,6	—	[15]
Хладон-13B1 (CF ₃ Br)	17—39	1,17	4,43 [2,48]	1,29	39,9	—	[54]
Хладон-22 (CHF ₂ Cl)	0,4—2,15	1,45	{2,39}	1,49	49,36	—	[15]
Хладон-113 (C ₂ Cl ₃ F ₃)	1—3	1,0	1,24	1,15	34,1	—	[55]
Хладон-115 (C ₂ F ₅ Cl)	8—31	0,92	3,79 [2,38]	1,08	31,2	—	[54]
Хладон-C318 (C ₄ F ₈)	3,6—2,7	0,82	3,13 [2,50]	1,0	27,8	—	[54]
Хлористый метилен	1—4,5	1,79	(1,91)	1,72	60,8	—	[52]
Аммиак	1—8	3,32	3,90	2,64	113	—	[52]
Метан	1—42	1,37	2,68	1,43	46,5	—	[53]

¹ $\alpha = A q^{0,7}$; α — в Вт/(м²·К); q — в Вт/м².

Значения в круглых скобках неточные, значения, заключенные в фигурные скобки, получены при использовании для $F(p)$ уравнения (14).

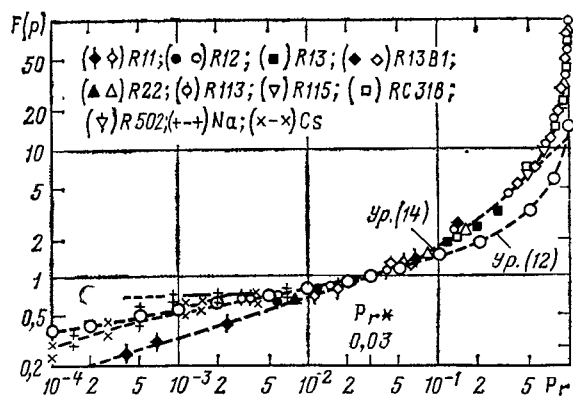


Рис. 5. Сравнение результатов расчета, полученных согласно уравнениям (12) и (14), с экспериментальными данными [15] (точки)

хладон-115 и т. д.) функция $F(p)$ отличается от уравнения (12) и от зависимости (11). Они предложили следующее соотношение:

$$F(p) = 0,7 + 2p_r \left(4 + \frac{1}{1-p_r} \right). \quad (14)$$

Эта функция сравнивается с предложенной в [12] на рис. 5 и в табл. 4. Для хладагентов рекомендуется использовать в уравнении (11) значения функции $F(p)$ и A^* , указанные в табл. 3. На рис. 6 сравниваются измеренные величины α со значениями, получаемыми согласно этому методу.

Независимые переменные, влияющие на теплоотдачу при пузырьковом кипении. Здесь кратко рассмотрено влияние различных независимых переменных на теплоотдачу при пузырьковом кипении.

1. **Влияние давления в системе.** Во всех случаях увеличение давления сдвигает кривую плотности теплового потока q от перегрева стенки ΔT_{sat} влево (рис. 7). При очень малых значениях приведенного давления ($p_r < 0,0001$) область пузырькового кипения может быть ограничена. Пузырьковое кипение не возникает до тех пор, пока не достигаются относительно большие перегревы стенки, соответствующие умеренным тепловым потокам. В то же время критический тепловой поток снижается с уменьшением давления системы. При некотором очень низком давлении начало парообразования приводит к возникновению кризиса и область пузырькового кипения исчезает (рис. 8).

2. **Влияние условий на поверхности.** Как уже отмечалось, условия на поверхности имеют значительное влияние

Таблица 4. Зависимость $F(p)$ от приведенного давления

p_r	Уравнение			r	Уравнение		
	(12)	(13)	(14)		(12)	(13)	(14)
0,0001	0,3760	0,3760	0,7010	0,0294	1,0464	0,9883	0,9958
0,0002	0,4231	0,4231	0,7020	0,05	1,1915	1,0817	1,2053
0,0005	0,4948	0,4944	0,7050	0,1	1,4693	1,2169	1,722
0,001	0,5572	0,5562	0,7100	0,2	1,9489	1,3691	2,8000
0,002	0,6281	0,6258	0,7200	0,5	3,3508	1,5999	6,700
0,005	0,7382	0,7313	0,7500	0,8	5,8670	1,7330	15,100
0,01	0,8386	0,8227	0,8000	1,0	15,8000	1,8000	∞
0,02	0,9622	0,9256	0,9008				

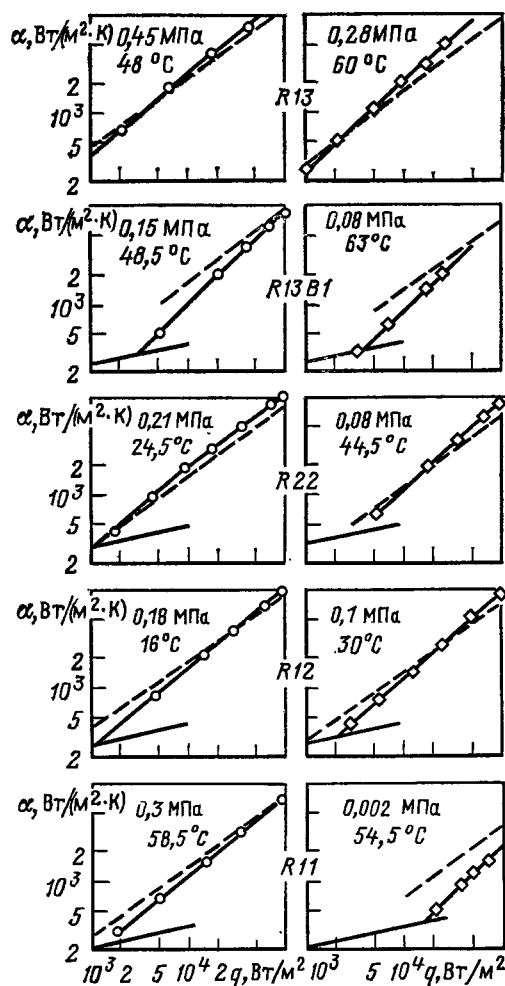


Рис. 6. Сравнение экспериментальных данных (точки) по коэффициентам теплоотдачи [15] с результатами расчета по уравнению (11) (штриховые кривые) и со значениями A^* из табл. 3 и $F(p)$, определенными по (14) при различных давлениях и температурах

на теплоотдачу при пузырьковом кипении (рис. 3). Рифление, выполнение канавок на поверхности или обработка наждачной бумагой и обдувка песком приводят к сдвигу кривой кипения в сторону меньших перегревов стенки. Вероятно, в результате обработки увеличиваются число активных центров парообразования и их эффективный размер. Однако во многих примерах длительное кипение

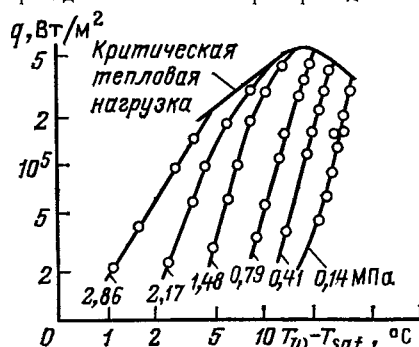


Рис. 7. Влияние давления на теплоотдачу при пузырьковом кипении [44] n-пентана при различных давлениях

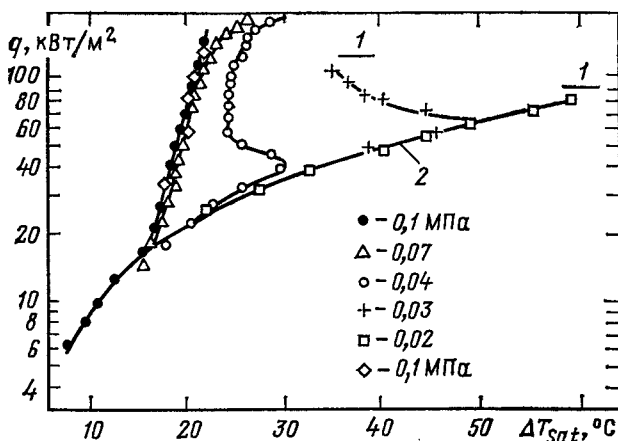


Рис. 8. Кривые кипения для этанола, свидетельствующие об уменьшении области пузырькового кипения и ее исчезновении при низких давлениях [37].

1 — пленочное кипение; 2 — свободная конвекция

ние на таких поверхностях приводит к уменьшению выигрыша в коэффициенте теплоотдачи вследствие шероховатости, показывая, что многие новые большие центры не стабильны.

Тем не менее можно создать поверхности, в которых образуются стабильные резервуарные впадины. Такими поверхностями могут быть некачественные пористые швы и пористые металлические покрытия. Трубы с пористыми металлическими покрытиями выпускаются промышленностью (см. § 2.7.9).

В условиях теплоотдачи к однофазной жидкости отложения на теплоотдающей поверхности всегда понижают эффективный коэффициент теплоотдачи, при пузырьковом кипении это не всегда так. Если слой отложений имеет пористую структуру, он может приводить к образованию больших стабильных центров парообразования, которые способствуют возникновению кипения при меньшем перегреве стенки [16]. Однако это влияние не проявляется длительное время [17], и во многих других случаях из-за значительных органических отложений эффекты интенсификации не сказываются.

3. *Влияние неконденсирующегося газа.* Присутствие неконденсирующегося газа, растворенного в жидкости, оказывает влияние на кривую кипения вблизи начала пузырькового кипения. Газовые пузыри могут появиться на поверхности нагрева при температуре, меньшей температуры, соответствующей насыщению. Это воздействие на точку начала парообразования можно учесть включением в анализ, описанный в п. А, парциального давления неконденсирующегося газа. При низких тепловых потоках сразу же после начала дегазации дополнительная конвекция, вызванная газовыми пузырями, увеличивает теплоотдачу по сравнению со случаем без наличия газа. Однако этот эффект исчезает при высоких тепловых потоках, когда устанавливается полностью развитое пузырьковое кипение.

4. *Гистерезис кривой кипения.* Для жидкостей, хорошо смачивающих поверхность нагрева, кривые кипения, полученные при увеличении и уменьшении тепловых потоков, могут отличаться. Когда тепловой поток увеличивается, начало пузырькового кипения может задерживаться, сопровождаясь перегревом стенки.

5. *Влияние размера и ориентации поверхности.* Для полностью развитого пузырькового кипения в большом объеме перегрев стенки не зависит от размеров и ориентации поверхности нагрева. При условии, что движение жидкости вызывается только процессом кипения, одинаковые

коэффициенты теплоотдачи будут достигнуты на горизонтальных пластинах, трубах и на коротких вертикальных пластинах и трубах. При низких тепловых потоках вблизи точки начала пузырькового кипения за счет свободной конвекции передается значительная часть отводимой теплоты и этот процесс, конечно, зависит от геометрии поверхности нагрева.

6. *Влияние недогрева жидкости.* Положение кривой кипения — зависимость плотности теплового потока $\dot{q}$ от перегрева стенки ΔT_{sat} — не сильно зависит от недогрева жидкости в объеме ΔT_{sub} . Отдельные кривые, как можно наблюдать, несколько смещены одна по отношению к другой. Их относительное расположение зависит от геометрии нагревателя и степени влияния конвекции на кривую кипения. В первом приближении влиянием недогрева на полностью развитое пузырьковое кипение можно пренебречь [18].

7. *Влияние смачиваемости поверхности.* Область пузырькового кипения можно значительно сократить в случае, если жидкость не смачивает поверхность нагрева. В частности, критический тепловой поток заметно снижается при больших краевых углах (см. рис. 12).

8. *Влияние гравитационного ускорения.* Повышение гравитационного ускорения оказывает небольшое воздействие в области полностью развитого пузырькового кипения, и немногие корреляции учитывают этот эффект. Повышение ускорения, однако, усиливает интенсивность свободной конвекции и поэтому при низких тепловых потоках, где существенна свободная конвекция, вызванная пузырями, происходит некоторое увеличение теплоотдачи.

С. *Критический тепловой поток.* Кривую, показанную на рис. 1, можно получить полностью в условиях, когда задается температура поверхности нагрева. Однако во многих практических случаях плотность теплового потока является независимой регулируемой переменной. При этом области свободной конвекции АВ и пузырькового кипения В'С кривой кипения в основном сохраняются без изменения. Если плотность теплового потока станет выше, чем в точке D, то температура поверхности резко повысится по сравнению со значением в точке D до следующей стабильной точки в области пленочного кипения (около 1150°C). Во многих практических случаях этого скачка температуры достаточно, чтобы вызвать повреждение поверхности нагрева. Термин «пережог» часто используется для этого явления.

Считается, что критический тепловой поток при кипении в большом объеме достигается при изменении гидродинамики потоков вблизи поверхности. Явление состоит в том, что недостаточное количество жидкости достигает поверхности нагрева из-за расхода пара, покидающего ее. В [19] структура потока представлена в виде расположенных в квадратной решетке струй пара, покидающих поверхность нагрева, с характерным расстоянием, равным длине волны λ_d наиболее быстро растущего возмущения согласно Тейлору. Взаимодействие соседних струй пара вследствие неустойчивости Гельмгольца ограничивает поток пара от поверхности

$$(\dot{q}_g)_{\text{max}} = \frac{\pi}{24} \left[\frac{\sigma g_n (\rho_l - \rho_g)}{\rho_g^2} \right]^{1/4}. \quad (15)$$

Когда жидкость находится при температуре насыщения и весь пар образуется на поверхности нагрева (для жидких металлов и также некоторых двухкомпонентных систем последнее допущение может быть неверно),

$$\dot{q}_g = \frac{\dot{q}}{\rho_g \Delta h_v} \quad (16)$$

и, таким образом,

$$\dot{q}_{\text{cr}} = K \Delta h_v \rho_g^{1/2} [\sigma g_n (\rho_l - \rho_g)]^{1/4}, \quad (17)$$

Таблица 5. Значения $f(p_r)$ для уравнения (18) [22] *

p_r	$F(p_r)$	p_r	$F(p_r)$	p_r	$F(p_r)$
0,004	1,0	0,06	3,0	0,6	3,4
0,01	1,56	0,2	3,75	0,8	2,0
0,02	2,05	0,35	4,0	1,0	0

* Следует отметить, что здесь приведены значения $f(p_r)$, характерные для протяженной горизонтальной обращенной вверх пластины. Значения для других геометрий зависят также и от L' [56].

где согласно [19] $K=\pi/24$. Эта теория тем самым подтверждает более раннюю корреляцию, предложенную в [20], в которой $K=0,16\pm 0,03$. Недавно в [21] была вновь рассмотрена теория [19] в свете современных экспериментальных данных. Был сделан вывод, что константа K , полученная в [19], должна быть увеличена в 1,14 раза, т. е. $K=0,149$. Однако полезно найти величину, рассчитываемую по уравнению (17), со значением K , указанным в [19], т. е. $\pi/24$, как характерный критический тепловой поток, обозначенный $\dot{q}_{cr, z}$.

Физические свойства не всегда известны, и в [22] уравнение (17) записано с использованием закона соответственных состояний

$$\dot{q}_{cr} = g_n^{1/4} p_c \frac{P}{\bar{M}} \left(\frac{8}{3} \frac{\bar{M} p_c}{\bar{R} T_c} \right)^{3/4} f(p_r). \quad (18)$$

В этом выражении P — паракор, таблицы которого получены в [23]; $f(p_r)$ — функция приведенного давления p_r , значения которой приведены в табл. 5. Геометрия, вязкость жидкости, недогрев и влияние поверхности могут изменить значение, найденное по уравнению (17).

Эффекты геометрии. Анализ Зубера [19] является строгим только для кипения чистой жидкости на протяженных хорошо смачиваемых горизонтальных поверхностях, обращенных вверх. Таким образом,

$$\frac{\dot{q}_{cr, F}}{\dot{q}_{cr, z}} = 1,14. \quad (19)$$

Для пластин с шириной, меньшей $3\lambda_d$, число паровых струй, которые могут разместиться на поверхности нагрева, ограничено. В области, где ширина нагревателя изменяется от 2 до $3\lambda_d$, вероятно, произойдет значительное сни-

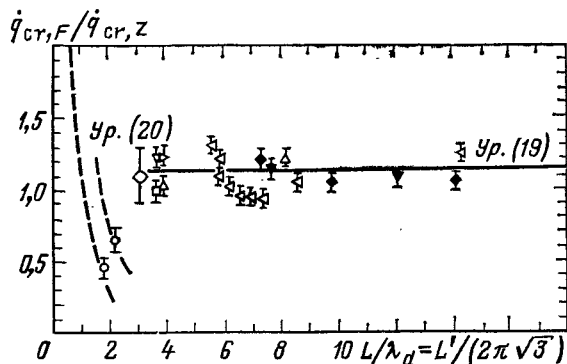


Рис. 9. Критический тепловой поток для горизонтальной пластины [21]

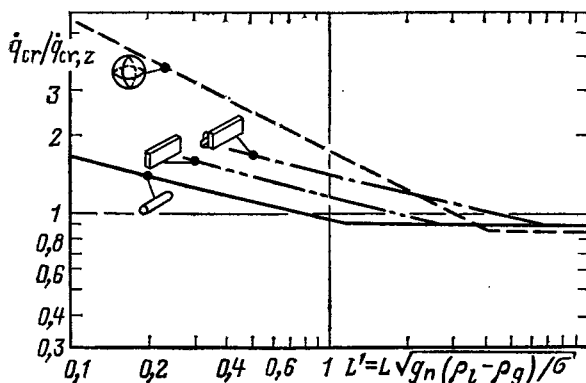


Рис. 10. Влияние геометрии нагревателя на критический тепловой поток [21]

жение $\dot{q}_{cr}$ (рис. 9). Для этой области в [21] предложено уравнение

$$\dot{q}_{cr} = \frac{N_j \lambda_d^3}{A_h} 1,14 \dot{q}_{cr, z}. \quad (20)$$

где N_j — число паровых струй, которые могут разместиться на поверхности нагрева; λ_d — длина волны наиболее быстро растущего возмущения, которая согласно Тейлору определяется следующим образом:

$$\lambda_d = 2\pi V \sqrt{3} \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2}; \quad (21)$$

A_h — площадь поверхности нагреваемой пластины. В пределе только одна паровая струя может разместиться на пластине и критический тепловой поток быстро увеличивается при дальнейшем уменьшении ширины нагревателя.

В [21] получены выражения для $\dot{q}_{cr}$, соответствующие другим геометриям нагревателя. В качестве размера нагревателя используется величина

$$L' = \frac{L}{[\sigma/g_n (\rho_l - \rho_g)]^{1/2}}. \quad (22)$$

Уравнения и соответствующая информация приведены в табл. 6 и на рис. 10. Следует заметить, что критический тепловой поток для больших вертикально расположенных нагревателей меньше, чем для горизонтально расположенных, на $0,904/1,14$, т. е. в 0,79 раза. Это согласуется с экспериментальными значениями, которые получены в [24].

При $L' < 0,15$ не следует пользоваться табл. 6. Для очень малых нагревателей силы поверхностного натяжения намного больше инерционных и гидродинамическая теория для критического теплового потока при кипении в большом объеме неверна. В действительности при очень низких $L' \leq 0,01$ отсутствуют пузырьковое кипение и максимум и минимум на кривой кипения. Тогда кривая кипения имеет участок свободной конвекции, переходящий непосредственно в область пленочного кипения (рис. 8).

Вязкость жидкости. В [25] корреляция С. С. Кутателадзе модифицирована для учета влияния вязкости жидкости. Для больших плоских горизонтальных нагревателей предложена зависимость

$$\dot{q}_{cr} = \left(\frac{1 + 30,5}{N^{2/5}} \right) \dot{q}_{cr, F}, \quad (23)$$

где

$$N = \frac{\rho_l \sigma}{\eta_l^2} \left[\frac{\sigma}{g (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2}. \quad (24)$$

Таблица 6. Модификации гидродинамической теории критического теплового потока при кипении в большом объеме для учета геометрии поверхности нагрева *

Геометрия поверхности нагрева	Характерный размер	Предел применимости	Уравнение
Протяженная горизонтальная пластина	L равно диаметру диска или стороне квадрата	$3 < \frac{L}{\lambda_d} \left(\text{или } \frac{L'}{2\pi\sqrt{3}} \right)$	$\frac{\dot{q}_{cr, F}}{\dot{q}_{cr, z}} = 1,14$
Небольшая горизонтальная пластина	L равно диаметру диска или ширине прямоугольной пластины	$0,5 \leq \frac{L}{\lambda_d} \leq 2$	$\dot{q}_{cr} = \frac{N_j \lambda_d^2}{A_h} 1,14 \dot{q}_{cr, z}$
Большой горизонтальный цилиндр	L равно радиусу цилиндра	$1,17 \leq R'$	$\frac{\dot{q}_{cr}}{\dot{q}_{cr, z}} = 0,904$
Небольшой горизонтальный цилиндр	L равно радиусу цилиндра	$0,12 < R' < 1,17$	$\frac{\dot{q}_{cr}}{\dot{q}_{cr, z}} = 0,94 (R')^{-1/4}$
Большие сферы	L равно радиусу сферы	$4,36 \leq R'$	$\frac{\dot{q}_{cr}}{\dot{q}_{cr, z}} = 0,84$
Небольшие сферы	L равно радиусу сферы	$0,18 < R' < 4,36$	$\frac{\dot{q}_{cr}}{\dot{q}_{cr, z}} = 1,754 (R')^{-1/2}$
Небольшие горизонтальные ленты, поставленные на ребро	L равно высоте ленты	$H' \leq 2,6$	$\frac{\dot{q}_{cr}}{\dot{q}_{cr, z}} = 1,18 (H')^{-1/4}$
Небольшие горизонтальные ленты, поставленные на ребро (одна сторона изолирована)	L равно высоте ленты	$H' \leq 6$	$\frac{\dot{q}_{cr}}{\dot{q}_{cr, z}} = 1,4 (H')^{-1/4}$

* Согласно [21]

$$\dot{q}_{cr, z} = \frac{\pi}{24} \rho_g^{1/2} \Delta h_v [\sigma g_n (\rho_l - \rho_g)]^{1/4}; \quad L' = L \left[\frac{g_n (\rho_l - \rho_g)}{\sigma} \right]^{1/2}; \quad \lambda_d = 2\pi\sqrt{3} \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2};$$

N_j — число струй пара на квадратной решетке с расстоянием λ_d , которые могут разместиться на пластине; A_h — площадь поверхности нагреваемой пластины.

В [26] при исследовании этого эффекта использован параметр

$$M = \frac{\rho_l \sigma^{3/4}}{\eta_l g_n^{1/4} (\rho_l - \rho_g)^{3/4}}. \quad (25)$$

При $M < 400$ критический тепловой поток выше, чем в случае невязкой жидкости. На рис. 11 представлены количе-

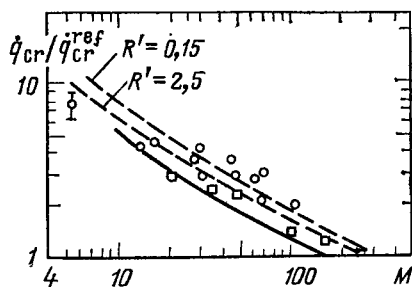


Рис. 11. Влияние вязкости жидкости на критический тепловой поток при кипении циклогексанола в большом объеме [26] для пластины (□) и горизонтального цилиндра (○). Значение $\dot{q}_{cr}^{ref}$ измерено для $M > 400$

ственные данные по этому эффекту для горизонтальных пластин или цилиндрических нагревателей.

Недогрев. В случае недогрева жидкости относительно температуры насыщения критический тепловой поток увеличивается

$$\dot{q}_{cr, sub} = \dot{q}_{cr, sat} (1 + B \Delta T_{sub}). \quad (26)$$

Для B в [19] предложено уравнение

$$B = 5,3 \frac{(\lambda_l \rho_l c_{pl})^{0,5}}{\rho_g \Delta h_v} \left[\frac{\rho_g^2}{\sigma g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/8} \left[\frac{g_n (\rho_l - \rho_g)}{\sigma} \right]^{1/4}. \quad (27)$$

Выражение (26), в которое входит указанная величина B , согласуется с экспериментальными данными для воды и этилового спирта при давлениях до 10^6 Н/м². Простые зависимости предложены С. С. Кутателадзе [27]

$$B = 0,065 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0,8} \frac{c_{pl}}{\Delta h_v} \quad (28)$$

и в [28]

$$B = 0,1 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0,75} \frac{c_{pl}}{\Delta h_v}. \quad (29)$$

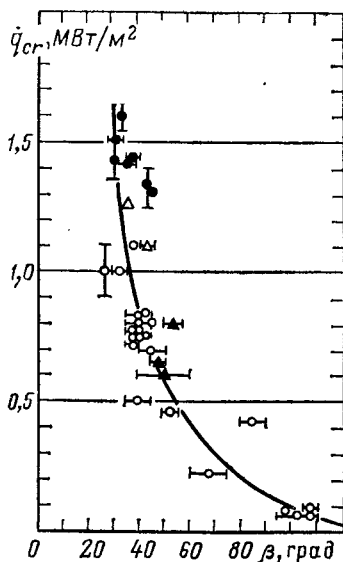


Рис. 12. Влияние краевого угла на критический тепловой поток при кипении воды в большом объеме при атмосферном давлении для различных поверхностей нагрева [32a]

Уравнение (26) с использованием последнего выражения для B согласуется с экспериментальными данными для воды, этилового спирта, аммиака, четыреххлористого углерода и изоктана в широком диапазоне давлений, и поэтому B рекомендуется определять по зависимости (29).

Условия на поверхности. Влияние условий на поверхности на q_{cr} до конца не выяснено. Согласно гидродинамической теории эффекта нет или он невелик; это подкрепляется результатами [29] (см. рис. 2). В частности, различная механическая обработка поверхности, например рифление, придание шероховатости, обдувка песком, не оказывает сильного влияния на q_{cr} . С другой стороны, поверхности с окисными пленками или отложениями имеют большие значения q_{cr} . Вероятно, этот эффект обусловлен улучшением смачиваемости поверхности. Так, авторы [24, 30] получили на окисленных алюминиевых поверхностях большие значения q_{cr} , чем на чистых; авторы [31, 32] установили, что отложения, образующиеся из водопроводной воды, значительно повысили q_{cr} по сравнению с измеренными для дистиллированной воды. Критические тепловые потоки на несмачиваемых поверхностях, например покрытых смазкой или фторуглеродным слоем, заметно ниже [32a], и могут быть меньше теплового потока, соответствующего началу пузырькового кипения (рис. 12).

Д. Переходное кипение. В этой малоисследованной области кривой кипения жидкость периодически контактирует с поверхностью нагрева, в результате образования большого количества пара она отскакивает от поверхности и возникает неустойчивая паровая пленка или слой. Паровая пленка в свою очередь разрушается, позволяя жидкости контактировать с поверхностью снова. Эта область достигается только при задании температуры поверхности. Из рис. 1 видно, что для воды при атмосферном давлении соответствующий диапазон температур составляет 140—250°C. В [33] обнаружено существование гистерезиса в области переходного кипения вблизи точки критического теплового потока. Максимальный тепловой поток, достигаемый в точке D , когда температура поверхности снижается из области переходного кипения, меньше максимального (критического) теплового потока, получаемого при повышении температуры поверхности в области пузырькового кипения. Вследствие периодического характера процесса плотность теплового потока и температура испытывают большие колебания во времени и на поверхно-

сти нагревателя. Однако средний тепловой поток понижается при увеличении температуры стенки вследствие непрерывного уменьшения времени контакта жидкости с ней и поверхности нагревателя, занятой жидкостью. Некоторые из факторов, которые существуют при переходном кипении, рассмотрены в [34]. В настоящее время не существует удовлетворительной теории или модели для этой области. Однако обычно кривую кипения между точками максимального и минимального тепловых потоков на графике в логарифмических координатах интерполируют прямой линией (см. рис. 3).

Е. Минимальный тепловой поток. Плотность теплового потока q_{min} соответствует минимальной скорости парообразования, которая обеспечивает стабильную паровую пленку у поверхности нагрева. Паровые пузыри образуются регулярно во времени и пространстве и отрываются от пленки. Если плотность теплового потока меньше q_{min} , граница раздела касается поверхности нагрева, охлаждая ее и приводя к восстановлению пузырькового кипения. Таким образом, температура поверхности изменяется от E к E' (см. рис. 1). Скорость отвода пара можно рассчитать, умножив объем отрывающегося пузыря на число пузырей за цикл на единицу площади и минимальную частоту. В результате находим зависимость для q_{min} на пластине, впервые полученную в [19] и затем модифицированную в [35]:

$$q_{min}, F = \text{const } \rho_g \Delta h_v \left[\frac{\sigma g_n (\rho_l - \rho_g)}{(\rho_l + \rho_g)^2} \right]^{1/4}. \quad (30)$$

Вследствие неопределенности минимальной частоты постоянную в уравнении (30) следует найти экспериментально. В [19] предложены различные значения для постоянной, которые в основном слишком высоки; из экспериментов [29] постоянная равна 0,09. Это значение остается в настоящее время лучшим для пластины. В [35] получено также следующее выражение для перегрева стенки $(T_w - T_{sat})$ в точке минимального теплового потока:

$$T_w - T_{sat} = 0,127 \frac{\rho_g \Delta h_v}{\lambda_g} \left[\frac{g_n (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l + \rho_g} \right]^{2/3} \times \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2} \left[\frac{\eta_g}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/3}. \quad (31)$$

Для горизонтального цилиндра q_{min} больше значения, полученного по уравнению (30), и оно растет с уменьшением диаметра. В [36] предложено следующее выражение с постоянной, найденной из экспериментов на изопропанол и бензоле:

$$q_{min} = 0,057 \frac{\rho_g \Delta h_v}{R} \left[\frac{2g_n (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l + \rho_g} + \frac{\sigma}{R^2 (\rho_l + \rho_g)} \right]^{1/2} \times \left[\frac{g_n (\rho_l - \rho_v)}{\sigma} + \frac{1}{2R^2} \right]^{-3/4}. \quad (32)$$

Экспериментальное определение q_{min} для цилиндров затруднено из-за концевых креплений, которые вызывают переход от пленочного кипения к пузырьковому при тепловых потоках, превышающих действительное значение q_{min} . В [37] эта трудность преодолена; в экспериментах на воде при различных давлениях получены результаты примерно на 40% ниже, чем дает уравнение (32). В [22, 33] представлены экспериментальные данные, превышающие в 5 раз значения, полученные согласно уравнению (32). Значение q_{min} при вертикальном расположении нагревателя ниже, чем при горизонтальном, и отношение их такое же, как для критических тепловых нагрузок, т. е. составляет примерно 0,75.

Г. Пленочное кипение. При больших температурных напорах непрерывная паровая пленка покрывает поверхность нагрева. Основное термическое сопротивление за-

ключено в паровой пленке и, поскольку контакт жидкости с поверхностью отсутствует, эта область лучше всего поддается анализу. Зависимости для коэффициента теплоотдачи при пленочном кипении с ламинарной или турбулентной паровой пленкой в различных геометрических ситуациях можно установить на основе простой аналогии с идентичными уравнениями, полученными для пленочной конденсации (см. § 2.6.2).

В [38] анализировалось пленочное кипение на протяженной горизонтальной пластине: получено следующее уравнение, которое сравнивается с данными для пентана (см. рис. 3), четыреххлористого углерода, бензола и этилового спирта:

$$\alpha = 0,425 \left[\frac{\lambda_g \rho_g (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v'}{\eta_g \Delta T (\lambda_{cr}/2\pi)} \right]^{1/4}, \quad (33)$$

где λ_{cr} — критическая (наименьшая) длина волны неустойчивости Тейлора, причем

$$\lambda_{cr} = 2\pi \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2}; \quad (34)$$

$\Delta h_v'$ — эффективная скрытая теплота парообразования, учитывающая перегрев:

$$\Delta h_v' = \Delta h_v \left[1 + \xi \left(\frac{c_{pg} \Delta T}{\Delta h_v} \right) \right]. \quad (35)$$

В уравнении (35) ξ следует брать равным 0,4.

Для пленочного кипения на горизонтальной трубе при ламинарной пленке в [39] получено

$$\alpha = 0,62 \left[\frac{\lambda_g \rho_g (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v'}{\eta_g \Delta T D} \right]^{1/4}, \quad (36)$$

в этом уравнении $\Delta h_v'$ определяется по зависимости (35) при $\xi = 0,68$.

Для очень больших труб, горизонтальных пластин и очень тонких проволок уравнение (36) неточно. В случае труб большего диаметра и горизонтальных пластин в качестве характерной длины более корректно брать λ_{cr} , чем диаметр трубы D . Так, в [40] модифицировано уравнение (36):

$$\alpha = \left(0,59 + 0,069 \frac{\lambda_{cr}}{D} \right) \left[\frac{\lambda_g \rho_g (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v'}{\eta_g \Delta T \lambda_{cr}} \right]^{1/4}, \quad (37)$$

в котором

$$\Delta h_v' = \Delta h_v \left(1 + 0,34 \frac{c_{pg} \Delta T}{\Delta h_v} \right)^3. \quad (38)$$

Уравнение (37) верно при $0,8 < (\lambda_{cr}/D) < 8$, и выражения (36) и (37) становятся в основном идентичными при $D \gg \lambda_{cr}$.

Для вертикальной пластины анализ ламинарного течения пара в пленке в предположении, что касательные напряжения на границе раздела отсутствуют, приводит к локальному коэффициенту теплоотдачи $\alpha(z)$ на расстоянии z по поверхности от начала пленочного кипения

$$\alpha(z) = 0,707 \left[\frac{\lambda_g \rho_g (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v'}{\eta_g \Delta T z} \right]^{1/4}. \quad (39)$$

Коэффициент $\bar{\alpha}(z)$, осредненный на участке длиной z , равен

$$\bar{\alpha}(z) = \frac{4}{3} \alpha(z). \quad (40)$$

Если скорость на границе раздела равна нулю, коэффициент 0,707 в (39) следует заменить на 0,5. На практике

последнее условие верно только при очень низких значениях $\rho_g \eta_g / \rho_l \eta_l$ [41] и распространен подход, когда берут среднее значение коэффициента.

Ясно, что для вертикальных поверхностей нагрева уравнения пленочного кипения с ламинарной пленкой пара верны только на очень коротком участке. За этим участком пар перетекает в большие сферические пространства, и возникает переменная во времени, но тонкая паровая пленка. Обычно коэффициенты теплоотдачи могут в 2 раза превышать значения, полученные согласно уравнению (39).

В [42] предположено, что на вертикальном цилиндре эти сферические пространства образуются в процессе роста неустойчивости. Длина волны при максимальном росте неустойчивости этого типа, управляемой поверхностным натяжением, равна

$$\lambda_{cr} = 2,07 \pi D. \quad (41)$$

Подстановка λ_{cr} согласно этому выражению вместо z в уравнение (39) приводит к

$$\alpha = 0,47 \left[\frac{\lambda_g \rho_g (\rho_l - \rho_g) g_n \Delta h_v'}{\eta_g \Delta T D} \right]^{1/4}. \quad (42)$$

Коэффициенты теплоотдачи, полученные из уравнения (36) для пленочного кипения на наружной поверхности горизонтальных цилиндров, на 33% выше, чем найденные из (42).

Влияние недогрева жидкости на теплоотдачу при пленочном кипении может быть значительным. Например, для органических жидкостей, таких как *n*-гексан, бензол, метанол, четыреххлористый углерод и этиловый спирт, теплоотдачу можно улучшить в 4 раза при недогреве 40°C.

Обычно температура поверхности при пленочном кипении высока, и теплота может передаваться излучением. В [39] предложена следующая аппроксимация для учета эффектов конвекции и излучения:

$$\alpha = \alpha_c + 0,75 \alpha_r, \quad (43)$$

где α_c — коэффициент теплоотдачи конвекцией [например, уравнение (36) или (42)]; α_r — коэффициент теплоотдачи излучением. Для простоты коэффициент теплоотдачи излучением α_r можно рассчитать, рассмотрев радиацию между бесконечными параллельными пластинами со средой, проявляющейся как идеальное черное тело,

$$\alpha_r = C_s \varepsilon \left(\frac{T_w^4 - T_l^4}{T_w - T_l} \right), \quad (44)$$

где C_s — постоянная Стефана — Больцмана; ε — коэффициент, характеризующий излучение поверхности нагрева.

Уравнения для теплоотдачи при пленочном кипении, приведенные в этом разделе, описывают совокупность экспериментальных данных, охватывающих различные жидкости, а именно азот, кислород, вода, метан, этан, этилен, смеси этилена, пропан, *n*-бутан, метанол, этиловый спирт, бензол, четыреххлористый углерод, со средним стандартным отклонением 30—40%. Более полную информацию по этому вопросу можно найти в [43].

2.7.3. Кипение в вертикальных трубах

Дж. Г. Коллье

А. Введение. Ниже описывается кипение в стационарных условиях в вертикальной однородно обогреваемой трубе. Каждая из представленных областей теплообмена кратко описана вместе с простыми корреляциями для расчета коэффициентов теплоотдачи и условиями перехода от одной области к другой.

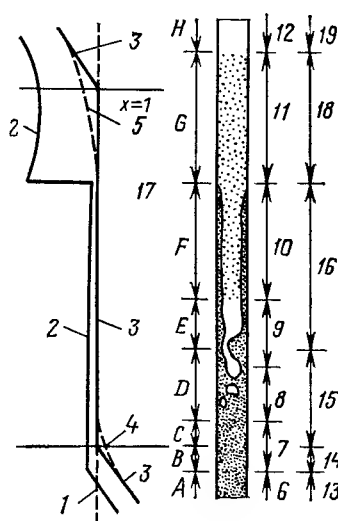


Рис. 1. Области теплообмена при кипении в условиях вынужденного движения:

1 — температура насыщения; 2 — температура стенки; 3 — температура жидкости; 4 — температура ядра жидкости; 5 — температура ядра пара; 6 — поток однофазной жидкости; 7 — пузырьковый режим течения; 8 — снрядный; 9 — кольцевой; 10 — кольцевой с уносом жидкости; 11 — капельный; 12 — поток однофазного пара; 13 — теплоотдача конвекцией в жидкости; 14 — кипение с недогревом; 15 — насыщенное кипение; 16 — передача теплоты через жидкую пленку при вынужденной конвекции; 17 — высыхание пленки; 18 — область с недостатком жидкости; 19 — теплоотдача конвекцией в паре

Области теплоотдачи в вертикальной нагреваемой трубе. Рассмотрим вертикальную трубу, однородно обогреваемую по длине небольшим тепловым потоком, в основании которой подается недогретая жидкость с таким расходом, что жидкость полностью испаряется к выходу из трубы. На рис. 1 показана диаграмма различных режимов течения, наблюдаемых по длине трубы, вместе с соответствующими областями теплоотдачи.

Пока жидкость нагревается до температуры насыщения и температура стенки ниже значения, необходимого для парообразования, теплоотдача к жидкой фазе осуществляется в результате однофазной конвекции (область A). В некоторой точке условия у стенки таковы, что в центрах парообразования могут возникнуть пузыри. Сначала парообразование происходит в недогретой жидкости (область B), и механизм переноса теплоты при этом известен как пузырьковое кипение недогретой жидкости. В области кипения недогретой жидкости температура стенки в целом постоянна и на несколько градусов выше температуры насыщения, тогда как среднemasсовая температура жидкости постепенно приближается к ней. Превышение температуры стенки над температурой насыщения является перегревом стенки ΔT_{sat} , а разность между температурой насыщения и среднemasсовой температурой жидкости — степенью недогрева ΔT_{sub} .

Переход между областями B и C, соответствующим пузырьковому кипению недогретой жидкости и пузырьковому кипению насыщенной жидкости, ясно определен из термодинамических соображений. Точка, при которой жидкость достигает температуры насыщения ($x=0$), находится на основе простых расчетов баланса теплоты. Однако недогретая жидкость может существовать в ядре потока даже в области пузырькового кипения насыщенной жидкости. Пар, генерируемый в области кипения с недогревом, возникает при переходе между областями B и C ($x=0$); таким образом, часть жидкости должна быть недогрета, чтобы средняя (на участке смешения) энтальпия жидкости равнялась энтальпии насыщенной жидкости (h_f). Этот эффект возникает в результате наличия радиального профиля температуры в жидкости, и недогретая жидкость, текущая в центре канала, достигает температуры насыщения только на некотором расстоянии вниз по потоку от точки $x=0$.

В областях от C до G переменной, характеризующей механизм переноса теплоты, является термодинамическое массовое «газосодержание» x жидкости. Газосодержание смеси жидкость — пар на расстоянии z определяется из термодинамических соображений

$$x(z) = (h(z) - h_f) / \Delta h_p. \quad (1)$$

В области $0 < x < 1$ при полном термодинамическом равновесии x представляет собой отношение массового расхода пара к общему массовому расходу. Согласно термодинамическому определению (1) x может иметь отрицательные значения и значения больше единицы. Эти значения иногда используются для удобства, но они не имеют практического значения и означают, что в первом случае жидкость недогрета, а во втором — пар перегрет. Переменная x часто называется также массовым паросодержанием.

По мере увеличения паросодержания в области пузырькового кипения насыщенной жидкости может быть достигнута точка, где происходит основное изменение в механизме переноса теплоты. Процесс кипения сменяется процессом испарения. Этому переходу предшествует изменение в структуре потока от пузырькового или снрядного режима к кольцевому режиму течения (области E и F). В последней области толщина тонкой жидкой пленки на поверхности нагрева часто такова, что ее теплопроводности достаточно, чтобы предотвратить нагрев жидкости на стенке до температуры, при которой происходит образование пузырей. Теплота передается от стенки вынужденной конвекцией в пленке к границе раздела жидкая пленка — паровое ядро, где происходит испарение. Поскольку образование пузырей полностью подавлено, процесс переноса теплоты нельзя называть кипением. Область, расположенная за переходом, определяется как область теплообмена вынужденной конвекцией в двухфазной среде (области E и F).

При некотором критическом значении паросодержания происходит полное испарение жидкой пленки. Это явление известно как высыхание пленки и сопровождается сильным повышением температуры стенки для каналов, работающих с заданной тепловой нагрузкой. Участок между точкой высыхания пленки и переходом к насыщенному пару (область H) названа областью с недостатком жидкости (соответствующей режиму течения с каплями) (область G). Условие высыхания пленки выражает часто предел по количеству испарившейся массы, которое возможно в канале при заданном значении теплового потока.

Изменение коэффициента теплоотдачи с паросодержанием. Полезно описать, по крайней мере качественно, последовательное изменение локальной температуры поверхности (или локального коэффициента теплоотдачи) по длине трубы по мере того, как происходит испарение. Локальный коэффициент теплоотдачи можно получить делением тепловой нагрузки (постоянной по длине трубы) на разность температуры стенки и среднemasсовой температуры жидкости. На рис. 1 показаны типичные изменения этих двух температур по длине трубы. Изменение коэффициента

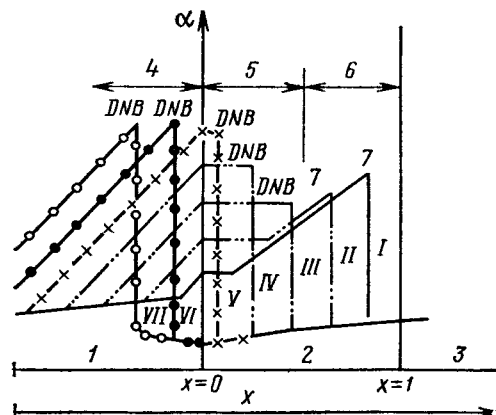


Рис. 2. Изменение коэффициента теплоотдачи от паросодержания для различных тепловых нагрузок:

1 — недогретая жидкость; 2 — насыщенная жидкость; 3 — перегретый пар; 4 — пленочное кипение с недогревом; 5 — насыщенное пленочное кипение; 6 — область с недостатком жидкости; 7 — высыхание пленки

теплоотдачи по длине трубы для условий, представленных на рис. 1, приведено на рис. 2 (сплошная кривая 1). В области передачи теплоты однофазной конвекцией температура стенки превышает температуру жидкости в объеме на относительно постоянную величину (коэффициент теплоотдачи примерно постоянен) и изменяется вследствие влияния температуры на физические свойства жидкости незначительно. В области пузырькового кипения с недогревом разность температур стенки и жидкости в объеме уменьшается линейно по длине до точки, где $x=0$. Поэтому коэффициент теплоотдачи увеличивается линейно по длине в этой области. В области пузырькового кипения насыщенной жидкости разность температур и, следовательно, коэффициент теплоотдачи остаются постоянными. Вследствие уменьшения толщины жидкой пленки в области вынужденной двухфазной конвекции разность температур поверхности и насыщения снижается и коэффициент теплоотдачи увеличивается по длине или с массовым паросодержанием. В точке высыхания пленки коэффициент теплоотдачи внезапно понижается от очень большого значения в области вынужденной конвекции до значения, близкого к ожидаемому при теплоотдаче вынужденной конвекцией к насыщенному пару. При увеличении паросодержания в области с недостатком жидкости скорость пара растет и разность температур поверхности и насыщения уменьшается с соответствующим повышением теплоотдачи. Наконец, в области, где имеется только паровая фаза ($x>1$), температура стенки снова превышает на постоянную величину температуру жидкости в объеме и коэффициент теплоотдачи достигает уровня, соответствующего конвективной теплоотдаче к однофазному потоку пара.

Приведенные комментарии ограничены случаем с относительно низким тепловым потоком на стенке трубы. Рассмотрим теперь эффект постепенного увеличения тепловой нагрузки при поддержании постоянного расхода на входе (рис. 2—4). На рис. 2 показана зависимость коэффициента теплоотдачи от массового паросодержания при увеличивающейся тепловой нагрузке в качестве параметра (кривые I—VII). На рис. 3 показаны различные области

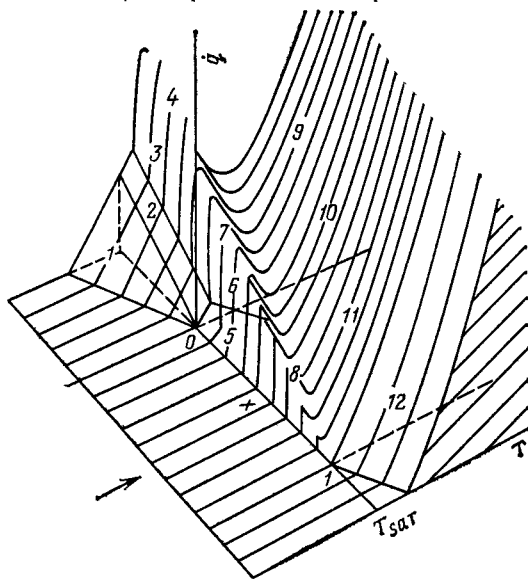


Рис. 3. Диаграмма (T, x, q) для кипения при вынужденной конвекции:

1 — теплоотдача к недогретой однофазной жидкости при вынужденной конвекции; 2 — поверхность кипения; 3 — пузырьковое кипение с недогревом; 4 — DNB (при недогреве); 5 — теплоотдача двухфазной вынужденной конвекцией; 6 — насыщенное пузырьковое кипение; 7 — DNB (при насыщении); 8 — высыхание пленки; 9 — пленочное кипение; 10 — насыщенное пленочное кипение; 11 — область с недостатком жидкости; 12 — теплоотдача однофазной конвекцией к перегретому пару

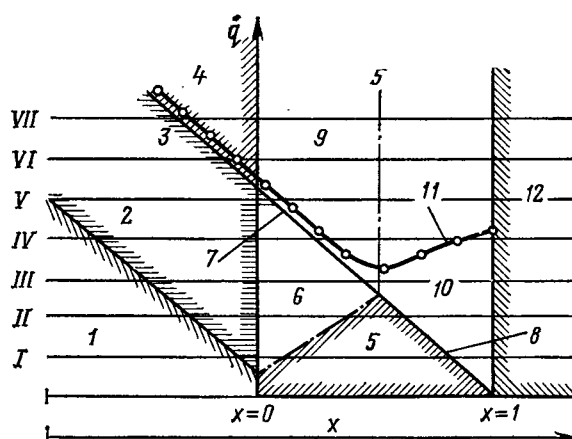


Рис. 4. Границы областей теплоотдачи при вынужденной конвекции:

1 — теплоотдача однофазной вынужденной конвекцией в жидкости; 2 — кипение с недогревом; 3 — DNB (при недогреве); 4 — пленочное кипение с недогревом; 5 — теплоотдача вынужденной двухфазной конвекцией; 6 — насыщенное пузырьковое кипение; 7 — DNB (при насыщении); 8 — высыхание пленки; 9 — насыщенное пленочное кипение; 10 — область с недостатком жидкости; 11 — перегрев; 12 — теплоотдача однофазной вынужденной конвекцией к перегретому пару

двухфазного теплообмена при кипении в условиях вынужденной конвекции на диаграмме (поверхности кипения) с тепловым потоком, массовым паросодержанием и температурой в качестве координат. На рис. 4 показаны области теплоотдачи при вынужденной конвекции с увеличивающимся тепловым потоком по вертикальной оси (вид вертикального разреза диаграммы на рис. 3 в направлении стрелки). Кривая I на рис. 2 относится к условиям, показанным на рис. 1 для небольшого теплового потока на стенке трубы. Температурные режимы, изображенные на рис. 1, представляют проекцию на горизонтальную плоскость (координаты температура — паросодержание) диаграммы на рис. 3. Кривая II соответствует большему тепловому потоку. Кипение с недогревом начинается раньше, коэффициент теплоотдачи в области пузырькового кипения выше, но не изменяется в области вынужденной двухфазной конвекции. Высыхание пленки происходит при меньшем массовом паросодержании. Кривая III получена в случае дальнейшего роста теплового потока. Снова кипение с недогревом начинается раньше, и теплоотдача в области пузырькового кипения выше. С увеличением массового паросодержания до начала области вынужденной двухфазной конвекции, пока образуются пузыри, имеет место резкое ухудшение процесса охлаждения. Этот переход в основном аналогичен явлению критического теплового потока при кипении насыщенной жидкости в большом объеме и называется переходом от пузырькового кипения к пленочному (DNB).

Механизм переноса теплоты в условиях, когда критический тепловой поток (соответствующий DNB или высыханию пленки) превышен, зависит от того, что являлось начальным условием — процесс кипения (образование пузырей в области с недогревом или в области малого массового паросодержания) или процесс испарения (испарение на границе раздела жидкая пленка — паровое ядро на участке с высоким массовым паросодержанием). В последнем случае возникает область с недостатком жидкости, в первом — результирующим механизмом является пленочное кипение (рис. 3 и 4).

Как видно из рис. 2, дальнейшее повышение теплового потока (кривые VI и VII) вызывает возникновение DNB в области недогрева и образование целой области кипения насыщенной жидкости, занятой пленочным кипением и зо-

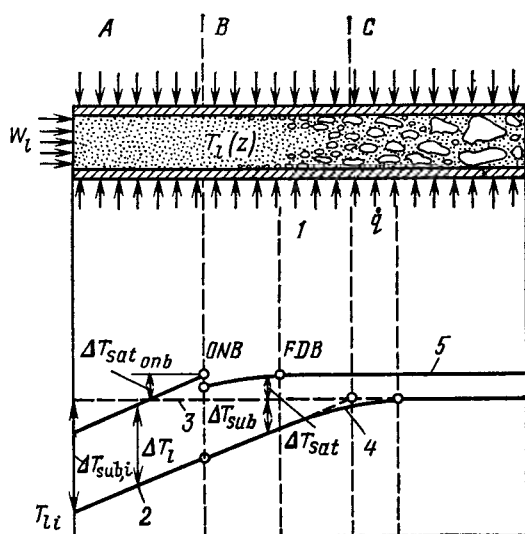


Рис. 5. Распределение температуры поверхности и жидкости при кипении с недогревом. Конвекция в однофазной жидкости (область А), кипение с недогревом (область В) и насыщенное кипение (область С):

1 — однородный тепловой поток; 2 — средняя температура жидкости; 3 — температура насыщения; 4 — действительное изменение температуры в объеме жидкости; 5 — температура поверхности

ий с недостатком жидкости — двумя относительно малоэффективными формами переноса теплоты. На рис. 3 и 4 зона с пленочным кипением разделена произвольно на две области: пленочное кипение с недогревом и пленочное кипение насыщенной жидкости. Пленочное кипение в условиях вынужденного движения в основном подобно наблюдаемому при кипении в большом объеме. Поверхность нагрева покрывается паровой пленкой, через которую должна передаваться теплота. Коэффициент теплоотдачи на порядок ниже, чем в области перед критическим тепловым потоком, в основном из-за низкой теплопроводности пара, прилегающего к поверхности.

Ниже представлены критерии, с помощью которых можно установить границы поверхности кипения, обозначенные на рис. 3 и 4. Кроме того, для каждой области описаны методы расчета теплоотдачи.

В. Кипение с недогревом. Теплоотдача к однофазной жидкости. На рис. 5 показаны в упрощенной форме режимы потока и изменения температуры поверхности и жидкости в областях, обозначенных А, В и С. Температура поверхности трубы в области А (область конвективной теплоотдачи к однофазной жидкости) определяется из выражения

$$T_w = T_l(z) + \Delta T_l, \quad (2)$$

где

$$\Delta T_l = \frac{\dot{q}}{\alpha_{l0}}, \quad (3)$$

где ΔT_l — разность температуры внутренней поверхности трубы и среднemasовой температуры жидкости на расстоянии z от входа; α_{l0} — коэффициент теплоотдачи к однофазной жидкости при вынужденной конвекции. Течение жидкости в канале может быть ламинарным или турбулентным; для каждого случая устанавливается закон теплоотдачи, подробнее — см. § 2.5.1. Турбулентное течение описывается хорошо известным уравнением Диттуса — Болтера

$$\frac{\alpha_{l0} D}{\lambda_f} = 0,023 \left(\frac{\dot{m} D}{\eta_f} \right)^{0,8} \left(\frac{c_p \eta_f}{\lambda_f} \right)^{1/3}. \quad (4)$$

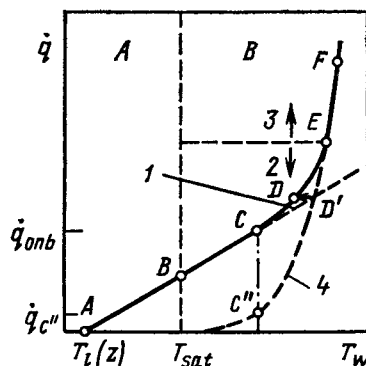


Рис. 6. Кривая кипения с недогревом. Однофазная жидкость (область А) и кипение с недогревом (область В):

1 — однофазная вынужденная конвекция; 2 — поверхностное кипение; 3 — полностью развитое кипение при недогреве; 4 — полностью развитое кипение

Это уравнение рекомендуется при нагреве вертикального восходящего потока в случае $z/D > 50$ и $\dot{m} D / \eta_f > 10\,000$.

Начало пузырькового кипения с недогревом. На рис. 6 показано качественное изменение температуры внутренней поверхности трубы в точке z при монотонном увеличении теплового потока для заданных недогрева и массовой скорости на входе. Следует выделить три области: однофазной конвекции АВ, неразвитого кипения BCDE и полностью развитого кипения с недогревом EF.

При увеличении теплового потока температура поверхности изменяется по линии ABD' до образования первых пузырей. Для инициирования первых центров парообразования при заданном тепловом потоке необходима более высокая степень перегрева, чем на кривой ABCDE. При возникновении пузырей температура поверхности падает от D' до D и при дальнейшем увеличении теплового потока изменяется по линии DEF. Начало кипения можно приблизительно определить как пересечение линии ABD' и кривой полностью развитого кипения C'E'F.

Более тщательное рассмотрение начала пузырькового кипения можно провести с помощью профиля температуры вблизи нагреваемой стенки (см. § 2.7.2). Используя этот подход, авторы [1] получили уравнение для перегрева стенки, необходимого для начала кипения с недогревом. Их уравнение справедливо только для воды и имеет вид

$$(T_w - T_{sat})_{onb} = 0,556 \left(\frac{\dot{q}}{1082 p^{1,156}} \right)^{0,463} p^{0,0234}, \quad (5)$$

где $\dot{q}$ — тепловая нагрузка, Вт/м²; p — давление системы, 10^5 Па. Ниже приведена зависимость, полученная авторами [2], которая справедлива для всех жидкостей

$$(T_w - T_{sat})_{onb} = \left(\frac{8 \dot{q} T_{sat}}{\lambda_f \Delta h_v \rho_g} \right)^{0,5}. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) хорошо согласуются между собой в случае водяных потоков при высоком давлении. В [3] этот подход применен и для других жидкостей. В этом исследовании предполагалось, что образование пузырей происходит, когда температура жидкости $T_l(y)$ соответствует температуре равновесия пузыря T_g на расстоянии nr_c , где $n = (c_p \eta_f / \lambda_f)^2$, а не r_c [см. рис. 2, § 2.7.2]. Таким образом уравнение (6) принимает вид

$$(T_w - T_{sat})_{onb} = \left(\frac{8 \dot{q} T_{sat}}{\lambda_f \Delta h_v \rho_g} \right)^{0,5} Pr_l. \quad (7)$$

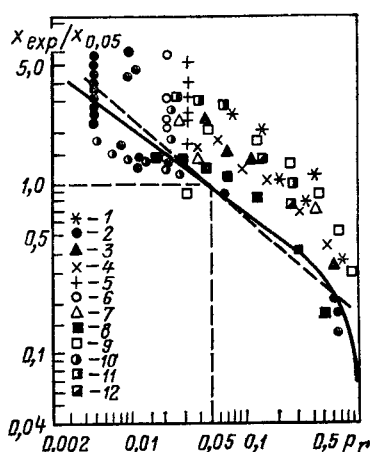


Рис. 7. Сравнение экспериментальных данных по началу кипения с результатами, полученными согласно (8) [3]:

1 — водород; 2 — вода; 3 — хладон; 4 — бензол; 5 — азот; 6 — кислород; 7 — неон; 8 — этанол; 9 — *n*-пентан; 10 — четыреххлористый углерод; 11 — ацетон; 12 — керосин

Это уравнение сравнивалось с экспериментальными данными по началу кипения для множества жидкостей. Параметр X определим следующим образом:

$$X = \frac{(T_w - T_{\text{sat}})_{\text{onb}}}{\dot{q}^{0.5} Pr_L} = \left(\frac{8\sigma T_{\text{sat}}}{\lambda_l \Delta h_{\text{v}} \rho_g} \right)^{0.5} \quad (8)$$

На рис. 7 приведена зависимость значений $X_{\text{exp}}/X_{\text{ref}}$ от приведенного давления. Значение X_{exp} рассчитывали, используя значения $(T_w - T_{\text{sat}})_{\text{onb}}$ и $\dot{q}_{\text{onb}}$; значения X_{ref} определяли по физическим свойствам жидкости при постоянном приведенном давлении 0,05. Значения X_{ref} для различных жидкостей приведены в табл. 1.

Указанный подход может привести к точному определению начала пузырькового кипения только в том случае, когда на поверхности нагрева имеется достаточно широкий диапазон размеров «активных» впадин. Но это не всегда имеет место, поэтому уравнение (8) представляет собой нижнюю границу экспериментальных данных, приведенных на рис. 7, т. е. кипение во многих случаях не начинается, пока не достигаются более высокие значения температуры поверхности, чем определяемые уравнением (8). Оптималь-

ный размер активной впадины r_c (см. § 2.7.2) определим следующим образом:

$$r_c = \left(\frac{2\sigma T_{\text{sat}} \lambda_l}{\dot{q} \Delta h_{\text{v}} \rho_g} \right)^{0.5} \quad (9)$$

Действительный размер активных центров парообразования на поверхности нагрева можно оценить с помощью методов, описанных в § 2.7.1. Некоторые рекомендации приведены также в § 2.7.2. Если r_c превышает эти типичные значения, то перегрев стенки, необходимый для начала кипения, можно определить из выражения

$$(T_w - T_{\text{sat}})_{\text{onb}} = \frac{2\sigma T_{\text{sat}}}{r_{\text{max}} \Delta h_{\text{v}} \rho_g} + \frac{\dot{q} r_{\text{max}}}{\lambda_l}, \quad (10)$$

где r_{max} — найденный максимальный размер активного центра парообразования на поверхности.

Для области кипения с недогревом уравнения (6) и (7) следует решать совместно с уравнением теплоотдачи

$$\dot{q} = \alpha_{l0} (T_w - T_l(z)) = \alpha_{l0} [(T_w - T_{\text{sat}})_{\text{onb}} + (T_{\text{sat}} - T_l(z))] \quad (11)$$

для получения тепловой нагрузки $\dot{q}$ и $(T_w - T_{\text{sat}})_{\text{onb}}$, необходимых для начала кипения. Границу между областями, показанными на рис. 4, можно получить из (11) при условии $T_{\text{sat}} - T_l(z) = 0$

$$(\dot{q}_{\text{onb}}) \Delta T_{\text{sub}}(z) = 0 = \frac{8\alpha_{l0} \sigma T_{\text{sat}}}{\lambda_l \Delta h_{\text{v}} \rho_g} \quad (12)$$

При тепловых нагрузках, меньших соответствующих уравнению (12), жидкость в объеме должна быть перегрета, прежде чем на поверхности нагрева возникнет парообразование (область кипения с недогревом отсутствует). Описанные условия часто приводят к неустойчивой работе теплообменного оборудования и должны быть исключены. Рассмотренный подход можно применять также в случае влияния растворенных газов на образование пузырей.

Полностью развитое кипение с недогревом. При возникновении кипения действует только ограниченное число центров парообразования, так что часть теплоты передается обычным процессом в однофазной жидкости между пузырями. Эта переходная область названа неразвитым кипением. Когда температура поверхности увеличивается, число центров пузырей возрастает, а площадь, через которую теплота передается к однофазной жидкости, уменьшается. Наконец, вся поверхность покрывается пузырями, кипение становится полностью развитым и однофазная компонента теплоотдачи уменьшается до нуля. Скорость и недогрев, имеющие сильное влияние на теплоотдачу в однофазной жидкости, в области полностью развитого кипения оказывают небольшой эффект или вовсе не влияют на температуру поверхности. При кипении с недогревом температура поверхности зависит в основном от тепловой нагрузки и давления жидкости. Влияние условий на поверхности для кипения при вынужденной конвекции должно быть слабее, чем в большом объеме, потому что высокие тепловые нагрузки и перегревы стенки сдвигают диапазон активных центров парообразования в сторону меньших размеров, которые в действительности имеются на большей части поверхностей. Однако прямых экспериментальных данных, подтверждающих это утверждение, немного.

Представляется, что уравнения, обобщающие данные по кипению в большом объеме (см. § 2.7.2), подобны уравнениям для случая вынужденной конвекции, полностью развитого кипения и кипения с недогревом. Однако значения тангенса угла наклона и отрезка, отсекаемого на координатной оси $[n$ и A в уравнении (6), § 2.7.2], могут отличаться от значений, соответствующих кипению в большом объеме.

Таблица 1. Значения X в уравнении (8), рассчитанные для приведенного давления 0,05,

Жидкость	X_{ref}' К/(Вт·м ⁻²) ^{0.5}	Жидкость	X_{ref}' К/(Вт·м ⁻²) ^{0.5}
Аммиак	0,00432	Кислород	0,00507
Двуокись углерода	0,01186	Бензол	0,01339
Четыреххлористый углерод	0,01364	Вода	0,00441
Ртуть	0,00397	Хладон-12	0,01417
Неон	0,00241	Этанол	0,00891
<i>n</i> -Пентан	0,01214	Ацетон	0,01120
<i>p</i> -Водород	0,00338	Керосин (JP-4)	0,01267
Азот	0,00519	Гелий-4	0,00231
Пропан	0,00960	Аргон	0,00601

Таблица 2. Значения C_{sf} в уравнении (7), § 2.7.2, полученные при анализе данных различных исследователей по кипению с недогревом при вынужденной (и свободной) конвекции *

Поверхность нагрева	C_{sf}	Жидкость — поверхность
Вертикальная труба (внутренний диаметр 4,56 мм) [5]	0,006	Вода — никель
Горизонтальная труба (внутренний диаметр 14,9 мм) [6]	0,015	Вода — нержавеющая сталь
Вертикальная труба (внутренний диаметр 27,1 мм) [7]	0,013	Вода — медь
	0,013	Четыреххлористый углерод — медь
	0,0022	Изопропиловый спирт — медь
	0,0030	n-бутиловый спирт — медь
	0,00275	50% K_2CO_3 — медь
	0,0054	35% K_2CO_3 — медь
Горизонтальная труба (внутренний диаметр 2,39 мм) [1]	0,020	Вода — нержавеющая сталь

* Дополнительные рекомендации даны в табл. 1, § 2.7.2.

Одна из таких корреляций получена в [4] [см. § 2.7.2, уравнение (7)]. Значения C_{sf} , полученные специально из данных по вынужденной [1, 5, 6] (и свободной [7]) конвекции в трубах (предпочтительнее, чем из данных в большом объеме), приведены в табл. 2.

В [8] описаны эксперименты по кипению с недогревом при подъемном течении воды в вертикальных с электрическим нагревом трубах из нержавеющей стали или никеля, имеющих внутренние диаметры в диапазоне от 3,63 до 5,74 мм при давлении в системе в диапазоне от 0,7 до 17,2 МПа, температуре воды — от 115 до 340°C, массовой скорости — от 11 до 1,05·10⁴ кг/(м²·с), тепловой нагрузки — до 12,5 МВт/м². Эти данные описываются размерным уравнением, справедливым для воды:

$$\Delta T_{sat} = 25 \dot{q}^{0,25} e^{-p/62}, \quad (13)$$

где p — абсолютное давление, 10⁶ Па; $\Delta T_{sat} = T_w - T_{sat}$, °C; $\dot{q}$ — тепловая нагрузка, МВт/м². Позднее в [9] было отмечено, что значения ΔT_{sat} , найденные из (13), значительно ниже, чем получаемые в этих экспериментах. В результате было предложено подобное уравнение для воды

$$\Delta T_{sat} = 22,65 \dot{q}^{0,5} e^{-p/87}. \quad (14)$$

Значения ΔT_{sat} и α , вычисленные по этим уравнениям и с использованием зависимостей (11), (12) и табл. 3, § 2.7.2, отличаются не сильно. При отсутствии другой информации можно использовать методику, описанную в § 2.7.2, для определения кривых полностью развитого кипения с недогревом для других жидкостей.

Неразвитое кипение. В области неразвитого кипения процессы образования пузырей пара и однофазной конвекции происходят одновременно. В [10] предложена суперпозиция компонент теплоотдачи за счет однофазной вынужденной конвекции и кипения с недогревом

$$\dot{q} = \dot{q}_{i0} + \dot{q}_{scb}. \quad (15)$$

Тепловой поток при однофазной конвекции определяется из уравнения

$$\dot{q}_{i0} = \alpha_{i0} [T_w - T_l(z)], \quad (16)$$

тепловой поток при пузырьковом кипении $\dot{q}_{scb}$ — из уравнения (7), § 2.7.2. Другое предположение, сделанное в [11], рассмотрено детально в [12]. Простой метод описания перехода между областями однофазной конвекции и полностью развитого кипения предложен в [1]. Метод можно описать, используя рис. 6. Кривая для полностью развитого кипения с недогревом $FED'C''$ определяется по экспериментальным данным при высоких значениях $T_w - T_{sat}$ или с помощью эмпирических уравнений в форме (13). Кривая $ABCD'$ для вынужденной однофазной конвекции строится по уравнению (16).

Тепловой поток $\dot{q}_{onb}$ для начала образования пузырей (точка C на рис. 6) можно рассчитать с помощью указанных выше методов. Определение точки C позволяет найти точку C'' на кривой полностью развитого кипения при той же температуре поверхности, что и в точке C . Предложенная простая интерполяционная формула описывает характеристики кривой кипения между C и E

$$\dot{q} = \dot{q}_{i0} \left\{ 1 + \left[\frac{\dot{q}_{scb}}{\dot{q}_{i0}} \left(1 - \frac{\dot{q}_{sc}}{\dot{q}_{scb}} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (17)$$

Затем с помощью уравнения (17) подбирают значения $\dot{q}_{i0}$ и $\dot{q}_{scb}$ при различных T_w , чтобы заполнить участок CE . Этот метод рекомендуется для быстрого расчета кривой кипения с недогревом при вынужденной конвекции.

Объемное паросодержание и падение давления при кипении с недогревом. При кипении с недогревом в канале необходимо знать количество генерируемого пара, чтобы установить его влияние на градиент давления (см. разд. 2.3). Из рис. 8 для кипения с недогревом видно, что при высоких недогревах сразу же после начала образования пузырей генерируемый пар существует в виде растущих и схлопывающихся пузырей на поверхности; пар в этой области сосредоточен в основном у стенки.

При несколько меньших недогревах пузыри отрываются от поверхности, медленно конденсируются при движении через слабо недогретую жидкость; в этой области в объеме жидкости имеется пар.

На участке AB объемное паросодержание обычно невелико и им можно пренебречь. При необходимости рассчитать значение паросодержания в точке B можно использовать приближенное выражение [13]:

$$e_{gB} \approx \frac{\pi Y_B}{6 D_h}, \quad (18)$$

где D_h — обогреваемый эквивалентный диаметр канала; Y_B — расстояние от нагреваемой стенки до вершины парового пузыря:

$$Y_B = 0,015 \left(\frac{\sigma D_l}{\tau_w} \right)^{0,5}, \quad (19)$$

где τ_w — касательные напряжения на стенке; D_l — гидравлический эквивалентный диаметр.

Касательные напряжения на стенке определим из выражения

$$\tau_w = f_{l0} G^2 / (2\rho_l), \quad (20)$$

где f_{l0} — фактор трения Фанинга для однофазной жидкости, соответствующий относительной шероховатости $\epsilon/D_l = 10^{-4}$ (гладкие тянутые трубы).

В [14] предложен простой метод расчета начала парообразования, которое можно считать совпадающим с точкой B отрыва пузырей, показанной на рис. 8. При низких расходах предполагается, что отрыв пузырей контролиру-

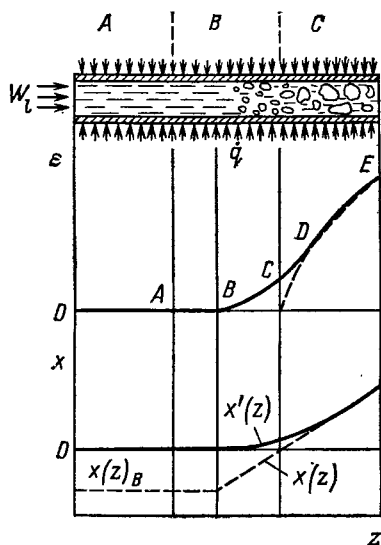


Рис. 8. Объемное паросодержание при кипении с недогревом. Конвекция в однофазной жидкости (область A), кипение с недогревом (область B) и кипение в объеме (область C)

ется термически и происходит при фиксированном числе Нуссельта $[\dot{q}D/\lambda_l(T_{\text{sat}} - T_l(z)_B)]$. При высоких расходах отрыв пузыри определяется гидродинамическими силами и происходит при фиксированном числе Стентона $\dot{q}/mc_{pl}(T_{\text{sat}} - T_l(z)_B)$. На рис. 9 представлены экспериментальные данные для трех жидкостей в виде зависимости числа Стентона от числа Пекле (mDc_{pl}/λ_l) . Можно выделить две области. При числах $Pe < 70\,000$ данные лежат на линии с наклоном -1 . При больших числах Pe значение числа $St = \text{const}$.

Если $Pe < 70\,000$, то $\Delta T_{\text{sub}}(z)_B = [T_{\text{sat}} - T_l(z)_B]$ в точке B определяется следующим образом:

$$\Delta T_{\text{sub}}(z)_B = 0,0022 \frac{\dot{q}D}{\lambda_l}, \quad (21)$$

а для $Pe > 70\,000$ в той же точке B

$$\Delta T_{\text{sub}}(z)_B = 153,8 \frac{\dot{q}}{mc_{pl}}. \quad (22)$$

Для области ВСД объемное паросодержание и падение давления можно определить, используя зависимости, приведенные в § 2.3.2, при условии, что можно найти действительное паросодержание. Подходящий эмпирический метод предложен в [13]. Предполагается, что действительное или истинное массовое паросодержание $x'(z)$ связано с термодинамическим массовым паросодержанием $x(z)$

соотношением

$$x'(z) = x(z) - x(z)_B \exp\left(\frac{x(z)}{x(z)_B} - 1\right), \quad (23)$$

где $x(z)_B$ — термодинамическое массовое паросодержание в точке отрыва пузырей:

$$x(z)_B = \frac{c_{pl}\Delta T_{\text{sub}}(z)_B}{\Delta h_v}. \quad (24)$$

Уравнение (23) является простой зависимостью, удовлетворяющей следующим граничным условиям: при $x(z) = x(z)_B$ $x'(z) = 0$; $(d/dz)(x'(z))$ в точке B должна быть равна нулю; $x'(z) \rightarrow x(z)$ для $x(z) \gg x(z)_B$.

Хотя существуют и другие методы, рекомендуется использовать метод, предложенный Леви, как наиболее простой для большого числа жидкостей.

С. Кипение насыщенной жидкости. Область пузырькового кипения насыщенной жидкости. Механизм переноса теплоты в области пузырькового кипения насыщенной жидкости в основном идентичен наблюдаемому в области кипения с недогревом. Тонкий слой жидкости вблизи поверхности нагрева перегрет в достаточной мере для парообразования. Коэффициент теплоотдачи и температура поверхности нагревателя изменяются плавно и непрерывно через термодинамическую границу ($x=0$), которая является началом кипения насыщенной жидкости. Методы и уравнения, используемые для обобщения экспериментальных данных в области недогрева, справедливы для этой зоны при условии, что $T_l(z) = T_{\text{sat}}$. Так же как механизм переноса теплоты в области кипения с недогревом не зависит от степени недогрева и в большой степени от массовой скорости, можно отметить, что процесс теплообмена в этой области не зависит от «массового паросодержания» $x(z)$ и массовой скорости $\dot{m}$. Это в действительности установлено в экспериментальных исследованиях полностью развитого пузырькового кипения. Так как в этой области температура в объеме не меняется, то коэффициент теплоотдачи также постоянен, поскольку ΔT_{sat} фиксирована для заданных тепловых потока и давления системы.

Подавление пузырькового кипения насыщенной жидкостью. Для поддержания пузырькового кипения на поверхности нагрева необходимо, чтобы температура стенки превышала критическую величину для определенного теплового потока. Если перегрев стенки меньше величины, определяемой уравнением (6) для заданной тепловой нагрузки, то образования пузырей не происходит; величина $\Delta T_{\text{sat}} = (T_w - T_{\text{sat}})$ рассчитывается из отношения $\dot{q}/\alpha_{tp}$, где α_{tp} является коэффициентом теплоотдачи в двухфазной среде в отсутствие образования пузырей,

$$\alpha_{\text{onb}} = \frac{8\alpha_{tp}^2 \sigma T_{\text{sat}}}{\lambda_l \Delta h_v \rho_g}. \quad (25)$$

Уравнение (25) определяет границу между пузырьковым кипением насыщенной жидкости и областью двухфазной вынужденной конвекции (см. рис. 4). Как и для случая пузырькового кипения с недогревом, эта зависимость имеет смысл только при наличии полного диапазона размеров «активных» впадин на поверхности нагрева. По аналогии с областью с недогревом имеется переходная зона, подобная неразвитому кипению, между областями полностью развитого пузырькового кипения насыщенной жидкости и двухфазной вынужденной конвекции. В этой переходной зоне существенны вынужденная конвекция и пузырьковое кипение.

Прямые наблюдения образования пузырей в кольцевом потоке описаны в [15], где исследовался кольцевой канал с текущей вверх пленкой на внутренней нагреваемой поверхности. На рис. 10 приведены полученные результаты, качественно подтверждающие ожидаемые тенденции.

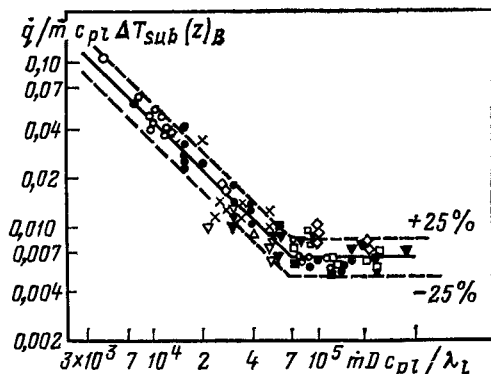


Рис. 9. Условия отрыва пузыря (точка B) [14]

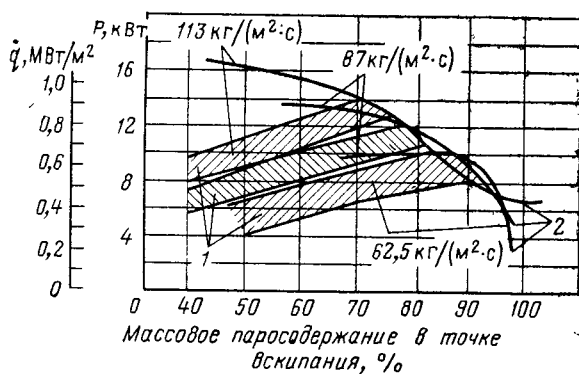


Рис. 10. Подавление кипения при кольцевом течении: 1 — зоны вскипания; 2 — истощение пленки

Однако значения $\dot{q}_{\text{онб}}$, определяемые по уравнению (25), намного ниже измеренных. Это обусловлено ограниченным диапазоном размеров активных впадин, имеющихся на поверхности из нержавеющей стали, используемой в качестве нагревателя. В этих условиях для определения $(T_w -$

$T_{\text{sat}})_{\text{онб}}$ следует использовать уравнение (10) вместе с рекомендациями, данными в § 2.7.2 относительно вычисления r_c . В условиях эксперимента, приведенных на рис. 10, максимальный размер активных впадин может составлять около 1 мкм.

Область вынужденной двухфазной конвекции. Область вынужденной двухфазной конвекции более всего ассоциируется с кольцевым режимом течения. Теплота передается теплопроводностью или конвекцией через жидкую пленку и пар генерируется непрерывно на границе раздела жидкая пленка — паровое ядро. В этой области возможны очень высокие коэффициенты теплоотдачи; значения могут быть настолько высокими, что становится затруднительным их точное определение. В случае воды получены коэффициенты теплоотдачи до 200 кВт/(м²·°C).

Следуя предположению Мартинелли, многие исследователи [16—22] обобщали экспериментальные результаты по теплоотдаче в области двухфазной вынужденной конвекции в форме

$$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_{l0}} \left(\text{или } \frac{\alpha_{tp}}{\alpha_l} \right) = f n \left(\frac{1}{X_{tt}} \right), \quad (26)$$

где α_{l0} (и α_l) — коэффициент теплоотдачи в однофазной жидкости, рассчитываемый для общего расхода (или рас-

Таблица 3. Корреляции для теплоотдачи в областях двухфазной вынужденной конвекции и пузырькового кипения

Двухфазная система (жидкость)	Уравнение для области двухфазной вынужденной конвекции	Критерий начала парообразования	Модификация для пузырькового кипения в жидкой пленке	Литература
Вертикальная нагреваемая паром труба (вода) 2,54 см × 6,1 м	$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_{l0}} = 3,5 \left(\frac{1}{X_{tt}} \right)^{0,5}$	$(\Delta T_{\text{sat}})_{\text{онб}} = 7,9 u_l^{0,5}$, u_l — локальная скорость жидкости, м/с, $u_l = \frac{\dot{m}(1-x)}{\rho_l(1-\varepsilon_g)}$	$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_{l0}} = F \cdot 3,5 \left(\frac{1}{X_{tt}} \right)^{0,5}$ $F = 0,67 \left\{ [\Delta T_{\text{sat}} - (\Delta T_{\text{sat}})_{\text{онб}}] \times \left(\frac{dp}{dT_{\text{sat}}} \frac{D}{\sigma} \right)_w \right\}^{0,1}$	[16]
Вертикальная труба (различные органические жидкости) 1,9 см × 1,83 м	$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_{l0}} = 3,4 \left(\frac{1}{X_{tt}} \right)^{0,45}$	$\frac{r^*}{\delta} > 0,049$, r^* — радиус равновесного пузыря, соответствующий перегреву стенки [см. (7), § 2.7.1]; δ — толщина ламинарной пленки $\delta = \frac{10\eta_l}{\rho_l} \left[\frac{4\rho_l}{(dp/dz)D} \right]^{0,5}$	$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_l} = E \cdot 3,4 \left(\frac{1}{X_{tt}} \right)^{0,45}$ $E = 0,187 \left(\frac{r^*}{\delta} \right)^{-5/9}$	[17]
Нагреваемые внутри вертикальные кольцевые каналы (вода)	$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_l} = 0,564 \times \left(\frac{1}{X_{tt}} \right)^{0,74} q^{0,11}$ $\dot{q}$, Вт/м²		Используется уравнение (7), § 2.7.2	[18]
Вертикальные трубы с электрическим нагревом (вода)	Авторы [19, 20] предложили следующее уравнение для обеих областей теплообмена: $\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_l} = \Upsilon \left[\frac{\dot{q}}{m\Delta h_v} + m \left(\frac{1}{X_{tt}} \right)^n \right]$, где $\Upsilon = 7,39 \cdot 10^3$; $m = 1,5 \cdot 10^{-4}$ и $n = 0,66$ Однако с данными [22] получается лучшее согласование, если использовать модифицированные значения [21] ($\Upsilon = 6,7 \cdot 10^3$; $m = 3,5 \cdot 10^{-4}$; $n = 0,66$)			[19, 20]

хода жидкого компонента); X_{tt} — параметр Мартинелли [$X_{tt} = (\Delta p_l / \Delta p_g)^{1/2}$] для турбулентно-турбулентного потока (см. § 2.3.2). Предложено большое число зависимостей в форме уравнения (26); в некоторых случаях они распространены на область пузырькового кипения насыщенной жидкости. В табл. 3 представлены некоторые из предложенных корреляций. Однако эти корреляции дают высокую среднюю погрешность ($\pm 30\%$).

Можно показать, что

$$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_l} = \frac{D}{4\delta} = \frac{1}{1 - \varepsilon_g} \quad (27)$$

где δ — толщина жидкой пленки на поверхности нагрева; $1 - \varepsilon_g$ — содержание жидкости. Мартинелли успешно обобщил данные по содержанию жидкости $1 - \varepsilon_g$, используя параметр X (см. § 2.3.2). Таким образом, можно ожидать, что подход, который привел к уравнению (26), может быть также успешным. Однако применение уравнения (27) вместе с данными по действительному или рассчитанному объемному паросодержанию приводит к значениям α_{tp} , превышающим на 50% экспериментально измеренные.

В [23] предложена корреляция, которая считается одной из лучших. Корреляция охватывает области пузырькового кипения насыщенной жидкости и двухфазной вынужденной конвекции. Предполагается, что оба механизма: парообразование и конвекция проявляются во всем диапазоне параметров и что их вклады суммируются:

$$\alpha_{tp} = \alpha_{nb} + \alpha_c \quad (28)$$

где α_{nb} — вклад от пузырькового кипения; α_c — от конвекции в жидкой пленке.

На протяжении многих лет подобный подход успешно использовался для расчета процессов в оборудовании [24]:

$$\alpha_c = 0,023 \left(\frac{\dot{m}(1-x)D}{\eta_l} \right)^{0,8} \left(\frac{\eta_c}{\eta_l} \right)^{0,4} \frac{\lambda_l}{D} F \quad (29a)$$

Коэффициент F является функцией параметра Мартинелли X_{tt} (рис. 11). Уравнение Форстера и Зубера [25] принято за основу для определения компонента, связанного с пузырьковым кипением α_{nb} . Их анализ [25] кипения в большом объеме (см. уравнение (8), § 2.7.2) модифицирован для учета тонкого пограничного слоя при кипении в условиях вынужденной конвекции и низкого эффективного перегрева, при котором растет паровой пузырь. Модифицированное уравнение Форстера — Зубера имеет вид

$$\alpha_{nb} = 0,00122 \left(\frac{\lambda_l^{0,79} c_{pl}^{0,45} \rho_l^{0,49}}{\sigma^{0,5} \eta_l^{0,29} \Delta h_v^{0,24} \rho_g^{0,24}} \right) \Delta T_{sat}^{0,24} \Delta p_{sat}^{0,75} S \quad (29b)$$

где S — коэффициент подавления, который равен отношению среднего перегрева, при котором растет пузырь, к перегреву стенки ΔT_{sat} и является функцией локального двухфазного числа Рейнольдса Re_{tp} ($= Re_l F^{1,25}$) (рис. 12).

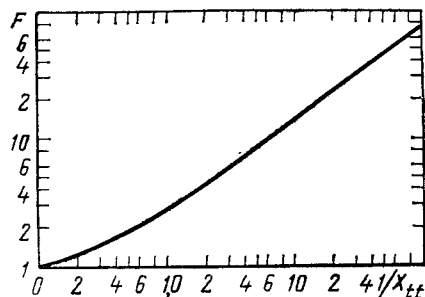


Рис. 11. Фактор кипения F при конвекции

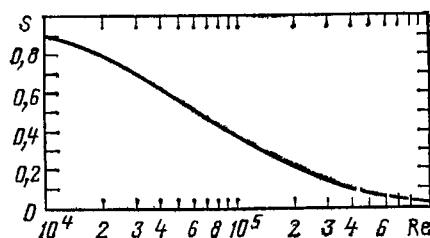


Рис. 12. Коэффициент подавления пузырькового кипения

Кривые, соответствующие функциям, показанным на рис. 11 и 12, описываются следующими уравнениями:

$$F = 1 \text{ для } \frac{1}{X_{tt}} \leq 0,1; \\ F = 2,35 \left(\frac{1}{X_{tt}} + 0,213 \right)^{0,736} \text{ для } \frac{1}{X_{tt}} > 0,1; \quad (30)$$

$$S = \frac{1}{1 + 2,53 \cdot 10^{-6} Re_{tp}^{1,17}} \quad (31)$$

Эти корреляции хорошо описывают имеющиеся экспериментальные данные (со стандартным отклонением 11% по коэффициенту теплоотдачи).

Расчет коэффициента теплоотдачи α_{tp} при известных тепловом потоке $\dot{q}$, массовой скорости и паросодержании проводится следующим образом.

1. Сначала рассчитывают $1/X_{tt}$ (см. § 2.3.2) или используют соотношения

$$X_{tt} \approx \left(\frac{1-x}{x} \right)^{0,9} \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0,5} \left(\frac{\eta_l}{\eta_g} \right)^{0,1}.$$

2. Затем определяют F из рис. 11.

3. Рассчитывают α_c из уравнения (29a).

4. Рассчитывают Re_{tp} по Re_l [$Re_l = \dot{m}(1-x)D/\eta_l$] и F ($Re_{tp} = Re_l F^{1,25}$).

5. Определяют S по рис. 12, используя найденную величину Re_{tp} .

6. Рассчитывают α_{nb} для диапазона значений ΔT_{sat} .

7. Рассчитывают α_{tp} по уравнению (28) для диапазона величин ΔT_{sat} .

8. Строят график $\dot{q} = f(\alpha_{tp} \Delta T_{sat})$ для ΔT_{sat} диапазона от α_{tp} и определяют интерполяцией α_{tp} при $\dot{q}$. Корреляция, предложенная в [23], является лучшей для области насыщенного кипения при вынужденной конвекции в вертикальных каналах и рекомендуется для всех однокомпонентных неметаллических жидкостей. Другая корреляция, верная также для кипения насыщенной жидкости при вынужденной конвекции в горизонтальных каналах, рассмотрена в § 2.7.4.

В [26] предложена простая зависимость для описания данных по конденсации пара в горизонтальной трубе при высоком давлении. Авторы исходили из аналогии между течением жидкой пленки и одной фазы в трубе и возможности оценки коэффициента теплоотдачи при испарении по формуле

$$\alpha_{tp} = \alpha_{l0} \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho}} \quad (32)$$

где α_{l0} — коэффициент теплоотдачи к жидкости при таком же общем расходе как для парожидкостной смеси в трубе; ρ — гомогенная средняя плотность парожидкостной смеси, причем

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l} \right). \quad (33)$$

Средний коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}_{tp}$ при полном испарении жидкости определяется (приближенно) выражением

$$\bar{\alpha}_{tp} = \frac{\alpha_{l0}}{2} \left[1 + \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/2} \right]. \quad (34)$$

Эти зависимости дают лишь очень приближенные значения коэффициента теплоотдачи и не применимы при $\rho_l/\rho_g > 50$.

Д. Критический тепловой поток. Критический тепловой поток CHF является наиболее важной характеристикой при рассмотрении работы теплообменного оборудования, в котором происходит кипение или испарение. Он характеризуется быстрым снижением локального коэффициента теплоотдачи, что происходит при замещении жидкости паром у поверхности нагрева. Для случая, когда тепловая нагрузка является независимой величиной, например в печи с лучистым нагревом или в топливном элементе ядерного реактора, это условие проявляется как быстрое увеличение температуры поверхности при достижении критического теплового потока.

Множество экспериментальных исследований условия критического теплового потока относится к испаряющейся воде. Результаты исследований других жидкостей описаны ниже.

Терминология. Существуют значительные расхождения в терминологии для кризиса. Наиболее известным названием является пережог, но это означает разрушение поверхности нагрева. Названия «переход от пузырькового кипения к пленочному», и «высыхание пленки» одинаково неудовлетворительны для общего описания явления, хотя они правильно отражают отдельные механизмы. Поэтому термин «кризис» выбран для обозначения состояния системы, в котором происходит характерное снижение коэффициента теплоотдачи, и термин «критический тепловой поток CHF » — для локального теплового потока, при котором это состояние впервые возникает. Главная трудность в использовании выбранной терминологии состоит в том, что она основывается на подходе к кризису при увеличении теплового потока, тогда как в действительности к кризису в данной системе можно приблизиться также путем изменения одного из независимых параметров: давления, температуры (или массового паросодержания) на входе, массовой скорости.

Значительные трудности существуют также в практических методах, используемых для определения и измерения характеристик кризиса. Таким образом, прежде чем сравнивать данные различных источников, необходимо убедиться в том, что определение и методы, применяемые в работах, те же самые или, по крайней мере, подобны им при получении одинаковых результатов.

Критический тепловой поток в однородно обогреваемых вертикальных трубах. Проведенное ниже рассмотрение ограничено случаем стабильного недогретого потока воды, испаряющейся в вертикальных однородно обогреваемых трубах. Обычно для однородно обогреваемых каналов возникновение кризиса CHF наблюдается сначала на выходе из них. При неоднородном по оси распределении теплового потока перегрев может произойти на выходе или выше по потоку.

Обычно отмечают пять основных переменных, которые влияют на критический тепловой поток: расход, температура на входе, давление системы, внутренний диаметр трубы и длина трубы

$$\dot{q}_{cr} = f_n(\dot{m}, \Delta T_{sub,i}, p, D, z). \quad (35)$$

Поскольку перегрев поверхности трубы в условиях кризиса почти всегда начинается на выходе из участка нагрева, то можно показать, что описание процесса и корреляция должны определяться условиями на выходе. По термодинамическому состоянию жидкость на выходе трубы может быть недогретой или насыщенной. Чтобы охарактеризовать условия на выходе, можно использовать эн-

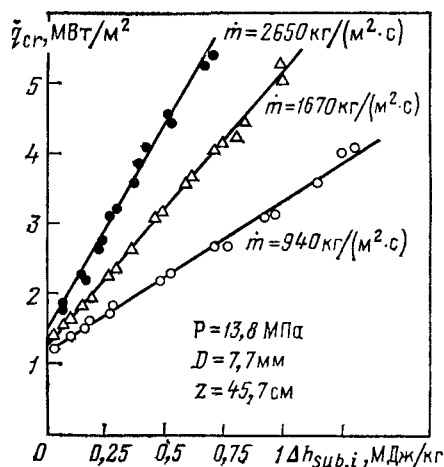


Рис. 13. Влияние недогрева на входе на критический тепловой поток

тальную жидкость $h(z)$ или термодинамическое массовое паросодержание. Каждая из этих зависимых переменных связана с недогревом на входе уравнением теплового баланса

$$h(z) = h_l + \frac{4\dot{q}z}{D\dot{m}} - \Delta h_{sub,i}; \quad (36)$$

$$x(z) = \frac{1}{\Delta h_w} \left(\frac{4\dot{q}z}{D\dot{m}} - \Delta T_{sub,i} c_{pl} \right). \quad (37)$$

Таким образом, уравнение (35) можно записать в другом виде

$$\dot{q}_{cr} = f_n(\dot{m}, h(z), p, D, z), \quad (38)$$

или

$$\dot{q}_{cr} = f_n(\dot{m}, x(z), p, D, z). \quad (39)$$

Следует кратко рассмотреть, как критический тепловой поток зависит от некоторых независимых переменных. Примеры таких зависимостей представлены на рис. 13—19. Из этих примеров можно сделать следующие заключения.

1. Когда рассматривается влияние отдельного параметра на критический тепловой поток, важно знать, какая

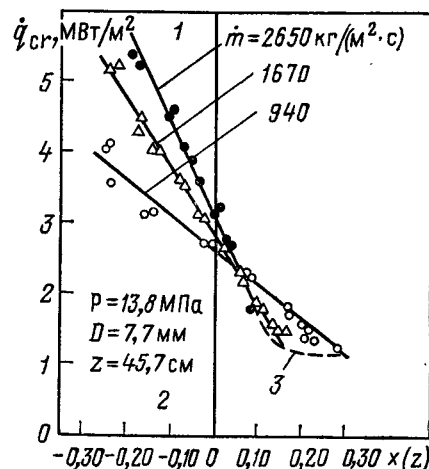


Рис. 14. Влияние паросодержания на выходе на критический тепловой поток:

1, 2 — недогрев; 3 — граница для насыщенной жидкости на входе

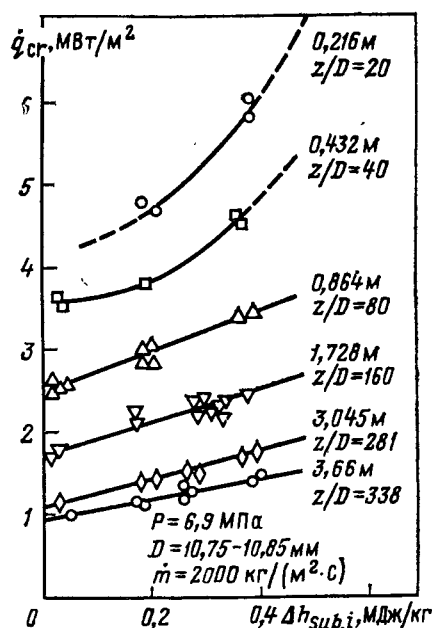


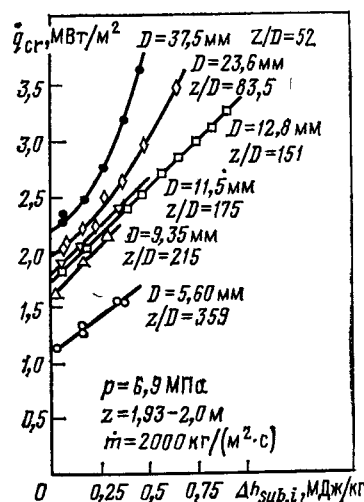
Рис. 15. Влияние длины трубы на критический тепловой поток при заданных условиях на входе

из других независимых (или зависимых) переменных остается постоянной.

2. При постоянных давлении, диаметре и длине трубы критический тепловой поток увеличивается линейно с недогревом на входе при фиксированной массовой скорости и растет с массовой скоростью при заданном недогреве на входе (рис. 13).

3. При постоянных давлении, диаметре и длине трубы критический тепловой поток уменьшается линейно с увеличением выходного массового паросодержания $x(z)$ при фиксированной массовой скорости (рис. 14). В области недогрева [отрицательные значения $x(z)$] критический тепловой поток растет с увеличением массовой скорости при

Рис. 17. Влияние диаметра трубы на критический тепловой поток при заданных условиях на входе



постоянных условиях на выходе. В области насыщенной жидкости [положительные значения $x(z)$] имеется точка пересечения, и при высоких значениях выходного паросодержания критический тепловой поток уменьшается с ростом массовой скорости.

4. При фиксированных давлении, диаметре трубы и массовой скорости критический тепловой поток понижается с увеличением длины трубы для постоянного недогрева на входе (рис. 15). Линейная зависимость критического теплового потока от недогрева на входе нарушается при низких значениях z/D .

5. При заданных давлении, диаметре трубы и массовой скорости влияние длины трубы на критический тепловой поток при постоянном паросодержании на выходе незначительно (рис. 16).

6. Для фиксированных давления, длины трубы и массовой скорости с увеличением диаметра трубы критический тепловой поток растет при заданном недогреве на входе (рис. 17).

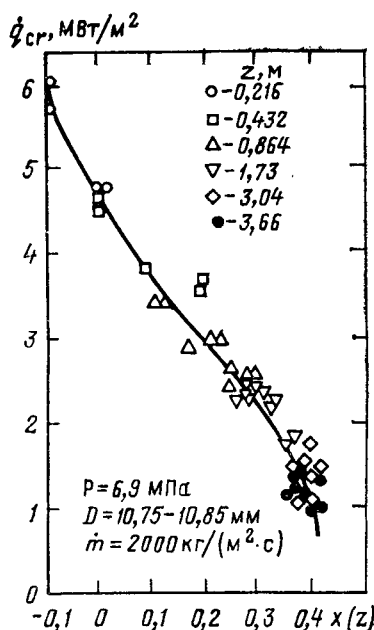


Рис. 16. Влияние длины трубы на критический тепловой поток при заданных условиях на выходе

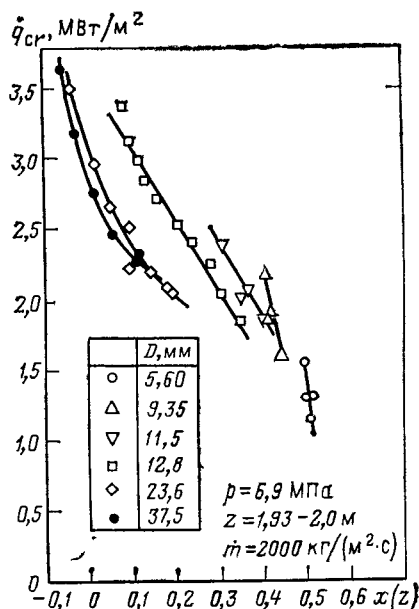


Рис. 18. Влияние диаметра трубы на критический тепловой поток при заданных условиях на выходе

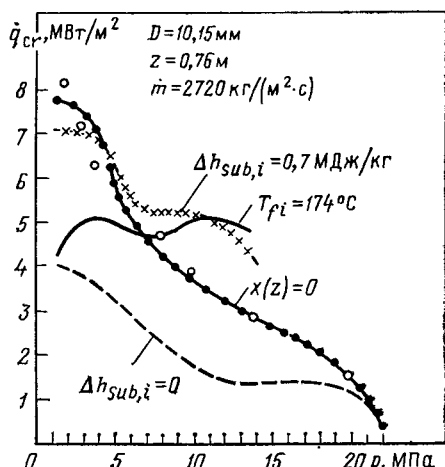


Рис. 19. Влияние давления системы на критический тепловой поток. Светлые кружки — результаты, полученные Г. В. Алексеевым для $D=8$ мм

7. При фиксированных давлении, длине трубы и массовой скорости критический тепловой поток понижается с увеличением диаметра трубы для постоянного паросодержания на выходе (рис. 18).

8. При постоянных диаметре и длине трубы и массовой скорости критический тепловой поток быстро уменьшается с увеличением давления в случае фиксированного выходного массового паросодержания $x(z)=0$ (рис. 19). При массовых скоростях ниже $2700 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ значение критического теплового потока для $x(z)=0$ растет при давлениях, меньших 10 МПа, и уменьшается при больших давлениях. Для больших массовых скоростей верно обратное. При постоянном недовгре на входе критический тепловой поток проходит через максимум для низких давлений и затем падает с ростом давления. В диапазоне давлений 10–20 МПа может существовать второй максимум, который возникает вследствие увеличения недовгрева и массовой скорости и снижения отношения z/D . При постоянной температуре воды на входе T_{fi} недовгрев на входе растет с увеличением давления и влияние давления в системе на критический тепловой поток ослабляется во всем диапазоне значений давления.

Критический тепловой поток не зависит от длины трубы для данного выходного паросодержания. Это обстоятельство можно использовать для упрощения уравнения (39), которое принимает вид

$$\dot{q}_{cr} = f_n(x(z), \dot{m}, p, D). \quad (40)$$

Отсюда следует, что верны следующие уравнения:

$$\dot{q}_{cr} = f_n(z_{sat}, \dot{m}, p, D); \quad (41)$$

$$x_{cr} = f_n(z_{sat}, \dot{m}, p, D), \quad (42)$$

где z_{sat} — длина трубы, на которой массовое паросодержание увеличивается от нуля до массового паросодержания в условиях критического теплового потока x_{cr} . Из рис. 16 следует, что $\dot{q}_{cr}$ зависит от локального паросодержания, тогда как согласно уравнению (42) массовое содержание x_{cr} жидкости, которая может испариться в канале, прежде чем возникнут условия кризиса, зависит от длины z_{sat} , на которой происходит испарение. Ни одна из этих двух точек зрения на кризис не является полностью верной и, как оказывается, не может быть использована как основа для предсказания более сложных случаев. На рис. 20 представлены данные рис. 16, изображенные в форме (42).

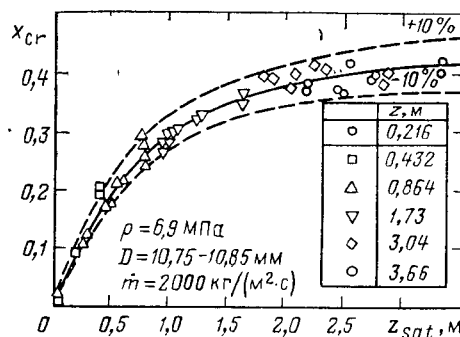


Рис. 20. Зависимость граничного паросодержания от длины участка кипения

Экспериментальные результаты. Эксперименты по определению критического теплового потока для воды в вертикальных однородно обогреваемых круглых трубах проведены в течение последних 20 или более лет во многих странах. Перечень этих данных приведен в [27]. Представлены 4389 экспериментальных точек, охватывающих широкий диапазон независимых переменных. В этом обширном перечне нет экспериментальных данных, полученных в Советском Союзе. Однако между данными советских исследований и результатами, указанными в перечне, имеется, вообще говоря, хорошее согласование. Кроме того, Академия наук СССР [28] выпустила стандартные таблицы зависимости критического теплового потока от локального паросодержания для различных давлений и массовых скоростей при диаметре трубы 8 мм. Эти данные приведены в табл. 4 и верны для $z/D \geq 20$. Для труб другого диаметра критический тепловой поток определяется приближенной зависимостью

$$\dot{q}_{cr} = \dot{q}_{cr, 8 \text{ мм}} \left(\frac{8}{D} \right)^{0,5} \quad \text{для } 4 \leq D \leq 16. \quad (43)$$

Пределы изменения критического теплового потока. Кризис не возникает, если температура поверхности нагрева ниже температуры насыщения. Таким образом, минимально возможный критический тепловой поток

$$(\dot{q}_{cr})_{\min} = \frac{\Delta T_{sub, i}}{4z/mc_{pl}D + 1/\alpha_{fo}}. \quad (44)$$

Кризис должен возникнуть в случае, когда (или перед тем как) вся жидкость, поступившая в канал, испарится [$x(z)=1$]. Следовательно, максимально возможный критический тепловой поток

$$(\dot{q}_{cr})_{\max} = \frac{\dot{m}D\Delta h_v}{4z} \left(1 + \frac{c_{pl}\Delta T_{sub, i}}{\Delta h_v} \right). \quad (45)$$

Эмпирические корреляции экспериментальных данных для воды. Практическое значение явления кризиса привело к разработке множества корреляций. Одна из них — хорошо известная эмпирическая зависимость Томсона и Макбета [27], основанная на гипотезе локальных условий, согласно которой критический тепловой поток зависит только от локального массового паросодержания в точке перегрева [как предполагается уравнением (40)]. Позже в [29] была предложена корреляция, сохраняющая основные положения и точность зависимости Томсона — Макбета, но более удобная. Допущение, что $\dot{q}_{cr}$ линейно зависит от локального паросодержания $x(z)$, приводит к уравнению

$$\dot{q}_{cr} = (A + B\Delta h_{sub, i})/(C + z), \quad (46)$$

где $\dot{q}_{cr}$ — критическая тепловая нагрузка; $\Delta h_{sub, i}$ характеризует недовгрев на входе; z — длина трубы;

Таблица 4. Стандартные данные для критического теплового потока при подъемном течении воды в трубе с внутренним диаметром 8 мм с однородным тепловым потоком, МВт/м² [28]

Массовая скорость, кг/(м ² ·с)	Локальные параметры смеси																			
	Недогрев, °С					Паросодержание														
	75	50	25	10	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75
2,95 МПа																				
750	—	—	—	—	—	7,95	7,50	7,10	6,75	6,45	6,15	5,80	5,50	5,25	5,00	4,80	4,20	3,75	3,20	—
1000	—	—	8,80	8,40	8,20	7,70	7,25	6,75	6,35	5,95	5,60	5,25	4,95	4,65	4,30	4,00	3,70	3,35	—	—
1500	—	9,50	8,75	8,20	8,00	7,25	6,55	6,00	5,40	4,90	4,60	4,15	3,80	3,40	3,00	2,60	—	—	—	—
2000	10,53	9,65	8,60	8,00	7,75	6,70	5,90	5,55	4,75	4,25	3,80	3,35	2,90	2,50	—	—	—	—	—	—
2500	10,80	9,90	8,65	7,90	7,60	6,35	5,50	4,80	4,25	3,70	3,25	2,80	2,35	—	—	—	—	—	—	—
3000	11,25	10,05	8,65	7,85	7,40	6,05	5,20	4,55	3,95	3,25	3,05	2,65	—	—	—	—	—	—	—	—
4000	12,10	10,35	8,75	7,75	7,20	5,75	4,80	4,05	3,50	3,05	2,65	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5000	12,60	10,65	8,85	7,70	7,05	5,25	4,30	3,80	3,30	2,90	2,50	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4,9 МПа																				
750	—	—	—	—	7,40	6,75	6,25	5,80	5,40	5,10	4,85	4,60	4,35	4,15	3,95	3,75	3,55	3,40	3,20	3,00
1000	—	8,55	8,00	7,60	7,40	6,50	5,95	5,55	5,20	4,90	4,60	4,30	4,05	3,85	3,60	3,40	3,20	2,95	—	—
1500	9,40	8,75	8,10	7,60	7,25	6,25	5,50	5,00	4,60	4,30	4,05	4,80	3,55	3,30	3,05	2,85	—	—	—	—
2000	9,75	9,00	8,15	7,60	7,10	5,90	5,10	4,50	4,05	3,70	3,40	3,15	2,90	2,65	—	—	—	—	—	—
2500	10,05	9,20	8,20	7,45	7,00	5,70	4,75	4,15	3,70	3,35	3,05	2,75	2,35	—	—	—	—	—	—	—
3000	10,40	9,40	8,25	7,35	6,90	5,55	4,60	3,95	3,50	3,10	2,75	2,45	—	—	—	—	—	—	—	—
4000	11,20	9,75	8,30	7,20	6,60	5,30	4,30	3,65	3,15	2,60	2,10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5000	11,65	10,15	8,40	7,10	6,35	5,05	4,05	3,35	2,85	2,30	1,75	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6,9 МПа																				
750	—	7,40	6,85	6,45	6,20	5,45	4,90	4,50	4,20	3,95	3,75	3,55	3,35	3,20	3,00	2,85	2,65	2,45	2,25	—
1000	8,15	7,60	6,85	6,45	6,15	5,30	4,70	4,30	4,00	3,75	3,50	3,30	3,05	2,80	2,60	2,35	2,10	—	—	—
1500	8,50	7,80	6,95	6,45	5,95	5,10	4,35	3,95	3,60	3,25	2,95	2,75	2,55	2,35	—	—	—	—	—	—
2000	8,85	8,00	7,00	6,40	5,90	4,80	4,05	3,55	3,20	2,85	2,55	2,30	2,05	—	—	—	—	—	—	—
2500	9,20	8,25	7,00	6,35	5,70	4,50	3,75	3,25	2,90	2,55	2,25	1,95	—	—	—	—	—	—	—	—
3000	9,75	8,45	7,15	6,25	5,55	4,30	3,60	3,10	2,65	2,25	1,90	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4000	10,20	8,90	7,25	6,10	5,35	4,10	3,30	2,75	2,25	1,90	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5000	11,40	9,60	7,40	6,30	5,65	4,25	3,10	2,45	1,95	1,50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9,8 МПа																				
500	—	—	4,95	4,65	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
750	6,30	5,80	5,20	4,90	4,55	3,90	3,55	3,30	3,05	2,80	2,60	2,40	2,25	2,10	1,95	1,75	1,55	—	—	—
1000	6,55	5,95	5,05	4,80	4,55	3,90	3,45	3,10	3,10	2,85	2,40	2,20	2,00	1,75	1,60	—	—	—	—	—
1500	7,05	6,25	5,25	4,80	4,50	3,85	3,30	2,90	2,60	2,30	2,05	1,80	1,55	—	—	—	—	—	—	—
2000	7,65	6,50	5,40	4,85	4,45	3,60	3,25	2,95	2,50	2,20	1,90	1,65	—	—	—	—	—	—	—	—
2500	8,25	7,00	5,65	5,00	4,30	3,40	2,80	2,40	2,05	1,70	1,40	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3000	8,75	7,50	6,00	5,15	4,30	3,35	2,60	2,10	1,75	1,45	1,20	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4000	10,00	8,25	6,40	5,25	4,50	3,25	2,40	1,95	1,55	1,25	0,95	0,75	0,55	0,45	0,35	—	—	—	—	—
5000	11,40	9,40	6,90	5,80	4,65	3,30	2,25	1,70	1,35	1,10	0,90	0,75	0,60	0,50	0,40	—	—	—	—	—
11,8 МПа																				
500	4,90	4,40	3,90	3,70	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
750	5,20	4,60	4,00	3,70	3,40	2,95	2,60	2,40	2,25	2,05	1,90	1,75	1,60	1,45	1,30	1,20	—	—	—	—
1000	5,55	4,80	4,20	3,75	3,45	2,95	2,65	2,40	2,20	1,95	1,60	1,45	1,30	—	—	—	—	—	—	—
1500	6,15	5,40	4,45	3,90	3,45	2,90	2,50	2,20	1,90	1,65	1,45	1,25	—	—	—	—	—	—	—	—
2000	7,20	6,15	4,85	4,10	3,55	2,90	2,40	2,05	1,75	1,45	1,15	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2500	7,80	6,60	5,20	4,20	3,60	2,90	2,35	1,90	1,50	1,25	1,05	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3000	8,75	7,15	5,55	4,45	3,70	2,95	2,15	1,70	1,30	1,00	0,80	0,65	0,55	—	—	—	—	—	—	—
4000	9,60	7,85	6,20	5,00	3,90	3,00	2,15	1,70	1,30	1,00	0,80	0,65	0,55	0,45	0,40	—	—	—	—	—
5000	11,10	8,80	6,75	5,55	4,45	3,05	2,15	1,70	1,35	1,10	0,90	0,75	0,60	0,50	0,45	—	—	—	—	—
13,7 МПа																				
500	3,90	3,45	3,00	2,70	2,55	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
750	4,10	3,65	3,15	2,80	2,50	2,25	2,05	1,85	1,70	1,55	1,40	1,30	1,20	1,10	—	—	—	—	—	—
1000	4,50	3,95	3,40	3,05	2,80	2,25	2,00	1,80	1,60	1,40	1,30	1,15	—	—	—	—	—	—	—	—
1500	5,30	4,50	3,80	3,25	2,95	2,30	1,95	1,70	1,45	1,20	0,90	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2000	6,15	5,15	4,15	3,50	3,10	2,40	1,95	1,60	1,30	1,00	0,80	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2500	6,75	5,70	4,50	3,75	3,25	2,50	1,95	1,45	1,10	0,90	0,75	0,60	0,50	0,40	0,30	—	—	—	—	—
3000	7,55	6,30	4,90	4,00	3,40	2,55	1,90	1,45	1,15	0,90	0,80	0,60	0,55	0,40	0,35	—	—	—	—	—
4000	9,25	7,40	5,70	4,65	3,80	2,75	2,05	1,55	1,30	1,05	0,90	0,75	0,65	0,55	0,45	—	—	—	—	—
5000	10,60	8,45	6,40	5,30	4,30	3,05	2,20	1,80	1,50	1,25	1,05	0,90	0,75	0,60	0,50	—	—	—	—	—

Продолжение табл. 4

Массовая скорость, кг/(м ² ·с)	Локальные параметры смеси																			
	Недогрев, °С					Паросодержание														
	75	50	25	10	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75
15,7 МПа																				
500	2,95	2,55	2,20	1,85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
750	3,30	2,90	2,45	2,15	2,00	1,75	1,50	1,35	1,20	1,05	0,95	0,85	—	—	—	—	—	—	—	—
1000	3,75	3,25	2,70	2,35	2,10	1,80	1,55	1,35	1,20	1,05	0,90	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1500	4,55	3,80	3,25	2,75	2,30	1,95	1,60	1,35	1,15	0,95	0,80	0,60	—	—	—	—	—	—	—	—
2000	5,40	4,50	3,65	3,00	2,45	2,10	1,75	1,45	1,25	1,05	0,85	0,60	0,45	0,35	0,30	—	—	—	—	—
2500	6,10	5,05	4,05	3,35	2,65	2,20	1,80	1,55	1,25	1,00	0,80	0,65	0,50	0,45	0,40	—	—	—	—	—
3000	6,80	5,65	4,45	3,60	2,85	2,25	1,85	1,55	1,30	1,05	0,85	0,65	0,55	0,45	0,40	—	—	—	—	—
4000	8,30	6,70	5,25	4,25	3,15	2,60	2,10	1,75	1,45	1,20	1,00	0,85	0,70	0,55	0,45	—	—	—	—	—
5000	9,80	7,85	5,90	4,70	3,75	3,00	2,40	2,00	1,65	1,40	1,20	1,00	0,80	0,65	0,55	—	—	—	—	—
17,6 МПа																				
500	2,20	1,90	1,65	1,50	1,40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
750	2,95	2,50	2,10	1,75	1,50	1,30	1,10	0,95	0,80	0,70	0,60	0,50	—	—	—	—	—	—	—	—
1000	3,45	2,85	2,25	1,90	1,60	1,35	1,15	1,00	0,85	0,75	0,65	0,50	0,40	0,30	0,20	—	—	—	—	—
1500	3,70	3,20	2,55	2,25	1,80	1,55	1,30	1,10	0,90	0,80	0,65	0,55	0,45	0,35	0,30	—	—	—	—	—
2000	4,60	3,75	3,00	2,50	2,10	1,75	1,45	1,25	1,10	0,95	0,75	0,60	0,45	0,35	0,30	—	—	—	—	—
2500	5,05	4,35	3,30	2,80	2,15	1,90	1,65	1,45	1,20	1,00	0,80	0,65	0,55	0,45	0,35	—	—	—	—	—
3000	5,70	4,70	3,55	3,00	2,35	2,05	1,80	1,55	1,35	1,15	0,95	0,80	0,65	0,50	0,40	—	—	—	—	—
4000	7,25	5,75	4,40	3,55	2,85	2,45	2,05	1,80	1,55	1,35	1,15	1,00	0,80	0,65	0,50	—	—	—	—	—
5000	8,70	6,85	4,95	3,85	3,05	2,75	2,40	2,05	1,70	1,45	1,20	1,00	0,85	0,70	0,60	—	—	—	—	—
19,6 МПа																				
500	1,70	1,55	1,45	1,35	1,30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
750	2,05	1,80	1,60	1,40	1,35	1,00	0,80	0,70	0,65	0,50	0,45	0,45	—	—	—	—	—	—	—	—
1000	2,30	2,05	1,75	1,55	1,35	1,10	0,95	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	—	—	—	—	—	—	—
1500	2,95	2,55	2,00	1,80	1,50	1,30	1,15	1,00	0,85	0,70	0,55	0,45	0,40	0,35	0,25	—	—	—	—	—
2000	3,55	2,85	2,40	2,00	1,65	1,45	1,30	1,15	1,00	0,85	0,70	0,55	0,45	0,35	0,30	—	—	—	—	—
2500	4,05	3,45	2,65	2,20	1,75	1,60	1,45	1,25	1,10	0,95	0,80	0,65	0,55	0,45	0,35	—	—	—	—	—
3000	4,95	3,75	3,00	2,35	1,90	1,75	1,55	1,35	1,20	1,05	0,90	0,75	0,65	0,50	0,40	—	—	—	—	—
4000	6,25	4,85	3,55	2,65	2,00	1,85	1,70	1,55	1,40	1,25	1,10	0,90	0,75	0,60	0,50	—	—	—	—	—
5000	7,55	5,80	4,05	3,00	2,30	2,30	2,10	1,90	1,70	1,45	1,25	1,05	0,90	0,75	0,60	—	—	—	—	—

$$\left. \begin{aligned} A &= 2,317 \frac{(0,25\Delta h_v \dot{m}) F_1}{1,0 + 0,0043 F_2 D^{1/2} \dot{m}}; \\ B &= 0,25 \dot{m}; \\ C &= \frac{0,077 F_3 \dot{m}}{1,0 + 0,347 F_4 (\dot{m}/1356)^n} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Здесь D — внутренний диаметр трубы, м; $\dot{m}$ — массовая скорость, кг/(м²·с); Δh_v — скрытая теплота парообразования, Дж/кг; показатель степени $n = 2,0 - 0,00725 p$, (48)

p — давление в системе; F_1, F_2, F_3, F_4 — функции давления системы, значения которых приведены в табл. 5. Корреляция получена по данным, охватывающим следующие диапазоны параметров:

давление p 0,2—19 МПа,
диаметр трубы D 0,002—0,045 м,
длина трубы z 0,15—3,7 м,
массовая скорость 136—18 600 кг/(м²·с).

Среднеквадратичная погрешность корреляции составляет 7%, доверительный интервал с вероятностью 95% равен $\pm 14\%$.

Критический тепловой поток для воды в вертикальных круглых каналах с неоднородным нагревом. Предложены различные методы для описания случая неоднородного теплового потока.

1. *Гипотеза локальных условий.* Если предполагается, что существует единственная зависимость критического теплового потока от локального массового паросодержания, например, в форме уравнения (40), то случай с неоднородно нагреваемой трубой можно рассмотреть непосредственно. Расстояние вдоль трубы обозначено z , профиль теплового потока $f(z)$, локальный тепловой поток $\dot{q}(z)$, максимальный тепловой поток $\dot{q}_{\max}$

$$\dot{q}(z) = f(z) \dot{q}_{\max} \quad (49)$$

Если $(\dot{q}_{\max})_{cr, z}$ — максимальный тепловой поток, когда критический тепловой поток превышен в z , то можно показать, что

$$(\dot{q}_{\max})_{cr, z} = \frac{A + B \Delta h_{sub, l}}{C f(z) + \int_0^z f(z) dz} \quad (50)$$

Таблица 5. Корреляция Боурина [29] для критического теплового потока (только для воды)

Давление p , бар	F_1	F_2	F_3	F_4
1	0,478	1,782	0,400	0,0004
5	0,478	1,019	0,400	0,0053
10	0,478	0,662	0,400	0,0166
15	0,478	0,514	0,400	0,0324
20	0,478	0,441	0,400	0,0521
25	0,480	0,403	0,401	0,0753
30	0,488	0,390	0,405	0,1029
35	0,519	0,406	0,422	0,1380
40	0,590	0,462	0,462	0,1885
45	0,707	0,564	0,538	0,2663
50	0,848	0,698	0,647	0,3812
60	1,043	0,934	0,890	0,7084
68,9	1,000	1,000	1,000	1,000
70	0,984	0,995	1,003	1,030
80	0,853	0,948	1,033	1,322
90	0,743	0,903	1,060	1,647
100	0,651	0,859	1,085	2,005
110	0,572	0,816	1,108	2,396
120	0,504	0,775	1,129	2,819
130	0,446	0,736	1,149	3,274
140	0,395	0,698	1,168	3,760
150	0,350	0,662	1,186	4,277
160	0,311	0,628	1,203	4,825
170	0,277	0,595	1,219	5,404
180	0,247	0,564	1,234	6,013
190	0,220	0,534	1,249	6,651
200	0,197	0,506	1,263	7,320

Минимальное значение $(\dot{q}_{\max})_{cr, z}$, соответствующее первому появлению кризиса, наблюдается когда

$$\frac{d}{dz} (Cf(z) + \int_0^z f(z) dz) = 0. \quad (51)$$

С использованием значений A, B, C , полученных из данных по критическому тепловому потоку для однородно нагреваемых труб, автор [30] сравнил значения, полученные из (50), с экспериментальными данными [31, 32]. Расчетные значения $(\dot{q}_{\max})_{cr}$ оказались значительно выше экспериментальных. Однако метод удовлетворителен для определения участка трубы, на котором возникает кризис. Это сравнение показало таким образом, что гипотеза локальных условий в общем не верна.

2. Гипотеза «полной мощности». Согласно этой гипотезе предполагается, что общая мощность, которую можно подвести к трубе с неоднородным нагревом перед возникновением кризиса, будет такой же, как в однородно нагреваемой трубе с одинаковыми размерами и условиями на входе.

По этому методу не удается определить местоположение кризиса. Установлено, что метод предсказывает критическую мощность для большого числа труб с синусоидальным распределением достаточно хорошо. В [30] проведено сравнение с данными [32] и показано, что гипотеза в общем не верна для различных профилей теплового потока.

3. Подход, основанный на зависимости паросодержания — длина закипания (x_{cr} от z_{sat}).

Усовершенствованием гипотезы полной мощности является форма корреляции, основанная на зависимости критическое паросодержание — длина участка кипения и предполагаемая уравнением (42) (см. рис. 16). Данные

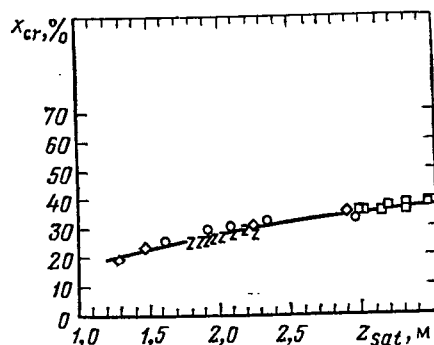


Рис. 21. Зависимость граничного паросодержания x_{cr} при неоднородном тепловом потоке от длины участка кипения z_{sat} [101]

Обозначение	$q_{\max}/q_{\min}$	Профиль $q(z)$
○	1	Однородный
□	1,91	Уменьшение по экспоненте
◇	2,99	То же
z	4,7	Симметричный по косинусу

по критическому тепловому потоку при неоднородном нагреве располагаются на той же линии, как для условий однородного нагрева, если представлены в тех же координатах. Пример приведен на рис. 21. Хотя метод отношений x_{cr}/z_{sat} является совершенным, его нельзя считать полностью верным, так как в некоторых случаях возможно существование необогреваемого (холодного) участка в однородно нагреваемой трубе, что снижает значение z_{sat} , но повышает критическое паросодержание x_{cr} .

4. Метод F -коэффициента. В [33–35] разработан эмпирический метод, который учитывает влияние распределения тепловой нагрузки, нарастающей вверх по течению, на локальный критический тепловой поток. Коэффициент F определяется следующим образом:

$$F = (\dot{q}_{cr}(z))_u / (\dot{q}_{cr}(z))_{nu}, \quad (52)$$

где $(\dot{q}_{cr}(z))_u$ — критический тепловой поток при данной локальной энтальпии для случая однородного нагрева; $(\dot{q}_{cr}(z))_{nu}$ — соответствующее значение теплового потока для неоднородного нагрева. Форма корректирующего коэффициента F получена из баланса энергии

$$F = \frac{\Omega}{1 - \exp(-\Omega z_{cr})} \int_0^{z_{cr}} \frac{\dot{q}(z)}{\dot{q}(z_{cr})} \exp[-\Omega(z_{cr} - z)] dz; \quad (53)$$

$$(\dot{q}_{cr}(z))_{nu} = \frac{A + B\Delta h_{sub, i}}{(F/C) + \int_0^{z_{cr}} (\dot{q}(z)/\dot{q}(z_{cr})) dz} \quad (54)$$

Отношение $\dot{q}(z)/\dot{q}(z_{cr})$ в уравнениях (53) и (54) можно заменить отношением $f(z)/f(z_{cr})$, таким образом, оба интеграла зависят только от профиля потока и их можно найти непосредственно в виде функции z_{cr} . Коэффициент Ω определен путем коррекции метода по экспериментальным данным. Значения Ω даны в [33, 36], дополнительные подробности метода приведены в [12].

Итак, в настоящее время отсутствует полный общий аналитический метод для описания критического теплового потока в трубах с неоднородным по оси профилем теплового

потока. Исследования в случае распределений потока, отличных от синусоидального, подтвердили, что критическая мощность, которую можно приложить к трубе, редко больше, чем при однородном профиле теплового потока, и может быть ниже до 30%, если максимальный тепловой поток создается вблизи выхода трубы. Исключением является случай с линейным или гиперболическим уменьшением теплового потока, при котором наблюдается повышение критической мощности (до 10%) по сравнению с однородным профилем теплового потока. Если для расчетных задач необходим простой метод, то рекомендуется использовать метод, основанный на зависимости критическое паросодержание — длина кипения.

Критический тепловой поток в каналах сложной формы. Проведено значительное число работ по определению критического теплового потока в каналах различных некруглых сечений. Многие из них моделируют каналы различных типов ядерных реакторов, охлаждаемых водой. Ниже вкратце рассмотрены три наиболее распространенные геометрии: прямоугольные и кольцевые каналы и многостержневые сборки.

1. **Прямоугольные каналы.** Во многих исследованиях нагревались только две длинные стороны прямоугольника. Критический тепловой поток зависит от отдельных независимых переменных таким же образом, как для круглых труб. В [37] обобщено большое число данных по критическому тепловому потоку для прямоугольных каналов; эти корреляции приведены в [12]. В [37] показано, что подстановка нагреваемого эквивалентного диаметра в корреляции для критического теплового потока в круглой трубе не дает точного описания в случае прямоугольного канала. Для случая, когда нагрев происходит по всему периметру прямоугольного канала, перегрев возникает в углу вблизи выхода канала при значительном снижении среднего теплового потока.

2. **Кольцевые каналы.** Для критического теплового потока в вертикальных кольцевых каналах с однородным нагревом внутренней поверхности существует несколько обширных перечней данных [38—40]. Критические тепловые потоки в кольцевых каналах, нагреваемых изнутри, можно описать уравнением

$$\dot{q}_{cr} = f(\dot{m}, x(z), p, D_i, D_o). \quad (55)$$

В [40] обобщено большое число данных по критическому тепловому потоку для пароводяного потока в кольцевых каналах с нагреваемой внутренней поверхностью на основе уравнения типа (46). При давлении 6,9 МПа

$$\left. \begin{aligned} A &= 67,4 D_h^{0,68} (\dot{m} \cdot 10^{-6})^{0,192} \{1 - 0,744 \exp \times \\ &\times [-6,512 D_e (\dot{m} \cdot 10^{-6})]\}; \\ B &= 0,2587 D_h^{1,261} (\dot{m} \cdot 10^{-6})^{0,817}; \\ C &= 185 D_e^{1,415} (\dot{m} \cdot 10^{-6})^{0,212}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Здесь D_e — гидравлический эквивалентный диаметр, $D_e = D_o - D_i$; D_h — нагреваемый эквивалентный диаметр, $D_h = (D_o^2 - D_i^2)/D_i$.

Корреляция, полученная в британских единицах, охватывает следующие диапазоны параметров:

$$\begin{aligned} D_i &= 0,952 \div 9,65 \text{ см}; \\ D_o &= 1,4 \div 10,16 \text{ см}; \\ z &= 0,61 \div 2,74 \text{ м}; \\ \dot{m} &= 190 \div 8430 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}; \\ \Delta h_{sub, i} &= 0 \div 0,958 \text{ МДж/кг}. \end{aligned}$$

Среднеквадратичное отклонение этой корреляции составляет 5,9%. Для давлений, отличных от 6,9 МПа, уравнение (46) можно использовать с небольшой модификацией, в которой A следует заменить на $A (\Delta h_v/649)$, где A , B и C

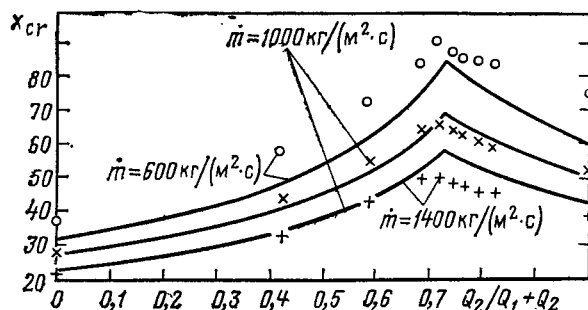


Рис. 22. Изменение граничного паросодержания от распределения мощности тепловыделения в кольцевых каналах (Q_2 — мощность тепловыделения в наружной трубе). Сплошные кривые — результат расчета при $\beta_1 = 0,007$ м/с, $\beta_2 = 0,009$ м/с; точки — результат эксперимента [59]

имеют значения, указанные выше, и Δh_v — скрытая теплота испарения при рассматриваемом давлении. Эта методика представляется удовлетворительной в диапазоне давлений 4,15—9,65 МПа.

Эксперименты по критическому тепловому потоку проведены при нагреве внутренней и наружной поверхностей кольцевых каналов. В этих условиях критическое паросодержание (x_{cr}) проходит через максимум в зависимости от доли общей мощности, подведенной к внешней трубе (рис. 22).

3. **Многостержневые сборки.** Анализ теплогидравлических условий в многостержневой сборке можно проводить при различных деталях рассмотрения.

Модель перемешанного потока. В модели перемешанного потока предполагается, что общий канал одномерный, «осредненные» свойства приписываются таким переменным, как массовый расход, паросодержание и тепловой поток. Попытка использовать модель сделана в [41], где применялась гипотеза «локальных условий» на основе данных для однородно нагреваемых вертикальных стержневых сборок. В [40, 42] показано, что уравнение (56) для кольцевых каналов описывает широкий диапазон данных для сборок стержней с высокой точностью. Для сборок стержней значения D_i и D_o применительно к уравнениям (46) — (56) определены следующим образом:

$$\begin{aligned} D_i &= D_R; \quad D_o = [D_R (D_R + D_h^*)]^{1/2}, \\ \text{где} \quad D_h^* &= \frac{4 \times \text{Площадь сечения потока}}{S \times \text{Нагреваемый периметр}}; \end{aligned} \quad (57)$$

$S = \sum \xi$, ξ — отношение теплового потока на стержневой

не к максимальному тепловому потоку в сборке. Если все стержни имеют одинаковый тепловой поток, то $D_h^* = D_h$; определение D_h^* предполагает, что сборка стержней и эквивалентный кольцевой канал имеют одинаковое паросодержание на выходе при одинаковом критическом тепловом потоке. Одна из самых недавних корреляций для перемешанного потока описана в [43], и ее можно применить ко всем типам топливных элементов реакторов; она включает поправки для учета неоднородности осевого и радиального (от стержня к стержню) обогрева.

Поканальные модели. В подходе, основанном на поканальной модели, общий поток разделен на ряд параллельных взаимодействующих потоков в каналах между стержнями. Уравнения сохранения массы, импульса и энергии решаются для получения радиальных и осевых изменений паросодержания (или энтальпии жидкости) и массового расхода. Между соседними каналами происходит обмен массой, теплотой и импульсом, описываемый уравнениями

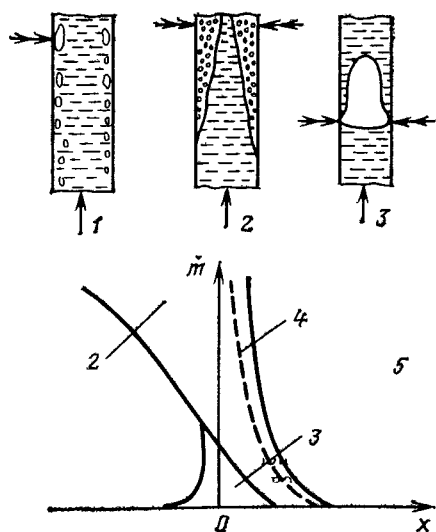


Рис. 23. Механизм кризиса при кипении с недогревом и низким паросодержанием. Двойной стрелкой указано место возникновения кризиса:

1 — высыхание пленки под паровым образованием; 2 — рост пузырей и образование парового слоя; 3 — испарение жидкой пленки, окружающей снаряд; 4 — начало кольцевого течения; 5 — высыхание пленки

сохранения. После определения энтальпии и условий течения в каждой узловой точке канала применяются подходящие соотношения в форме эмпирических корреляций для установления режима теплообмена, включая кризис, с целью нахождения локальной температуры поверхности стержня. Детали указанных расчетов обсуждаются в [44].

Феноменологические модели. В общем феноменологическом методе делается попытка разработать модель кинетики различных происходящих физических процессов. Ясно, что такие анализы следует связать с действительным режимом потока и что, более важно, они должны позволять рассматривать отклонения от полностью развитых потоков. Для иллюстрации этих положений ниже приведен пример феноменологической модели, которая разработана в Харуэлле для двухфазного потока в вертикальной стержневой сборке.

Механизм кризиса. В настоящее время механизм возникновения кризиса полностью не ясен, несмотря на очень большое число проведенных исследований. Относительно мало известно и о механизме процесса, соответствующего переходу от пузырькового кипения к пленочному, значительно больше информации имеется о механизме высыхания пленки в области высоких паросодержаний.

1. Область недогрева и низкого паросодержания. В [45] указано по крайней мере три различных механизма возникновения кризиса (рис. 23).

Высыхание пленки под паровым образованием. В результате испарения микрослоя под растущим паровым пузырем образуется сухое пятно. Когда пузырь отрывается от поверхности, пятно смачивается. Установившийся режим возникает в результате чередования нагрева и закалики поверхности в зоне пятна. В [46, 47] установлено, что в случае высокого теплового потока температура сухого пятна повышается настолько, что повторное смачивание, следующее за отрывом пузыря, затрудняется и происходит постепенное увеличение температуры поверхности, приводящее к кризису.

Слияние пузырей и образование слоя пара. При умеренных недогревах пузырьки в пограничном слое растут до величины, когда они затрудняют доступ жидкости к поверхности нагрева. В некоторой точке, если доступ жидкости

затруднен, происходит перегрев с образованием сплошного слоя пара у стенки. Авторы [48, 49] считают, что явление кризиса состоит в оттеснении гидродинамического пограничного слоя. Предполагается, что существует аналогия между явлением отрыва пограничного слоя, вызванного вдувом газа в поток жидкости через пористую стенку, и кризисом при кипении с недогревом. Торможение потока, которое происходит в оттесненном пограничном слое, может привести к образованию слоя пара.

Испарение жидкости, окружающей снаряд. При низких массовых скоростях снарядное течение возможно в условиях существования жидкой пленки между паровым пузырем и нагреваемой стенкой. Однако если тепловой поток высок, то пленка может полностью испариться, при этом может образоваться сухое пятно, вызывающее перегрев стенки трубы. В [50] предложена карта с массовой скоростью и недогревом в качестве координат, показывающая, где возможны эти различные механизмы.

2. Область высокого паросодержания (кольцевое течение). Проведя измерения зависимости расхода кольцевой жидкой пленки на выходе нагреваемой трубы от ее длины и подведенной мощности, авторы [51, 52] смогли представить полную картину условий вдоль нагреваемой трубы и показать, что кризис возникает, когда расход жидкой пленки на поверхности нагрева уменьшается до нуля, следовательно, происходит высыхание пленки. Эти эксперименты обнаружили также, что распределение жидкости между уносимыми каплями и пленкой при заданных паросодержании и массовой скорости в нагреваемой трубе существенно отличается от наблюдаемых значений при том же паросодержании и массовой скорости в конце длинной необогреваемой трубы, т. е. при полностью развитых равновесных условиях.

Отклонения от гидродинамического равновесия в испаряющемся потоке показано на рис. 24, где приведена зависимость расхода жидкости уносимой в каплях, от паросодержания. Равновесный расход жидкости, уносимой в паровое ядро, изображен кривой ABC. Показан также общий расход жидкости в трубе DE; отрезок между кривыми ABC и DE представляет собой расход в жидкой пленке.

Рассмотрим теперь испаряющийся поток в нагреваемой трубе. Если условия в каждом сечении нагреваемой трубы являются полностью развитыми равновесными для соответствующего паросодержания в трубе без нагрева, то унос жидкости в паровое ядро растет до точки максимума (точка B). Осаждение капель на пленку происходит на участках трубы ниже по потоку (область BC), и высыхание пленки должно наблюдаться при паросодержании около 100%. Ясно, что это не так. Авторы [51] сначала предположили, что унос является довольно быстрым, а осаждение —

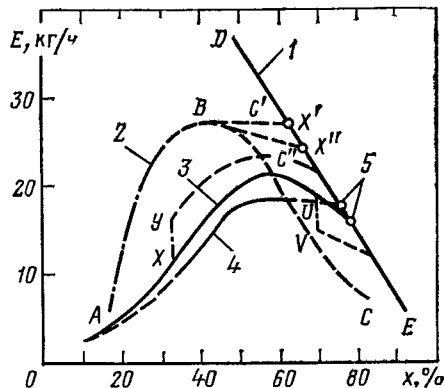


Рис. 24. Зависимость расхода унесенной фазы от локального паросодержания [52]:

1 — общий расход воды; 2 — унос в аднабнтном потоке, давление на выходе $p = 0,35$ МПа; 3 — при $z = 2,44$ м; 4 — при $z = 1,22$ м; 5 — точки высыхания пленки

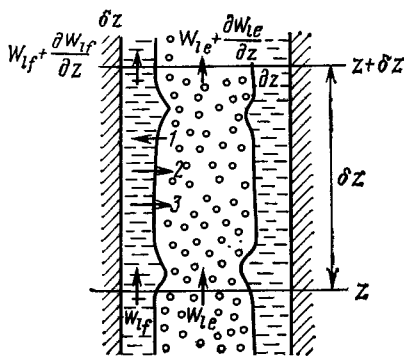


Рис. 25. Баланс массы в кольцевом потоке для элемента канала [57]: 1 — осаждение; 2 — унос; 3 — испарение

медленным процессом. В этом случае изменение уноса жидкости в нижних участках трубы описывается приближенно кривой AB до точки максимума B . Так как осаждение считается медленным процессом, расход уносимой жидкости остается постоянным (кривая ABC') или незначительно уменьшается (кривая ABC'') с дальнейшим ростом паросодержания; высыхание (расход в жидкой пленке стремится к нулю) происходит теперь при x' или x'' . В последней серии измерений [52] установлено, что найденные расходы уносимой жидкости в нижней части трубы значительно меньше равновесного значения. Ясно, что ни унос, ни осаждение не происходят быстро. На рис. 24 показаны зависимости, полученные для труб длиной 2,44 и 1,22 м. Наблюдаемое почти постоянное паросодержание на выходе при высыхании пленки является следствием двух эффектов — в длинной трубе наблюдаются большие скорости уноса и осаждения.

Многие из различных эффектов, наблюдаемых при неоднородном нагреве, рассмотренном выше, можно объяснить качественно [53] (рис. 24). Например, наличие короткой необогреваемой зоны на участке нагрева оказывает различное воздействие на высыхание пленки в зависимости от того, где расположена зона, до или после сечения, соответствующего точке B . Если она расположена до B , то, хотя паросодержание остается постоянным по холодной зоне, унос жидкости продолжается, пока поток не становится полностью развитым. Итак, влияние холодной зоны на рис. 24 показано вертикальной линией XU . Аналогичным образом, если зона расположена за B , то осаждение происходит при постоянном паросодержании и эффект иллюстрируется вертикальной линией UV . Другим примером неоднородного нагрева является экспоненциальное уменьшение теплового потока по длине. В этом случае на коротком участке может происходить унос, а на длинном — осаждение, что приводит к более высокому паросодержанию при высыхании пленки, чем при однородном профиле теплового потока.

Это качественное описание нашло развитие в замкнутой теории высыхания пленки в кольцевом потоке. На рис. 25 рассматривается баланс массы на элементе длины трубы δz . С учетом баланса массы для жидкой пленки имеем:

$$\underbrace{\dot{M}_{lf} + \pi D \dot{m}_a \delta z}_{\text{Входящий поток}} = \underbrace{\dot{M}_{lf} + \frac{\partial \dot{M}_{lf}}{\partial z} \delta z + \pi D E \delta z + \pi D \frac{\dot{q}}{\Delta h_v} \delta z + \underbrace{\frac{\dot{M}_{lf}}{\partial t} \delta z}_{\text{Накопление}}}_{\text{Выходящий поток}} \quad (58)$$

где $\dot{M}_{lf}$ — расход жидкой пленки; D — диаметр трубы; $\dot{m}_a$ — скорость осаждения капель на пленку; E — скорость

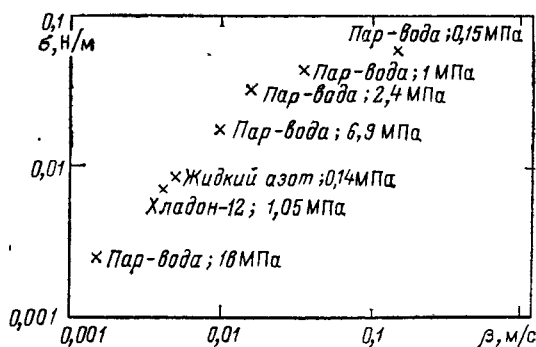


Рис. 26. Зависимость коэффициента осаждения от поверхностного натяжения

уноса капель с пленки; $\dot{q}$ — локальная тепловая нагрузка, Δh_v — скрытая теплота испарения жидкости; $\dot{M}_{lf}$ — масса жидкости, содержащаяся в пленке на единицу длины:

$$\dot{M}_{lf} = \pi D \delta \rho_l; \quad (59)$$

δ — средняя толщина жидкой пленки; ρ_l — плотность жидкости. Следовательно,

$$\frac{\partial \dot{M}_{lf}}{\partial z} = \pi D \left(\dot{m}_a - E - \frac{\dot{q}}{\Delta h_v} - \rho_l \frac{\partial \delta}{\partial z} \right). \quad (60)$$

Аналогично для баланса массы жидкости, уносимой в ядро пара, имеем:

$$\frac{\partial \dot{M}_{le}}{\partial z} = \pi D (E - \dot{m}_a) - \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (61)$$

где C — массовая концентрация капель в ядре. Необходимо разрабатывать методы расчета скоростей уноса и осаждения и толщины жидкой пленки.

Скорость осаждения капель можно рассчитать с помощью коэффициента массоотдачи β

$$\dot{m}_a = \beta C. \quad (62)$$

Здесь β — функция физических свойств рассматриваемой системы; в первом приближении этот коэффициент связан с поверхностным натяжением жидкости (рис. 26). Скорость уноса

$$E = \beta C_E, \quad (63)$$

где C_E — концентрация капель, находящихся в равновесии с жидкой пленкой. В [54] показано, что E зависит от безразмерного комплекса $\delta \tau / \sigma$ [τ — касательные напряжения на границе раздела; σ — поверхностное натяжение (рис. 27)]. Таким образом, задача расчета скорости уноса сводится к определению τ и δ . Эти характеристики можно найти, если известен расход жидкой пленки, используя взаимосвязь τ , δ и $\dot{M}_{lf}$:

$$\frac{4\delta}{D} = \sqrt{\frac{(dp/dz)_{lf}}{dp/dz}}, \quad (64)$$

где $(dp/dz)_{lf}$ — градиент давления в однофазном потоке жидкости с таким же расходом, как в жидкой пленке (рассчитанным по методу [55]); dp/dz — градиент давления в двухфазном потоке; и корреляцию, учитывающую волнистость границы раздела, которая основана на допущении, что волны на поверхности жидкой пленки зависят только от ее толщины. Частная форма соотношения, описывающего волнистость границы раздела, предложена в [56]; согласно этому выражению коэффициент сопротивления на границе раздела (определенный для гомогенного газового ядра) можно выразить через коэффициент трения только газа, текущего в отсутствие жидкой пленки, умноженный на $(1 + 360\delta/D)$.

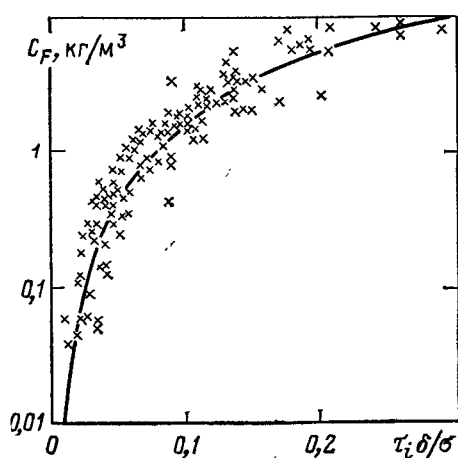


Рис. 27. Корреляция уноса. Точки — результат эксперимента; сплошная кривая — предполагаемая зависимость

Используя эти зависимости, можно интегрировать уравнение (58) (с производными по времени, равными нулю) от точки начала кольцевого течения (считая произвольно, что в этой точке 1% паросодержания при 99% унесенной жидкости) вдоль канала, пока M_{lf} не станет равным нулю, что свидетельствует о высыхании пленки. На рис. 28 приведены экспериментальные данные и некоторые примеры [57] расчета кризиса в однородно нагреваемых трубах для пароводяных смесей при давлении 0,15; 6,9; 18 МПа. Теоретическая модель была распространена на канал кольцевой геометрии [58], в котором могут нагреваться внутренняя и наружная поверхности, и многостержневые сборки [60, 61]. На рис. 22 приведено сравнение результатов расчета кризиса с экспериментальными данными авторов [59] для кольцевых каналов с независимым нагревом внутренней и наружной поверхностей. Также представлены расчеты для семистержневой сборки, охлаждаемой хладоном-12 при 1,07 МПа. Геометрия пучка изменялась так, что варьировался зазор между стержнями, внешние шесть стержней располагались всегда в вершинах правильного шестиугольника, седьмой стержень — в его центре. В одной группе экспериментов внешние стержни касались центрального, в другой — внешней трубы, исследовались также промежуточные между этими двумя крайними положениями. На рис. 29 представлены экспериментальные и расчетные мощности, при которых происходит высыхание пленки, в зависимости от зазора между стержнями.

Критический тепловой поток при встречном течении. Хорошо известно, что в случае вертикального канала с резервуаром жидкости над ним критический тепловой поток не падает до нуля, пока существует поток в основании трубы. Жидкость может поступить из резервуара в канал, охладив его. Однако существует некоторый предельный расход пара у верхнего конца трубы, при котором жидкость не возвращается назад. Тепловой поток, соответствующий этому условию, можно рассматривать как критический. В [62] проведены эксперименты для ряда жидкостей (четырехлористый углерод, *n*-гексан, вода) в трубах (внутренним диаметром 8, 10 и 14 мм) и получена следующая

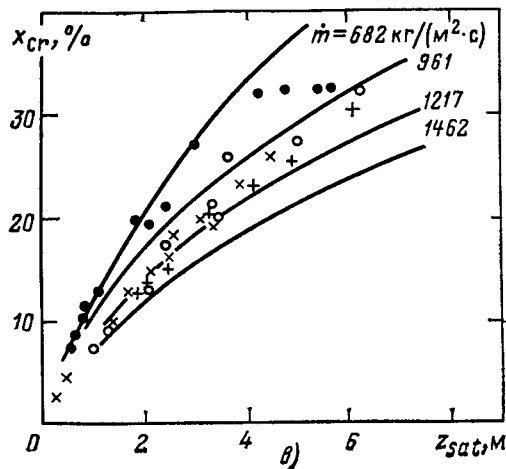
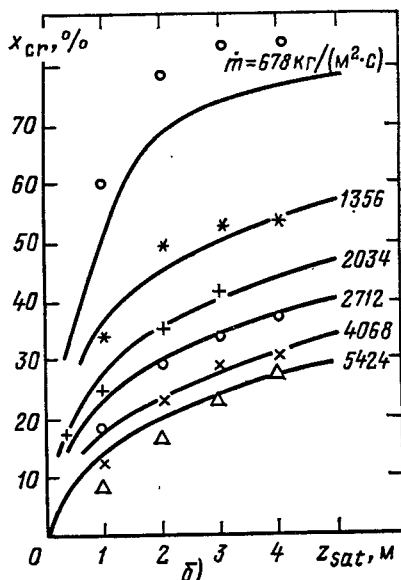
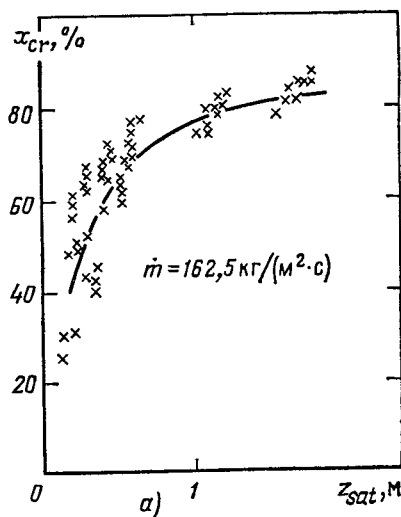


Рис. 28. Зависимость граничного паросодержания от длины участка кипения (точки — эксперимент; сплошные линии — расчет) для пароводяного потока при $p = 0,15$ МПа, $\dot{m} = 162,5$ кг/(м²·с), $D = 9,3$ мм, $k = 0,15$ м/с [57] (а); при $p = 6,9$ МПа, $D = 12,6$ мм, $k = 0,01$ м/с и различных массовых скоростях [18] (б); при $p = 18$ МПа, $D = 32$ мм, $k = 0,0015$ м/с и различных массовых скоростях [57] (в)

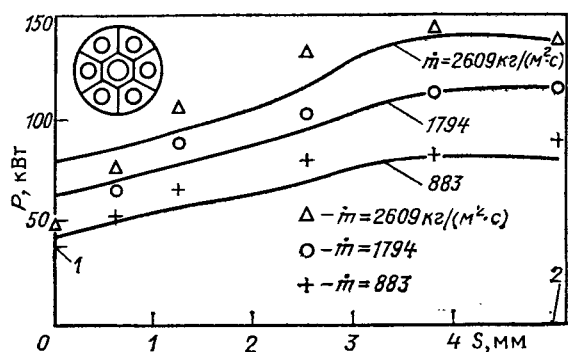


Рис. 29. Сравнение экспериментальных и расчетных значений CHF для кольцевых каналов и многостержневой сборки (расчет с помощью модели кольцевого течения [52], хладон-12, недогрев на входе 11,6 кДж/кг). Сплошные кривые — результат расчета; точки — эксперимент. Наружные стержни касаются внутреннего стержня (1) и кожура (2). Недогрев на входе составляет 11,6 кДж/кг; P — мощность при высыхании пленки; S — расстояние между центральным и наружным стержнями

корреляция:

$$\begin{aligned} \dot{q}^* &= \frac{1}{3,2} \frac{\dot{q}_{cr}}{\rho_g^{1/2} \Delta h_v} [g_n \sigma (\rho_l - \rho_g)]^{-1/4}; \\ D^* &= D \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{-1/2}; \\ q^* \left(\frac{z}{D} \right)^{-0,1} &= 1 - 1,5 D^* \cdot (1/2). \end{aligned} \quad (65)$$

Критический тепловой поток при вынужденном течении других жидкостей. В табл. 6 представлены источники

экспериментальных данных по критическим тепловым потокам в условиях вынужденной конвекции для различных органических и криогенных жидкостей и жидких металлов. Кроме работ [63, 64] исследования ограничены по параметрам. Детальные эксперименты по хладону показали, что эта жидкость, по крайней мере, качественно ведет себя так же, как вода. Из данных для криогенных жидкостей и жидких металлов ясно, что при уменьшении массовой скорости и диаметра трубы или при увеличении ее длины критический тепловой поток приближается к значению, необходимому для полного испарения жидкости.

Несколько попыток сделано для получения эмпирических корреляций, применимых как к воде, так и другим жидкостям. Ни одну из этих корреляций нельзя рекомендовать как универсальную. В отсутствие обширного банка экспериментальных данных по кризису для других жидкостей такой метод и не может быть предложен. Ниже рассмотрены два возможных подхода:

1. Вывод и применение закономерностей подобия, связывающих критический тепловой поток в воде и другой жидкости.

2. Применение феноменологической модели высыхания пленки, описанной в предыдущих разделах, к другим жидкостям.

Попытка определить существенные физические свойства и законы подобия для условий кризиса сделана в [65, 66]. В [65] рассмотрен вопрос о том, какие из комплексов, составленных из физических свойств, существенны, и получены соответствующие безразмерные группы. Многие гипотетические соотношения между этими группами исследованы на основе экспериментальных данных для воды и хладона [66, 67]. Ни одна из рассмотренных зависимостей не является удовлетворительной, хотя группа ком-

Таблица 6. Экспериментальные данные для критического теплового потока при вынужденном течении жидкостей

Жидкость	Геометрия	Давление, 10 ⁵ Па	Недогрев, °С	Скорость, м/с	Критический тепловой поток, кВт/м²	Число экспериментов	Литература
Гидразин	Труба	6,9—83	55—281	0,3—28,4	2330—44 500	62	[86]
Гидразин	»	13,2—71	57—263	4,02—36,8	4450—43 300	22	[87]
Аммиак	»	11,7—126	1,6—115	0,9—47,6	2840—23 400	45	[88]
Аммиак	»	11,4—88	0,5—112	3,79—25	2460—16 350	111	[89]
Дифенил	Кольцевой канал	1,6—28	0—183	0,15—5,2	220—2800	48	[90]
Сентовакс R	—	6,9	—	0,15—4,6	—	10	»
Смесь полифенилов	—	4,4—22	5—213	0,15—4,6	—	25	»
Моноизопропилбифенил (MIPB)	—	26,6—27,6	88—179	0,15—4,6	1230—3000	6	»
Сентовакс R и другие полифенилы	Труба	1,52—10,35	19—157	1,25—7,7	1005—3720	94	[91]
Четырехокись азота	»	10,35—42,5	0—111	3,11—18,2	1730—11 300	73	[92]
Этиленгликоль	»	1,38—6,1	86—147	5,3—27	6500—19 700	5	[93]
Этиловый спирт	»	2,0—6,2	0—210	0,49—50	567—21 600	163	[94]
Азот	»	3,45	1,6	0,027	50—177	11	[95]
Водород	»	3,45	0—3,3	1,10	19—66	44	[95]
Хладон-12	»	10,7	0—28 кДж/кг	—	22—284	Большое	[63]
Хладон-12	Труба (неоднородный нагрев)	10,7	0—28 кДж/кг	—	93,5—315	81	[64]
Хладон-12	Труба	7,3—13,8	0—60,5 кДж/кг	—	79—440	Большое	[96]
Калий	»	—	—	—	101—1100	6	[97]
Натрий	Кольцевой канал	0,35—0,55	0—34	—	945—2520	11	[98]
Калий	Труба (однородный и неоднородный нагрев)	1,1—1,3	100—390	Низкая	252—1890	—	[99]
Калий	Труба	2,1—3,8	—	Низкая	252—1320	—	[100]

плексов [см. (66)] видимо близка к тому, что требуется:

$$\frac{\dot{q}_{cr} \Gamma^{0,5}}{\Delta h_v \rho_l^{0,5}} = f_n \left(\frac{z}{D}, \frac{Dc_{pl} \rho_l^{0,5}}{\lambda_l \Gamma^{0,5}}, \frac{\dot{m} \Gamma^{0,5}}{\rho_l^{0,5}}, \frac{\rho_l}{\rho_g}, \frac{\Delta h_{sub, i}}{\Delta h_v} \right), \quad (66)$$

где

$$\Gamma = \frac{d(\rho_l / \rho_g)_{sat}}{dp}.$$

Используя коэффициенты подобия [68], полученные из данных по кризису в круглой трубе для воды и хладона-12, авторы [69] сумели связать непосредственно результаты по критическим тепловым потокам для двух жидкостей при других более сложных геометриях, включая стержневую сборку. Одни из более успешных подходов к проблеме подобия описан в [70]. На основе классического анализа размерностей здесь получено, что критический тепловой поток (выраженный через $\dot{q}_{cr} / \dot{m} \Delta h_v$) зависит от 12 безразмерных групп, шесть из которых исключены логическими доводами. Три безразмерные группы выражены в масштабах критического теплового потока: $\Delta h_{sub, i} / \Delta h_v$; ρ_l / ρ_g , z/D [см. уравнение (66)]. Оставлены три безразмерные группы, которые скомбинированы в единый параметр ψ_{cr} следующим образом:

$$\psi_{cr} = \frac{\dot{m} D}{\eta_l} \left(\frac{\eta_l}{\sigma \rho_l} \right)^{2/3} \left(\frac{\eta_l}{\eta_g} \right)^{1/8}, \quad (67)$$

или

$$\psi_{cr} = \frac{\dot{m} D}{\eta_l} \left(\frac{\Gamma^{0,5} \eta_l}{D \rho_l^{0,5}} \right)^{2/3} \left(\frac{\eta_l}{\eta_g} \right)^{1/8}. \quad (68)$$

Уравнение (67) является основным, но (68) дает примерно такие же результаты в широких диапазонах давления и температуры. Полезность этого закона подобия можно видеть из рис. 30, где сравниваются данные для воды, хладона-12 и двуокиси углерода [17].

Феноменологическую модель, описанную выше, можно использовать для получения зависимостей критического паросодержания (x_{cr}) от длины кипения любой насыщенной жидкости (z_{sat}) [72]. В случае ограниченного числа экспериментальных данных с помощью указанных корреляций можно проверить полученные оценки. В качестве примеров рассмотрены четыре жидкости:

хладон (фреон)-12 ($p_{cr}=4,11$ МПа);
азот ($p_{cr}=3,4$ МПа);
углеводород C-5 (пентан) ($p_{cr}=3,34$ МПа);
этанол ($p_{cr}=6,38$ МПа).

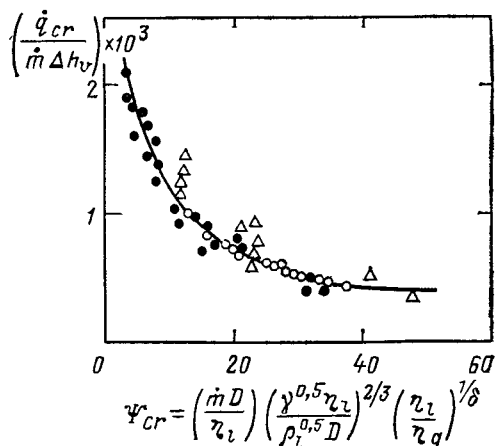


Рис. 30. Применение метода подобия Ахмада для CO_2 ($\circ$ — $p=1,96$ МПа), хладона-12 ($\bullet$ — $p=1,07$ МПа) и воды (Δ — $p=6,89$ МПа) [71], $z_{sat}/D=130$

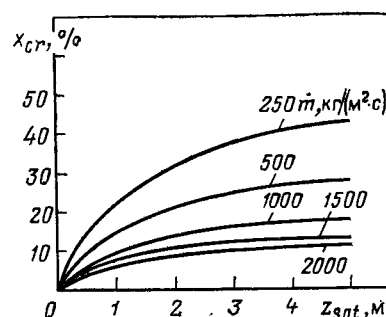


Рис. 31. Зависимость граничного паросодержания x_{cr} от длины участка кипения z_{sat} для приведенного давления 0,03 с массовой скоростью в качестве параметра для n -пентана

Принято, что диаметр трубы постоянен и равен 20 мм, максимальная длина кипения $z_{sat}=5$ м. Выбраны четыре давления, соответствующие приведенным давлениям $p/p_{cr}=0,03; 0,1; 0,2$ и $0,5$. Рассмотрены пять массовых скоростей: 250, 500, 1000 и 2000 $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$.

На рис. 31 для примера показаны зависимости критического паросодержания от длины участка кипения для n -пентана при приведенном давлении 0,03. Значения x_{cr} для n -пентана и других жидкостей приведены также в табл. 7 (аналогичные графики можно получить для любой другой жидкости).

Эти данные приводят к зависимости для критического теплового потока

$$\dot{q}_{cr} = \frac{x(z)_{cr} \dot{m} \Delta h_v}{4z_{sat}}. \quad (69)$$

Таким образом, для n -пентана при давлении 0,1 МПа ($p/p_{cr}=0,03$), массовой скорости 1000 $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ и длине кипения 5 м значение $x(z)_{cr}$ согласно рис. 31 равно 0,18. Соответствующее значению $\dot{q}_{cr}=64,62$ $\text{кВт}/\text{м}^2$ [см. уравнение (69)].

Е. Теплоотдача на участках, где критический тепловой поток превышен. Кризис (ребень на поверхности кипения на рис. 3) представляет собой ситуацию, при которой происходит более или менее резкое уменьшение коэффициента теплоотдачи на один или два порядка по сравнению со значением при пузырьковом кипении и двухфазной вынужденной конвекции. Это понижение происходит в результате того, что теплоотдающая поверхность не смачивается полностью жидкостью. Пар полностью или частично покрывает поверхность, и перенос теплоты осуществляется не через высокотеплопроводную жидкость, а через газ.

Следует отметить (см. рис. 3 и 4), что подобное условие может возникнуть как в недогретой, так и в насыщенной жидкости. Можно выделить четыре области и рассмотреть механизм переноса теплоты в каждой из них — области переходного кипения, пленочного кипения с недогревом, пленочного кипения насыщенной жидкости и кипения с недостатком жидкости (закризисной теплоотдачи) — хотя отсутствуют хорошо определяемые границы между ними. Область переходного кипения располагается на обратном склоне поверхности кипения (местами малозаметном) на рис. 3, тогда как другие области — пленочного кипения недогретой и насыщенной жидкости и кипения с недостатком жидкости (закризисной теплоотдачи) — на склоне по другую сторону впадины, соответствующей минимальному тепловому потоку.

Переходное кипение. Использование методики исследования, при которой температура поверхности, а не тепловая нагрузка является контролируемой переменной, помогло установить существование области переходного кипения при вынужденной конвекции, так же как в боль-

Таблица 7. Зависимость x_{cr} различных жидкостей от давления, массовой скорости и длины участка кипения

$\dot{m}$, кг/(м ² ·с)	z_{sat} , м					$\dot{m}$, кг/(м ² ·с)	z_{sat} , м				
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
Х л а д о н-12						П е н т а н					
$p/p_{cr}=0,03$; $p=0,123$ МПа						$p/p_{cr}=0,03$; $p=0,1$ МПа					
250	0,375	0,515	0,515	0,655	0,695	250	0,22	0,315	0,38	0,41	0,435
500	0,260	0,360	0,425	0,465	0,490	500	0,15	0,21	0,25	0,27	0,285
1000	0,175	0,245	0,285	0,305	0,315	1000	0,10	0,14	0,16	0,17	0,18
1500	0,140	0,190	0,220	0,230	0,240	1500	0,08	0,105	0,12	0,13	0,135
2000	0,115	0,160	0,180	0,190	0,200	2000	0,065	0,085	0,10	0,11	0,115
$p/p_{cr}=0,1$; $p=0,411$ МПа						$p/p_{cr}=0,1$; $p=0,334$ МПа					
250	0,51	0,685	0,775	0,825	0,860	250	0,315	0,435	0,51	0,56	0,595
500	0,36	0,50	0,58	0,625	0,645	500	0,215	0,30	0,35	0,38	0,40
1000	0,25	0,34	0,385	0,410	0,425	1000	0,14	0,20	0,225	0,245	0,255
1500	0,195	0,265	0,296	0,315	0,335	1500	0,11	0,15	0,175	0,19	0,20
2000	0,165	0,220	0,245	0,265	0,285	2000	0,09	0,125	0,145	0,16	0,17
$p/p_{cr}=0,2$; $p=0,822$ МПа						$p/p_{cr}=0,2$; $p=0,668$ МПа					
250	0,55	0,73	0,82	0,875	0,90	250	0,34	0,475	0,56	0,615	0,645
500	0,39	0,535	0,62	0,665	0,69	500	0,23	0,325	0,38	0,415	0,44
1000	0,265	0,370	0,415	0,445	0,465	1000	0,15	0,215	0,245	0,265	0,285
1500	0,205	0,280	0,320	0,345	0,380	1500	0,115	0,165	0,190	0,210	0,225
2000	0,170	0,235	0,265	0,295	0,315	2000	0,095	0,135	0,155	0,175	0,190
$p/p_{cr}=0,5$; $p=2,055$ МПа						$p/p_{cr}=0,5$; $p=1,670$ МПа					
250	0,46	0,65	0,76	0,82	0,865	250	0,30	0,45	0,545	0,605	0,65
500	0,31	0,46	0,545	0,595	0,630	500	0,195	0,30	0,365	0,405	0,435
1000	0,20	0,30	0,360	0,395	0,420	1000	0,12	0,185	0,230	0,260	0,285
1500	0,15	0,23	0,275	0,310	0,335	1500	0,09	0,14	0,175	0,20	0,22
2000	0,12	0,19	0,225	0,260	0,280	2000	0,075	0,115	0,14	0,165	0,18
А з о т						Э т а н о л					
$p/p_{cr}=0,03$; $p=0,102$ МПа						$p/p_{cr}=0,03$; $p=0,191$ МПа					
250	0,22	0,315	0,370	0,415	0,450	250	0,24	0,33	0,39	0,425	0,45
500	0,15	0,215	0,255	0,280	0,300	500	0,165	0,225	0,26	0,285	0,295
1000	0,10	0,140	0,165	0,180	0,190	1000	0,105	0,145	0,165	0,180	0,190
1500	0,08	0,110	0,125	0,140	0,145	1500	0,085	0,115	0,125	0,135	0,145
2000	0,065	0,09	0,105	0,115	0,120	2000	0,070	0,090	0,105	0,110	0,120
$p/p_{cr}=0,1$; $p=0,340$ МПа						$p/p_{cr}=0,1$; $p=0,638$ МПа					
250	0,305	0,435	0,510	0,565	0,605	250	0,355	0,49	0,565	0,615	0,645
500	0,205	0,300	0,355	0,390	0,415	500	0,240	0,335	0,390	0,420	0,435
1000	0,140	0,195	0,230	0,250	0,265	1000	0,160	0,225	0,255	0,280	0,290
1500	0,105	0,155	0,175	0,190	0,205	1500	0,125	0,180	0,190	0,210	0,220
2000	0,09	0,130	0,145	0,160	0,170	2000	0,110	0,140	0,160	0,175	0,185
$p/p_{cr}=0,2$; $p=0,680$ МПа						$p/p_{cr}=0,2$; $p=1,276$ МПа					
250	0,33	0,464	0,555	0,615	0,660	250	0,405	0,555	0,645	0,695	0,730
500	0,22	0,320	0,385	0,425	0,450	500	0,275	0,390	0,450	0,485	0,505
1000	0,15	0,215	0,250	0,275	0,290	1000	0,185	0,255	0,290	0,315	0,335
1500	0,11	0,165	0,190	0,210	0,225	1500	0,145	0,195	0,225	0,245	0,265
2000	0,09	0,135	0,160	0,175	0,190	2000	0,120	0,160	0,190	0,210	0,220
$p/p_{cr}=0,5$; $p=1,700$ МПа						$p/p_{cr}=0,5$; $p=3,190$ МПа					
250	0,265	0,390	0,485	0,555	0,605	250	0,36	0,52	0,62	0,685	0,725
500	0,160	0,250	0,325	0,370	0,405	500	0,235	0,35	0,425	0,465	0,495
1000	0,10	0,160	0,205	0,235	0,255	1000	0,145	0,225	0,270	0,305	0,335
1500	0,07	0,120	0,155	0,175	0,195	1500	0,105	0,165	0,205	0,235	0,255
2000	0,06	0,095	0,125	0,145	0,160	2000	0,085	0,135	0,170	0,190	0,215

шом объеме. Довольно полный обзор исследований этой области теплообмена представлен в [73].

Предприняты попытки получения корреляций по теплоотдаче в области переходного кипения. Вероятно, зависимость [74] является наиболее удачной из имеющихся в настоящее время для воды и описывает тепловой поток в области переходного кипения ($\dot{q}_{tb}$)

$$\dot{q}_{tb} = \dot{q}_{nb} \exp \left[-0,001 \frac{x^{2/3}}{dx/dz} \left(\frac{\Delta T}{55} \right)^{(1+0,0029\Delta T)} \right], \quad (70)$$

где $\dot{q}_{nb}$ — тепловой поток при пузырьковом кипении (приближенно равный критическому тепловому потоку); ΔT — разность температур поверхности и насыщения. Корреляцию по переходному кипению, имеющую широкий диапазон применения, можно разработать, если знать тепловой поток и температурный напор стенка — жидкость в точках максимума и минимума на поверхности кипения. В настоящее время можно точно определить $\dot{q}_{cr}$ и ΔT_{cr} , но условия в точке минимума остаются в большой степени неопределенными. Экспериментальные данные [75] показали, что условия в минимальной точке зависят сложным образом от массового паросодержания и расхода в канале.

Пленочное кипение. Из визуальных исследований пленочного кипения в вертикальных трубах обнаружено, что при низких паросодержаниях режим течения является «обращенным кольцевым» с жидкостью в центре и тонкой паровой пленкой у поверхности нагрева. Граница раздела пар — жидкость не гладкая, а с волнами возмущения, возникающими в произвольных местах, но сохраняющими их характеристики до некоторой степени, когда они движутся вверх по трубе со скоростями того же порядка, что и жидкое ядро.

Вследствие того, что жидкость отделена от поверхности нагрева паровой пленкой и неопределенности, связанные с образованием пузырей, отсутствуют, пленочное кипение поддается аналитическому решению. Задачу можно рассмотреть по аналогии с пленочной конденсацией, и имеются решения для горизонтальных и вертикальных пластин, труб при ламинарной и турбулентной паровой пленки с учетом касательных напряжений на границе раздела и без них.

1. Вертикальная пластина. Для ламинарного потока и касательных напряжений на границе раздела, равных нулю ($\tau_i = 0$), локальный коэффициент теплоотдачи $\alpha(z)$ на расстоянии z по поверхности от начала пленочного кипения равен

$$\frac{\alpha(z)z}{\lambda_g} = \left[\frac{z^3 g_n \rho_g (\rho_l - \rho_g) \Delta h_v}{4 \lambda_g \eta_g \Delta T} \right]^{1/4}. \quad (71)$$

Осредненный по области z коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}(z)$ превышает локальное значение на расстоянии z в $1^{1/3}$ раза. Подобный анализ можно провести и в предположении турбулентного характера течения в паровой пленке. В этом случае

$$\frac{\bar{\alpha}(z)z}{\lambda_g} = 0,056 \text{Re}_g^{0,2} (\text{Gr}^* \text{Pr})^{1/3}, \quad (72)$$

где Re_g — число Рейнольдса в трубе, основанное на расходе пара;

$$\text{Gr}^* = \frac{z^3 g_n \rho_g (\rho_l - \rho_g)}{\eta_g^2}. \quad (73)$$

Отметим, что в уравнении (72) $\bar{\alpha}(z)$ не зависит от расстояния z . Из-за пренебрежения сопротивлением между паровой пленкой и поверхностью и на границе раздела коэффициенты теплоотдачи, рассчитанные по (72), могут превышать измеренные,

2. Вертикальный стержень. Как отмечалось ранее, паровая пленка отделяется от стенки в виде больших сферических образований. Предприняты различные попытки для получения моделей, отражающих в большей степени физические условия, чем уравнение (71). В [76] предполагается, что на вертикальном стержне сферические образования возникают в процессе роста неустойчивости полого газового цилиндра в плотной жидкости. Длина волны, соответствующая максимальному росту неустойчивости этого типа, управляемой поверхностным натяжением, равна $\lambda_c/2\pi = r/0,484$ и приводит к следующему выражению для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = \left[\frac{\lambda_g^3 g_n \rho_g (\rho_l - \rho_g) \Delta h_v}{\eta_g \Delta T r} \right]^{1/4}, \quad (74)$$

где r — радиус стержня, на котором происходит пленочное кипение. Альтернативой для вертикальных стержней, приводящей к превышению коэффициента теплоотдачи на 33%, является использование уравнения (36), § 2.7.2 для пленочного кипения на наружной поверхности горизонтальных труб в большом объеме.

Таким образом, в настоящее время есть данные, согласно которым классическое пленочное кипение с ламинарной пленкой наблюдается только на относительно коротком участке (около 5 см) по потоку от места кризиса или фронта смачивания. За этой областью существует переменная во времени тонкая пленка и пар перетекает в большие сферические образования. Коэффициент теплоотдачи перестает зависеть от расстояния, и он значительно (примерно в 2 раза) выше, чем при наличии ламинарной пленки. Кроме того, существуют данные, свидетельствующие о том, что коэффициенты теплоотдачи при пленочном кипении в опускном потоке могут быть ниже, чем в подъемном, в частности, при условиях, когда скорости опускного течения и пузыри равны. Поэтому в [77] переработаны корреляции по теплоотдаче в закризисной области с помощью модели дрейфа для учета влияния направления потока при малых скоростях.

Теплоотдача в закризисной (с недостатком жидкости) области. В области пленочного кипения структура потока представляет собой кольцевую паровую пленку и центральное ядро жидкости. С ростом паросодержания устанавливается режим потока, при котором жидкие капли распределены в паровом ядре, движущемся с большой скоростью. Капельный режим течения характеризует передачу теплоты в закризисной области или в области с недостатком жидкости. Здесь коэффициенты теплоотдачи значительно выше, чем при пленочном кипении. Этот факт вместе с пониженными критическими тепловыми потоками при высоком паросодержании означает, что область с недостатком жидкости часто обширна.

Корреляции для закризисной области. Для определения коэффициента теплоотдачи в этой области известны три общих подхода.

1. Эмпирические корреляции, которые не учитывают физические процессы, происходящие в области закризисной теплоотдачи.

2. Корреляции, которые предполагают возможность отклонения от термодинамического равновесия и расчета истинных паросодержания и температуры пара. В этом случае для определения температуры нагреваемой стенки используется обычная корреляция по теплоотдаче к однофазной жидкости.

3. Полуэмпирические модели, согласно которым делаются попытки рассмотреть и записать уравнения для различных гидродинамических и теплопередающих процессов и связать их с температурой поверхности нагрева. Примеры каждого из этих подходов будут кратко обсуждены.

Эмпирические корреляции. Вероятно, наиболее точная из этих чисто эмпирических корреляций предложена в

[78]. Она имеет вид

$$Nu_g = a \left\{ Re_g \left[x + \frac{\rho_g}{\rho_l} (1-x) \right] \right\}^b Pr_g^c \omega Y^d, \quad (75)$$

где

$$Y = 1 - 0,1 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right)^{0,4} (1-x)^{0,4}.$$

Значения коэффициентов a, b, c и d приведены в табл. 8 вместе с указанием диапазонов независимых переменных, на которые распространяются корреляции. Уравнение (75) модернизировано в [79]. Использовать указанную корреляцию за пределами диапазонов переменных для соответствующих геометрий, указанных в табл. 8, не рекомендуется.

Корреляции, учитывающие отклонение от термодинамического равновесия. Температуры стенки в закризисной области ограничены двумя предельными ситуациями.

1. Полное отклонение от равновесия — интенсивность теплоотдачи от паровой фазы к унесенным каплям настолько низка, что ею пренебрегают, и температуру пара $T_g(z)$ ниже по потоку от точки высыхания пленки рассчитывают в предположении, что вся теплота, подведенная к жидкости, идет на перегрев пара. Температура стенки $T_w(z)$ определяется с помощью обычного уравнения переноса теплоты типа Диттуса — Болтера.

2. Полное термодинамическое равновесие — скорость жидких капель настолько велика, что температура паровой фазы $T_g(z)$ равна температуре насыщения, пока согласно балансу энергии все капли не испарятся. Температура стенки $T_w(z)$ рассчитывается с помощью обычного уравнения по теплоотдаче к однофазной жидкости с учетом увеличения скорости пара вследствие испарения капель.

Условия передачи теплоты в закризисной области приближаются к ситуации 1 при низких давлении и скорости, тогда как при высоком давлении (приближающемся к критической точке) и значительной массовой скорости (больше $(2-3) \cdot 10^3$ кг/(м²·с)) соответствуют ситуации 2.

Таблица 8. Эмпирические корреляции по закризисной теплоотдаче [78]

Геометрия	a	b	c	d	Число точек	Средне-квadraticное отклонение, %
Трубы	$1,09 \cdot 10^{-3}$	0,989	1,41	-1,15	438	11,5
Кольцевые каналы	$5,2 \cdot 10^{-2}$	0,688	1,26	-1,06	266	6,9
Трубы и кольцевые каналы	$3,27 \cdot 10^{-3}$	0,901	1,32	-1,5	704	12,4

Ниже приведен диапазон данных, которые описываются корреляциями

Геометрия	Направление потока	D_l , мм	p , МПа	$\dot{m}$, кг/(м ² ·с)	x	$\dot{q}$, кВт/м ²	Nu_g	$Re_g \left[x + (1-x) \frac{\rho_g}{\rho_l} \right]$	Pr_w	ω
Труба	Вертикальное и горизонтальное	2,5—25	6,8—21,5	700—5300	0,1—0,9	120—2100	95—1770	$6,6 \cdot 10^4 - 1,3 \cdot 10^6$	0,88—2,21	0,706—0,976
		1,5—6,3	3,4—10,0	800—4100	0,1—0,9	450—2250	160—640	$1,0 \cdot 10^5 - 3,9 \cdot 10^5$	0,91—1,22	0,610—0,963

Таблица 9. Корреляция [80] для неравновесного паросодержания

Коэффициент	Значение	Коэффициент	Значение
a_1	0,13864	b_0	1,3072
a_2	0,2031	b_1	-1,0833
a_3	0,20006	b_2	0,8455
a_4	-0,09232		

Диапазоны параметров, использованных для корреляции [80]:

Жидкость — вода	4,1—20,5 МПа
p	270—5150 кг/(м ² ·с)
$\dot{m}$	150—2700 кВт/м ²
q	0,1—1,50
x_E	400—845°C
T_w	1402
Число точек	

В [80] предложена корреляция, основанная на использовании разности равновесного паросодержания $x(z)$ и истинного неравновесного паросодержания $x^*(z)$. Разность $x(z) - x^*(z)$ является функцией ряда независимых переменных

$$x(z) - x^*(z) = \exp(-\lg \psi), \quad (76)$$

где

$$\psi = a_1 Re_{tp}^{a_2} \sum_{i=0}^{i=2} b_i \left(\frac{p}{p_{cr}} \right)^i \sum_{i=0}^{i=2} c_i x_E(z)^i. \quad (77)$$

Здесь $x_E(z)$ — термодинамическое паросодержание, которое может быть больше единицы; но в условиях, где $x(z) < 1$, $x(z) = x_E(z)$. Если $\psi < 0$, то $\psi = 0$; если $\psi > \pi/2$, то $\psi = \pi/2$ и

$$Re_{tp} = \frac{\dot{m} D}{\eta_g} \left[x(z) + \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) (1-x(z)) \right].$$

В табл. 9 приведены значения коэффициентов, которые необходимо подставить в уравнение (77), диапазоны использованных экспериментальных данных и число точек.

Метод [80] представляет собой заметное усовершенствование рассмотренной ранее эмпирической корреляции, но связан с неудобствами из-за нарушения непрерывности в наклоне зависимости паросодержания от длины в точке высыхания пленки и точке, где термодинамическое паросодержание $x(z) = 1$.

Полуэмпирические модели. Детальная теоретическая модель переноса теплоты в закризисной области должна учитывать различные пути передачи теплоты от поверхности нагрева в объем паровой фазы. Можно выделить шесть различных путей передачи.

1. Передача теплоты от поверхности к жидким каплям, которые контактируют со стенкой (удары капель).
2. Перенос теплоты от поверхности к жидким каплям, которые достигают теплового пограничного слоя, но не касаются поверхности (капли на некотором расстоянии от поверхности).
3. Конвективный перенос теплоты от поверхности к пару.
4. Передача теплоты конвекцией от пара к каплям в паровом ядре.
5. Перенос теплоты радиацией от поверхности к жидким каплям.
6. Перенос теплоты излучением от поверхности к пару.

Одна из первых полуэмпирических моделей предложена в [81]; она является одномерной моделью, использующей известные равновесные условия в точке высыхания пленки. Предполагается, что падение давления вдоль канала пренебрежимо мало, температура поверхности стенки увеличивается настолько, что капли больше не смачивают поверхность, и коэффициент теплоотдачи от стенки к жидкости определяется по одной из хорошо известных зависимостей для однофазной жидкости. Эти допущения означают, что указанные выше первые два пути переноса не рассматриваются.

Положение точки высыхания пленки должно быть известно или должно рассчитываться. Принимается, что в этой точке жидкость и пар находятся в равновесии и поэтому паросодержание $x(z_{cr})$ известно, а температура пара соответствует насыщению. Для получения температуры пара в объеме ниже по потоку от точки высыхания пленки методом Рунге — Кутты решаются совместно четыре дифференциальных уравнения. Первое из этих уравнений является балансом массы, согласно которому число капель, проходящих через единицу площади поперечного сечения в единицу времени N , постоянно

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{N\pi\rho_l}{2\dot{m}} d^2 \frac{dd}{dz}, \quad (78)$$

где

$$N = \frac{6\dot{m}(1-x(z_{cr}))}{\pi d_{cr}^3 \rho_l};$$

x — паросодержание; d — диаметр капель.

Второе уравнение является тепловым балансом, из которого определяется среднемассовая температура пара $T_g(z)$

$$\frac{dT_g}{dz} = \frac{\dot{q}\pi D - (A\dot{m}\Delta h_v dx/dz)}{A\dot{m}c_{pg}}. \quad (79)$$

Третье уравнение описывает ускорение капель в потоке пара с помощью коэффициента сопротивления [82]

$$\frac{du_d}{dz} = \frac{K_1(u_g - u_d)^{1,16} - g_n(1 - \rho_g/\rho_l)}{u_d}, \quad (80)$$

где u_d — скорость капель; u_g — скорость пара и

$$K_1 = 20,25 \left(\frac{\eta_g^{0,84} \rho_g^{0,16}}{\rho_l d^{1,84}} \right). \quad (81)$$

Уравнение [81] описывает ускорение капель с помощью метода [83]

$$\frac{dd}{dz} = \frac{2}{d} \frac{dr^2}{dt} \frac{1}{u_d}; \quad (82)$$

$$\frac{dr^2}{dt} = -\frac{2FMK_g(p_g - p_\infty)}{\rho_l RT_g} = -\frac{2\lambda_g F(T_g - T_{sat})}{\rho_l \Delta h_v}, \quad (83)$$

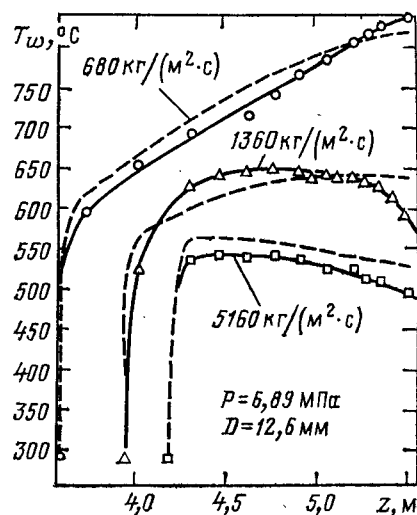


Рис. 32. Экспериментальные и расчетные профили температуры при теплоотдаче к пароводяным смесям в условиях недостатка жидкости [81]

где p_g — давление в капле; T_{sat} — температура насыщения при p_g ; $\bar{R}$ — универсальная газовая постоянная; K_g — коэффициент самодиффузии в паре, $K_g = M\lambda_g(T-1)/\rho_g \bar{R}$; $r = d/2$; F — коэффициент обдува:

$$F = 1 + 0,276 \left[\frac{\rho_g(u_g - u_d)d}{\eta_g} \right]^{0,5} \left(\frac{\eta_g}{K_g \rho_g} \right)^{1/3}. \quad (84)$$

В [81] сравнивались оценки температуры поверхности, полученные с помощью этого метода, с экспериментальными данными в области парокapельного потока для воды при давлении 6,9 МПа в вертикальной трубе длиной 5,8 м с внутренним диаметром 12,6 мм. На рис. 32 приведено это сравнение для трех значений массовой скорости. Уравнения, предложенные в [84], получены для коэффициента теплоотдачи к перегретому пару. Установлено, что разумное согласование достигается при размере капель в месте высыхания пленки (d_{cr}) $\sim 0,3$ мм.

Другие, более недавние модели предложены в [75, 85]. Вследствие особенностей формулировки эти модели можно успешно применять для пароводяной смеси и для других жидкостей.

2.7.4. Кипение при вынужденной конвекции в горизонтальных трубах

Дж. Г. Колльер

Горизонтальные трубы часто используются в котлах-утилизаторах, испарителях хладагентов и в некоторых других типах теплообменного оборудования. Из-за компактности горизонтальные участки часто относительно коротки и образуют так называемые змеевики; труба может представлять собой также спиральный змеевик. Ниже рассмотрено влияние колен и змеевиков на интенсивность теплоотдачи.

Интенсивность теплоотдачи в горизонтальных трубах отличается от вертикальных из-за того, что гравитационные силы вызывают асимметрию структуры потока. Обстоятельный обзор таких работ сделан в [1]. Поскольку отличия от вертикальной трубы связаны непосредственно с возникновением сухих участков по периметру канала, рассмотрим сначала этот аспект.

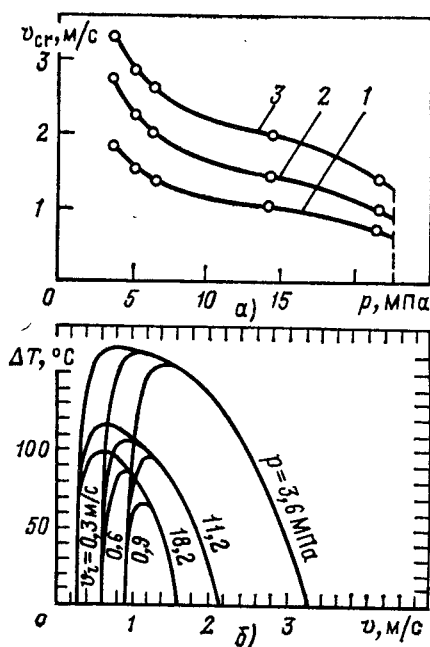


Рис. 1. Стратификация и перегрев в горизонтальных испарительных трубах [2]:

a — зависимость критической двухфазной скорости, ниже которой наблюдается перегрев, от давления при различных тепловых нагрузках; $1-q \geq 20$ кВт/м²; $2-q \geq 30$ кВт/м²; $3-q \geq 50$ кВт/м²; длина трубы 8,2 м; $D=56$ мм; b — перегрев в горизонтальной испарительной трубе при тепловом потоке 100 кВт/м²; ΔT — разность температур вершины и основания трубы

А. Высыхание пленки в горизонтальных трубах, коленах и змеевиках. Высыхание пленки в горизонтальной трубе отличается от высыхания пленки в вертикальной трубе.

1. При низких скоростях может происходить стратификация потока в условиях малого паросодержания и недогрева. Это может привести к перегреву труб парового котла при умеренных тепловых потоках.

2. Высыхание пленки при высоких паросодержаниях происходит на относительно протяженном участке трубы; начинается в верхней ее части, где толщина жидкой пленки и расход наименьшие, и заканчивается при полном испарении ручейка, текущего вдоль основания трубы. В этих условиях пар в верхних частях трубы может стать перегретым, перед тем как произойдет высыхание пленки в ее основании.

В [2] сообщается об эффектах стратификации пароводяной смеси при высоком давлении в горизонтальной трубе, что приводит к большой разности температур верхней и нижней образующих испарительной трубы. Эксперименты проводились на одиночной трубе длиной 7,5 м, внутренним диаметром 56 мм при давлениях от 1 до 22 МПа с тепловыми нагрузками от 22 до 135 кВт/м² и входными скоростями от 0,24 до 1 м/с. Существует критическая двухфазная скорость v , ниже которой стратификация происходит, а выше не наблюдается. Эта критическая скорость v увеличивается с тепловым потоком до 60 кВт/м² и уменьшается с увеличением давления (рис. 1). Исследование влияния угла наклона θ показало, что перегрев происходит только при угле наклона к горизонтали, меньшем 9,5°.

Используя аналогию спирт — вода для пароводяного потока, авторы [3] получили следующее выражение для критической скорости:

$$v = 2,57 \left\{ \frac{[\sigma g_n \cos \theta (\rho_l - \rho_g)]^{0,5}}{\rho_l \mu K^2} \right\}^{0,5} \quad (1)$$

Таблица 1. Значения критической скорости v , предотвращающей стратификацию [см. (2)] пароводяного потока в горизонтальных трубах

D , мм	p , МПа					
	3,35	6,42	11,29	14,6	16,5	18,67
20	2,71	2,47	2,11	1,82	1,63	1,37
40	2,92	2,67	2,28	1,97	1,77	1,48
60	3,06	2,80	2,38	2,06	1,85	1,55

где θ — угол наклона трубы к горизонтали; $\cos \theta$ вводится для получения соответствующей компоненты гравитационного поля, нормальной к границе раздела; f — фактор трения Фаннинга; K — эмпирическая постоянная, найденная в [3], $K=2,17$. Подстановка f и K (1) приводит к следующему уравнению:

$$v = 6,67 \left\{ \frac{D^{0,2} [\sigma g_n (\rho_l - \rho_g)]^{0,5}}{\rho_l^{0,8} \eta_l^{0,2}} \right\}^{0,555} \quad (2)$$

В табл. 1 приведены значения v , рассчитанные по уравнению (2) для пароводяных потоков при различных давлениях и диаметрах трубы. Как видно из рис. 1, наблюдается отличное согласование данных, и уравнение (2) рекомендуется для определения минимальной одно- или двухфазной скорости, ниже которой в горизонтальной трубе будет происходить стратификация.

При высоких паросодержаниях условия высыхания пленки такие же, как и для вертикальной трубы. Однако тепловой поток, при котором происходит высыхание пленки в горизонтальных трубах, может быть намного ниже, чем в вертикальных, что видно из рис. 2 [4]. Хотя нет общего правила, связывающего тепловые потоки при высыхании пленки в горизонтальных и вертикальных трубах, можно отметить, что различие между этими двумя ситуациями становится меньше при уменьшении диаметра трубы и разности плотностей фаз (давление возрастает) и увеличении массовой скорости.

Другим фактором, влияющим на высыхание пленки в горизонтальных трубах, является наличие колена в 180°. В [5] показано, что колено вызывает возмущения потока в широком диапазоне рабочих условий. Возмущения приводят к большому по амплитуде колебаниям температуры стенки на длине до 70 диаметров вниз по потоку от колена. При низких тепловых потоках (порядка 100 кВт/м²) эти возмущения достигают максимума в области волнового или кольцевого течения с малой скоростью (объемные паросодержания в диапазоне 0,6—0,65) и для

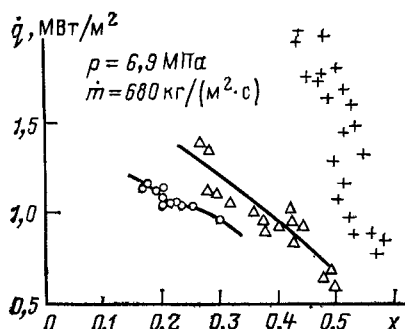


Рис. 2. Зависимость теплового потока при высыхании пленки от паросодержания для вертикальных (+ — $D=12,7$ мм) и горизонтальных (○ — $D=19$ мм; △ — $D=12,7$ мм) труб [4]

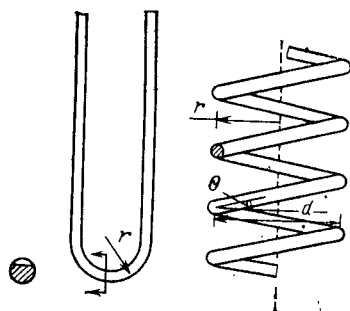


Рис. 3. Стратификация в коленях и змеевиках

воды наблюдаются при массовых скоростях, меньших 1200—1000 кг/(м²·с).

Стратификация может происходить также в вертикальных коленях и спиральных змеевиках (рис. 3). Для вертикального колена в [6] показано, что гравитационная сила, поддерживающая стратифицированный поток, дополняется центробежными силами, так что $g_n \cos \theta$ в уравнении (1) заменяется на $g_n + v^2/r$. Включение этой модификации в уравнение (2) дает

$$v = 6,67 \left\{ \frac{D^{0,2} [\sigma (g_n + v^2/r) (\rho_l - \rho_g)]^{0,5}}{\rho_l^{0,8} \eta_l^{0,2}} \right\}^{0,555} \quad (3)$$

При выводе уравнения (3) вторичный поток, который, как известно, существует в коленях и змеевиках (см. § 2.2.2), не учитывают. Этот вторичный поток приводит к усилению стратификации и увеличению v . В случае, экспериментально исследованном в [6], для трубы с внутренним диаметром 19 мм и радиусом колена $r=0,45$ м, постоянная в уравнении (3) увеличивается до 7,48, а критическая скорость v — на 17—20%. Экспериментальные данные показывают, что эффект вторичного потока следует учитывать при низких объемных паросодержаниях ($e_g < 0,5$) и можно не принимать во внимание для высоких объемных паросодержаний ($e_g > 0,8$).

В случае спирального змеевика, поскольку гравитационная и центробежная силы не действуют в одинаковом направлении, $g_n \cos \theta$ в уравнении (1) следует заменить результирующей силой $[(g_n \cos \theta)^2 + (v^2/r)^2]^{0,5}$, где θ — угол наклона трубы змеевика.

В [7—10] сообщается о данных по критическому тепловому потоку для спиральных труб. В [7, 8] обнаружено, что в области недогрева критический тепловой поток ниже, чем в прямолинейной вертикальной трубе, вследствие стратификации рассмотренного выше типа. Все три группы исследователей считают, что при высоких паросодержаниях переход в область с недостатком жидкости в спиральном змеевике происходит при большем

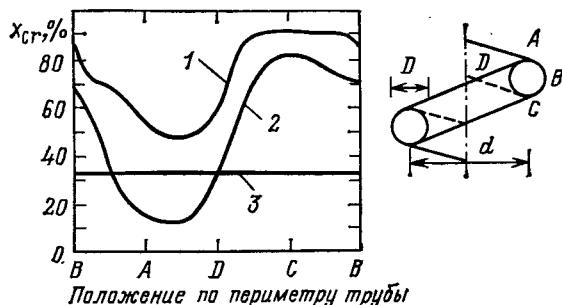


Рис. 4. Высыхание пленки в спиральном змеевике в пароводяном потоке ($p=17,9$ МПа; диаметр трубы $D=10,7$ мм; $\dot{m}=678$ кг/(м²·с); $\dot{q}=394$ кВт/м²): 1 — спиральный змеевик, $d=813$ мм; 2 — то же $d=3302$ мм; 3 — прямая вертикальная труба [9]

паросодержания, чем при соответствующем условии в прямолинейной вертикальной трубе (рис. 4). В большей части случаев критическое паросодержание во всех точках периметра трубы выше, чем в прямолинейной трубе. Высыхание пленки происходит сначала на стенке трубы между точкой, ближайшей к центру кривизны D , и верхней частью трубы A . При низких давлениях центробежные силы, действующие на паровую фазу, могут стать выше, чем силы, действующие на жидкую фазу, вследствие различия скоростей фаз, т. е. $(\rho_g u_g^2/r) > \rho_l u_l^2/r$. Тогда у внутренней стороны змеевика жидкость может двигаться быстрее, чем вблизи наружных частей. Эксперименты по кипению при низком давлении в спиральном змеевике, проведенные в [11], подтвердили это предположение: высыхание пленки происходило сначала при паросодержании, близком к 100%, в вершине A и основании C трубы, затем в точке, ближайшей к центру тяжести.

В [10] получена корреляция, которую можно использовать для оценки граничного паросодержания в точках периметра, наиболее близкой D и удаленной B от центра кривизны, в пароводяном потоке в диапазоне параметров: давление от 6,0 до 18,0 МПа, массовая скорость от 300 до 1800 кг/(м²·с), диаметр трубы от 10,7 до 18,6 мм; отношение диаметров змеевика и трубы от 6,25 до 18,5.

Граничное паросодержание для точки трубы, ближайшей к центру кривизны змеевика,

$$x_{cr, D} = 1 - 0,53 \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{d/100D}{(\dot{m}/10^3)^{1,5}} \left(\frac{\dot{q}}{100} \right)^n \quad (4)$$

где

$$n = 0,75 (\dot{m}/10^3)^{0,5}.$$

Граничное паросодержание в точке трубы, самой удаленной от центра кривизны змеевика, равно

$$x_{cr, B} = 1 - 1,163 \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{\dot{q}}{10^3} - 0,0446 \frac{\rho_g}{\rho_l} \left(\frac{\dot{m}}{10^3} \right)^2 \left(\frac{d}{D} \right)^{0,5} \quad (5)$$

В. Теплоотдача в горизонтальных трубах, коленях и змеевиках. Как уже отмечалось, проектировщики теплообменников, вынужденные использовать горизонтальные трубы, в которых происходит кипение, должны выбирать трубы малого диаметра и скорость жидкости на входе

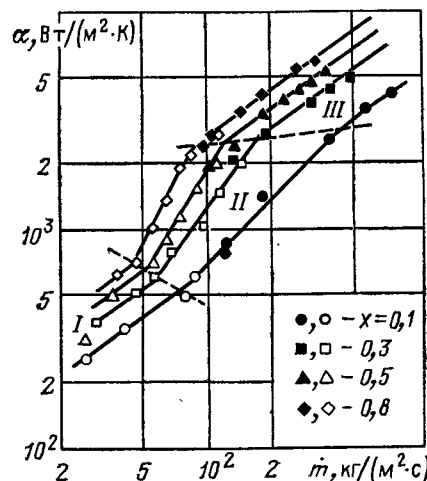


Рис. 5. Влияние режима потока на кипение в горизонтальных трубах при различном паросодержании x (для хладагента-11, $T_{sat}=10^\circ\text{C}$; $D=14$ мм [11])

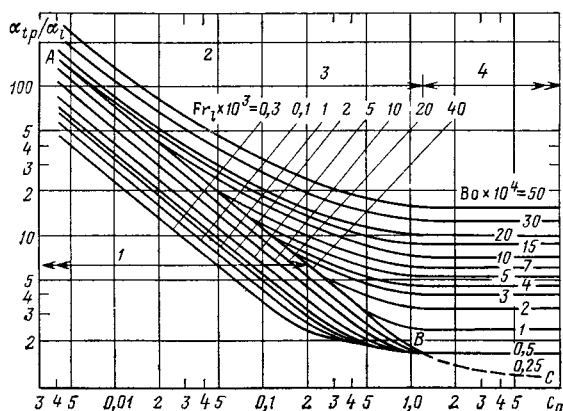


Рис. 6. Корреляция [13]:

1 — кипение с частично осушенной поверхностью; 2 — линия АВ — кипение с полностью смоченной поверхностью; 3 — область подавления пузырей; 4 — область пузырькового кипения

настолько большой, насколько возможно из соображений падения давления. В качестве первого шага следует установить диапазон ожидаемых режимов по всей испарительной трубе, используя методы, указанные в § 2.3.2. Расположение любых стратифицированных областей и граничные паросодержания следует определять с помощью рекомендаций, данных выше. Для областей, где смочена вся поверхность трубы, как в случае дисперсного пузырькового и кольцевого с высокой скоростью режимов, интенсивность теплоотдачи можно рассчитать с помощью методов, рассмотренных в § 2.7.3. Однако при низких скоростях возникают асимметричные режимы течения, такие как стратифицированный, волновой и снарядный, и средняя теплоотдача будет понижаться вследствие того, что верхние части трубы будут сухими некоторое или все время. Это влияние режима потока ясно видно из рис. 5, на котором приведены данные [12] для испарения хладона-11 в трубе диаметром 14 мм. Эти авторы предложили следующее уравнение для кольцевого течения (III):

$$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_l} = C (\Phi_f^2)^{(n-1)/n}, \quad (6)$$

где n — показатель степени в зависимости dp/dz от $\dot{m}$; Φ_f^2 — параметр Мартинелли $(dp/dz)_{tp}/(dp/dz)_l$. Постоянная C зависит от используемой жидкости:

$$\begin{aligned} C &= 1,45 \text{ для хладона-11 } (T_{\text{sat}} = 10^\circ\text{C}); \\ C &= 1,85 \text{ для хладона-12 } (T_{\text{sat}} = 0^\circ\text{C}); \\ C &= 1,95 \text{ для хладона-22 } (T_{\text{sat}} = -10^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

В области стратифицированного течения (I) неполное смачивание снижает средний коэффициент теплоотдачи и приведенные значения постоянной C делятся на $(1-x)^{0,5}$. Для промежуточного режима течения (волновой/снарядный) предлагается логарифмическая интерполяция.

Иначе можно использовать корреляцию, которую предложил недавно автор [13]. Зависимость, предложенная в этой работе, подобная полученной Ченом (см. § 2.7.3), но ее преимущество состоит в том, что ее можно применить к частично стратифицированным потокам в горизонтальных каналах. Полученная корреляция представлена в графической форме на рис. 6. В качестве ординаты использовано отношение α_{tp}/α_l , в качестве абсциссы

$$C_0 = \left(\frac{1-x}{x} \right)^{0,8} \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0,5}.$$

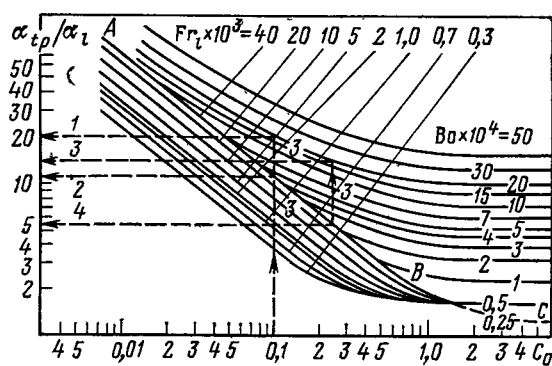


Рис. 7. Решение для примеров 1—4, поясняющее применение рис. 6

Кроме перечисленных выше используются еще два других параметра:

$$Bo = \frac{\dot{q}}{m \Delta h_v} \text{ — число кипения;}$$

$$Fr_L = \frac{\dot{m}^2}{\rho_l g_n D} \text{ — число Фруда.} \quad (7)$$

На рис. 7 показано применение диаграммы. Значения абсциссы C_0 , Bo и Fr_L рассчитаны для конкретных условий.

Пример 1. Вертикальная труба; $C_0 = 0,1$, $Bo = 20 \cdot 10^{-4}$; $Fr_L = 0,002$. Поскольку труба вертикальная, пренебрегаем Fr_L . Проводим вертикальную линию при $C_0 = 0,1$ до пересечения с кривой для $Bo = 20 \cdot 10^{-4}$. От этой точки пересечения проведем горизонтальную линию влево и получим $\alpha_{tp}/\alpha_l = 20$ на оси ординат.

Пример 2. Вертикальная труба; $C_0 = 0,1$; $Bo = 2 \cdot 10^{-4}$; $Fr_L = 0,002$. Так как труба вертикальная, пренебрегаем Fr_L . Проводим вертикальную линию при $C_0 = 0,1$ до пересечения с линией АВ. Все кривые для значений $Bo < 4,5 \cdot 10^{-4}$ сливаются в одну линию АВ; поэтому число кипения в этом случае не имеет значения. Проведем горизонтальную линию от точки пересечения к оси ординат, получим $\alpha_{tp}/\alpha_l = 11$.

Пример 3. Горизонтальная труба; $C_0 = 0,1$; $Bo = 20 \cdot 10^{-4}$; $Fr_L = 0,002$. Проводим вертикальную линию при $C_0 = 0,1$. От точки пересечения ее с линией $Fr_L = 2 \cdot 10^{-3}$ проведем горизонтальную линию направо до пересечения с линией АВ. От этой точки пересечения проведем вертикальную линию до кривой для $Bo = 20 \cdot 10^{-4}$. Затем проведем горизонтальную линию от последней точки пересечения налево до оси ординат и найдем $\alpha_{tp}/\alpha_l = 14$.

Пример 4. Горизонтальная труба; $C_0 = 0,1$; $Bo = 2 \cdot 10^{-4}$; $Fr_L = 0,002$. Проводим вертикальную линию при $C_0 = 0,1$. Из точки ее пересечения с линией $Fr_L = 2 \cdot 10^{-3}$ проведем горизонтальную линию направо до линии АВ. Все кривые для значений $Bo < 2,0 \cdot 10^{-4}$ сливаются в линию АВ, так что число кипения в этом случае не имеет значения. Продолжим горизонтальную линию налево и получим на оси ординат $\alpha_{tp}/\alpha_l = 5,4$.

Корреляция верна в диапазоне приведенного давления от 0,004 до 0,8. Среднеквадратичное отклонение 780 экспериментальных точек составляет 14%, что несколько выше, чем в зависимости Чена. Около 10% экспериментальных точек обнаруживают отклонения больше чем $\pm 30\%$. Следует отметить, что когда корреляция используется для горизонтальной трубы, величина α_{tp} представляет собой средний коэффициент по ее периметру. Зависимость [13] хорошо согласуется с экспериментальными данными [12] для коэффициентов теплоот-

дачи к хладону-11 в горизонтальной трубе диаметром 14 мм.

В коленах и спиральных змеевиках при кольцевом течении коэффициент теплоотдачи изменяется по периметру трубы. Этот эффект ясно виден из экспериментов [11]. Однако при пузырьковом кипении коэффициент теплоотдачи не зависит от центробежных сил и при расчете его следует принять таким же, как в вертикальной прямой трубе, за исключением случаев, где стратификация или высыхание пленки приводит к тому, что часть поверхности становится сухой.

Наконец, следует отметить, что перегрев верхней части поверхности труб и локальное высыхание жидкой пленки после колена совместно с отложением частиц вещества могут способствовать повреждению труб в котлах вследствие коррозии «под нагрузкой». Таким образом, следует избегать стратификации и преждевременного высыхания пленки в случаях, где тепловой поток — независимая переменная. В других типах испарителей, где температура источника теплоты контролируется, например, в системах с конденсацией пара, при снижении среднего коэффициента теплоотдачи стратификация или преждевременное высыхание пленки может не приводить к другим серьезным последствиям при условии, что рабочая жидкость чистая.

2.7.5. Кипение на трубах и в пучках труб

Дж. Г. Колльер

А. Кипение при поперечном обтекании одиночных труб.

Ниже рассмотрен случай, когда поток обтекает трубу или цилиндр под действием вынужденной, а не свободной конвекции (см. § 2.7.2). На фотографиях, которые получены в [1], хорошо видны режимы потока при подъемном течении воды с температурой, близкой к насыщению, вокруг однородно нагреваемой цилиндрической трубы. При умеренных тепловых потоках, обычно около 20% от критической тепловой нагрузки, в спутной струе за цилиндром образуется паровая полость. Сначала эта полость не является сплошной по длине цилиндра, но с ростом теплового потока увеличение длины полости в направлении течения приводит к образованию однородной полосы пара. Увеличение скорости от 0,4 до 1,5 м/с или диаметра трубы от 0,254 до 4,8 мм также вызывало образование большой стабильной паровой полости за цилиндром. При этих условиях жидкость, достигающая верхней половины цилиндра, движется между паровыми пузырями и поверхностью нагрева, когда пузыри попадают в полость спутной струи. При низких тепловых потоках жидкости больше подводится, чем испаряется, и избыток уносится в полость. Критический тепловой поток достигается, когда подводящей жидкости становится недостаточно для охлаждения верхней половины цилиндра.

В другом исследовании [2] рассмотрен эффект недогрева воды, текущей вокруг нагреваемого стержня. Для малых недогревов ($<16^\circ\text{C}$) наблюдаемый режим потока такой же, как для воды при температуре насыщения. При больших недогревах пара недостаточно для образования полости в следе за цилиндром из-за быстрой конденсации.

Экспериментальные данные по кипению жидкостей при поперечном обтекании нагреваемых цилиндров получены для воды в [1—6], для хладона-113 в [5], для метанола в [6], для изопропанола в [7].

На рис. 1 представлены экспериментальные данные [3], полученные для насыщенной воды, текущей со скоростью 1 м/с по нормали к электрически нагреваемому цилиндру из нержавеющей стали диаметром 1,22 мм. Данные сравниваются с результатами по кипению воды на таком же цилиндре при свободной конвекции. В области высоких

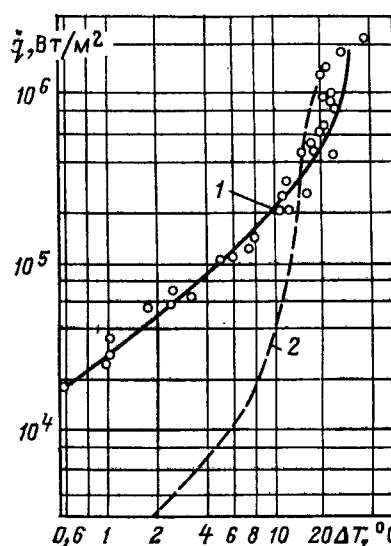


Рис. 1. Влияние поперечного потока на кривую пузырькового кипения для воды (10^6 Па) [3]:

1 — при скорости потока 1 м/с; 2 — при свободной конвекции

тепловых потоков две кривые близки, тогда как при малых температурных напорах они согласуются соответственно с расчетами для однофазной вынужденной и свободной конвекции. Поэтому кривую кипения при вынужденной конвекции можно получить путем интерполяции (рис. 2).

Эта интерполяция основана на методе, предложенном в [8]. Кривая зависимости теплового потока $\dot{q}_n$ от перегрева стенки ΔT_{sat} при полностью развитом пузырьковом кипении получена с помощью методов, приведенных в § 2.7.2. Аналогичным образом тепловой поток $\dot{q}_c$ при вынужденной однофазной конвекции рассчитан в зависимости от температуры стенки T_w с использованием методов, изложенных в § 2.5.2. Затем построена зависимость теплового потока $\dot{q}_c$, так же как $\dot{q}_n$, от перегрева стенки ΔT_{sat} . Перегрев стенки $\Delta T_{sat,i}$, соответствующий началу кипения, найден с использованием методов, изложенных в § 2.7.3. Соответствующий тепловой поток $\dot{q}_i$ устанавливается по кривой для полностью развитого пузырькового кипения. В этом случае кривая кипения при вынужденной конвекции состоит из участка кривой $\dot{q}_c$ до перегрева стенки $\Delta T_{sat,i}$ и участка, описываемого следующей интерполяционной формулой при высоких

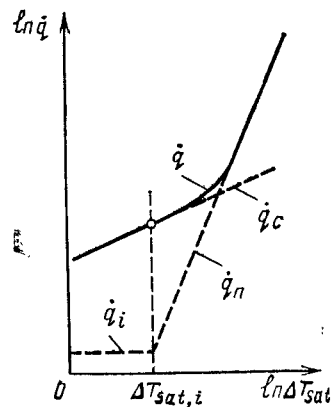


Рис. 2. Построение кривой пузырькового кипения при вынужденной конвекции

перегревах стенки в результате подстановки соответствующих величин $\dot{q}_n$ и $\dot{q}_c$ в уравнение:

$$\dot{q} = \dot{q}_c \left\{ \left[1 + \frac{\dot{q}_n}{\dot{q}_c} \left(1 - \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_n} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (1)$$

Если $\dot{q}_i \ll \dot{q}_n$, что наблюдается часто для условий насыщения, уравнение (1) сводится к форме, предложенной в [9]

$$\dot{q} = \dot{q}_c \left[1 + \left(\frac{\dot{q}_n}{\dot{q}_c} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

При восходящем поперечном обтекании перегрев стенки по периметру нагреваемого цилиндра изменяется до 30% [4]. Как ожидалось, самые низкие интенсивности теплоотдачи наблюдаются обычно на верхней половине цилиндра в области отделения спутной струи. В этой области пузырьковое кипение обеспечивает основной механизм переноса теплоты при небольшом вкладе конвекции, которая улучшает теплоотдачу по сторонам и особенно у основания цилиндра.

В. Критический тепловой поток при поперечном обтекании одиночных труб. В [7] описаны имеющиеся экспериментальные данные по критическому тепловому потоку при поперечном восходящем обтекании жидкостью одиночных цилиндров и труб в зависимости от гидродинамических режимов потока. Выделены три области.

1. Область очень низкой скорости. До точки, в которой образуется двумерная спутная струя, справедливы уравнения для критического теплового потока $\dot{q}_{cr}$ при кипении в условиях свободной конвекции. Таким образом,

$$\frac{\dot{q}_{cr, p}}{\dot{q}_{cr, z}} = \begin{cases} 0,94 (R')^{-1/4} & \text{для } 0,12 < R' < 1,17; \\ 0,904 & \text{для } R' \geq 1,17, \end{cases} \quad (3)$$

где $\dot{q}_{cr, z}$ — критический тепловой поток на бесконечной горизонтальной пластине:

$$\dot{q}_{cr, z} = \frac{\pi}{24} \rho_g^{1/2} \Delta h_v [\sigma g n (\rho_l - \rho_g)]^{1/4}; \quad (4)$$

R' — безразмерный радиус нагревателя:

$$R' = R \left[\frac{\sigma}{g n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{-1/2}. \quad (5)$$

2. Область малой скорости. Переход к двумерной спутной струе происходит при скорости u_∞ , определяемой из уравнения ¹

$$We_g \approx 0,1 \frac{\rho_g}{\rho_l} R'^2 \quad (\text{для воды } We_g = 6,3 \cdot 10^{-5} R'^2), \quad (6)$$

где

$$We_g = \frac{2R\rho_g u_\infty^2}{\sigma}.$$

При скоростях жидкости, больших значений, определяемых уравнением (6), критический тепловой поток равен

$$\frac{\pi \dot{q}_{cr}}{\rho_g \Delta h_v u_\infty} = 1 + \left(\frac{4}{We_g} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

3. Область высокой скорости. Второй переход происходит при высокой скорости жидкости, когда u_∞ определяется выражением

$$\frac{\pi \dot{q}_{cr}}{\rho_g \Delta h_v u_\infty} = 0,275 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/2} + 1. \quad (8)$$

¹ Уравнение (6), которое в оригинальной статье [7] было дано некорректно, исправлено.

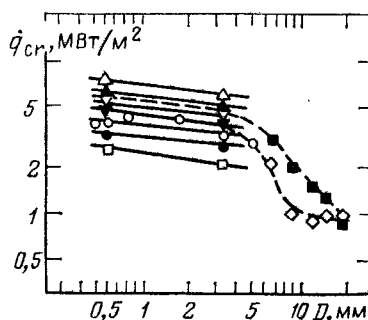


Рис. 3. Влияние диаметра цилиндра и скорости потока на $\dot{q}_{cr}$ для воды при 10^5 Па [4]

Обозначение	Скорость, м/с	Температура
△	2,9	} [1]
▽	2,1	
▽	1,4	
▽	1,05	
○	0,7	
●	0,55	} [4]
□	0,36	
■	1,66	
◇	1,04	

Для скоростей жидкости, больших значений, определяемых уравнением (8), критический тепловой поток равен

$$\frac{\pi \dot{q}_{cr}}{\rho_g \Delta h_v u_\infty} = 0,00592 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0,75} + 0,0521 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0,5}. \quad (9)$$

Последнее уравнение описывает 85% данных для воды, хладона-113, метанола и изопропанола с разбросом $\pm 20\%$. Эти уравнения показывают, что при поперечном обтекании насыщенной жидкостью цилиндра $\dot{q}_{cr}$ растет, как $(u_\infty)^{1/3}$, и уменьшается, как $D^{-1/3}$. Отмеченные тенденции видны из рис. 3, где приведена зависимость критических тепловых потоков для воды от диаметра цилиндра со скоростью, взятой как параметр. Экспериментальные данные [4] для воды получены при относительно больших диаметрах цилиндра — от 6,35 до 18 мм. На основе визуальных наблюдений предполагается, что измерения критического теплового потока выполнены до образования двумерной спутной струи.

Измеренные значения критической тепловой нагрузки на цилиндре диаметром 18 мм при скоростях поперечного потока до 1,66 м/с примерно такие же, как при кипении в большом объеме. Критерий в виде уравнения (6) предсказывает переход к двумерной спутной струе при намного меньшей скорости. Однако сравнение затруднено вследствие короткого экспериментального участка ($L/D \approx 2,5$) и конструкции креплений.

Информация о влиянии недогрева на $\dot{q}_{cr}$ при поперечном обтекании цилиндров ограничена. На рис. 4 приведены данные для воды, полученные в [2]. За исключением высоких значений u_∞ , линии для каждой скорости параллельны, что предполагает постоянное приращение $\dot{q}_{cr}$ с недогревом независимо от скорости. Как и для кипения с недогревом в большом объеме, можно записать

$$\dot{q}_{cr, sub} = \dot{q}_{cr, sat} + \dot{q}_{cr, p} B \Delta T_{sub}, \quad (10)$$

где $\dot{q}_{cr, sat}$ — критический тепловой поток при поперечном обтекании насыщенной жидкостью, определенный

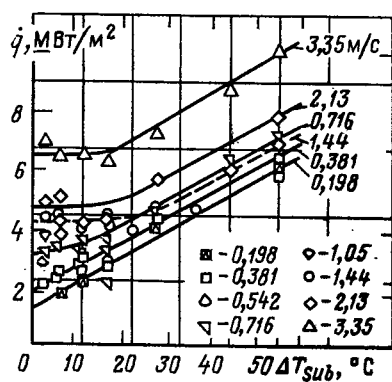


Рис. 4. Влияние недогрева воды на $\dot{q}_{cr}$ при поперечном обтекании трубы с наружным диаметром 3,17 мм при различных скоростях [2]

описанным выше способом; $\dot{q}_{cr, p}$ — критический тепловой поток при кипении насыщенной жидкости в большом объеме, рассчитанный по уравнению (17), § 2.7.2. Для B можно использовать любое из выражений, приведенных в § 2.7.2 [см. (27) — (29)]. Выбирая уравнение (28), § 2.7.2, получаем

$$\dot{q}_{cr, sub} = \dot{q}_{cr, sat} + 0,065 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0,8} \frac{c_{pl} \Delta T_{sub}}{\Delta h_v} \dot{q}_{cr, p} \quad (11)$$

При высоких скоростях $\dot{q}_{cr, sub}$ перестает зависеть от недогрева при температурах, близких к насыщению (рис. 4). Поэтому при

$$(c_{pl} \Delta T_{sub} / \Delta h_v) < 0,03$$

$$\dot{q}_{cr, sub} = \dot{q}_{cr, sat} \quad (12)$$

и при $(c_{pl} \Delta T_{sub} / \Delta h_v) \geq 0,03$

$$\dot{q}_{cr, sub} = \dot{q}_{cr, sat} + 0,065 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0,8} \left(\frac{c_{pl} \Delta T_{sub}}{\Delta h_v} - 0,03 \right) \dot{q}_{cr, p} \quad (13)$$

С. Пленочное кипение. Пленочное кипение при восходящем поперечном потоке у горизонтального цилиндра исследовалось в [10]. Экспериментальные данные, полученные на электрически обогреваемой графитовой трубе для различных жидкостей, включая n -гексан, четыреххлористый углерод, бензол, этиловый спирт, включены в две области. При низкой скорости поперечного течения

$$u_{\infty} / \sqrt{g_n D} < 1,0$$

$$\alpha = \alpha_c + 0,75 \alpha_r, \quad (14)$$

где α_r — коэффициент теплоотдачи радиацией, определяемый уравнением (44), § 2.7.2; α_c — коэффициент теплоотдачи при свободной конвекции, рассчитываемый согласно уравнению (36), § 2.7.2; D — наружный диаметр; u_{∞} — скорость невозмущенного потока.

Для высоких скоростей $u_{\infty} / \sqrt{g_n D} > 2,0$

$$\alpha = \alpha_c + 0,875 \alpha_r, \quad (15)$$

где α_c теперь определяется из следующего соотношения:

$$\alpha_c = 2,7 \left(\frac{u_{\infty} \lambda_g \rho_g \Delta h_v'}{D \Delta T_{sat}} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

а $\Delta h_v'$ — уравнения (35), § 2.7.2. Коэффициент теплоотдачи увеличивается со скоростью и уменьшается с диаметром. Типичные значения α_c для n -гексана, бензола и этилового спирта изменяются от 230 Вт/(м²·К) в условиях свободной конвекции до 625—800 Вт/(м²·К) при

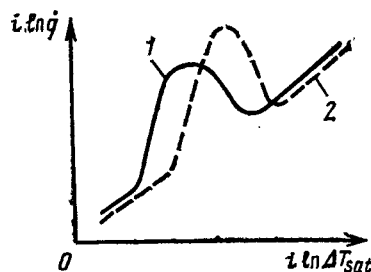


Рис. 5. Кривая кипения для трубного пучка (1) и одиночной трубы (2) [12]

скорости 4 м/с. Значения для четыреххлористого углевода примерно в 2 раза меньше указанных.

В [11] указанный подход распространен на восходящее поперечное обтекание недогретой жидкостью горизонтального цилиндра. При скоростях $u_{\infty} > 2,5$ м/с и при недогреве жидкости (около 45°C) коэффициенты теплоотдачи α_c увеличиваются примерно в 4 раза. Таким образом, эти значения приближаются к значениям, ожидаемым при пузырьковом кипении органических жидкостей [2000—3000 Вт/(м²·К)].

Д. Кипение на горизонтально расположенных трубах пучка. Хотя известно, что интенсивность теплоотдачи для нагреваемой трубы пучка отличается от интенсивности изолированной одиночной трубы, имеется лишь несколько исследований, в которых это различие является количественным. Горизонтальные трубные пучки используются в котлах по очистке и водяных холодильниках и недостаток данных удивляет. Тем не менее результаты, полученные, в частности, авторами [12—14], дают много полезной информации. Из рис. 5 хорошо видны основные отличия кривой кипения для одиночной горизонтальной трубы и горизонтального пучка. Турбулизация вследствие образующегося в пучке пара увеличивает коэффициент теплоотдачи в области пузырькового кипения, особенно при низких тепловых потоках [15]. При высоких перегревах стенки ΔT_{sat} присутствие большого количества пара в пучке приводит к образованию парового слоя, окружающего теплоотдающие поверхности при тепловых потоках, меньших критической тепловой нагрузки для изолированной одиночной трубы. Это понижение тем заметнее, чем больше габариты трубного пучка и плотности упаковки труб. Изменение теплового потока от перегрева стенки в области критической тепловой нагрузки более плавное, чем для одиночной трубы. Наконец, коэффициент теплоотдачи при пленочном кипении может повыситься вследствие усиления турбулентности в трубном пучке, хотя в несколько меньшей степени, чем при пузырьковом кипении.

Основываясь на результатах ограниченных промышленных испытаний, автор [16] предложил считать максимальный коэффициент теплоотдачи при кипении на трубном пучке равным 1700 Вт/(м²·К) для органических жидкостей и 5700 Вт/(м²·К) для воды. Считается также, что максимальная тепловая нагрузка в пучке не должна превышать 38 000 Вт/м² для установок, работающих на органических жидкостях при естественной циркуляции, и 63 000 Вт/м² — при вынужденной конвекции. Максимальный допустимый тепловой поток при испарении воды или водного раствора в пучке в любых условиях циркуляции должен составлять 95 000 Вт/м². Эти очень общие рекомендации делают результаты расчетов крайне консервативными, за исключением условий в вакууме или при давлениях, близких к критическому. В общем для расчетов предпочтительны методы, которые будут указаны ниже.

Е. Теплоотдача для горизонтально расположенных пучков труб. Интенсивности теплоотдачи при испарении в трубных пучках значительно выше, чем на одиночной трубе, из-за влияния пара, проходящего через пучок.

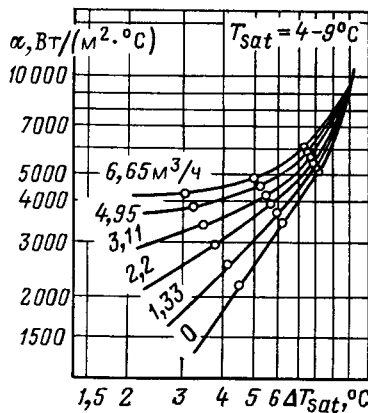


Рис. 6. Влияние вдува пара на теплоотдачу в пучке стержней для хладагента-12 [17] при различных скоростях потока

Детальные исследования этого явления, проведенные авторами [17—19], показали следующее.

1. При кипении на нагреваемой трубе пучка теплоотдача меняется незначительно или остается такой же по сравнению с изолированной одиночной трубой, помещенной в однофазный поперечный поток жидкости.

2. Наблюдается значительное повышение теплоотдачи для любой трубы пучка в положениях, когда она омывается паром, генерируемым на трубах, расположенных выше по потоку.

3. Это повышение наибольшее при малых перегревах стенки или тепловых нагрузках и пропорционально объемному расходу пара. Это хорошо видно из рис. 6, где приведены результаты [17] для инъекции пара под нагреваемой трубой пучка при испарении хладагента-12.

Так как рост теплоотдачи максимален при низких перегревах стенки, ясно, что его механизм связан с компонентом общего теплового потока за счет конвекции. Если считать, что присутствие пара приводит только к увеличению скорости жидкой фазы, то повышение теплового потока в результате конвекции определяется выражением

$$\frac{\alpha_{c, tp}}{\alpha_c} = \frac{\dot{q}_{c, tp}}{\dot{q}_c} = \left(\frac{1}{1 - \varepsilon_g} \right)^n, \quad (17)$$

где индекс c относится к коэффициенту теплоотдачи к однофазной жидкости, рассчитанному для трубных пучков с использованием методов, приведенных в § 2.5.3; индекс c, tp — к коэффициенту теплоотдачи к двухфазной жидкости, соответствующему локальному объемному паросодержанию ε_g . Если течение жидкости ламинарное, то $n = 1/3$; при турбулентном течении $n = 0.8$.

Для определения общего коэффициента теплоотдачи нагреваемой трубы пучка используется уравнение (2), в которое вместо q_c подставляют $q_{c, tp}$. Чтобы воспользоваться этим подходом, надо знать скорости жидкости и пара в пучке. Их можно определить расчетом от трубы к трубе и с помощью методов, предложенных в § 2.3.2 для нахождения объемного паросодержания. Другие методы, справедливые только для хладагентов, предложены в [15, 20]. Следует отметить, что теплоотдача в реальном трубном пучке зависит от количества жидкости, которая проходит по щели между трубой пучка и стенкой кожуха. При больших количествах пара, соответствующих высоким объемным паросодержаниям в пучке, образуется слой пара, снижающий коэффициент теплоотдачи. Это снижение будет происходить раньше при высоких тепловых нагрузках и ожидается при объемном паросодержании ε_g , большем 0.85.

Г. Критический тепловой поток для горизонтальных пучков труб. Различные механизмы, которые могут при-

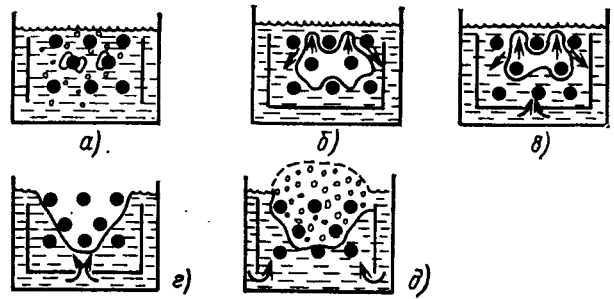


Рис. 7. Различные механизмы высыхания пленки в пучках труб

сти к достижению предельного теплового потока в трубном пучке, рассмотрены ниже (рис. 7).

1. *Кризис, аналогичный кризису при кипении с большим объемом* (рис. 7, а), наблюдается в небольших пучках со значительным расстоянием между трубами. В рассматриваемом случае проходы для потока в пучке в основном заполнены жидкостью и предельный процесс такой же, как для изолированной одиночной трубы.

2. *Отсутствие циркуляции и ограниченная подпитка* (рис. 7, б). Этот механизм проявляется при отсутствии циркуляции через трубный пучок. Жидкость может поступать в пучок только сверху и задерживается уходящим из него паром. Ограничение по подпитке создается, когда выходящий пар препятствует смачиванию опускным потоком жидкости всех поверхностей нагрева пучка. Этот механизм более вероятен в больших пучках с плотной упаковкой труб. В одних проходах пучка может возникнуть опускной поток, в других — подъемный, приводя к заметной внутренней циркуляции.

3. *Циркуляция и подпитка ограничены* (рис. 7, в). Этот механизм подобен второму, за исключением того, что существует небольшая циркуляция в пучке по сторонам и у основания. Этот поток жидкости испаряется в пучке и образующийся пар проходит вверх, где соединяется с паром, генерируемым при движении жидкости в пучок сверху. Снова создается предельное условие, когда общий расход пара препятствует достаточному притоку жидкости сверху. Как и во втором случае, этот механизм наблюдается в больших пучках с плотной упаковкой труб.

4. *Ограниченная циркуляция* (рис. 7, г). При увеличении циркуляции через пучок создается условие, когда поток пара, образующийся только при этой циркуляции, препятствует вообще притоку жидкости сверху. Предельным условием является полное испарение жидкости, поступающей к верхним трубам пучка. Это условие может возникнуть в узких, но высоких трубных пучках.

На практике трудно различать механизмы 2, 3 и 4.

5. *Ограниченный унос* (рис. 7, д). Если циркуляция через пучок продолжает увеличиваться, заметное количество жидкости может быть унесено в виде капель в потоке пара и таким образом высыхание пленки будет происходить на верхних трубах пучка при паросодержаниях, значительно меньших 100%.

Можно получить простое аналитическое выражение для второго условия при допущении, что в пучке круглого поперечного сечения, расположенном в прямоугольном канале с глухими стенками по торцам, затопление будет происходить только до середины высоты пучка. Используя критическую скорость пара для затопления, приведенную в § 2.3.2, можно получить следующее выражение по аналогии с уравнением для критического теплового потока в нагреваемой трубе с глухими стенками по торцам (см. § 2.7.3):

$$\dot{q}_{cr} = \left[\frac{D_b (P - D)^{3/2}}{PN\pi D} \right] \frac{\Delta h_v [g_n \rho_g (\rho_l - \rho_g)]^{1/2}}{[1 + (\rho_g / \rho_l)^{0.25}]^2}, \quad (18)$$

Таблица 1. Значения Ψ , 10^{-6} Вт/м²

Жидкость	Давление, МПа			Жидкость	Давление, МПа		
	0,1	0,345	2,07		0,1	0,345	2,07
Этан	—	—	4,50	n-Пентан	1,76	2,67	2,58
Пропан	—	3,12	3,44	i-Пентан	1,78	2,70	2,62
Пропилен	—	3,08	3,89	n-Гексан	1,80	2,57	2,10
n-Бутан	2,14	2,83	3,00	Циклогексан	2,06	2,78	2,75
i-Бутан	1,91	2,68	2,54	Бензол	2,40	3,72	4,87
Бутен-1	1,92	2,82	2,92	n-Гептан	1,70	1,64	—

где D_b — диаметр пучка; N — общее число труб; P — шаг труб; D — наружный диаметр трубы. Ниже показано, что это выражение для критического теплового потока в трубном пучке можно рассматривать как произведение двух членов: параметра, характеризующего геометрию пучка, и комплекса, составленного из физических свойств жидкостей. Как и ожидалось, q_{cr} растет с уменьшением габаритов пучка (D_b/N увеличивается) и ростом отношения шага P к диаметру трубы D . Если значение q_{cr} , найденное по уравнению (18), превышает расчетное для изолированной одиночной трубы, то следует использовать последнее. Ситуация соответствует описанному выше первому условию. В некоторых случаях интерес представляет общая мощность пучка на единицу его длины $\dot{Q}_{cr}$. Преобразуя уравнение (15), получаем

$$\dot{Q}_{cr} = \frac{D_b}{P} (P - D)^{3/2} \frac{\Delta h_v [g n \rho_g (\rho_l - \rho_g)]^{1/2}}{[1 + (\rho_g / \rho_l)^{0.25}]^2}. \quad (19)$$

В [14] предложена корреляция для критического теплового потока в трубном пучке в условиях, когда циркуляция жидкости ограничена. Корреляция получена в результате модификации уравнения (4) для изолированной одиночной трубы, выведенного Зубером $q_{cr, z}$. Как отмечено выше, критический тепловой поток зависит от безразмерного параметра плотности упаковки труб Φ и размерного коэффициента физических свойств Ψ :

$$\Phi = \frac{D_b L}{A} \cong \frac{2 P V N (\sin \theta) / \pi}{\pi D N} = 0,359 \frac{P}{D} \sqrt{\frac{(\sin \theta) / \pi}{N}}, \quad (20)$$

где L — длина пучка; A — площадь поверхности трубного пучка; θ — угол наклона трубы;

$$\Psi = \Delta h_v \rho_g^{1/2} [g n \sigma (\rho_l - \rho_g)]^{1/4}. \quad (21)$$

Значение Ψ для углеводородов приведены в табл. 1. Выражение для максимального теплового потока можно представить в виде:

$$q_{cr} = K(\Phi)(\Psi). \quad (22)$$

На рис. 8 показано изменение максимального теплового потока пучка в зависимости от этих двух параметров. Кривые переходят в величину для одиночной трубы, рассчитанную по корреляции Зубера при значении $\Phi = 1/\pi$. Эмпирическая постоянная K в уравнении (22) при $\Phi > 0,06$ [14] равна 1,23.

Имеющиеся экспериментальные данные показывают, что результаты расчетов по уравнениям (18) и (22) консервативны. Эти уравнения предсказывают начало образования парового слоя в пучке. При увеличении среднего перегрева стенки больше труб становятся сухими, но

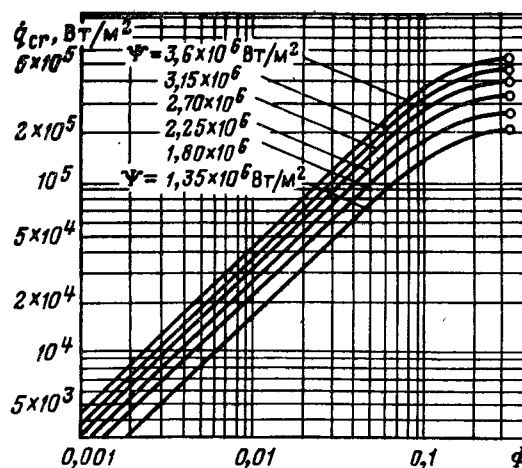


Рис. 8. Максимальный тепловой поток в горизонтальных трубных пучках [14] при различных значениях Ψ . Точки — результаты, полученные для одиночной трубы

понижение теплоотдачи в этом случае компенсируется частично ростом коэффициента теплоотдачи для тех труб, к которым жидкость подходит в достаточном количестве. Это приводит к образованию плоского максимума на зависимости теплового потока от перегрева стенки.

Экспериментальные данные по q_{cr} при вынужденной циркуляции через пучок (пятое условие) ограничены. Авторы [21] измерили q_{cr} для воды, текущей через различные пучки с поперечными стержнями диаметром 0,3 см. Каждый пучок состоял из 12 рядов стержней, при этом стержни смежных рядов ориентированы под прямыми углами друг к другу. Шаг в одном из рядов изменялся; испытаны сборки с шагами 0,475; 0,635 и 0,950 см. Критические тепловые потоки, полученные для этих сборок, были выше, чем в случае одиночного стержня, но уменьшались с ростом шага стержней. Предполагается, что увеличение загромождения значительно повышает критический тепловой поток и делает его большим по сравнению со значением, ожидаемым вследствие локального увеличения линейной скорости. Исходя из метода испытания, это заключение верно только при условии кипения с недогревом. В [22] представлены данные по q_{cr} для пучка, состоящего из двух рядов труб диаметром 1,23 см, установленных на расстоянии 1,97 см при коридорном расположении отдельных стержней с шагом 0,5 см. Рабочей жидкостью служила вода при атмосферном давлении, полученные результаты совпали с данными для изолированной одиночной трубы. В [23] и позднее в [24] изучались критические тепловые потоки при кипении хладона-113 с недогревом, текущего по нормали к пучку из 27 труб, которые могли обогреваться паром. Предложено множество корреляций, но ни одна из них не является общей.

2.7.6. Кипение бинарных и многокомпонентных смесей. Основные процессы

Дж. Г. Колльер

В § 2.7.1—2.7.5 обсуждается поведение чистых однокомпонентных жидкостей при испарении. Однако в нефтехимической промышленности многие процессы включают в себя испарение (и конденсацию) бинарных ($n=2$) и многокомпонентных ($n>2$) смесей (n — число компонен-

тов). При кипении бинарных и многокомпонентных смесей процессы тепло- и массопереноса тесно связаны, при этом скорость испарения обычно ограничена переносом массы. Это является существенным отличием от однокомпонентных систем, где скорости переноса массы на границе раздела обычно очень высоки.

Ниже рассмотрены основные физические процессы, а в § 2.7.7 обсуждается имеющаяся информация по кипению смесей в большом объеме. Кроме того, в § 2.7.8 рассмотрены проблемы расчета коэффициента теплоотдачи при испарении смесей в условиях вынужденной конвекции. Существует довольно много работ (самые ранние [1, 2]) по кипению в условиях свободной конвекции бинарных смесей. Однако имеется очень мало работ по испарению при вынужденной конвекции смесей и испарению многокомпонентных смесей.

А. Элементарное равновесие фаз. Бинарные системы. В смеси паров парциальное давление p_A компонента A является давлением, которое он оказывает в объеме, соответствующем его концентрации в смеси при заданной температуре. Так как $p = \sum p_A$, то для идеальной смеси парциальное давление p_A пропорционально мольной доле A в паровой фазе

$$p_A = \tilde{y}_A p. \quad (1)$$

Два закона связывают парциальное давление в паровой фазе с концентрацией компонента A в жидкой фазе.

1. Согласно закону Генри парциальное давление p_A прямо пропорционально мольной доле $\tilde{x}_A$ компонента A в жидкой фазе

$$p_A = \text{const } \tilde{x}_A. \quad (2)$$

Это верно только для слабых растворов, где $\tilde{x}_A$ мала.

2. Согласно закону Рауля парциальное давление p_A связано с мольной долей $\tilde{x}_A$ и давлением пара чистого компонента A при одинаковой температуре

$$p_A = p_A^0 \tilde{x}_A, \quad (3)$$

где p_A^0 — давление пара чистого компонента A при той же температуре. Это верно только для больших значений $\tilde{x}_A$.

Если для смеси выполняется закон Рауля, это является идеальным случаем, и значения $\tilde{y}$ можно рассчитывать для различных $\tilde{x}$, зная давление пара обоих чистых компонентов при различных температурах.

Некоторые смеси ведут себя как идеальные. Если отношение парциального давления p_A к мольной доле в жидкой фазе $\tilde{x}_A$ определяется как летучесть, то для бинарной смеси компонентов A и B летучесть $A = p_A/\tilde{x}_A$, летучесть $B = p_B/\tilde{x}_B$. Отношение этих двух летучестей известно как относительная летучесть α , причем

$$\alpha = p_A \tilde{x}_B / p_B \tilde{x}_A. \quad (4)$$

Используя уравнение (1), имеем

$$\alpha = \tilde{y}_A \tilde{x}_B / \tilde{y}_B \tilde{x}_A, \text{ или } \tilde{y}_A / \tilde{y}_B = \alpha \tilde{x}_A / \tilde{x}_B. \quad (5)$$

Из уравнения (3) ясно, что относительной летучестью для идеальной смеси является просто отношение давлений пара чистых компонентов A и B при выбранной температуре. Значение α изменяется с температурой, таблицы α для различных бинарных систем имеются в книгах для инженеров-химиков.

Рассмотрим резервуар, наполненный бинарной жидкой смесью с мольной долей $\tilde{x}_0$ более летучего компонента при постоянных давлении p и температуре T_1 (рис. 1, а). Что происходит, когда жидкая смесь нагревается при

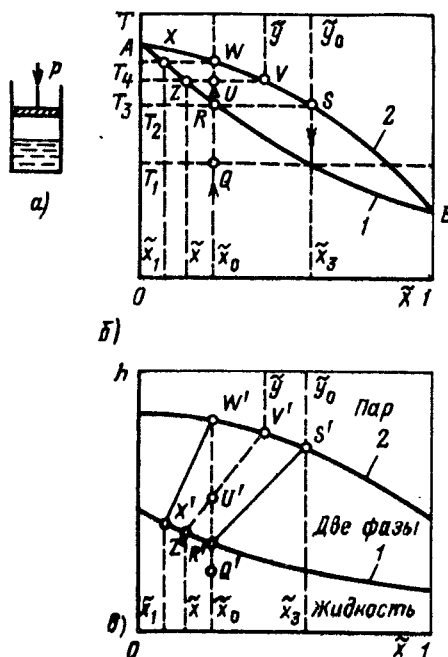


Рис. 1. Элементарное равновесие фаз для бинарных смесей:

1 — кипение; 2 — конденсация

постоянным давлением, удобно показать на диаграмме температура — состав (рис. 1, б). На этой диаграмме мольная доля более летучего компонента в жидкости используется как абсцисса и температура, при которой кипит смесь, как ордината. Начальным условиям в резервуаре соответствует точка Q .

Резервуар нагревается при постоянном давлении в нем. Когда температура достигает T_2 , жидкость закипает (точка R). Образуется пар с составом $\tilde{y}_0$ (точка S). Этот пар содержится в более летучем компоненте. Если эксперимент повторяется в диапазоне всех значений $\tilde{x}_0$, тогда можно определить последовательность точек R и S . Геометрическое место одних из них образует линию $AXZRB$, которая известна как кривая паробразования или кипения. Геометрическое место точек, таких как S , образует линию $AWVSB$, известную как кривая конденсации.

Если нагрев резервуара продолжается, состав жидкости изменяется вследствие перехода более летучего компонента в пар. Поэтому точка кипения повышается до некоторой температуры T_3 . Жидкая и паровая фазы обогащаются менее летучим компонентом, при этом жидкость и пар имеют составы, изображенные соответственно точками Z и V . Поскольку утечки вещества из резервуара отсутствуют, соотношение жидкости и пара должно определяться выражением

$$\frac{L}{V} = \frac{UV}{ZU} = \frac{\tilde{y} - \tilde{x}_0}{\tilde{x}_0 - \tilde{x}}. \quad (6)$$

Отношение $\tilde{y}/\tilde{x}$ при постоянной температуре обозначается как коэффициент равновесия

$$K = \tilde{y}/\tilde{x}. \quad (7)$$

Используя уравнения (6) и (7), получаем

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{x}_0 (L/V + 1)}{K + L/V}. \quad (8)$$

При дальнейшем нагреве до температуры T_4 вся жидкость испаряется с образованием пара такого же состава, какой имела сначала жидкость (точка W). Последняя капля испаряемой жидкости сильно обогащена менее летучим компонентом ($\bar{x}_1$) (точка X). При этом гипотетическим эксперименте испаряемая массовая доля, удельный объем и теплота, подведенная к системе для создания в ней каждого температурного условия, должны также регистрироваться. Следует отметить аналогию между этим экспериментом и испарением смеси жидкостей, подводимой к основанию трубы.

При расчете оборудования для испарения жидких смесей обычно предполагается, что смеси находятся в термодинамическом равновесии. Однако ясно, что это не совсем верно, так как, для того чтобы испарение происходило, должны существовать различия в температуре и концентрации. Считается, что на границах раздела пар — жидкость (т. е. там, где фазы контактируют одна с другой) равновесие постоянно. Однако возможна ситуация, когда образующиеся паровые пузыри поднимаются к поверхности и в паровое пространство, так что контакт с жидкой фазой не существует. Далее должна испаряться жидкость более тяжелая (менее летучая). Точка кипения будет соответственно повышаться, эффективный температурный напор на испарение снижаться и имеющаяся поверхность может стать недостаточной для получения необходимого режима. Такой процесс может происходить при испарении смеси на кожухе котла испарителя, особенно при низких скоростях циркуляции. Кроме того, это может происходить также в трубах, где наблюдается стратификация или ухудшение в распределении потоков.

Диаграммы температура — состав (рис. 1, б) полезны для интерпретации различных физических ситуаций. Для примера рассмотрим случай, когда происходит кипение с недогревом бинарной смеси жидкостей состава $\bar{x}_0$ и температуры T_1 (точка Q). На теплообменной поверхности образуется пар, имеющий состав $\bar{y}_0$. Если паровой пузырь отрывается от поверхности, проходит через жидкость и конденсируется, то сконденсированная жидкость имеет состав $\bar{x}_3$, соответствующий $\bar{y}_0$. Таким образом, состав жидкости у поверхности нагрева приближается к $\bar{x}_1$, тогда как состав жидкости вдаль от поверхности нагрева изменяется по направлению к $\bar{x}_3$. Эти процессы сопровождаются изменениями физических свойств жидкости.

При рассмотрении энергии потоков, в частности, для неидеальных смесей, в которых молярная скрытая теплота не постоянна и выделяется существенная теплота смешения, полезна диаграмма энтальпия — состав (рис. 1, в). Верхняя кривая на рис. 1, в соответствует конденсации, нижняя — парообразованию. Энтальпии смесей жидкостей и паров при равновесии лежат на кривых кипения или конденсации соответственно на каждом конце соединяющей линии, например $R'S'$.

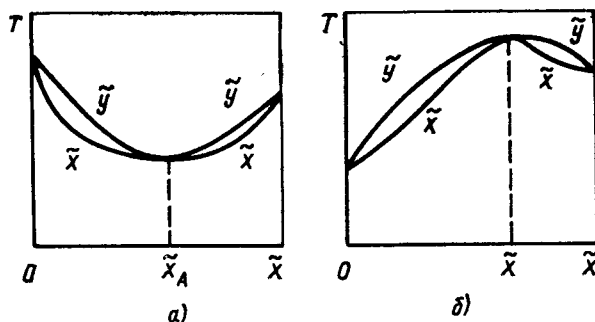


Рис. 2. Диаграмма температура — состав для бинарных азеотропных систем:

а — ацетон — сернистый углерод; б — ацетон — хлороформ

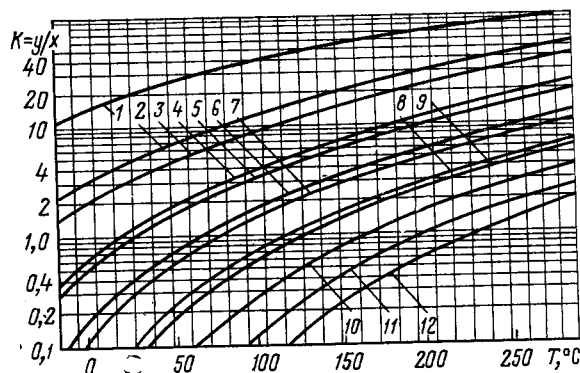


Рис. 3. Данные по равновесию пар — жидкость для углеводородов: 1 — метан; 2 — этилен; 3 — этан; 4 — пропилен; 5 — пропан; 6 — бутан; 7 — n-бутан; 8 — i-пентан; 9 — n-пентан; 10 — n-гексан; 11 — n-гептан; 12 — n-октан

Некоторые кривые зависимости температура — состав подобны изображенным на рис. 2. Для этих бинарных систем существуют критические значения $\bar{x}_d$, когда пар и жидкость имеют одинаковый состав, который не меняется при испарении. Ниже мы увидим, что для этих особых смесей, называемых азеотропными, отсутствуют ограничения по переносу массы и они ведут себя как чистый компонент при кипении, имеющий средние физические свойства смеси.

Многокомпонентные смеси. Рассмотренные представления легко распространить на многокомпонентные смеси. Если закон Рауля применим, то можно использовать уравнение (8) с соответствующими значениями $\bar{x}_0$ и K . Для известного состава жидкости при заданных давлении и температуре принимаются различные значения отношения L/V . Если отношение L/V подобрано правильно, то выполняется условие

$$\Sigma \bar{x} = 1. \quad (9)$$

Применение уравнения (8) к многокомпонентным неидеальным смесям более сложно и связано со следующим условием:

$$\Sigma K \bar{x} = 1. \quad (10)$$

Расчеты можно провести, используя число молей каждого компонента любой фазы вместо молярных долей, как сделано выше. Значения K измерены в широком диапазоне углеводородов при различных давлениях, некоторые из них представлены на рис. 3. Однако методы, используемые для измерения или предсказания данных по равновесию фаз, в данном параграфе не рассмотрены.

Испарение любой бинарной или многокомпонентной смеси можно представить с помощью зависимости температуры равновесия T от количества теплоты Q — обычной кривой кипения или конденсации. Она является единственной кривой при условии, что давление p в испарителе постоянно. Другая и в некоторых случаях более удобная форма представления этой кривой осуществляется с помощью зависимости температуры от удельной энтальпии $\bar{h}$ (рис. 4). Преобразование одной кривой в другую очевидно и может определяться выражением

$$\bar{h} = \frac{Q - Q_r}{N}, \quad (11)$$

где Q_r — характерное значение Q , которое может быть в системе при самой низкой температуре или соответствовать парообразованию при наименьшем давлении p ; N — общее число молей жидкости.

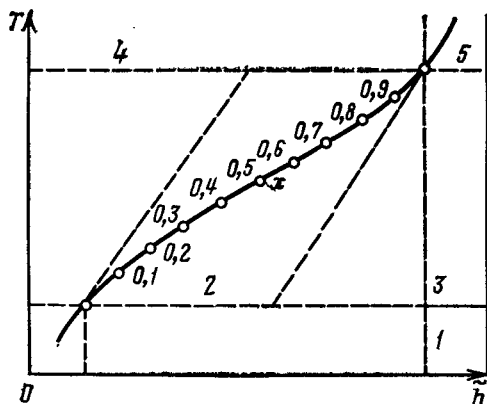


Рис. 4. Кривая температура — энтальпия:
1 — жидкость; 2 — кипение; 3 — две фазы; 4 — конденсация
5 — пар

При расчете теплообменников всегда нужно иметь кривую конденсации. Типичные данные имеются в табличной форме для некоторых давлений, охватывающих необходимый диапазон для каждой смеси. Поскольку расчетчики должны знать локальные условия в теплообменнике, то давление должно быть известно в любой точке. Возможна интерполяция между табличными значениями при заданных значениях p для учета влияния давления на равновесную температуру. Однако влияние давления ниже не обсуждается.

Кроме того что существует единственная $T \sim \tilde{h}$ -зависимость при каждом давлении, имеется также единственная $x \sim \tilde{h}$ -кривая, где x — паросодержание или массовая доля паровой фазы. Когда кривая конденсации ($T \sim \tilde{h}$) определена, соответствующие значения x также должны быть известны (рис. 4).

Можно проследить изменение энтальпии бинарной или многокомпонентной смеси от температуры, рассмотрим три члена:

$$d\tilde{h} = (1-x) dT\tilde{c}_{pl} + x dT\tilde{c}_{pg} + \tilde{\Delta}h_v dx. \quad (12)$$

Ими являются физическая теплота жидкой фазы $(1-x)$; физическая теплота паровой фазы x , теплота испарения элемента жидкости dx . Это представление отличается от закономерностей для однокомпонентной системы, так как изменение энтальпии есть изменения физической теплоты или скрытой теплоты (при постоянной температуре).

Парообразование в бинарной системе. Как и в случае однокомпонентной системы (см. § 2.7.1), пар может образовываться в бинарной смеси жидкостей при плоской (устойчивое равновесие) или искривленной границе раздела (неустойчивое равновесие). Перегрев $(T_g - T_{sat})$, требуемый для поддержания зародыша пузырька радиусом r^* в равновесии, равен

$$T_g - T_{sat} = \frac{2\sigma}{(\partial p_{sat}/\partial T) r^*}. \quad (13)$$

Для смесей $\partial p_{sat}/\partial T$ и поверхностное натяжение σ зависят от состава и температуры. В [3, 4] приведено уравнение Клапейрона, которое применимо в данном случае:

$$\frac{\partial p_{sat}}{\partial T} = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_x + \frac{p}{RT} \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial T} \right)_p (K-1) \tilde{x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{T,p}, \quad (14)$$

где K — постоянная равновесия; g — свободная энергия Гиббса. Для идеальных систем $(\partial^2 g/\partial x^2)_{T,p}$ определяется

выражением

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{T,p} = \frac{\tilde{R}T}{\tilde{x}(1-\tilde{x})} > 0. \quad (15)$$

Наклон кривой кипения на диаграмме равновесия при постоянном давлении можно найти, преобразуя уравнение (14) и учитывая, что $\partial p_{sat}/\partial T = 0$ при постоянном давлении и $(\partial p/\partial T)_{\tilde{x}} = p \Delta \tilde{h}_v / \tilde{R}T^2 = \rho_g \Delta h_v / T$. Преобразуя уравнения (14) с указанными условиями, находим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p = - \frac{T}{\Delta h_v} (K-1) \tilde{x} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{T,p}. \quad (16)$$

Подставляя $(\partial^2 g/\partial x^2)_{T,p}$ согласно уравнению (15), получаем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p = - \frac{pT}{\rho_g \Delta h_v} \frac{K-1}{1-\tilde{x}} \leq 0. \quad (17)$$

Можно показать, что это выражение почти не зависит от давления.

Второй член правой части уравнения (14) всегда отрицателен. Это значит, что отношение $\partial p_{sat}/\partial T$ в смесях всегда меньше, чем для эквивалентной чистой жидкости. Тем не менее в [5] показано, что $\partial p_{sat}/\partial T$ для бинарной смеси может быть выше, чем для одного чистого компонента. Если рассматривать уравнение (13), то влияние изменения $\partial p_{sat}/\partial T$ на перегрев обычно меньше по сравнению с изменениями поверхностного натяжения σ и размера активных центров парообразования на поверхности нагрева r^* .

Добавление относительно небольших количеств второго компонента к воде часто сильно снижает поверхностное натяжение. На рис. 5 показаны изменения температуры парообразования (конденсации) и поверхностного натяжения σ для двух систем: этанол — вода и этанол — бензол. На этом же рисунке приведена зависимость рассчитанного значения перегрева от r^* для тех же систем. Для системы этанол — вода уменьшение поверхностного натяжения с ростом мольной доли этанола приводит к резкому снижению перегрева, необходимого для поддержания зародыша пузырька данного размера в равновесии. Напротив, для системы этанол — бензол изменение поверхностного натяжения и перегрева от состава мало.

Размер центров парообразования. Прежде чем воспользоваться уравнением (13) для оценки необходимого перегрева смеси на поверхности нагрева, надо знать, как максимальный размер центра парообразования на ней

Таблица 1. Зависимость размера активного центра парообразования от состава смеси этанол — вода при кипении на поверхности с никелевым покрытием при $p = 0,2 \div 0,6$ МПа [5]

Мольная доля этанола $\tilde{x}$	Температура стенки при ONB $^{\circ}\text{C}$	$T_g - T_{sat}$ при ONB, $^{\circ}\text{C}$	$r_{max} \cdot 10^4, \text{ м}$
0	138,2	9,9	1,05
0,058	143,5	26,6	0,23
0,058	143,0	26,7	0,24
0,058	146,5	29,3	0,20
0,058	145,4	28,6	0,21
0,197	145,2	36,8	0,095
0,197	145,0	36,7	0,095

* ONB — начало пузырькового кипения.

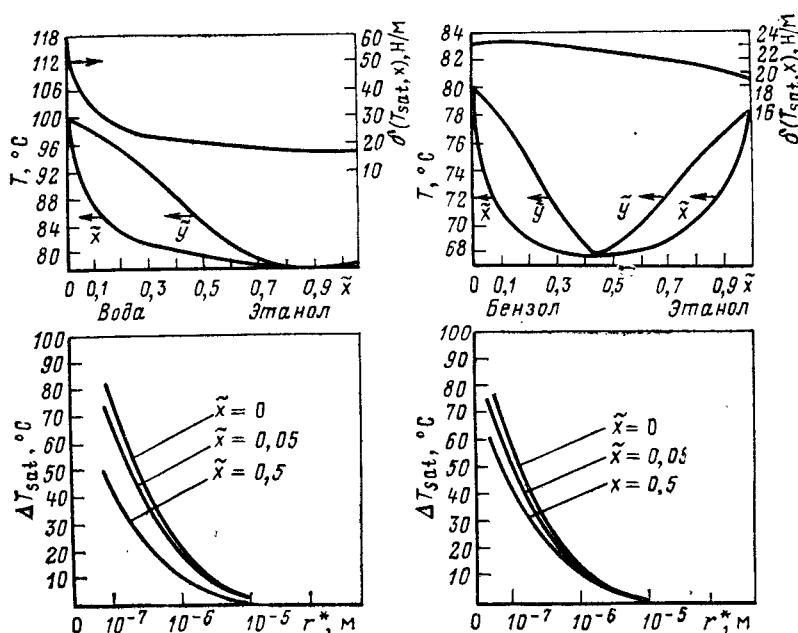


Рис. 5. Нуклеация в бинарных смесях

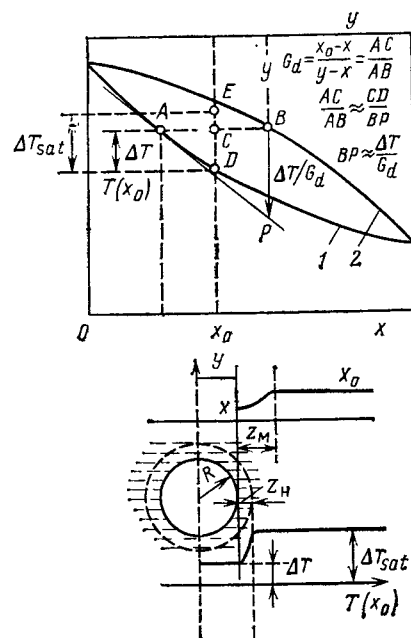


Рис. 6. Рост паровых пузырей в бинарных системах:

1 — кипение; 2 — конденсация

изменяется с составом. Этот размер определяется проникновением жидкости в трещины и углубления на поверхности.

Проникновение зависит от изменений поверхностного натяжения и краевого угла. Экспериментальные данные [5] показывают, что изменения максимального размера центра парообразования в зависимости от состава могут быть значительны. Из табл. 1 видно, как изменяется рассчитанный размер центра парообразования при начале кипения на поверхности с никелевым покрытием для системы этанол — вода. Из данных, приведенных в таблице, следует, что изменение в составе смеси, в частности, когда один из компонентов — вода, может значительно увеличить перегрев, необходимый для возникновения и поддержания парообразования, в основном в результате уменьшения краевого угла и, следовательно, максимального активного центра нуклеации.

Рост пузыря в бинарной системе. Рост пузыря в однокомпонентной системе ограничен скоростью, с которой теплота может подводиться к границе раздела для обеспечения скрытой теплоты испарения. Однако в бинарной смеси жидкостей подобное ограничение также возникает в результате того, что жидкость вблизи границы раздела пузыря обедняется более летучим компонентом [6]. Для продолжения парообразования и роста пузыря более летучий компонент должен теперь диффундировать из объема жидкости через область, обедненную им. Это видно из диаграммы, представленной на рис. 6. Сначала в объеме жидкости содержится массовая доля x_0 более летучего компонента, который перегрет на величину ΔT_{sat} (до точки E) над температурой кипения, соответствующей начальному составу жидкости $T(x_0)$ (точка D). На границе раздела пузыря массовая концентрация более летучего компонента в жидкой фазе уменьшается до x (точка A), тогда как состав пара в пузыре равен y (точка B). Соответствующее повышение температуры насыщения на поверхности пузыря $[T(x) - T(x_0)]$ обозначено ΔT .

В [7, 8] разработана теория роста пузыря в бинарных смесях. Баланс массы на границе раздела для более ле-

тучего компонента имеет вид

$$\rho_g (y - x) \dot{R} = \rho_l \delta \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (18)$$

Если $(\partial x / \partial r)_{r=R}$ аппроксимируется в предположении, что концентрация падает от x_0 до x на толщине диффузионного слоя z_M , то скорость роста пузыря можно представить в виде

$$\dot{R} = \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{(x_0 - x)}{(y - x)} \frac{\delta}{z_M} = \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{x(x_0 - x)}{(y - x)} \frac{\delta}{(\pi/3)^{1/2} (Dt)^{1/2}} \quad (19)$$

В [7, 8] $(x_0 - x)/(y - x)$ обозначена как испаряемая массовая диффузионная доля G_d .

Из рис. 6 также видно, что эффективный перегрев поверхности пузыря равен $\Delta T_{sat} - \Delta T$. Таким образом, скорость роста пузыря

$$\dot{R} = \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{(\Delta T_{sat} - \Delta T) c_{pl}}{\Delta h_v} \frac{k_l}{(\pi/3)^{1/2} (k_l t)^{1/2}} \quad (20)$$

Приравняв уравнения (19) и (20), подставляя G_d и преобразуя, получаем

$$\frac{\Delta T}{G_d} = \left(\frac{\delta}{k_l} \right)^{1/2} \frac{\Delta h_v}{c_{pl}} \left(\frac{\Delta T_{sat}}{\Delta T} - 1 \right) \quad (21)$$

Можно принять, что $\Delta T_{sat}/\Delta T$ и поэтому $\Delta T/G_d$ не зависят от действительного значения ΔT_{sat} :

$$\frac{\Delta T}{G_d} (x_0) = -(K - 1) x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \quad (22)$$

Это можно оценить при $x = x_0$, используя уравнение (17) для $(\partial T / \partial x)_p$ или определить графически из данных по равновесию, как показано на рис. 6.

Уравнение асимптотического роста пузыря для бинарных смесей жидкостей получено подстановкой выражения (21) в уравнение (20)

$$\dot{R} = \frac{\Delta T_{sat}}{(\rho_g / \rho_l) [\Delta h_v / c_{pl} + (k_l / \delta)^{1/2} (\Delta T / G_d)]} \left(\frac{3}{\pi} \frac{k_l}{t} \right)^{1/2} \quad (23)$$

Можно показать, что минимальное значение $\dot{R}$ для бинарной смеси соответствует максимальному значению $\Delta T/G_d$. Это подтверждено Ван Страленом на основе экспериментальных наблюдений.

Скорость роста пузыря в бинарной смеси резко снижается по сравнению с однокомпонентной системой, так как коэффициент диффузии массы δ более летучего компонента на порядок меньше коэффициента теплопроводности k_L .

Существенно меньшие скорости роста приводят к намного меньшим пузырям в момент отрыва от поверхности. Другая важная особенность состоит в том, что часть теплоты, передаваемая пузырю, пока он не оторвался, значительно уменьшается в смесях и в случае бинарных систем пузыри продолжают расти после их отрыва от поверхности.

В [9] исследовалось поведение микрослоя под пузырем, образовавшимся в бинарной смеси жидкостей и растущим на поверхности нагрева. В начальной стадии роста пузыря температура поверхности под ним резко уменьшается от исходного перегрева до значения, близкого к температуре парообразования смеси жидкостей. Последующее восстановление температуры поверхности происходит более медленно, чем в случае чистых жидкостей, вслед за увеличением температуры парообразования микрослоя при уменьшении содержания более летучего компонента. Очевидно в паре, образующемся при испарении микрослоя, будет меньше более летучего компонента, чем на остальной части поверхности пузыря. Если микрослой полностью испаряется, то состав возникающего пара будет таким же, как в исходной жидкости.

Таким образом, введение второго компонента в чистую жидкость оказывает сильный эффект на основные процессы, такие как возникновение пузырей, их рост, отрыв от поверхности нагрева. В случае, если одним из компонентов является вода, эти эффекты проявляются в виде резкого увеличения перегрева поверхности, необходимого для возникновения кипения, соответствующего понижению скорости роста пузыря, приводящего к намного меньшим значениям диаметра отрыва пузыря. Хотя отмеченные эффекты для смесей органических жидкостей не очень заметны, тем не менее они существенны в механизме пузырькового кипения и приводят к значительному понижению коэффициентов теплоотдачи по сравнению с чистой жидкостью.

2.7.7. Кипение бинарных и многокомпонентных смесей. Кипение в большом объеме

Дж. Г. Колльер

Кривая кипения в большом объеме сильно изменяется, когда испаряется не чистая однокомпонентная жидкость, а бинарная смесь. Основные изменения показаны схематично на рис. 1. Кипение начинается при более высоких перегревах стенки в результате температурных градиентов, возникающих в объеме и соответствующих градиентам в составе жидкости. Коэффициенты теплоотдачи при пузырьковом кипении резко снижаются. Критический тепловой поток может увеличиться или уменьшиться в зависимости от вклада конвекции. Минимальный тепловой поток и соответствующий перегрев стенки увеличиваются. Наконец, коэффициенты теплоотдачи при пленочном кипении также несколько выше.

А. Пузырьковое кипение. При пузырьковом кипении в большом объеме даже небольшие количества второго компонента вызывают значительное понижения теплоотдачи по сравнению с чистой жидкостью. Причина этого понижения заключается во влиянии второго компонента на скорость роста пузыря. Минимальная скорость роста

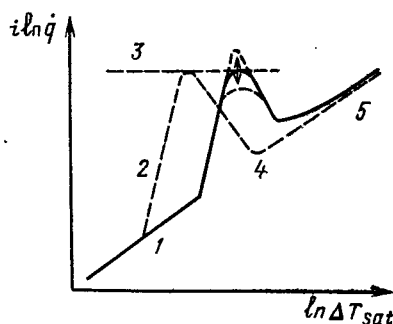


Рис. 1. Деформация кривой кипения в большом объеме для бинарных смесей. Сплошная линия — чистая жидкость; штриховая — бинарная смесь:

1 — начало пузырькового кипения; 2 — пузырьковое кипение; 3 — максимальная тепловая нагрузка; 4 — минимальная тепловая нагрузка; 5 — пленочное кипение

пузыря, минимальный коэффициент теплоотдачи и максимум критического теплового потока наблюдаются при одном составе жидкости, соответствующем наибольшему значению $|\bar{y} - \bar{x}|$. Начиная с [1, 2], появилось много экспериментальных исследований кипения в большом объеме бинарных смесей. Большое число экспериментальных данных по пузырьковому кипению бинарных смесей в большом объеме представлены в [3], где использовались 14 бинарных систем с различными компонентами от воды до легких спиртов и тяжелых масел. Все смеси имели широкий диапазон по температурам кипения, по крайней мере 90°C. Для всех систем коэффициент теплоотдачи при заданном тепловом потоке был меньше, чем для идеальной однокомпонентной жидкости с одинаковыми физическими свойствами.

В [4] предложен простой метод, с помощью которого коэффициенты теплоотдачи в бинарных системах можно рассчитать по данным для чистых компонентов. Метод иллюстрируется на рис. 2. В его верхней части изображена диаграмма равновесия для системы А — В, показывающая зависимость мольной доли компоненты В в паровой фазе ($\bar{y}$) от его мольной доли в жидкой фазе ($\bar{x}$) при постоянном давлении. На нижней части рисунка показана разность температур поверхности нагрева T_w и парообразования $T_{sat}(x)$, соответствующая составу жидкости ($\bar{x}$). Кривая $(T_w - T_{sat}(\bar{x}))$ проходит через максимум, соответствующий наибольшему значению $|\bar{y} - \bar{x}|$. Величину $(T_w - T_{sat}(\bar{x}))$ представим следующим образом:

$$(T_w - T_{sat}(\bar{x})) = \Delta T_I + \Delta T_E = \Delta T_I (1 + \theta), \quad (1)$$

где ΔT_I — идеальное значение разности температур, определяемое по ΔT_{sat} для двух чистых компонентов А и В, рассчитанных при давлении и тепловом потоке, как в смеси. Эти перегревы стенки обозначены соответственно ΔT_A и ΔT_B , тогда

$$\Delta T_I = (1 - \bar{x}) \Delta T_A + \bar{x} \Delta T_B. \quad (2)$$

Авторы [4] нашли, что θ в уравнении (1) можно связать с $|\bar{y} - \bar{x}|$:

$$\theta = \Lambda |\bar{y} - \bar{x}|. \quad (3)$$

Установлено, что Λ изменяется с давлением, и в диапазоне от 0,1 до 1 МПа используется следующее выражение:

$$\Lambda = \Lambda_0 (0,88 + 0,12p), \quad (4)$$

где p — давление системы (10^5 Па); Λ_0 — постоянная, зависящая от конкретной исследуемой бинарной системы.

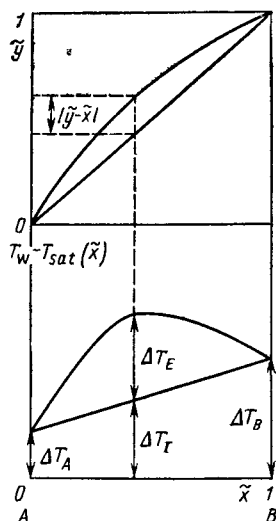


Рис. 2. Определение коэффициентов теплоотдачи при пузырьковом кипении для бинарных систем [4]

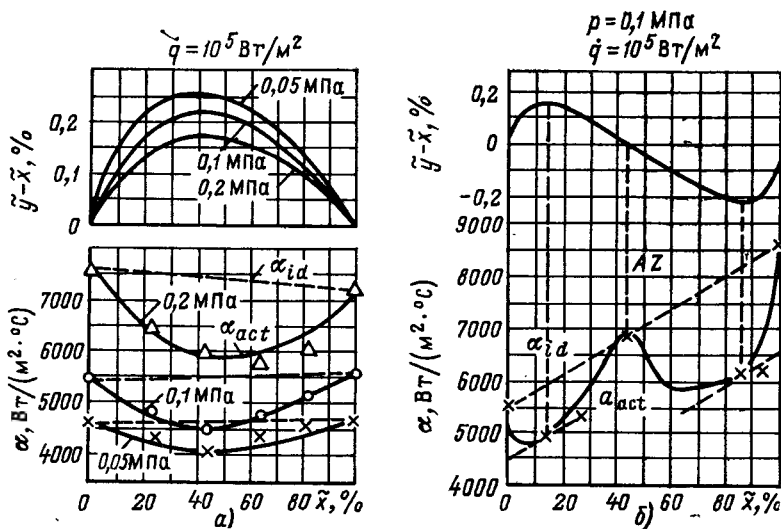


Рис. 3. Зависимость коэффициента теплоотдачи для бинарных смесей бензол — толуол (а) и этанол — бензол (б) от состава и давления [5]

В табл. 1 приведены значения Λ_0 для 17 распространенных систем. В случае, если для рассматриваемой системы отсутствуют экспериментальные данные, рекомендуется $\Lambda_0 = 1,53$. Этот метод ненадежен, если один из компонентов является поверхностно-активным.

Таблица 1. Значение Λ_0 в уравнениях (3), (4) для определения коэффициентов теплоотдачи при пузырьковом кипении бинарных смесей

Смесь	Λ_0	Смесь	Λ_0
Ацетон — этанол	0,75	Метанол — бензол	1,08
Ацетон — бутанол	1,18	Метанол — амиловый спирт	0,8
Ацетон — вода	1,40	Метилэтилкетон — толуол	1,32
Этанол — бензол	0,42	Метилэтилкетон — вода	1,21
Этанол — циклогексан	1,31	Пропанол — вода	3,29
Этанол — вода	1,21	Вода — гликоль	1,47
Бензол — толуол	1,44	Вода — глицерин	1,50
Гептан — метилциклопексан	1,95	Вода — пиридин	3,56
Изопропанол — вода	2,04		

В [5] получены данные по кипению в большом объеме смесей бензол — толуол, этанол — бензол, вода — изобутанол во всем диапазоне составов и при давлениях 0,5; 0,1 и 0,2 МПа. Результаты представлены с использованием коэффициента теплоотдачи, а не разности температур. Если перенос массы не оказывает влияния на процесс кипения, то коэффициент теплоотдачи (идеальная величина) при любом составе жидкости ($\tilde{x}$) связан с коэффициентами теплоотдачи для чистых компонентов (α_A, α_B)

$$\alpha_I = \alpha_A (1 - \tilde{x}) + \alpha_B \tilde{x}. \quad (5)$$

Это выражение отличается от уравнения (2) тем, что

$$\frac{1}{\Delta T_I} = \frac{1 - \tilde{x}}{\Delta T_A} + \frac{\tilde{x}}{\Delta T_B}. \quad (6)$$

На рис. 3 показаны результаты для смесей бензол — толуол, которые подтверждают, что минимальный коэффициент теплоотдачи соответствует максимальной величине $|\tilde{y} - \tilde{x}|$. Однако для систем, которые образуют азеотропные смеси (где жидкая и паровая фазы в равновесии имеют одинаковый состав; $|\tilde{y} - \tilde{x}| = 0$), например этанол — бензол, можно ожидать, что коэффициент теплоотдачи приближается к идеальной величине при азеотропном составе и это также подтверждено. Отношения действительного и идеального коэффициентов коррелируют в зависимости от $|\tilde{y} - \tilde{x}|$

$$\frac{\alpha}{\alpha_I} = \frac{\Delta T_I}{\Delta T} = 1 - B (\tilde{y} - \tilde{x})^n, \quad (7)$$

где B зависит от смеси и давления. Для смесей бензол — толуол при $p = 0,1$ МПа, $B = 1,5$ и $n = 1,4$; для смесей этанол — бензол $B = 1,25$ и $n = 1,0$; для смесей вода — изобутанол в диапазоне смешиваемости $B = 0,9$ и $n = 0,7$.

Одна из нескольких корреляций, связывающих понижения скорости роста пузыря и коэффициента теплоотдачи, предложена в [6]. Зависимость дана в форме

$$\alpha = \frac{\alpha_I}{[1 + |\tilde{y} - \tilde{x}| (k_I/\delta)^{0,5}]^{0,7}}, \quad (8)$$

где α_I — идеальный коэффициент, определенный для эквивалентной чистой жидкости с помощью модифицированной корреляции Боришанского — Минченко, представленной в табл. 2, § 2.7.2; $|\tilde{y} - \tilde{x}|$ относится к массовой, а не к мольной доле. Хотя интересно сравнить эту зависимость с уравнениями (1) и (7), следует отметить, что $(k_I/\delta)^{0,5}$ сильно изменяется с составом смеси.

Чтобы распространить рассмотренные представления на многокомпонентные смеси ($n > 2$), авторы [7] снова использовали ΔT_I — идеальную величину разности температур, определенную теперь следующим образом [ср. с уравнением (2)]:

$$\Delta T_I = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \Delta T_{sat, i} \quad (9)$$

и

$$\theta = \sum_{i=1}^n \Lambda_i^{(m)} (\tilde{y}_i - \tilde{x}_i). \quad (10)$$

Следовательно, для трехкомпонентной смеси ($n=3$) получим

$$\theta = \Lambda_1^{(3)}(\tilde{y}_1 - \tilde{x}_1) + \Lambda_2^{(3)}(\tilde{y}_2 - \tilde{x}_2). \quad (11)$$

Поскольку трехкомпонентная смесь включает как предельный случай три бинарные смеси, то для бинарной смеси, состоящей из первого и третьего компонентов ($\tilde{y}_2 = \tilde{x}_2 = 0$), и для другой смеси, содержащей только второй и третий компоненты ($\tilde{y}_1 = \tilde{x}_1 = 0$),

$$\Lambda_1^{(3)} = \Lambda_{13} \text{ и } \Lambda_2^{(3)} = \Lambda_{23}.$$

Аналогично для смеси компонентов

$$\Lambda_i^{(n)} = \Lambda_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Таким образом, неизвестную величину $\Lambda_i^{(n)}$ можно определить по значениям Λ , измеренным для отдельных бинарных смесей. В примере, рассмотренном в [7], получено удовлетворительное согласование между оценками по этому методу и экспериментальными данными для трехкомпонентной смеси ацетон — метанол — вода.

В. Критический тепловой поток. Критический тепловой поток при кипении в большом объеме изменяется, когда небольшое количество второго компонента добавлено в чистую жидкость. Он может быть выше или ниже, чем для любого из компонентов. Как и с коэффициентом теплоотдачи при пузырьковом кипении, изменение, вызванное вторым компонентом, велико, хотя изменение физических свойств (поверхностного натяжения; вязкости и плотности) небольшое. Поэтому невозможно предсказать заранее влияние второго компонента на кризис просто подстановкой измененных физических свойств в уравнение для критического теплового потока при кипении в большом объеме, предложенное, например, в [8, 9] (см. § 2.7.2).

Понимание экспериментальных данных и теории кризиса для бинарных смесей улучшилось благодаря [10]. В ранних исследованиях принимались противоречивые механизмы относительно влияния таких переменных, как летучесть, относительная молекулярная масса второго компонента и геометрия участка нагрева. Ниже кратко обсуждаются некоторые работы и результаты, полученные в них.

В [11] принято, что наблюдаемое ими увеличение критического теплового потока для метанола вызвано вторым компонентом, создающим частицы, которые действуют как центры парообразования в перегретом пограничном слое. Автор [12] сделал вывод, что увеличение критического теплового потока для воды с добавкой более летучего компонента обусловлено образованием маленьких пузырей (см. § 2.7.6). В [13] получены данные по воздействию различных добавок на характеристики теплоотдачи при кипении изопропанола. Если второй компонент принадлежит тому же гомологическому ряду, степень увеличения тем больше, чем выше относительная молекулярная масса. Меньшая летучесть второго компонента также увеличивает критический тепловой поток.

Считается, что рост критического теплового потока может быть обусловлен уменьшением содержания в растворе второго нелетучего компонента у поверхности пузыря, окруженного жидкостью с высокой вязкостью, которая препятствует слиянию пузырей, вызывая вспенивание и ослабляя также турбулентное движение.

Влияние геометрии отмечено в [14] для кипения на проволоке и пластине. В этом случае для воздействия на критический тепловой поток при давлении 1 МПа к воде добавлялся бутанол. Для проволоки при 10% бутанола критический тепловой поток достигает максимума, превышающего в 2,5 раза значение для чистой воды. В случае пластины критический тепловой поток имеет минимум, составляющий 0,56 значения для чистой воды, при 6% бутанола. Аналогичное расхождение установлено в [15], где сравнивались результаты при кипении на трубе из нержавеющей стали воды, содержащей различные добавки, с данными [12] для тонкой проволоки в случае подобных бинарных систем.

В более поздней работе Ван Стралена [10] дано объяснение многих явлений, указанных выше. Ван Стрален показал, что в бинарных смесях часто наблюдается максимум критического теплового потока, соответствующий наименьшей скорости роста пузыря и наибольшей величине $|\tilde{y} - \tilde{x}|$. Низкая скорость роста пузыря значительно снижает коэффициент теплоотдачи от поверхности нагрева к кипящей жидкости при существенном росте перегрева стенки. Критический тепловой поток можно рассматривать как сумму двух членов, один из которых обусловлен прямым парообразованием на поверхности нагрева, а второй — конвекцией горячей жидкости от поверхности нагрева, связанной с косвенным испарением в пузырь на расстоянии от поверхности нагрева. В [16, 17] предполагается, что даже для чистых жидкостей второй член существен. В [17] изучалось влияние характеристики I , которая названа параметром конвекции и представляет собой баланс сил инерции, поверхностного натяжения и вязкости:

$$I = \left(\frac{\rho L \sigma}{\eta^2} \right)^{1/3}, \quad (12)$$

где L — характерный размер поверхности (ширина, диаметр и т. д.). При больших значениях параметра I критический тепловой поток $\dot{q}_{cr}$ значительно ниже значения согласно уравнению (17), § 2.7.2 и приближается к величине, составляющей 0,5 $\dot{q}_{cr,z}$, когда $I > 1500$ и $L' \approx 50$.

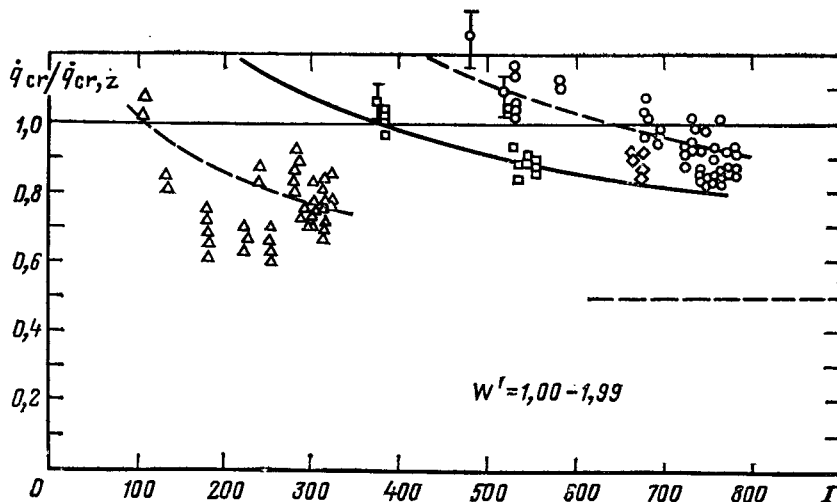


Рис. 4. Влияние конвекции на критический тепловой поток при кипении в большом объеме [17]:

□ — метанол; △ — изопропанол; ○ — ацетон; ◇ — бензол

L' является безразмерным размером нагревателя, причем $\dot{L} = L \left[\frac{g_n (\rho_l - \rho_g)}{\sigma} \right]^{1/2}$.

На рис. 4 показано влияние параметра I на отношение $\dot{q}_{cr}/\dot{q}_{ст}$, z для узкого диапазона значений L' .

В [10] показано, что для бинарных систем составляющая критического теплового потока в результате конвекции также может быть большой. В [17] дано возможное объяснение результатов [15 и 14], касающихся эффекта геометрии нагревателя. Ясно, что увеличение критического теплового потока, наблюдаемое на тонких проволоках, относится к ситуациям, когда I и L' малы, т. е. капиллярные силы и силы вязкости превосходят подъемные. Для больших нагревателей, связанных с процессом в оборудовании, маловероятно, что такое увеличение критического теплового потока будет происходить. Действительно, в [10] отмечается, что первая составляющая критического теплового потока, обусловленная непосредственным парообразованием, фактически уменьшается при переходе к бинарной системе. Это также согласуется с анализом [17] и с понижением доли теплоты, передаваемой к пузырьку, пока он не оторвался от поверхности нагрева.

Поэтому при определении критического теплового потока в бинарной смеси рекомендуется влияние размера нагревателя и конвекции характеризовать значениями L' и I . Для низких L' (меньших 1) и I (меньших 500) возможно превышение критического теплового потока над значением для чистых компонентов. Максимум наблюдается при $|y - x|$. В области промежуточных значений L' и I критический тепловой поток близок к значению, получаемому подстановкой физических свойств смеси в выражение, данное в § 2.7.2. Для больших L' (около 50) и I (около 1500) критический тепловой поток в смеси может быть меньше, чем для чистых компонентов. Однако он не падает ниже чем $0,5\dot{q}_{cr, z}$.

С. Переходное кипение. Известно немного публикаций по переходному кипению бинарных смесей. В [5] отмечено, что качественно состав смесей оказывает такое же влияние, как при пузырьковом кипении.

Д. Минимальный тепловой поток. Дополнительное диффузионное сопротивление в жидкой фазе вследствие переноса массы более летучего компонента в паровую пленку у поверхности нагрева приводит к тому, что температура на границе раздела (T_i) выше, чем в остальной части жидкости (T_∞). Поэтому значительная часть общего теплового потока, проходящего через паровую пленку, передается с границы раздела в объем жидкости, а не идет на непосредственное образование пара. Как следствие паровая пленка становится тоньше. В [18], где исследовалось пленочное кипение смесей вода — 2-бутанол на тонкой проволоке, отмечено, что прямому образованию пара на поверхности нагрева соответствует только 53% подведенного теплового потока по сравнению с 95% в случае чистых жидкостей. Остальная часть теплового потока передается конвекцией в жидкой фазе и затем в паровые пузыри. Таким образом, можно ожидать, что минимальный тепловой поток для бинарной смеси будет больше, чем в эквивалентной чистой жидкости.

В [19] исследовался минимальный тепловой поток для горизонтальных цилиндров. Минимальный ΔT определяется выражением

$$\Delta T_{\min} = (T_w - T_i) + (T_i - T_\infty), \quad (13)$$

где $T_w - T_i$ — падение температуры в паровой пленке; $T_i - T_\infty$ — в жидкости. Последняя разность температур, как уже отмечалось, равна нулю для чистой жидкости.

Первый член в выражении (13) рассчитывается по полуэмпирической зависимости, которая разработана в

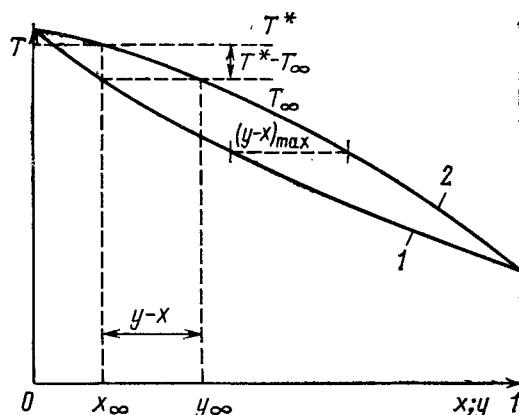


Рис. 5. Определение членов в корреляции [19] по минимальному тепловому потоку:

1 — кипение; 2 — конденсация

[19] на основе уравнения (31), § 2.7.2:

$$T_w - T_i = 0,42 \left(\frac{D}{\lambda_d} \right)^{1/3} \frac{\rho_g \Delta h_v}{\lambda_g} \times \left[\frac{g_n (\rho_l - \rho_g)}{\rho_l + \rho_g} \right]^{2/3} \left[\frac{\sigma}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2} \left[\frac{\eta_g}{g_n (\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/3}, \quad (14)$$

где λ_d — длина волны наиболее быстро растущего возмущения по Тейлору, заданная уравнением (34), § 2.7.2. Уравнение (14) справедливо для $0,2\lambda_d < D < \lambda_d$.

Второй член описывается зависимостью от $T^* - T_\infty$, где T^* — температура конденсации смеси паров, имеющей тот же состав, что и жидкость (рис. 5):

$$T_i - T_\infty = \frac{y - x}{(y - x)_{\max}} (T^* - T_\infty). \quad (15)$$

Эксперименты проведены на смесях ацетон — гексанол, бензол — кумен, изопропанол — толуол, *n*-гексан — толуол и этанол — этилбензол на горизонтальном цилиндре диаметром 7,9 мм.

Е. Пленочное кипение. В [20] выполнено теоретическое и экспериментальное исследование пленочного кипения бинарных смесей на вертикальной пластине. Анализ проводился для двухфазного пограничного слоя; рассматривалось парообразование путем испарения при плоской границе раздела без учета пара, отводимого пузырями. Тепловой поток для заданного перегрева стенки увеличивался за счет теплоты, передаваемой конвекцией от границы раздела в объем жидкости. Это противоположно ситуации, наблюдаемой при пузырьковом кипении, где для данного перегрева стенки тепловые потоки снижаются при добавлении второго компонента. Однако достигается момент, когда тепловой поток становится достаточным для снижения концентраций более летучего компонента на границе раздела до нуля. Тогда тепловой поток через жидкую фазу достигает максимума и при увеличении общей тепловой нагрузки составляет ее меньшую часть. Как ожидается, эффект второй фазы исчезает при перегреве стенки, большем чем

$$T_w - T_\infty = \frac{3\Delta h_v}{c_{pg}} \text{Pr}_g, \quad (16)$$

где T_∞ — температура жидкости, удаленной от паровой пленки. В общем, экспериментальные результаты подтверждают аналитические предсказания. Для смесей ацетон — циклогексанол с относительной летучестью до

80 простое уравнение (36), § 2.7.2 дает тепловые потоки на 30% ниже. Вклад радиации, определенный по уравнению (44), § 2.7.2, также следует учитывать.

2.7.8. Кипение бинарных и многокомпонентных смесей. Кипение при вынужденной конвекции

Дж. Г. Колльер

Публикации по парообразованию при вынужденной конвекции смесей крайне ограничены. Одно из самых ранних исследований [1] проведено в 1940 г. с использованием четырехходового испарителя с горизонтальными трубами, нагреваемым паром. Каждый ход имел три отдельные паровые рубашки для измерения локального теплового потока. Жидкостью была смесь бензол — масло. Установлено, что температура объема жидкости увеличивается по длине кипения насыщенной жидкости, когда она обогащается маслом. Таким образом, часть теплоты, передаваемой смеси, сохраняется в форме скрытой теплоты для поддержания жидкости в условиях насыщения и не идет на парообразование. Средние коэффициенты теплоотдачи рассчитаны для каждого хода, где происходило кипение, во всех трех рубашках. Для данного массового паросодержания коэффициент теплоотдачи уменьшался с увеличением содержания масла в подаваемой жидкости.

Некоторые исследователи [2, 3] изучали общие характеристики котлов, но в таких работах нельзя было получить информацию о локальных условиях испаряющегося потока.

А. Пузырьковое кипение насыщенной жидкости. При добавке второго компонента происходит такое же качественное изменение пузырькового кипения насыщенной жидкости, как и в большом объеме (см. § 2.7.7). Хорошо известна корреляция Чена (см. § 2.7.3) получена суммированием вкладов переноса теплоты пузырьковым кипением α_{nb} и конвекцией α_c . Вклад пузырькового кипения можно преобразовать по способу, предложенному в [4] для кипения в большом объеме, к выражению

$$\frac{1}{\alpha_{nb}} = \left(\frac{1 - \tilde{x}}{S\alpha_A} + \frac{\tilde{x}}{S\alpha_B} \right) (1 + \Lambda |\tilde{y} - \tilde{x}|), \quad (1)$$

где $\tilde{x}$ — мольная доля более летучего компонента B в жидкой фазе; $\tilde{y}$ — мольная доля в паровой фазе; α_A и α_B — коэффициенты теплоотдачи при пузырьковом кипении в большом объеме для чистых компонентов A и B при том же тепловом потоке; S — коэффициент подавления, введенный для учета эффектов температурных градиентов.

Коэффициент теплоотдачи конвекцией α_c можно рассчитать по физическим свойствам смеси как для чистой жидкости. Однако этот член может также зависеть от второго компонента, в частности, при низких паросодержаниях, когда возникает пузырьковый поток. С удалением более летучего компонента в пузырь вокруг него образуется слой более вязкой нелетучей жидкости. Это приводит к задержке слияния пузырьков из-за увеличения времени, необходимого для осушения пленки между ними. В результате образуется пена, устойчивая до больших объемных паросодержаний, чем для чистых жидкостей. При пузырьковом потоке увеличение конвективной теплоотдачи вызывается ростом скорости жидкости в результате повышения объемного расхода парожидкостной смеси

$$\frac{\alpha_{tp}}{\alpha_t} = \left(\frac{1}{1 - \varepsilon_g} \right)^{0.8}, \quad (2)$$

где ε_g — объемное паросодержание.

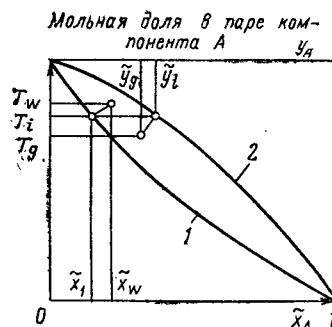
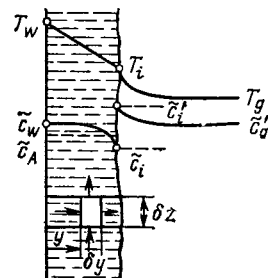


Рис. 1. Перенос массы для тонкой жидкой пленки [5]:

1 — кипение; 2 — конденсация



Присутствие пара может вызывать также турбулизацию ламинарного потока жидкости, но в любом случае превышение над коэффициентом теплоотдачи к однофазной жидкости, рассчитанным по уравнению (2), относительно мало (меньше 2). В некоторых случаях коэффициент теплоотдачи двухфазной конвекцией (α_{tp}) может быть наоборот ниже, чем при однофазной конвекции (α_t). Объясняется это тем, что действительные свойства для расчета α_t в уравнении (2) относятся к более вязкой, нелетучей жидкости, окружающей пузырь. Состав этой жидкости можно определить, используя G_d — испаряемую массовую диффузионную долю, рассмотренную в § 2.7.6.

В. Область двухфазной вынужденной конвекции. Дальше в испарительной трубе образуется кольцевой поток и этот режим течения занимает большую часть канала. Жидкость находится у нагреваемой стенки, и необходимо оценить эффекты переноса массы в жидкой пленке и паровом ядре. В [5] эти эффекты проанализированы детально.

Рассмотрим жидкую пленку (рис. 1). Если мольную концентрацию компонента A обозначить $\tilde{c}$, то уравнение сохранения для жидкой пленки имеет следующий вид:

$$u_x \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z} = \delta_{ef} \left(\frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

Принимаем, что в направлениях x и y отсутствует конвекция и профиль концентрации в направлении y полностью развит

$$u_z \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z} = \delta_{ef} \left(\frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

Это уравнение надо интегрировать, используя выражение для коэффициента массовой диффузии δ_{ef}

$$J = -(\delta + \varepsilon_M) \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} = -\delta_{ef} \left(\frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} \right). \quad (5)$$

При ламинарной пленке $\delta_{ef} = \delta$ и

$$\int_0^m u_z \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} dy = \delta \int_0^m \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial y^2} dy. \quad (6)$$

Определим среднюю мольную концентрацию $\bar{c}_A$ в произвольном сечении z

$$\bar{c}_A = \frac{1}{\dot{V}} \int_0^m u_z \bar{c}_A dy, \quad (7)$$

где $\dot{V}$ — объемный расход на единицу смоченного периметра:

$$\dot{V} = \int_0^m u_z dy. \quad (8)$$

Также

$$\dot{V} \frac{\partial \bar{c}_A}{\partial z} = -J_i, \quad (9)$$

где J_i — мольный поток на границе раздела;

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{c}_A}{\partial z} = -\frac{J_i}{\dot{V}}. \quad (10)$$

Подставляя $\partial \bar{c}/\partial z$ в (4), получаем

$$\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} = -\frac{J_i u_z}{\dot{V} \delta}, \quad (11)$$

или

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = -\frac{J_i}{\dot{V} \delta} \int_0^y u_z dy. \quad (12)$$

Определим теперь мольный коэффициент переноса массы

$$k_l = \frac{J_i}{\bar{c}_A - c_i}. \quad (13)$$

1. Для ламинарной стекающей пленки число Шервуда

$$Sh_l = \frac{k_l m}{\delta} = \frac{70}{17}, \quad (14)$$

комбинируя его с известным выражением для толщины пленки, получаем простую зависимость для коэффициента переноса массы k_l

$$m = \left[\frac{3 \dot{V} \eta_l}{(\rho_l - \rho_g) g_n} \right]^{1/3}, \quad k_l = \frac{70}{17} \left[\frac{(\rho_l - \rho_g) g_n \delta^3}{3 \dot{V} \eta_l} \right]^{1/3}. \quad (15)$$

По аналогии с теплоотдачей вероятно, что действительный коэффициент массоотдачи выше, чем найденный по уравнению (15), вследствие существования волн.

2. Для ламинарной пленки с постоянными касательными напряжениями в ней (как в подъемном кольцевом течении при высоких касательных напряжениях на границе раздела) число Шервуда

$$Sh_l = \frac{k_l m}{\delta} = 5, \quad (16)$$

комбинируя его с выражением для толщины пленки, получаем зависимость для коэффициента переноса массы k_l

$$m = \left(\frac{2 \dot{V} \eta_l}{\tau_i} \right)^{1/2}, \quad k_l = 5 \left(\frac{\tau_i \delta^3}{2 \dot{V} \eta_l} \right)^{1/2}, \quad (17)$$

где τ_i — касательные напряжения на границе раздела. Так же, как в случае с теплоотдачей, коэффициенты массоотдачи на практике могут быть на 30% ниже, чем найденные по (17).

3. Турбулентность в жидкой пленке увеличивает коэффициент переноса массы для данной толщины пленки. Уравнение (5) применяется в случае, когда ϵ_m является коэффициентом турбулентной диффузии массы. Выражения для турбулентного переноса массы в жидких пленках можно получить с помощью метода, аналогичного используемому для определения гидродинамических и теплопередающих характеристик пленки. В [5] принято, что ϵ_m в уравнении (5) идентична турбулентной вязкости ϵ , и выражение Дэйслера для ϵ можно использовать для получения зависимости безразмерной толщины пленки C^+ от безразмерного расстояния y^+ . Величина C^+ определяется следующим образом:

$$C^+ = \frac{u^*}{J_i} (\bar{c} - c_i), \quad (18)$$

где u^* — динамическая скорость, причем $u^* = \sqrt{(\tau/\rho_l)}$. Коэффициенты переноса массы определены из безразмерного профиля концентрации, найденного при соответствующем значении безразмерной толщины пленки y_i^+ . Мольный коэффициент переноса массы

$$k_l = \frac{J_i}{\bar{c}_A - c_i} = \frac{u^*}{C_b^+}, \quad (19)$$

где C_b^+ — значение C^+ в объеме, найденное по профилям C^+ и y^+ . Число Шервуда для жидкой пленки представлено в следующем виде:

$$Sh_l = \frac{k_l m}{\delta} = \frac{Sc y_i^+}{C_b^+}.$$

Для случая постоянных касательных напряжений в пленке в [5] имеются зависимости чисел Sh_l от числа Рейнольдса пленки Re_l с числом Шмидта в качестве параметра. Приведенное ниже уравнение приближенно описывает результаты, полученные в [5]:

$$Sh_l = 5 - 0,11 Sc + 0,01 Re_l Sc. \quad (20)$$

С. Упрощенный анализ испарения бинарных и многокомпонентных смесей. Рассмотрим одноходовой противоточный испаритель (индексы h и l относятся соответственно к греющему и испаряющемуся потокам)

$$\frac{d\dot{Q}}{dz} = \dot{M}_e \frac{dh_e}{dz} = \dot{M}_h \frac{dh_h}{dz} = UA(T_h - T_e). \quad (21)$$

В уравнении (21) A представляет собой эффективную поверхность теплообмена на единицу длины (периметр) для любой вторичной поверхности; U — общий коэффициент теплопередачи; T_h и T_e — соответственно локальная температура греющего потока и равновесная (образования пузырей) температура испаряющегося потока.

Если локальные значения энтальпий h_h и h_e известны, то известны также и температуры T_h и T_e и испарившаяся массовая доля x_e . Эти сведения вместе с расходами обеспечивают достаточную информацию для расчета общего коэффициента теплопередачи U . Таким образом, уравнение (21) можно интегрировать, начав с известных условий на входе ($z=0$).

Определим Γ как расход на единицу периметра

$$\Gamma_e = \dot{M}_e/A. \quad (22)$$

Произведение $U(T_h - T_e)$ представляет собой тепловой поток $\dot{q}_w$, проходящий через стенку, разделяющую две среды:

$$\dot{q}_w = U(T_h - T_e). \quad (23)$$

Подставив выражения (22) и (23) в уравнение (21), получим

$$\dot{q}_w dz = \Gamma_e dh_e. \quad (24)$$

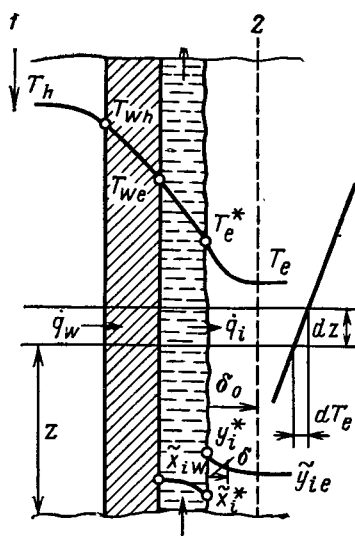


Рис. 2. Испарение многокомпонентной жидкости в кольцевом потоке:
1 — греющий поток; 2 — испаряющийся поток

На рис. 2 показан участок испарителя, нагреваемый по схеме противотока средой, отделенной от испаряющейся жидкости стенкой. Греющий поток — опускной, испаряющийся — подъемный. Предполагается, что режим течения на стороне испарения — кольцевой и испаряющаяся жидкость сосредоточена у стенки в виде тонкой пленки.

Рассмотрим ситуацию в сечении z испарителя на участке dz . Температура образования пузырей испаряющейся жидкости изменяется по его длине, так что

$$dh_e = (1-x_e)dT_{e\text{cp}i} + x_e dT_{e\text{cp}g} + dx_e \Delta h_v. \quad (25)$$

Теперь тепловой поток через границу раздела пар — жидкость q_i меньше, чем q_w , на количество теплоты, идущее на нагрев жидкости $\Gamma_e(1-x_e)$ на dT_e . Поэтому

$$q_i = q_w - \Gamma_e(1-x_e) \frac{dT_e}{dz} c_{pi}. \quad (26)$$

Конечно, при испарении одного чистого компонента (или конденсации) $q_w \approx q_i$ из-за отсутствия осевого температурного градиента.

Тепловой поток на границе раздела q_i состоит из двух составляющих: потока q_v на испарение на границе раздела и потока q_g , необходимого для нагрева паровой фазы на dT_e .

Д. Перенос массы на границе раздела при испарении бинарных и многокомпонентных смесей. На границе раздела процессы переноса массы и теплоты происходят одновременно, и соответствующие сопротивления следует рассматривать совместно. Для стимулирования этих процессов должны существовать одновременно градиенты концентрации и температуры от границы раздела в объем паровой фазы. В [5] показано, что сопротивление переносу массы в жидкой фазе пренебрежимо мало; поэтому считается, что сопротивление переносу теплоты и массы сосредоточено в паровой фазе в пограничном слое толщиной δ_0 .

Необходимо определить некоторые параметры, обычно используемые в анализе данного типа.

Мольная концентрация $\tilde{c}_i$ i -го компонента записывается как

$$\tilde{c}_i = \rho_i / M_i,$$

где ρ_i — плотность i -го компонента; M_i — его относительная молекулярная масса.

Общая мольная концентрация смесей

$$\bar{c}_i = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i.$$

Мольная доля в жидкости $\tilde{x}_i$ (или в паре $\tilde{y}_i$) составляется как

$$\tilde{y}_i \text{ (или } \tilde{x}_i) = \tilde{c}_i / \bar{c}.$$

Мольный поток $\tilde{n}_i$ представляет собой число молей i -го компонента, проходящих в нормальном направлении через единицу площади в единицу времени.

Диффузионный мольный поток J_i является потоком i -го компонента в общем мольном потоке смеси $\tilde{n}$.

$$\text{Общий мольный поток смеси } \tilde{n} = \sum_{i=1}^n \tilde{n}_i.$$

Таким образом, основное уравнение переноса мольного потока i -го компонента с границы раздела имеет следующий вид:

$$\dot{n}_i = \dot{n} \tilde{y}_{ie} + J_i, \quad (27)$$

где $\tilde{y}_{ie}$ — мольная доля i -го компонента в объеме пара. Эти уравнения впервые записаны в [6] в 1937 г. для бинарной системы и недавно повторены в [7].

Диффузионный мольный поток J_i можно определить из выражения

$$J_i = k_{i, \text{ef}} (\tilde{y}_i^* - \tilde{y}_{ie}), \quad (28)$$

где $k_{i, \text{ef}}$ — эффективный коэффициент переноса массы. Тепловой поток q_g с границы раздела в паровое ядро складывается из составляющей за счет потока пара с границы раздела и теплоты, переданной через пограничный слой,

$$\dot{q}_g = (T - T_e^*) \sum_{i=1}^n \dot{n}_i \tilde{c}_{pi} + \alpha_g \frac{dT}{d\delta}. \quad (29)$$

Интегрируя это уравнение от $\delta=0$, $T=T_e^*$ до $\delta=\delta_0$, $T=T_e$, получаем

$$\dot{q}_g = \frac{a}{1-e^{-a}} \alpha_g (T_e^* - T_e) = \alpha_g' (T_e^* - T_e), \quad (30)$$

где

$$a = \frac{1}{\alpha_g} \sum_{i=1}^n \dot{n}_i \tilde{c}_{pi}.$$

Тепловой поток на испарение, необходимый для образования мольного потока пара смеси $\tilde{n}$,

$$\dot{q}_v = \dot{n} \Delta \tilde{h}_v, \quad (31)$$

где $\Delta \tilde{h}_v$ — мольная скрытая теплота парообразования смесей.

Таким образом, тепловой поток на границе раздела

$$\dot{q}_i = \dot{q}_g + \dot{q}_v = \frac{a}{1-e^{-a}} \alpha_g (T_e^* - T_e) + \dot{n} \Delta \tilde{h}_v. \quad (32)$$

В общем, решение такой системы уравнений сложно тем, что условия на границе раздела неизвестны. Поэтому необходимы итерации для получения решения.

Если принять, что толщины диффузионного и теплового пограничных слоев в паровой фазе равны

$$\text{Le} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = \frac{k}{\delta} \approx 1, \quad (33)$$

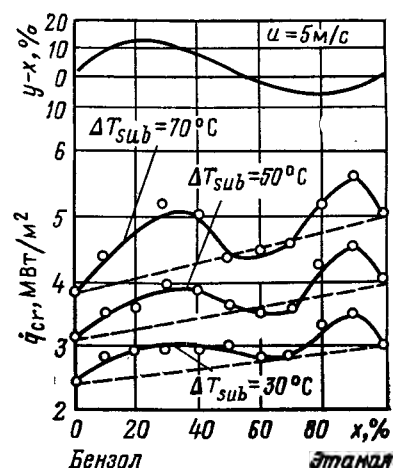


Рис. 3. Критический тепловой поток при кипении в условиях вынужденной конвекции смесей бензол — этанол [13]

кривых $\dot{q}_{cr}$ — состав также обнаружены максимумы, соответствующие наибольшим значениям $|\bar{y} - \bar{x}|$ (рис. 3), хотя они и не так заметны, как в случае кипения в большом объеме (см. § 2.7.7). Критический тепловой поток в бинарной смеси растет со скоростью и недогревом так же, как для чистых жидкостей. Критическая тепловая нагрузка в бинарной смеси $\dot{q}_{cr, m}$ может быть представлена по аналогии с анализом Стефана и Кернера для передачи теплоты при кипении в большом объеме суммой двух членов: $\dot{q}_{cr, I}$ (идеальная величина, определенная по $\dot{q}_{cr}$ для двух чистых компонентов A и B , рассчитанных при тех же самых давлении, скорости и недогреве, как в смеси) и $\dot{q}_{cr, E}$ (дополнительный тепловой поток, позволяющий учесть повышение CHF из-за эффектов массопереноса)

$$\dot{q}_{cr, m} = \dot{q}_{cr, I} + \dot{q}_{cr, E} = \dot{q}_{cr, I} (1 + \chi), \quad (39)$$

где

$$\dot{q}_{cr, I} = \dot{q}_{cr, A} (1 - \bar{x}) + \dot{q}_{cr, B} \bar{x}. \quad (40)$$

В [13, 14] установлено, что величину χ в уравнении (39) можно представить в виде функции

$$\chi = \chi \left(|\bar{y} - \bar{x}|, \left(\frac{\dot{m}D}{\eta_l} \right)_A, \frac{T_{sat, B}}{T_{sat, m} - T_{sat, B}} \right). \quad (41)$$

Число Рейнольдса $(\dot{m}D/\eta_l)_A$ определяется свойствами менее летучего компонента, который концентрируется на поверхности нагрева.

В [13] предложено следующее выражение для χ :

$$\chi = 1,5 (|\bar{y} - \bar{x}|)^{1,8} + 6,8 (|\bar{y} - \bar{x}|) \frac{T_{sat, m} - T_{sat, B}}{T_{sat, B}}. \quad (42)$$

Оно описывает данные по кризису для смесей этанол — вода, ацетон — вода, этанол — бензол и вода — этиленгликоль с разбросом $\pm 20\%$. Для азеотропных смесей рекомендуется $T_{sat, m}$ брать равным $T_{sat, B}$ при азеотропном составе, так что $\dot{q}_{cr, m} = \dot{q}_{cr, I}$. Это предложение подтверждается анализом результатов для смесей бензол — этанол, представленных на рис. 3.

В экспериментах, проведенных авторами [14], значения χ менялись от 0 до 0,8 и использовалось другое выражение для χ

$$\chi = 3,2 \cdot 10^{-5} \frac{(|\bar{y} - \bar{x}|)^3}{(\dot{m}D/\eta_l)_A} + 6,9 \frac{(|\bar{y} - \bar{x}|)^{1,8}}{(\dot{m}D/\eta_l)_A^{0,4}} \frac{T_{sat, B}}{T_{sat, m} - T_{sat, B}}. \quad (43)$$

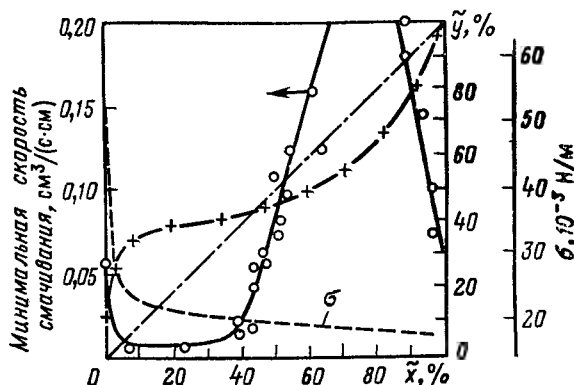


Рис. 4. Минимальные скорости смачивания для смесей вода — n -пропанол [15]. Штрихпунктирная кривая — равновесие пар — жидкость

Высыхание пленки. Для высоких паросодержаний при кольцевом течении высыхание пленки происходит, вероятно, тогда, когда расход жидкости в ней приближается к нулю. Относительно высыхания пленки в бинарной или многокомпонентной смеси отсутствуют экспериментальные данные или теоретические модели. Однако можно рекомендовать метод, предложенный Хьюиттом (см. § 2.7.3). Из результатов [5] очевидно, что расход в жидкой пленке и унос жидкости в паровое ядро определяются в основном гидродинамическими эффектами, влияние переноса массы на распределение фаз мало. При интегрировании уравнений, приведенных в § 2.7.3, следует предположить, что между жидкостью и паром в каждом сечении существует равновесие. Если это важно, то можно ввести небольшие отклонения от положения равновесия, используя уравнения, записанные в [5]. Распад жидкости на ручейки может происходить раньше, чем в чистой жидкости, вследствие эффектов поверхностного натяжения и температурного градиента. Из рис. 4 следует, что минимальная скорость смачивания для смеси вода — n -пропанол сильно зависит от состава [15].

2.7.9. Интенсификация кипения и испарения

Артур Е. Берглс

Отдельные пассивные и активные методы интенсификации оказались эффективными при кипении в условиях вынужденной и свободной конвекции [1—4]. Большинство методов применяется к пузырьковому кипению, однако некоторые используются в переходном и пленочном режимах.

А. Кипение в большом объеме. Сильное влияние обработки поверхности на пузырьковое кипение в большом объеме, включая эффекты старения, обсуждается в § 2.7.2. Многочисленные разновидности обработки поверхности и структуры используются для снижения разности температура стенка — температура насыщения жидкости ΔT_s . Хотя пузырьковое кипение можно интенсифицировать даже путем незначительных изменений поверхности [5], особенно эффективны специальные методы. Для воды образование небольших несмачивающихся участков (тефлон или эпоксидная смола) на поверхности или во впадинах снижает ΔT_s при постоянном $\dot{q}$ в 3—4 раза [6]. Данное сравнение, так же как и другие приведенные в этом параграфе, основаны на определении теплового потока по площади поверхности гладкой трубы.

В случае несмачивающихся жидкостей (хладагенты, криогенные и органические жидкости, жидкие щелочные металлы) для обеспечения захвата пара требуются впа-

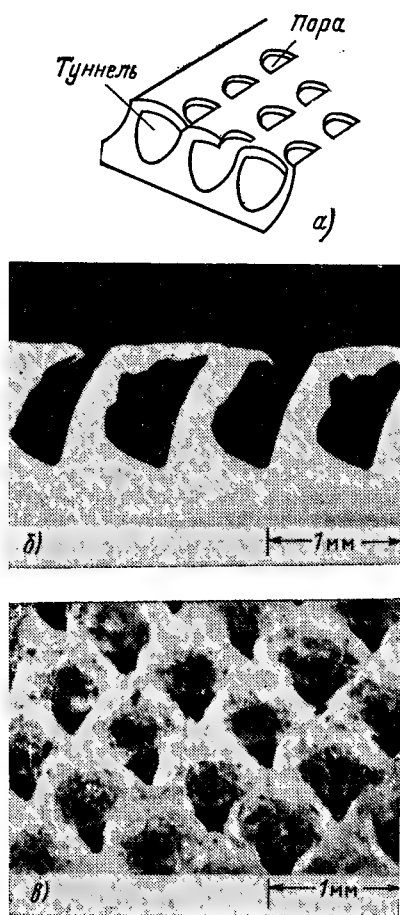


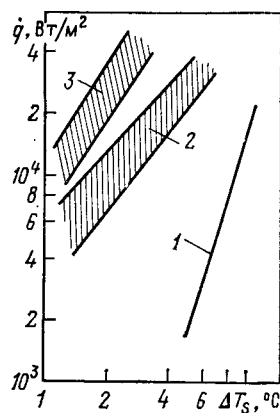
Рис. 1. Поверхность Хитачи термоэксел-Е (а), поперечное сечение (б) и вид сверху (в) [9]

дины резервуарного типа. Их можно получить механической обработкой или профилированием [7—10]. На рис. 1 показана в увеличенном виде поверхность Хитачи термоэксел-Е. В рассматриваемых условиях ΔT_s можно уменьшить до минимума выбором оптимального размера поры или углубления для жидкости. Другой метод состоит в образовании на поверхности нагрева пористого металлического слоя путем некачественной сварки [11], спекания или пайки [12, 13] (рис. 2), электролитического осаждения [14], плазменного напыления [13, 15] или металлического покрытия типа вспененного слоя [16]. Большая часть примеров относится к процессам, которые запатентованы и в некоторых случаях уже освоены промышленностью.



Рис. 2. Спеченный металлический слой, поверхность Линде Хай Флак

Рис. 3. Пузырьковое кипение в большом объеме для поверхности без покрытия 1 и с покрытием: 2 — слой из металлической матрицы; 3 — термоэксел-Е [9], хладон-11



Снижение перегрева до 10 раз получено в результате различной обработки или покрытия поверхностей. Следует отметить, что механизм парообразования на этих поверхностях отличается от кипения на обычных впадинах. Здесь жидкость течет внутрь слоя, где происходит испарение тонкой пленки на большой площади поверхности; затем пар уносится пузырьками [17, 18]. На рис. 3 приведены типичные данные. Однако следует подчеркнуть, что характеристики кипения сильно зависят от геометрии поверхности и условий в жидкости и что измерения при очень низких разностях температуры очень ненадежны.

Ограниченные данные показывают, что критическая тепловая нагрузка q_c для поверхностей со структурными покрытиями обычно такая же, как на гладких поверхностях, или выше [12]. Вообще, эти поверхности следует использовать с чистыми жидкостями, поскольку концентрация загрязнений или продуктов коррозии в порах уменьшает интенсификацию. Когда их применяют в трубных пучках, желательно использовать трубы с интенсификацией только в нижних рядах, поскольку у верхних труб скорости жидкости настолько высоки, что поверхности с интенсификацией не эффективны.

Трубы с наружными кольцевыми низкими ребрами для нагрева органических жидкостей выпускаются многими изготовителями. Локальные α и q_c часто ниже, чем для гладких труб; однако это более чем компенсируется увеличением поверхности [19, 20]. Кривые кипения для трубных пучков и одиночных труб обычно отличаются из-за различия в циркуляции [19]. Большие особо профилированные ребра обеспечивают значительные скорости рассеяния теплоты, если температура в основании соответствует пленочному кипению [21].

Другие пассивные методы интенсификации обсуждаются в [1—4]. Хотя применение структур, представляющих собой так называемую упаковку для янц и фитили, или небольших добавок может очень эффективно снизить ΔT_s или повысить q_c , практическое использование этих методов ограничено.

Активные методы интенсификации включают вращение, вибрацию, удары по поверхности нагрева, вибрацию жидкости, электростатические поля и отсос у поверхности нагрева [1—4]. Хотя активные методы более эффективны в снижении ΔT_s и увеличении q_c , практические применения их крайне ограничены в большей степени из-за трудностей надежного обеспечения указанных воздействий. Возможно основной вклад многих исследований в этой области представляет информация относительно изменений кипения в большом объеме, когда эти эффекты проявляются в теплообменном оборудовании.

Интенсификация, которая наблюдается при одновременном использовании двух или большего числа методов, также исследована. Шероховатость поверхности кипения

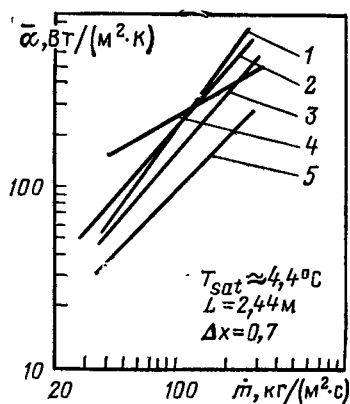


Рис. 4. Коэффициент теплоотдачи для труб с внутренним оребрением [28], хладагент-11:

1 — труба $D=14,7$ мм с 32 ребрами высотой 0,635 мм, шагом 152 мм; 2 — труба $D=12,7$ мм с 30 ребрами высотой 0,508 мм; 3 — труба $D=14,7$ мм с 32 ребрами высотой 0,635, шагом 305 мм; 4 — труба $D=14,4$ мм с пятью радиальными перегородками; 5 — гладкая труба $D=15,9$ мм

вращающегося испарителя-конденсатора привела к увеличению коэффициента теплопередачи на 10% [22].

В. Кипение в трубах. В соответствии с общей наблюдаемой закономерностью, согласно которой обработка поверхности при кипении в случае конвекции оказывает меньшее влияние, чем в большом объеме, различные обработки поверхности, о которых речь шла выше, имеют относительно небольшое воздействие на кипение в трубах. Конечно, основная причина заключается в том, что трудно изменить внутренние поверхности. Пористые поверхности не повышают высокие потоки при кипении недогретой жидкости, однако исключается гистерезис кривой кипения для хладагентов [23]. Различные типы шероховатых поверхностей увеличивают q_c в случае недогретой жидкости только на 10% [24].

Множество модификаций поверхности предложено для интенсификации испарения при вынужденной конвекции воды и других жидкостей: трубы переменного сечения, шнеки, винтовые ребра, выступы, полученные механическим путем, свернутые в спираль проволоочные вставки [1]. Большинство конфигураций заметно повышает α , q_c при пузырьковом кипении и α в закризисной области. Промышленностью освоено только несколько технологий модификации поверхности вследствие трудности изготовления и возможных отклонений и коррозий. Исключениями являются трубы со спиральными канавками, которые приводят к росту α при кипении хладагента-12 до 200% [25], и трубы с внутренним оребрением, которые подавляют псевдоплотное кипение сверхкритической воды, поэтому работают при более высоких q , чем гладкие трубы [26].

Трубы с внутренними ребрами изготавливаются для испарителей хладагентов. Интенсивность теплоотдачи можно увеличить на несколько сот процентов по сравнению с гладкой трубой [27, 28], что видно из рис. 4. Теплоотдающие поверхности с интенсификацией широко используются в испарителях с вертикальными трубами. Хотя профилированные трубы (трубы с двойными канавками и со спиральными гофрами) разработаны в основном для усиления конденсации на наружной стенке, коэффициенты теплоотдачи для испаряющегося рассола внутри трубы также растут [29]. При испарении со стекающей пленки α можно увеличить больше чем в 10 раз с помощью труб с внутренним оребрением [30].

За счет изменения конфигурации дистанционирующей решетки можно увеличить q_c для сборок стержней твэлов

реактора [31, 32]. Строгие нормы препятствуют обычно использованию таких устройств в реакторах.

Множество устройств предложено для интенсификации кипения при вынужденном течении путем завихрения его вторичным потоком. Ряд генераторов вихрей на входе в виде спиральных вводов или тангенциальных щелей использовались в области очень высоких тепловых потоков при кипении недогретой воды. Большие тепловые нагрузки $q_c=1,73 \cdot 10^8$ Вт/м² получены с помощью этого метода [33]. Завихрение на входе эффективно при увеличении q_c для кипения недогретой воды в трубе [34] или в кольцевом канале (внутренняя труба нагреваемая) [35].

Скрученные ленты распространены вследствие простоты применения в существующем теплообменном оборудовании. Они идеальны в приложении к горячим пятнам, так как короткая лента помогает решить задачу интенсификации теплообмена, оказывая небольшое воздействие на общее падение давления. Кривые кипения для недогретой жидкости, закрученной лентой, подобны кривым для труб без лент [36]; однако q_c можно увеличить на 100% [37], как показано на рис. 5. Критические тепловые потоки для завихренного потока примерно в 2 раза выше, чем для прямолинейного течения, при одинаковой мощности прокачки через опытный участок.

Неплотно установленные ленточные вставки использовались при опускном течении в вертикальной трубе испарителей для обессоливания морской воды [38]. Эти вставки также эффективны для прямоточных испарителей криогенных жидкостей [39] или парогенераторов [40, 41], так как они выгодно воздействуют во всех режимах. Парогенераторы со спиральными трубами имеют преимущества ввиду их компактности и высокой теплопередающей характеристики. Интенсификация кипения сильно зависит от геометрических и режимных условий [42, 43]. Умеренные улучшения α (среднего по поверхности) получены для кипения при вынужденной конвекции, причем интенсификация усиливается с уменьшением диаметра спирали. В области недогрева q_c ниже, чем для сравнимой прямой трубы; однако q_c или X_c обычно существенно выше, чем в случае прямой трубы при паросодержаниях на выходе больше 0,2. Теплоотдача в закризисной области также улучшается.

Добавки малоэффективны при пузырьковом кипении с недогревом; ΔT_s в одних случаях понижается, в других — повышается [1]. С другой стороны, общий α удваивается

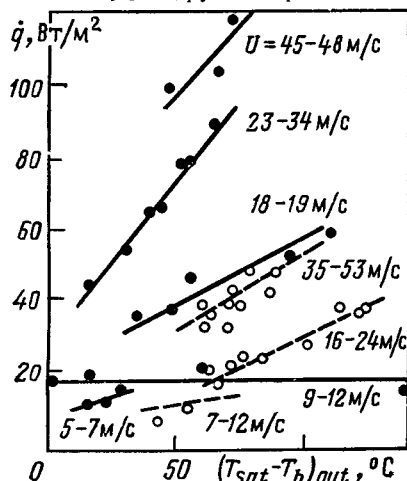


Рис. 5. Влияние вставок скрученной ленты на критический тепловой поток при кипении недогретой воды [37]:

○ — поток без закрутки, $p=1-4 \cdot 10^5$ Н/м²; $D=0,457; 0,775$ см; $L/D=7 \div 54$; ● — закрученный поток, $p=1-8 \cdot 10^5$ Н/м²; $D=0,460; 1,021$ см; $L/D=8 \div 61$; $y=2,08 \div 2,99$

вается, когда поверхностно-активное вещество вводится в морскую воду, испаряющуюся в вертикальных трубах (подъемное течение) [44].

Активные методы сложно применить при кипении в трубах. Воздействие вибрации трубы [45] или пульсаций потока [1] мало. Электрические поля также улучшают теплоотдачу при кипении (например, обнаружено увеличение q_c больше чем на 100%), однако дополнительные

усложнение оборудования и возможная электрическая опасность исключают применение этого метода [1].

Мало сделано по разработке критерия определения теплогидравлической характеристики для теплоотдачи при кипении. Показатель для кипения с недогревом предложен в [46] (объемная интенсивность теплоотдачи канала сравнивается с мощностью на прокачку на единицу объема).

Раздел 2.8

ТЕПЛООБМЕН В СИСТЕМЕ ГАЗ — ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ¹

2.8.1. Неподвижные плотноупакованные слои

Р. Бауэр

В промышленности системы газ — твердые частицы используются в качестве осушителей, охладителей, нагревателей, химических реакторов и т. д. Так как большинство этих процессов связано с передачей теплоты, необходимо знать распределения тепловых потоков и температуры для конструирования таких систем.

Обычно передача теплоты происходит через ограничивающую стенку. Теплообмен между этой стенкой и системой газ — твердые частицы, а также внутри этой системы представляет собой сложный процесс, в котором проявляются различные более простые процессы, соответствующие разным рабочим условиям. Самый простой случай — неподвижные твердая фаза и газ (неподвижный плотноупакованный слой). В этом случае теплота переносится через газ и твердые частицы в внутренней области насадки. Во втором случае газ течет через пространство между частицами насадки параллельно стенкам, в то время как сами частицы неподвижны (плотноупакованный слой с движущимся через него газом). Из-за того что газ течет в зазорах между твердыми частицами, происходит интенсификация теплообмена в слое. В третьем случае как газовая, так и твердая фаза находятся в движении из-за перемешивания или вибрации насадки (перемешиваемый слой) или вследствие обмена импульсом между движущимся газом и частицами (псевдооживленный слой). При этом наблюдается дополнительное повышение интенсивности теплоотдачи твердой фазы вследствие движения частиц.

Тепловые потоки и профили температур в таких системах газ — твердые частицы получают на основе решения уравнений баланса энергии, которые соответствуют различным способам переноса энергии.

А. Описание условий теплообмена. Точное математическое описание процессов теплообмена в плотноупакованных слоях — довольно сложная задача. По этой причине необходимо решать задачи в упрощенных постановках, обеспечивающих приемлемую точность.

Для описания теплообмена в системах, состоящих из газа и твердых частиц, при помощи адекватной модели обычно принимаются следующие допущения.

1. Гетерогенная система газ — твердые частицы рассматривается как квазигомогенный континуум с эффективным коэффициентом теплопроводности. Считается, что не существует никакой разницы между температурами твердой и газовой фаз.

2. Процессы теплообмена, протекающие в плотноупакованном слое, изменяются вблизи ограничивающей стенки, вследствие чего рассматриваются характерные области слоя. В первой области, находящейся вблизи стенки и имеющей толщину порядка диаметра одной

частицы, теплоперенос описывается с использованием коэффициента теплоотдачи к стенке. Вторая область — это центральное ядро слоя, и теплообмен в ней описывается на основе предположения 1.

В. Уравнение, описывающее двумерное поле температур $T(r, t)$. Ниже мы определим поле температур в системе газ — твердые частицы с неподвижным газом. Рассмотрим, например, нестационарный нагрев цилиндрического плотноупакованного слоя через цилиндрическую стенку (рис. 1).

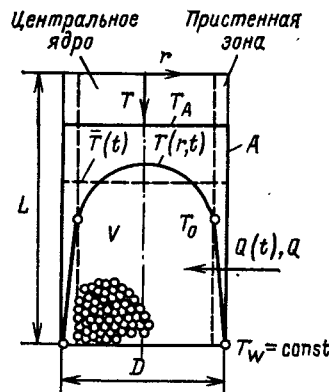


Рис. 1. Нестационарный нагрев цилиндрического слоя без прокачки теплоносителя

Уравнение, описывающее тепловой баланс такого цилиндрического слоя толщиной dr в предположении его однородности и постоянных физических свойств (рис. 2), можно представить в цилиндрических координатах

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial (rq_r)}{\partial r} = [(1-\psi) \rho_s c_s + \psi \rho c_p] \frac{dT}{dt}, \quad (1)$$

где q_r — плотность радиального теплового потока в точке с координатой r ; ψ — пористость слоя; ρ_s , ρ — плотности твердой и газовой фаз соответственно; c_s , c_p — теплоемкости твердой и газовой фаз соответственно.

Вместе с законом теплопроводности Фурье в гомогенных телах

$$q_r = -\lambda_{s0} \frac{dT}{dr} \quad (2)$$

и с учетом того, что мгновенные изменения энтальпии газа пренебрежимо малы по сравнению с изменениями энтальпии твердого тела, уравнение (1) перепишем в виде

$$\lambda_{s0} \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) = (1-\psi) \rho_s c_s \frac{dT}{dt}, \quad (3)$$

где λ_{s0} — так называемый эффективный коэффициент теплопроводности неподвижной системы газ — твердые частицы.

¹ Пер. с англ. Е. Б. Эйгенсон.

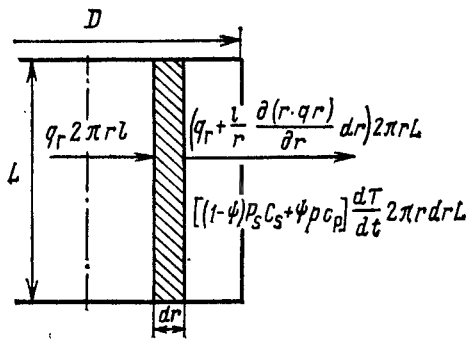


Рис. 2. Тепловой баланс в цилиндрическом слое толщиной dr

Запишем начальное условие при $t=0$:

$$T = T_A. \quad (4)$$

Граничные условия при $r=D/2$:

$$T = T_w = \text{const.} \quad (5)$$

При $r=0$

$$\partial T / \partial r = 0.$$

Для того чтобы учесть теплообмен у стенки, используются следующие граничные условия при $r=D/2$:

$$-\lambda_{s0} \frac{dT}{dr} \Big|_{D/2} = \alpha_{\max} (T_0 - T_w), \quad (6)$$

где $T_0 - T_w$ — фиктивный температурный напор. В этом уравнении $\alpha_{\max}$ — так называемый коэффициент теплоотдачи к стенке в неподвижной системе газ — твердые частицы.

Аналитическое решение уравнения (3) обсуждается в [1].

С. Параметры теплообмена. Эффективный коэффициент теплопроводности λ_{s0} неподвижного плотноупакованного слоя. Теоретические и экспериментальные оценки эффективного коэффициента теплопроводности λ_{s0} плотно упакованных слоев с неподвижным газом имеют долгую историю, характеризующуюся постоянным совершенствованием расчетных и экспериментальных подходов. Современные теории предлагают уравнения для λ_{s0} , записанные с использованием физических свойств компонент и геометрии системы.

Вероятно, одна из наиболее современных теорий изложена в [2], где предложен метод для расчета λ_{s0} , на основе рассмотрения модели системы сферических частиц, расположенных так, что направление теплового потока проходит через центры двух соприкасающихся сфер. Эффективный коэффициент теплопроводности можно определить математически, допуская, что выше основной поверхности ячейки располагается слой, обладающий другим коэффициентом теплопроводности. Упрощающим допущением этой модели является предположение о существовании параллельных линий тока теплового потока. Погрешность, вносимая этим предположением, так же как и погрешность, вносимая произвольной формой частиц, учтена в [3] введением переменного контура частицы, используемого в модели. В [4] эта модель распространена на описание слоев несферических частиц, таких, как цилиндры и кольца Рашига, а также на плотноупакованные слои с различными распределениями частиц по размерам.

Согласно модели Зенера — Бауэра, иллюстрируемой рис. 3, теплота передается только через жидкую фазу с площадью поверхности тора $1 - \sqrt{1-\psi}$ путем молекуляр-

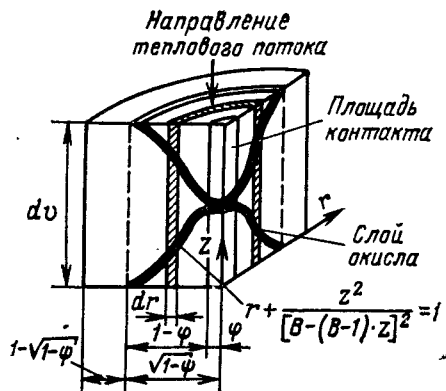


Рис. 3. Модель для расчета эффективного коэффициента теплопроводности λ_{s0} [4]

ной теплопроводности и радиации. Другая часть теплоты передается через обе фазы: жидкую и твердую. Доля поверхности передачи теплоты при этом составляет $\sqrt{1-\psi}$. Это разделение необходимо для того, чтобы описать эффективный коэффициент теплопроводности в насадках при отсутствии движения. Далее предполагается, что площадь контакта двух соприкасающихся твердых частиц конечна. Поэтому поверхность $\sqrt{1-\psi}$ делится на часть φ для теплообмена через контакт и на часть $1-\varphi$ для переноса теплоты через половинки двух частиц, которые разделены между собой клином жидкости.

Перенос теплоты теплопроводностью и излучением, а также эффект Смолуховского (влияние давления), который зависит от размера этого жидкого клина, учитываются подстановкой эквивалентных коэффициентов теплопроводности λ_s^* , λ_R и λ_D при суммировании индивидуальных локальных коэффициентов теплопроводности. В конце концов расчет для всей ячейки дает следующее уравнение для определения λ_{s0} :

$$\frac{\lambda_{s0}}{\lambda} = (1 - \sqrt{1-\psi}) \left[\frac{\psi}{(\psi-1) + \lambda_R/\lambda_D} + \psi \frac{\lambda_R}{\lambda} \right] + \sqrt{1-\psi} \left[\varphi \frac{\lambda_s^*}{\lambda} + (1-\varphi) \frac{\lambda_{s0}^*}{\lambda} \right], \quad (7a)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{s0}^*}{\lambda} = & \frac{2}{p} \left(\frac{B(\lambda_s^*/\lambda + \lambda_R/\lambda - 1)(\lambda/\lambda_D)(\lambda/\lambda_s^*)}{p^2} \times \right. \\ & \times \ln \frac{B[\lambda_s^*/\lambda + \lambda_R/\lambda](\lambda/\lambda_D)}{B[1 + (\lambda/\lambda_D - 1)(\lambda_s^*/\lambda + \lambda_R/\lambda)]} - \frac{B-1}{p} \frac{\lambda}{\lambda_D} + \\ & \left. + \frac{B+1}{2B} \left\{ \frac{\lambda_R}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_D} - B \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_D} - 1 \right) \frac{\lambda_R}{\lambda} \right] \right\} \right); \quad (7b) \\ p = & \left[1 + \left(\frac{\lambda_R}{\lambda} - B \frac{\lambda_D}{\lambda} \right) \frac{\lambda}{\lambda_s^*} \right] \frac{\lambda}{\lambda_D} - \\ & - B \left(\frac{\lambda}{\lambda_D} - 1 \right) \left(1 + \frac{\lambda_R}{\lambda} \frac{\lambda}{\lambda_s^*} \right). \quad (7b) \end{aligned}$$

Уравнение (7б) не определено для $p=0$. В предельном случае уравнения приводят к виду

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\lambda_{s0}^*}{\lambda} = & \frac{\lambda_s^*/\lambda}{B(B-1) [1 + (\lambda/\lambda_D - 1)(\lambda_s^*/\lambda + \lambda_R/\lambda)]} \times \\ & \times \left\{ \frac{2}{3} \frac{B^3 - 1}{(B-1) [1 + (\lambda_R/\lambda)(\lambda/\lambda_s^*)]} + (B+1) \left(\frac{\lambda_R}{\lambda} - 1 \right) \right\}. \quad (7г) \end{aligned}$$

В уравнениях (7) λ — коэффициент теплопроводности газа в бесконечно большом объеме. Коэффициент λ_s^* —

средний коэффициент теплопроводности твердой фазы. Для неметаллических частиц λ_s^* равен коэффициенту теплопроводности λ_s частицы. В случае металлических частиц, покрытых окисной пленкой толщиной s_{0x} с коэффициентом теплопроводности λ_{0x} ,

$$\frac{\lambda_s^*}{\lambda} = \frac{\lambda_s}{\lambda} \frac{1}{1 + Bi}, \quad (8)$$

где

$$Bi = \frac{s_{0x}}{\lambda_{0x}} \frac{\lambda_s}{d}. \quad (9)$$

В общем случае отношение s_{0x}/λ_{0x} неизвестно и должно определяться экспериментально.

В уравнении (9) d — средний диаметр произвольной частицы, обратную величину которого найдем суммированием частиц i всех размеров с массовыми долями ΔD_i , деленными на эквивалентный диаметр сферы $d_{v,i}$:

$$\frac{1}{d} = \sum_{i=1, n} \frac{\Delta D_i}{d_{v,i}}. \quad (10)$$

Таким образом обходятся пустые пространства в частицах, подобных кольцам Рашига. В случае монодисперсного слоя частиц d равно диаметру сферы d .

Эквивалентный коэффициент теплопроводности для передачи энергии излучением λ_R , предложенный Дамклером, определяется соотношением

$$\frac{\lambda_R}{\lambda} = \frac{0,04 C_s}{(2/\varepsilon - 1) \lambda} \left(\frac{T}{100} \right)^3 x_R, \quad (11)$$

где $C_s = 5,775 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) — постоянная Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела; ε — коэффициент поглощения; T — абсолютная температура слоя частиц.

Эффективная оптическая длина x_R , которая характеризует расстояние между поверхностями частиц в любом слое, рассчитывается следующим образом:

$$\frac{1}{x_R} = \sum_{i=1, n} \frac{\Delta D_i}{R d_{v,i}}, \quad (12)$$

где R — коэффициент формы, учитывающий, что истинная форма частицы может быть отлична от ее геометрической формы, когда речь идет о теплообмене излучением, и должна определяться экспериментально.

Эквивалентный коэффициент теплопроводности между поверхностями твердых тел λ_D обусловлен эффектом Смолуховского. Вследствие этого эффекта в таких зазорах обычное движение молекул газа настолько подавлено на граничной поверхности, что возникает дополнительное сопротивление переносу теплоты. Так как это сопротивление прямо пропорционально средней длине свободного пробега газа, то чем меньше расстояние между поверхностями твердых частиц, тем более важным становится это сопротивление. В области, расположенной вокруг точки контакта частиц в слое, расстояние между поверхностями этих частиц всегда сравнимо со средней длиной свободного пробега. Поскольку перенос теплоты в газе связан с температурой твердых частиц, эквивалентный коэффициент теплопроводности λ_D газа принимает вид

$$\frac{\lambda}{\lambda_D} = 1 + \frac{2\sigma_s}{x_D} \left(\frac{2}{\gamma} - 1 \right). \quad (13)$$

Здесь x_D — эффективный размер, который характеризует расстояние между частицами при определении теплопроводности разреженного газа, причем

$$\frac{1}{x_D} = \sum_{i=1, n} \frac{\Delta D_i}{D d_{v,i}}, \quad (14)$$

где D — коэффициент формы, учитывающий, что истинная форма частиц может быть отлична от геометрической, когда речь идет о кнудсеновском переносе: значение D находят из экспериментов.

В уравнении (13) γ — коэффициент аккомодации; σ — средняя длина свободного пробега молекул газа. Так как σ обратно пропорциональна давлению газа, то

$$\sigma = \sigma_0 \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p} \quad (15)$$

где σ_0 — средняя длина свободного пробега при температуре $T_0 = 273,15$ К и давлении $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Н/м², и эффективный коэффициент теплопроводности λ_{s0} полной системы становится функцией давления газа. Заметим также, что σ_0 является функцией размера молекулы η :

$$\sigma_0 = \frac{8,4 \cdot 10^{-27}}{\eta^2}. \quad (16)$$

В уравнении (1) B — параметр деформации, при помощи которого реальная форма частиц приводится к искусственной так, чтобы линии тепловых потоков оставались параллельными везде в слое.

Параметр деформации определяют из соотношения

$$B = C \left(\frac{1 - \psi}{\psi} \right)^{10/9} (1 + 3\xi_1), \quad (17)$$

где ψ — средняя пористость слоя; C — коэффициент формы при определении теплопроводности частицы. Значение C следует определять из эксперимента.

В уравнении (17) ξ_1 описывает влияние числа точек контакта, которое изменяется с распределением частиц по размерам, потому что в основном теплота передается в окрестности этих точек контакта. Это стандартное от-

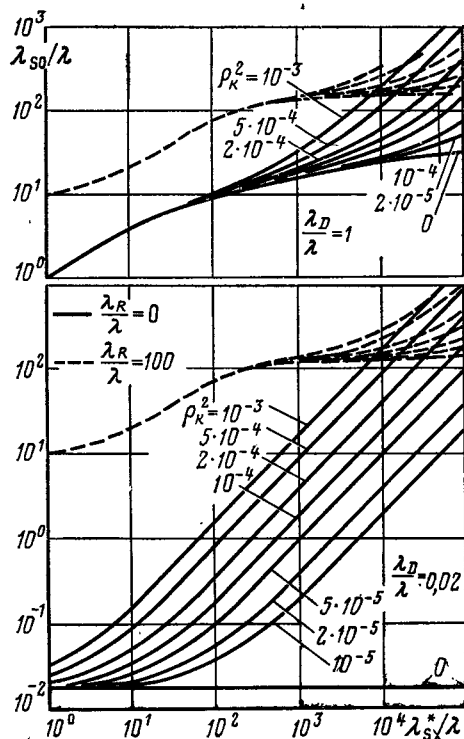


Рис. 4. Зависимость рассчитанных уравнениями (7) эффективных коэффициентов теплопроводности λ_{s0}/λ для слоя из одинаковых сферических частиц от отношения теплопроводностей λ_s^*/λ

Таблица 1. Коэффициенты формы C , R , D и объемный эквивалентный диаметр сферы $d_{V,i}$ для расчета эффективного коэффициента теплопроводности λ_{s0} различных насадок

Форма частиц	C	R	D	$d_{V,i}$
Сфера диаметра d	1,25	1	1	d
Цилиндр диаметром d и длиной l	2,5	1	1	$d \sqrt[3]{\frac{3l}{2d}}$
Полый цилиндр с внешним диаметром d , внутренним диаметром d_i , длиной l	$2,5 \left[1 + \left(\frac{d_i}{d} \right)^2 \right]$	1	1	$d \sqrt[3]{\frac{3l}{2d}}$
Смесь сферических частиц с диаметрами d_1 и d_2 и массовой концентрацией $\Delta D_1 = \frac{M_1}{M}$ (масса сферы 1)	1,25	1	1	d_1, d_2
Распределение раздробленных частиц по размерам с массовой концентрацией $\Delta D_i = \frac{M}{M}$ (масса частиц размером i) = $\frac{M}{M}$ (общая масса), где z — число частиц размером i	1,4	1	1	$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \frac{M_i}{z \rho_s}}$

клонение от средней величины, получаемой из распределения

$$\xi_1 = \left[\frac{\sum_{i=1,n} \Delta D_i / d_{V,i}^2}{\left(\sum_{i=1,n} \Delta D_i / d_{V,i} \right)^2} \right]^{0,5} \quad (18)$$

В случае монодисперсного слоя $\xi_1 = 0$.

В уравнениях (7) φ описывает дополнительный перенос теплоты через поверхность соприкосновения твердых частиц

$$\varphi = \frac{23 \rho_k^2}{1 + 22 \rho_k^{4/3}} \quad (19)$$

В этом уравнении ρ_k^2 — относительная площадь контакта твердого тела:

$$\rho_k^2 = \left(\frac{d_k}{d} \right)^2, \quad (20)$$

где d_k — диаметр площади контакта. Так как эта часть площади является функцией многих все еще неопреде-

ленных величин, таких, как упругость материала, внешние механические напряжения, состояние поверхности и так далее, ρ_k^2 можно найти только экспериментально.

Относительные эффективные коэффициенты теплопроводности λ_{s0}/λ , рассчитанные с помощью уравнений (7) — (20) для некоторых специальных случаев, представлены на рис. 4; их можно использовать для оценки наиболее важных определяющих величин.

На рис. 5—12 результаты расчетов эффективных коэффициентов теплопроводности λ_{s0} сравниваются с экспериментальными результатами, полученными для слоев, состоящих из сфер, цилиндров, полых цилиндров и раздробленных твердых частиц одинакового и различных размеров. Различные коэффициенты формы C , R и D , полученные из экспериментов, сведены в табл. 1.

Например, на рис. 5—8 [4] и на рис. 9—12 из [5] представлены экспериментальные данные, показывающие

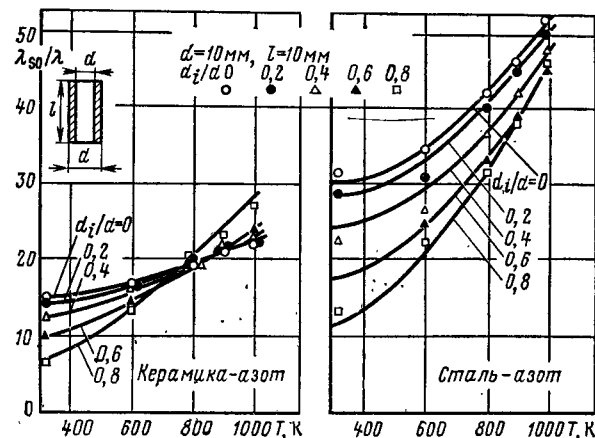


Рис. 5. Влияние температуры на величину эффективного коэффициента теплопроводности λ_{s0}/λ для слоя из полых цилиндров одинакового размера при атмосферном давлении (см. [4] и уравнения (7)) для различных отношений внутреннего и внешнего диаметров d_i/d

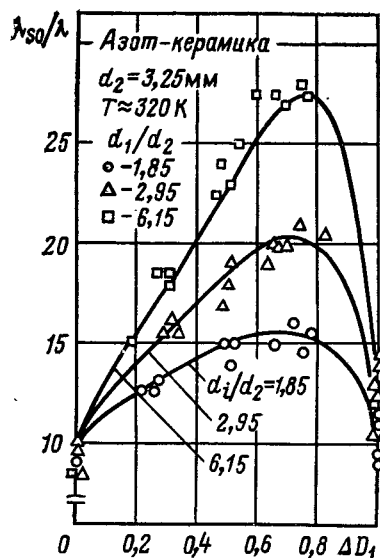


Рис. 6. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности λ_{s0}/λ для слоя из бинарной смеси керамических сфер от массовой концентрации ΔD_1 при атмосферном давлении (см. [4] и уравнения (7)) для различных отношений диаметров d_1/d_2

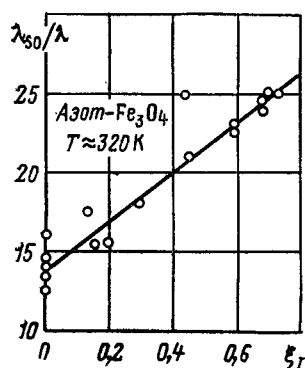


Рис. 7. Влияние параметра распределения ξ_I на эффективный коэффициент теплопроводности λ_{so}/λ для слоев из гранулированных частиц неправильной формы (Fe_3O_4) при атмосферном давлении [4]

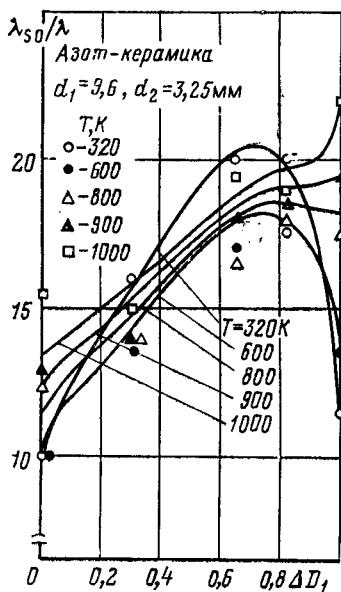


Рис. 8. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности λ_{so}/λ слоев из бинарной смеси керамических сфер от массовой концентрации ΔD_1 при атмосферном давлении (см. [4] и уравнения (7)) для различных температур

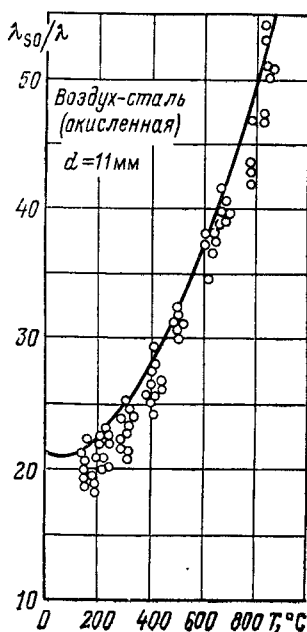


Рис. 9. Влияние температуры на эффективный коэффициент теплопроводности λ_{so}/λ для слоя из сферических частиц одинаковых размеров при атмосферном давлении (см. [5] и уравнения (7))

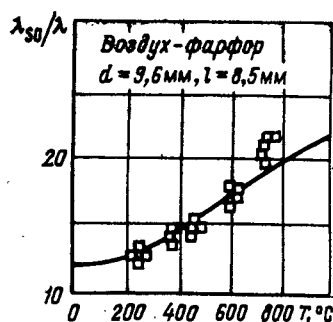


Рис. 10. Влияние температуры на эффективный коэффициент теплопроводности λ_{so}/λ для слоя из цилиндров одинакового размера при атмосферном давлении (см. [5] и уравнения (7))

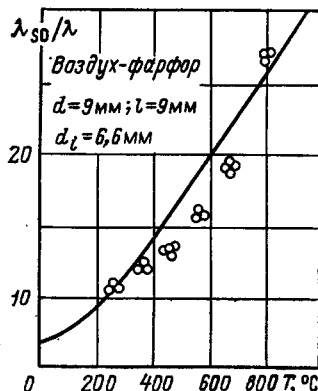


Рис. 11. Влияние температуры на эффективный коэффициент теплопроводности λ_{so}/λ для слоя из полых цилиндров одинакового размера при атмосферном давлении (см. [5] и уравнения (7))

влияние теплопроводности и излучения в различных слоях.

Результаты измерений, представленные на рис. 5, показывают, что доля излучения в коэффициенте теплопроводности λ_{so} сильно зависит от передачи теплоты теплопроводностью в твердой фазе. Так, например, в случае стальных труб, которые являются хорошими проводниками теплоты, увеличение λ_{so} из-за излучения намного больше, чем в случае керамических труб, которые плохо проводят теплоту.

Из рис. 6 ясно видно доминирующее влияние распределения частиц по размерам на передачу теплоты теплопроводностью. Когда отношение диаметров d_1/d_2 сферических включений увеличивается, число точек контакта также увеличивается, что ведет к увеличению доли переноса теплоты теплопроводностью в λ_{so} . Более того, число точек контакта изменяется с составом ΔD_1 смеси, так что в каждом случае достигаются максимальные значения.

Недавно опубликованные обширные экспериментальные данные [6], так же как и данные [7, 8], приведенные на рис. 13—23, необходимы для проверки теории, описывающей влияние давления на λ_{so}/λ . Они получены для условий, соответствующих порошкообразным изоляционным материалам.

Если измеренные эффективные коэффициенты теплопроводности λ_{so} представить в виде функции давления p в логарифмических координатах, образуется типичная S-образная кривая (рис. 13). Постоянное значение при очень низких давлениях — это составляющая коэффициента теплопроводности, обусловленная теплопроводностью через поверхность контакта, которая может быть определена варьированием ρ_k^2 до тех пор, пока измеренное значение не совпадет с теоретическим.

Полученное таким образом значение ρ_k^2 , например $3.5 \cdot 10^{-4}$, должно быть независимым от состава газа, так как при очень низких давлениях практически весь эффективный коэффициент теплопроводности определяется исключительно этими тепловыми мостами из твердого

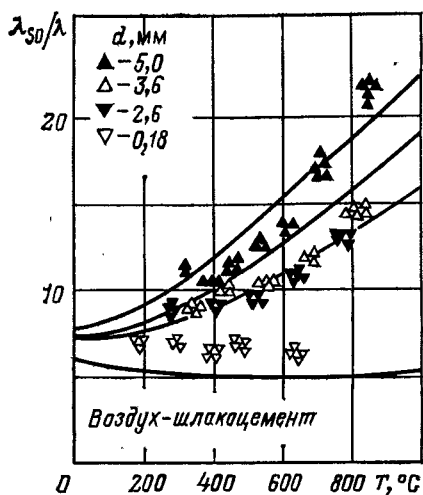


Рис. 12. Влияние температуры на эффективный коэффициент теплопроводности λ_{so}/λ для слоя из частиц неправильной формы при атмосферном давлении (см. [5] и уравнения (7)) для различных средних температур

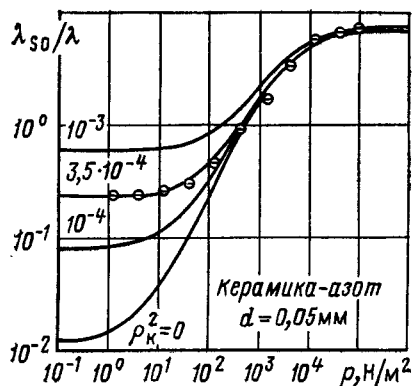


Рис. 13. Влияние относительной площади контакта ρ_K^2 на эффективный коэффициент теплопроводности λ_{so}/λ для слоя из одинаковых сфер при различных давлениях газа и комнатной температуре (согласно [6] и уравнениям (7))

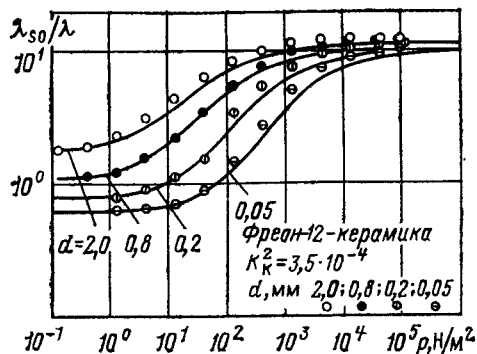


Рис. 14. Зависимость эффективных коэффициентов теплопроводности для слоя из сфер одинаковых размеров от давления Фреона-12 при комнатной температуре ([6] и уравнения (7))

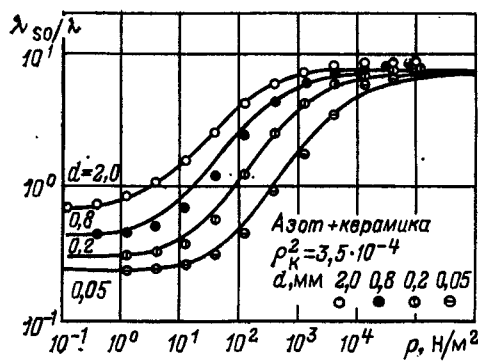


Рис. 15. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности для слоя из одинаковых сферических частиц от давления азота при комнатной температуре (см. [6] и уравнения (7)) для различных диаметров

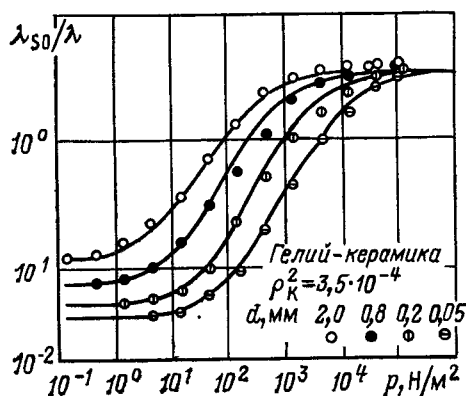


Рис. 16. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности для слоя из одинаковых сфер от давления гелия при комнатной температуре (см. [6] и уравнения (7)) для различных диаметров

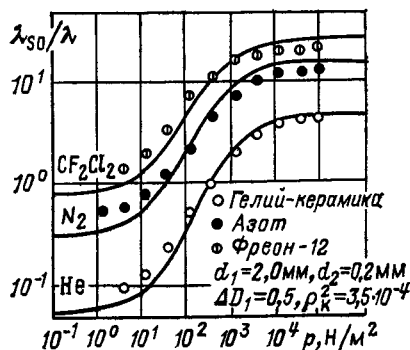


Рис. 17. Влияние коэффициента теплопроводности газа на эффективный коэффициент теплопроводности для слоев из бинарной смеси сферических частиц при различных давлениях и комнатной температуре (согласно [6] и уравнениям (7))

материала. Как видно из рис. 14—18, экспериментальные значения для нескольких газов со слоями, составленными из сферических керамических частиц различных размеров или распределенных по размерам, воспроизводятся довольно плохо.

Чтобы достаточно точно рассчитать перенос теплоты в слоях, состоящих из металлических частиц при высоких давлениях, иногда необходимо учитывать, что плохо проводящий слой окисла препятствует переносу теплоты.

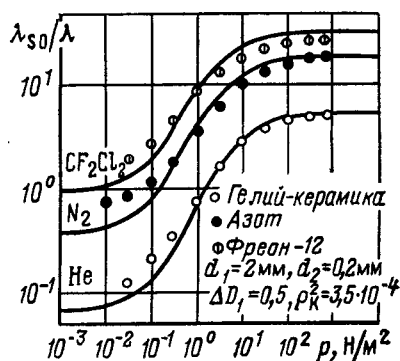


Рис. 18. Влияние коэффициента теплопроводности газа на эффективный коэффициент теплопроводности для слоев из бинарной смеси сферических частиц при различных давлениях и комнатной температуре [см. [6] и уравнения (7)]

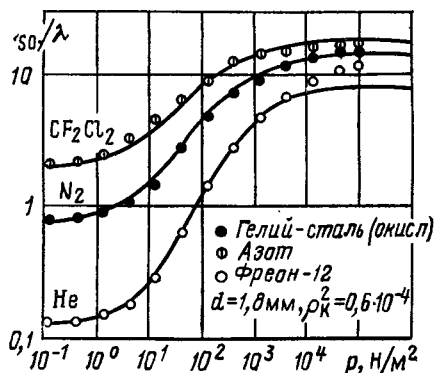


Рис. 19. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности для насадок из окисленных металлических сфер и различных наполняющих газов при комнатной температуре от давления и комнатной температуры [см. [6] и уравнения (7)]

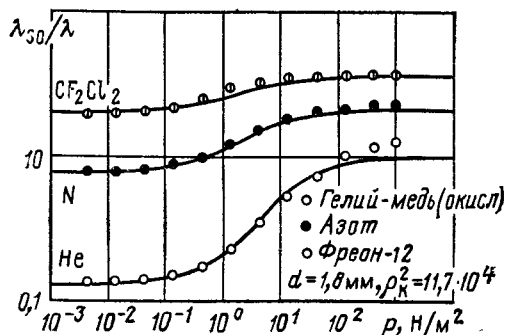


Рис. 20. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности для слоев из окисленных металлических сфер и различных наполняющих газов от давления при комнатной температуре [см. [6] и уравнения (7)]

В таком случае сопротивление этого окисного слоя может быть хорошо описано с помощью отношения (см. рис. 19, 20) $s_{ox}/\lambda_{ox} = 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

На рис. 21—23 представлены результаты измерений относительного эффективного коэффициента теплопроводности для совершенно чистых металлических сфер.

Ненадежность данных, полученных для различных относительных площадей контактов твердого тела ρ_K^2 в разных слоях, не вызывает удивления, так как они

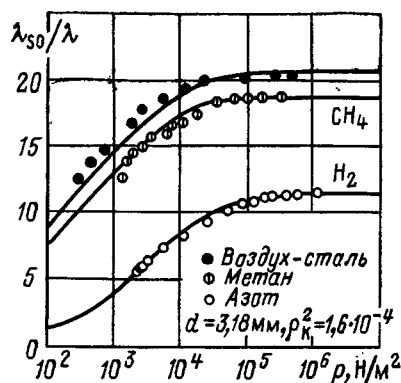


Рис. 21. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности для слоев из неокисленных металлических сфер и различных наполняющих газов при комнатной температуре [см. [8] и уравнения (7)]

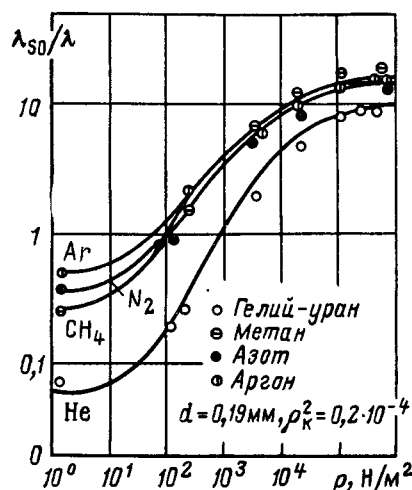


Рис. 22. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности для слоев из неокисленных металлических сфер от давления при комнатной температуре см. [7] и уравнения (7)

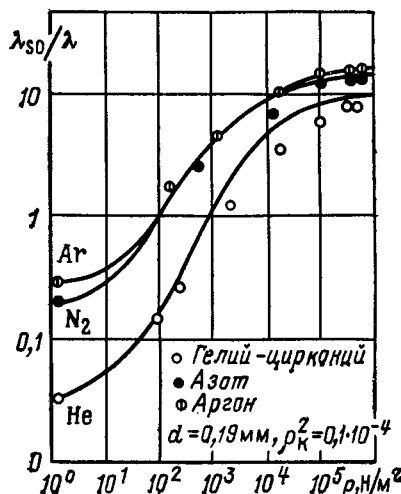


Рис. 23. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности для слоев из неокисленных металлических сфер от давления при комнатной температуре см. [7] и уравнения (7)

Таблица 2. Свойства насадок. Сравнение расчетных и экспериментальных данных

Твердая фаза	Газ	ε	$\frac{\sigma_{\text{изл}}}{\sigma_{\text{ок}}}, 10^3 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$	$\rho_k^2, 10^4$	$\sigma_0, \text{ нм}$	γ	$\rho, 1 \cdot 10^3 \text{ Па}$	$T, ^\circ\text{C}$
Стиропор [4]	N ₂	0,930	—	3,5	61,8	0,9	1	—
Пеностекло	—	—	—	—	—	—	—	—
Стекло	—	—	—	—	—	—	—	—
Керамика	N ₂	0,850	—	3,5	61,8	0,9	1	—
Стеатит	N ₂	0,780	—	3,5	61,8	0,9	1	—
Сталь (окисленная)	N ₂	0,850	0,15	1,5	61,8	0,9	1	—
Сталь (неокисленная)	N ₂	0,130	—	1,5	61,8	0,9	1	—
Медь (окисленная)	N ₂	0,780	0,15	2,0	61,8	0,9	1	—
Медь (неокисленная)	N ₂	0,20	—	2,0	61,8	0,9	1	—
Керамика [6]	He	—	—	—	126,3	0,4	—	—
	N ₂	0,90	—	3,5	61,8	0,9	—	30
	CF ₂ Cl ₂	—	—	—	31,5	1,0	—	—
Сталь (окисленная)	He	—	—	—	126,3	0,4	—	—
	N ₂	0,850	0,15	0,6	61,8	0,9	—	30
	CF ₂ Cl ₂	—	—	—	31,5	1,0	—	—
Медь (окисленная)	He	—	—	—	126,3	0,4	—	—
	N ₂	0,780	0,15	11,7	61,8	0,9	—	30
	CF ₂ Cl ₂	—	—	—	31,5	1,0	—	—
Уран (неокисленный) [7]	He	—	—	—	126,3	0,4	—	—
	CH ₄	0,10	—	0,2	57,4	0,8	—	25
	N ₂	—	—	—	61,8	0,9	—	—
	Ag	—	—	—	71,8	0,95	—	—
Цирконий (неокисленный)	He	—	—	—	126,3	0,4	—	—
	N ₂	0,10	—	0,1	61,8	0,9	—	25
	Ag	—	—	—	71,8	0,95	—	—
Сталь (неокисленная) [8]	N ₂	—	—	—	112,0	0,15	—	—
	CH ₄	0,10	—	1,6	57,4	0,8	—	33
	Воздух	—	—	—	64,0	0,9	1	—
Сталь (окисленная) [5]	Воздух	0,80	0,15	1,5	64,0	0,9	—	—
Фарфор	Воздух	0,930	—	3,5	64,0	0,9	1	—
Бетон	Воздух	0,930	—	3,5	64,0	0,9	1	—

зависят от многих определяющих величин, которые невозможно определить заранее. Механическое сжатие частиц, возникающее вследствие процесса их уплотнения, высота слоя и термическое расширение частиц могут стать одними из определяющих факторов.

Некоторые физические параметры насадок, используемые на ранее приведенных рисунках, представлены в табл. 2.

Коэффициент теплоотдачи α_{max} от стенок к неподвижным плотноупакованным слоям. При решении дифференциального уравнения (3) необходимо учитывать теплообмен между стенкой и насадкой путем граничного условия третьего рода. Необходимо обратить внимание на тот факт, что теплообмен при коротких временах контакта (меньших 0,1 с) существенно отличается от процесса теплообмена при средних и длинных временах контакта (больших, чем 1 с). Когда время контакта приближается к нулю, интенсивность теплоотдачи стремится к конечному и максимальному значению в противоположность тому, что наблюдалось в реальном гомогенном теле.

Физические представления с их математическим выражением получены в [9] для насадок из сферических частиц. Анализировался процесс теплопроводности в

газовом зазоре между стенкой и прилегающей сферой в предположении, что между твердыми телами существует точечный контакт. Добавляя теперь необходимый в этой задаче учет площади контакта и влияние сопротивления окисного слоя, получаем

$$\alpha_{\text{max}} = (1 - \varphi) \alpha_{\text{max}}^* + 2\varphi \frac{\lambda_s^*}{d}, \quad (21a)$$

где

$$\alpha_{\text{max}}^* = \frac{4\lambda}{d} \left\{ \left[\frac{4\sigma}{d} \left(\frac{2-\gamma}{\gamma} + 1 \right) \right] \ln \left[\frac{d}{4\sigma} \left(\frac{\gamma}{2-\gamma} \right) + 1 \right] - 1 \right\} + 0,04\epsilon C_s \left(\frac{T_m}{100} \right)^3, \quad (21b)$$

а λ_s^* и φ находят из уравнений (8) и (19). Первый член в уравнении (21b) представляет молекулярную теплопроводность в разреженном газе, второй соответствует теплообмену излучением между стенкой и насадкой.

Здесь λ — коэффициент теплопроводности газа; d — диаметр сферы; σ — средняя длина свободного пробега молекул газа, которую можно получить из (15); γ — коэффициент аккомодации; ϵ — излучательная способность; T_m — среднее логарифмическое абсолютных температур стенки и первого слоя частиц.

Наконец, результаты [10], полученные в экспериментах по нестационарному теплообмену, подтвердили пригодность уравнения (21).

Д. Уравнение, определяющее одномерное температурное поле $T(t)$. Обычно в большинстве практических расчетов сведения о средней температуре насадки $\bar{T}(t)$ получают с помощью коэффициента теплопередачи (см. рис. 1). Средняя температура $\bar{T}(t)$, или интегральная среднелогорическая температура, определяется с помощью следующего выражения:

$$\bar{T}(t) = \frac{\int_0^r (1 - \psi) \rho_s c_s T(r, t) r dr}{\int_0^r (1 - \psi) \rho_s c_s r dr}. \quad (22)$$

В этом случае уравнение теплового баланса всего цилиндрического плотноупакованного слоя приобретает вид

$$\dot{Q}(t) = -(1 - \psi) V \rho_s c_s \frac{d\bar{T}(t)}{dt}, \quad (23)$$

где $\dot{Q}$ — полный тепловой поток через стенку; V — полный объем насадки. С учетом закона Ньютона для теплообмена

$$\dot{Q}(t) = U_t(t) A (\bar{T}(t) - T_w) \quad (24)$$

уравнение (23) можно привести к следующему виду:

$$\frac{A}{V} U_t(t) (\bar{T}(t) - T_w) = (1 - \psi) \rho_s c_s \frac{d\bar{T}(t)}{dt}, \quad (25)$$

где A — поверхность стенки, соответствующая тепловому потоку $\dot{Q}(t)$; $U_t(t)$ — мгновенный коэффициент теплопередачи от стенки к насадке.

Интегрирование уравнения (25) с использованием зависящего от времени коэффициента теплопередачи

$$U_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t U_t(t) dt \quad (26)$$

Таблица 3. Значения K в уравнении (31) для некоторых типов стенки

Обозначение	Плоская	Цилиндрическая	Сферическая
$\frac{A}{V}D$	2	4	6
K	$\frac{1}{2}\pi^2$	5,78	$\frac{2}{3}\pi^2$
D	Толщина	Диаметр	Диаметр

дает выражение для зависящей от времени средней температуры $\bar{T}(t)$ насадки

$$\frac{\bar{T}(t) - T_w}{T_A - T_w} = \exp \left[-\frac{AU_0(t)t}{V(1-\psi)\rho_s c_s} \right]. \quad (27)$$

Сравнивая уравнения (27) с точным решением (3), находим значения для неизвестного параметрического коэффициента теплопередачи $U_0(t)$. Однако для практических расчетов приведенный ниже способ аппроксимации дает довольно хорошее приближение.

Прежде всего объединяются вместе термическое сопротивление центрального ядра уплотненного слоя и термическое сопротивление между стенкой и слоем

$$\frac{1}{U_0(t)} = \frac{1}{\alpha_{\max}} + \frac{1}{\alpha_{s0}(t)}. \quad (28)$$

В этом соотношении коэффициент теплоотдачи α_{s0} центрального ядра является суммой двух асимптотических решений: решения для короткого отрезка времени

$$\alpha_{t,0}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{(1-\psi)\rho_s c_s \lambda_{s0}}}{\sqrt{t}} \quad (29)$$

с интегральным значением

$$\alpha_{s0,0}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{(1-\psi)\rho_s c_s \lambda_{s0}}}{\sqrt{t}} \quad (30)$$

и решения для длительного интервала времени и интегрального значения

$$\alpha_{t,\infty}(t) = \alpha_{s0,\infty}(t) = \frac{\lambda_{s0}}{D} K = \text{const}. \quad (31)$$

Суперпозиция этих двух решений дает

$$\alpha_{s0}(t) = \sqrt{\alpha_{s0,0}^2(t) + \alpha_{s0,\infty}^2}. \quad (32)$$

Значения K приведены в табл. 3 для некоторых типов стенок, ограничивающих слой.

Из рис. 24 видно, что с увеличением времени контакта t мгновенное значение коэффициента теплопередачи

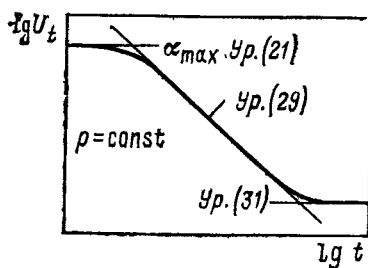


Рис. 24. Асимптотические коэффициенты теплопередачи U_t для нестационарных процессов теплообмена в неподвижных слоях

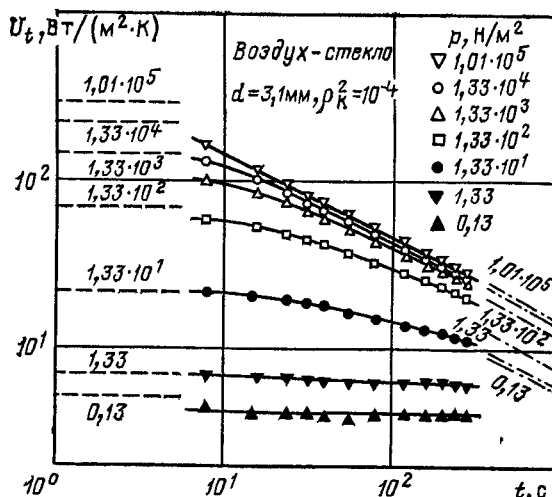


Рис. 25. Зависимость коэффициентов теплопередачи U_t , полученных в экспериментах [10] по нестационарному теплообмену при различных давлениях воздуха и комнатной температуре, от времени контакта (слой из одинаковых стеклянных сфер)

$U_t(t)$ [см. уравнение (24)] вначале определяется уравнением (21), а затем (29) и, наконец, (31). Кроме того, предельное значение коэффициента теплопередачи для очень короткого времени контакта не зависит от термических свойств твердого тела, но сильно зависит от диаметра частицы. Однако в области применимости уравнения (29) при более длинных временах контакта справедливо обратное: коэффициент теплопередачи сильно зависит от термических свойств твердого тела, но слабо от диаметра частиц.

Экспериментальные результаты [10] подтвердили справедливость уравнения (21). Уплотненный слой, покоящийся на плоскости, нагревался в течение определенного времени t . На рис. 25—27 показаны экспериментальные результаты. Параметром является давление газа (воздуха). Слева отложены значения $U_t(t)$, соответствующие уравнению (21), справа — соответствующие (29). Во время эксперимента не было получено ни одного полно-

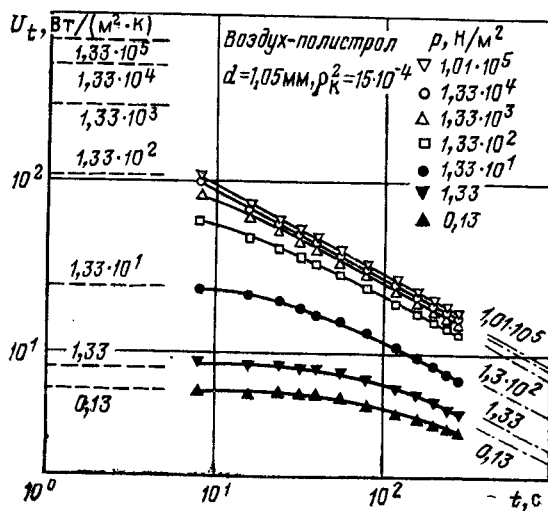


Рис. 26. Зависимость коэффициентов теплопередачи, полученных в экспериментах [10] по нестационарному теплообмену при различных давлениях воздуха и комнатной температуре, от времени контакта (насадка из одинаковых сферических частиц полистирола)

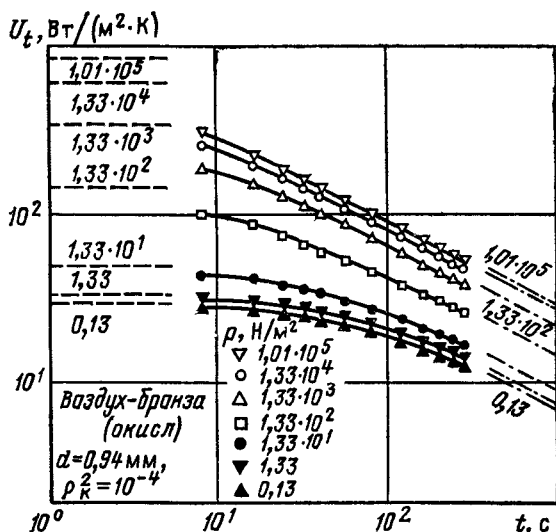


Рис. 27. Зависимость коэффициентов теплопередачи, полученных в экспериментах [10] по нестационарному теплообмену при различных давлениях воздуха и комнатной температуре, от времени контакта (насадка из одинаковых бронзовых шариков)

стью развитого профиля температуры, поэтому значения $U_t(t)$, соответствующие уравнению (31), не достигались.

Е. Количество теплоты Q . Полное количество теплоты Q , передаваемое до момента времени t_1 , равно:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} \dot{Q}(t) dt. \quad (33)$$

С учетом уравнения полного теплового баланса в насадке

$$Q(t_1) = (1 - \psi) \rho_s c_s V (T_A - \bar{T}(t_1)) \quad (34)$$

введение величины $(1 - \psi) \rho_s c_s V$ в уравнение (27) приводит к соотношению

$$Q(t_1) = U_0(t_1) A \Delta T_m t_1, \quad (35)$$

где

$$\Delta T_m = \frac{T_A - \bar{T}(t_1)}{\ln[(T_A - T_w)/(\bar{T}(t_1) - T_w)]}$$

есть так называемая среднелогарифмическая разность температур.

2.8.2. Плотнупакованные слои с движущимся через них газом

Р. Бауэр

А. Описание условий теплообмена. Важность плотноупакованных слоев связана с большим разнообразием инженерных разработок, в которых они используются. Часто встречающаяся и важная область их применения в химической индустрии — проточные неadiaбатные каталитические реакторы.

Такие системы состоят чаще всего из цилиндрической трубы, набитой частицами катализатора, через которую течет реагирующая среда. Теплота, выделяющаяся при реакции, удаляется охлаждающей жидкостью с внешней оболочки, окружающей насадку. Одним из вопросов, связанных с конструированием таких реакторов, является рост температуры, который может возникать вследствие

вторичных и сопутствующих реакций, а также термического разрушения частиц катализатора.

На вопрос о максимальном диаметре трубы реактора, в котором диссипация выделяемой теплоты будет достигаться без превышения заданного уровня температур, можно ответить, только зная характеристики теплообмена таких плотноупакованных слоев.

В. Уравнение, определяющее двумерное поле температур $T(r, z)$. При движении теплоносителя через слой всегда существует разница между температурой твердых частиц и температурой жидкости. Однако в большинстве случаев, особенно в химических реакторах, удобно игнорировать различие температур жидкой и твердой фаз и считать их температуры равными. Как и в § 2.8.1, плотноупакованный слой можно рассматривать как квазигомогенный с эффективными коэффициентами теплопроводности. Однако следует ожидать, что эффективные коэффициенты теплопроводности в осевом и радиальном направлениях будут различаться.

В окрестности стенки радиальное термическое сопротивление резко возрастает. Вследствие этого, а также с учетом результатов § 2.8.1 разделим всю насадку на центральное ядро и пристеночную область (рис. 1).

Чтобы описать температурное поле в таком цилиндрическом слое с текущим через него газом, нужно составить дифференциальный тепловой баланс для элемента объема насадки (рис. 2). В предположении, что стенка трубы нагревается или охлаждается однородно, используем условия симметрии.

Сумму дифференциальных тепловых потоков, показанную на рис. 2, можно записать в виде

$$-\frac{d\dot{q}_z}{dz} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\dot{q}_r)}{\partial r} = \dot{m}_0 c_p \frac{dT}{dz}, \quad (1)$$

где $\dot{q}_z$, $\dot{q}_r$ — плотности осевых и радиальных тепловых потоков; $\dot{m}_0$ — приведенная плотность массового расхода; c_p — теплоемкость газа.

В большинстве случаев эффективная аксиальная теплопроводность пренебрежимо мала по сравнению с потоком энтальпии, переносимой теплоносителем.

С учетом закона теплопроводности Фурье для плотности радиальных тепловых потоков

$$\dot{q}_r = -\Lambda \frac{dT}{dr} \quad (2)$$

уравнение (1) принимает вид

$$\Lambda \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) = \dot{m}_0 c_p \frac{dT}{dz}. \quad (3)$$

В этом уравнении Λ — эффективный радиальный коэффициент теплопроводности насадки, через которую протекает газ.

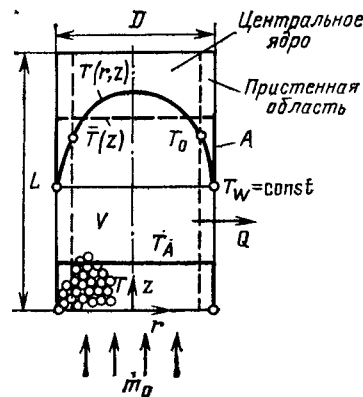


Рис. 1. Стационарная теплоотдача в цилиндрическом неподвижном слое с движущимся через него газом

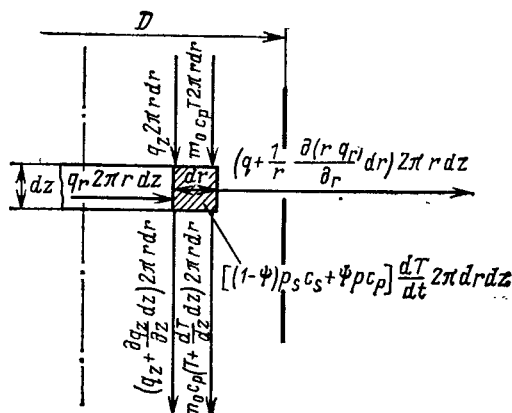


Рис. 2. Тепловой баланс элементарного объема, вырезанного в цилиндрическом неподвижном слое

Граничные условия имеют следующий вид: при $z=0$

$$T = T_A, \quad (4)$$

при $r=D/2$

$$T = T_w = \text{const.} \quad (5)$$

Для учета условий теплообмена на стенке принимается, что на стенке существует термическое сопротивление: при $r=D/2$,

$$-\Lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{D/2} = \alpha_w (T_0 - T_w), \quad (6)$$

где $T_0 - T_w$ — фиктивный температурный напор.

В уравнении (6) α_w — коэффициент теплоотдачи от стенки к теплоносителю, движущемуся через слой.

Аналитическое решение уравнения (3) можно найти в [1].

С. Описание параметров теплообмена, представляющих интерес. Эффективный радиальный коэффициент теплопроводности плотноупакованных слоев с движущимся через них газом. На основе детального анализа экспериментальных результатов в [2] предложена модель, согласно которой в результате действия одновременно двух независимых механизмов осуществляется перенос теплоты. Таким образом, отношение эффективного радиального коэффициента теплопроводности Λ к молекулярному коэффициенту теплопроводности газа λ

$$\Lambda/\lambda = \lambda_{s0}/\lambda + \lambda_g/\lambda, \quad (7)$$

где λ_{s0} — эффективный коэффициент теплопроводности неподвижного слоя (см. § 2.8.1), соответствующий про-

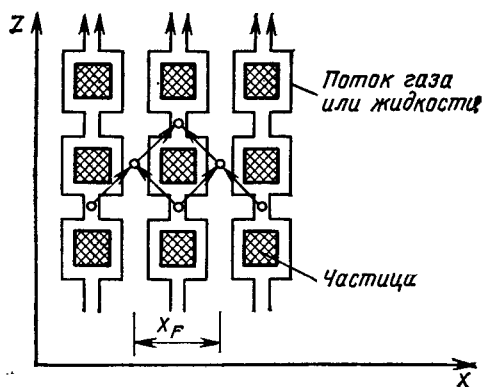


Рис. 3. Схема течения газа через неподвижный слой [3]

цессам теплообмена теплопроводностью и излучением, и λ_g — коэффициент переноса из-за конвективного поперечного перемешивания газового потока.

Согласно уравнениям (7) вклад λ_{s0} будет мал, если поперечное перемешивание потока и скорость потока будут достаточно велики, что имеет место для промышленных условий. При этих ограничениях в [3] предложена модель (рис. 3), в которой поток отделяется от частиц и полное перемешивание происходит в пустом пространстве между ними. В этом случае

$$\lambda_g/\lambda = \text{Pe}_x/K, \quad (8)$$

где число Пекле

$$\text{Pe}_x = \frac{m_0 c_p}{\lambda} x_F \quad (9)$$

определено с помощью так называемой длины перемешивания x_F , размер которой порядка диаметра частицы.

В [4] эта модель развита для учета формы, размера частицы и распределения частиц по размерам вдоль длины перемешивания. Разбив сложное общее турбулентное течение в плотноупакованном слое на сумму индивидуальных подпотоков, автор [4] получил

$$x_F = \sum_{j=1, m} \Delta \psi_j \left(\frac{1}{\sum_{i=1, n} \Delta D_{i/x_F, i}} \right) \quad (10)$$

с индивидуальными длинами перемешивания отдельных потоков

$$x_{F, i} = F_i d_{F, i}, \quad (11)$$

где F_i — коэффициент формы, определяемый экспериментально для частиц различной формы. Эквивалентные размеры $d_{F, i}$ в уравнении (11) равны эквивалентному объемному диаметру сферы $d_{V, i}$ для подпотока вокруг

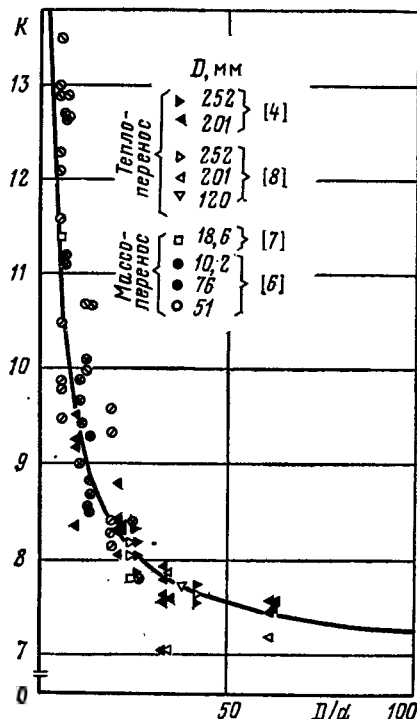


Рис. 4. Зависимость постоянной K от отношения диаметра всего слоя к диаметру частиц для слоя из одинаковых сфер (см. [4] и уравнение [12])

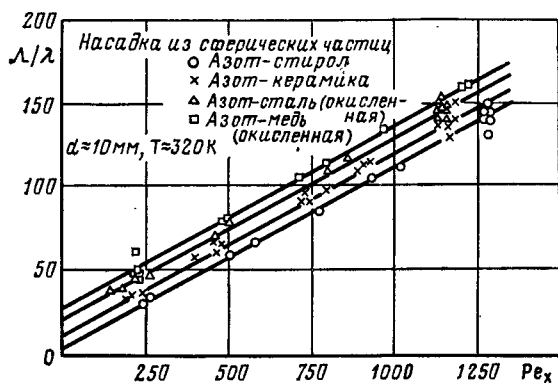


Рис. 5. Зависимость эффективного радиального коэффициента теплопроводности λ/λ_0 слоя из различных сферических частиц одинакового размера от числа Пекле при нормальных условиях (см. [4] и уравнения (7)). При $Re_x=0$ отношение соответствует уравнению λ_{s0}/λ_0 согласно (7) § 2.8.1

частицы и удвоенной длине d_H , f течения через весь канал (через пустое пространство колец Рашнига) для подпотока, текущего через частицы.

В уравнении (8) постоянная $k=8$ для бесконечно длинной насадки. Для слоя конечной величины в [3] рекомендовано выражение

$$K=8 \left[2 - \left(1 - \frac{2}{D/d} \right)^2 \right], \quad (12)$$

которое дает наилучшее согласие с экспериментальными результатами (рис. 4). Значение d определяют из уравнения (10) § 2.8.1.

Расчеты эффективных радиальных коэффициентов теплопроводности, основанные на приведенных выше представлениях, очень хорошо согласуются с экспериментальными результатами, полученными на насадках, состоящих из сферических, цилиндрических частиц, из частиц, имеющих форму полых цилиндров, раздробленных твердых частиц равного и неравного размера (рис. 5—10).

Коэффициенты формы F_i , полученные из экспериментов, приведены в табл. 1.

На рис. 5 представлена зависимость λ от Re для насадок из сферических частиц стирола, керамики, стали и меди диаметром 10 мм при умеренных температурах. В качестве теплоносителя использовался азот. Сплошными линиями представлены результаты, полученные из

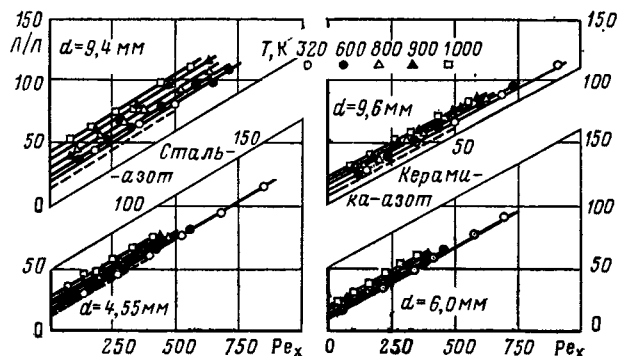


Рис. 6. Зависимость влияния температуры на эффективный радиальный коэффициент теплопроводности λ/λ_0 для слоя из одинаковых сфер для хорошо и плохо теплопроводных материалов от числа Пекле при нормальных условиях см. [4] и уравнения (7). При $Re_x \leq 0$ отношение соответствует λ_{s0}/λ_0 согласно (7) § 2.8.1. Штриховая линия — коэффициенты теплопроводности, рассчитанные без учета переноса теплоты излучением ($T=1000$ K)

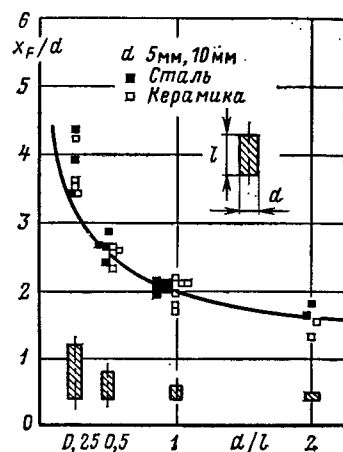


Рис. 7. Длина смешения x_F для слоев из одинаковых цилиндров при различных отношениях диаметра к длине d/l (см. [4] и уравнение (10))

уравнений (7). Наблюдалось линейное увеличение эффективного коэффициента теплопроводности с увеличением скорости потока во всех измерениях, что подтверждает модель аддитивности двух составляющих, на которых основаны уравнения (7).

На рис. 6 показано влияние роста температуры до 1000 K в чистом и хорошо теплопроводном материале. Сплошные линии — результат расчета. Чтобы показать влияние излучения на эффективный радиальный коэффициент теплопроводности, был проведен расчет, не учитывающий до $T=1000$ K радиационный перенос теплоты. Результаты этого расчета приведены на рис. 6 пунктирными линиями.

На рис. 7 и 8 представлены длины перемешивания для цилиндров и полых цилиндров в зависимости от геометрических размеров этих частиц. Так как хорошее перемешивание обычно очень желательно, поскольку умень-

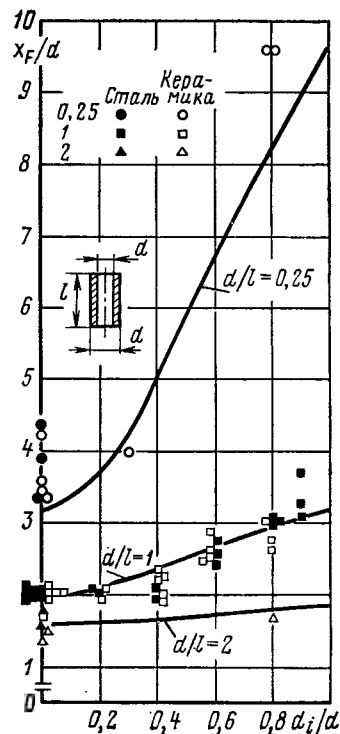


Рис. 8. Длина смешения x_F для слоев из полых цилиндров одинакового размера при различных отношениях внутренних и внешних диаметров d_i/d (см. [4] и уравнение (10)) для различных отношений диаметров к длине d/l

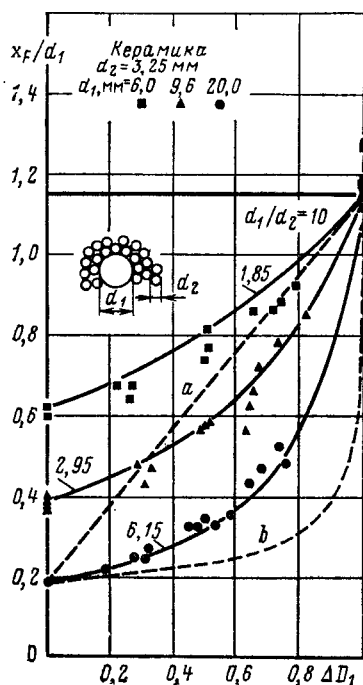


Рис. 9. Зависимость эффективной длины смещения x_F для слоев из бинарной смеси сферических частиц массовой концентрации ΔD_1 [см. [4]] и уравнение (10) для различных отношений диаметров

шает нежелательные температурные градиенты в уплотненном слое, преимущество полых цилиндров перед сплошными цилиндрами и сферами проявляется не только в увеличении площади поверхности, уменьшении количества материала и понижении давления в потоке газа,

но также иногда и в очень значительном улучшении эффекта перемешивания. Например, для длинных тонкостенных цилиндров ($d/l=0,25$; $d_1/d=0,8$) улучшение перемешивания достигает почти 1000% и увеличение площади поверхности — около 50% на 1 м^3 насадки по сравнению со сферами такого же номинального диаметра d .

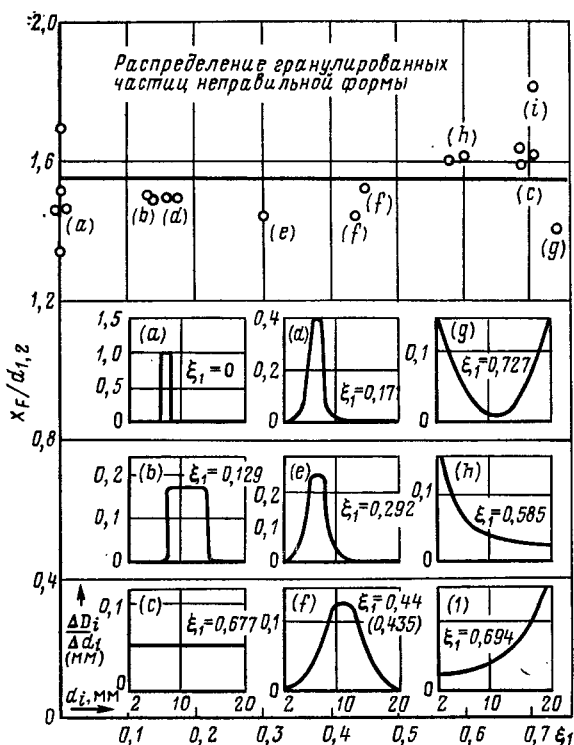
Для насадок, состоящих из смеси сфер двух размеров, на рис. 9 нанесены длины перемешивания в безразмерной форме (длина перемешивания отнесена к диаметру сферы большего размера d_1) как функции массовой концентрации ΔD_1 сфер, имеющих больший диаметр. В каждом случае частицы с меньшим диаметром имеют наибольшее влияние на эффективную длину перемешивания. Другими словами, эффект перемешивания значительно хуже, чем можно было ожидать согласно арифметическим средневзвешенным значениям (см. на рис. 9 кривую а). Для сравнения на этом рисунке приведен также средний диаметр эквивалентной сферы (см. на рис. 9 кривую б), который авторы предлагали использовать в качестве длины перемешивания.

Длины перемешивания x_F для различных непрерывных распределений частиц по размерам, приведенных к безразмерному виду с помощью среднего размера частиц d_1 , d_2 этих распределений, представлены на рис. 10 как функции коэффициента ξ_1 [см. уравнение (18), § 2.8.1] — параметра, используемого здесь для представления в математическом виде области проведения эксперимента. Среднее значение размера частицы d_1 , d_2 , полученное теоретически из уравнения (10), также называется средневзвешенным арифметическим распределением площадей поверхности, которое включает средние эквивалентные размеры частиц фракций $d_{v,i}$.

Так как все коэффициенты формы F_i , найденные для подпотоков вокруг частиц различной формы, имеют значение одного и того же порядка величины, можно предположить, что значения, найденные для раздробленных

Таблица 1. Коэффициенты формы F для расчета эффективного коэффициента теплопроводности Λ для различных насадок

Форма частиц	x_F	F
Сфера диаметром d , длиной l	Fd	1,15
Цилиндр диаметром d , длиной l	$F_1 d \sqrt[3]{\frac{3l}{2d}}$	1,75
Полый цилиндр внешним диаметром d , внутренним диаметром d , длиной l	$\Delta\psi_1 F_1 d \sqrt[3]{\frac{3l}{2d}} + (1 - \Delta\psi_1) F_2 \sqrt[3]{2l};$ $\Delta\psi_1 = \left[1 + \frac{1 - \psi_1}{\psi} \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 \right]^{-1}; \psi_1 = 0,39 + 0,02 \left[\left(\frac{l}{d} - 0,85 \right)^2 \right]^{2/3}$	1,75 2,8
Бинарная смесь сфер диаметрами d_1, d_2 и массовой долей $\Delta D_1 = \frac{M_1 \text{ (масса сфер 1)}}{M \text{ (общая масса)}}$	$\frac{1}{(\Delta D_1/Fd_1)(1 - \Delta D_1/Fd_2)}$	1,15
Распределение по размерам ломаных частиц с массовой долей $\Delta D_i = \frac{M_i \text{ (масса фракции } i\text{-го размера)}}{M \text{ (общая масса)}}$, где z — число частиц i -го размера	$Fd_{1,2}; d_{1,2} = \frac{1}{\sum_{i=1,n} \Delta D_i / \sqrt[3]{(6/\pi)(M_i/z\rho_s)}}$	1,4



уравнение (14) приводится к виду

$$\frac{A}{L} U_z(z) (\bar{T}(z) - T_w) dz = \dot{m}_0 c_p \frac{d\bar{T}(z)}{dz}, \quad (16)$$

где $U_z(z)$ — локальный коэффициент теплопередачи между стенкой и всей насадкой.

Интегрирование с учетом коэффициента теплопередачи

$$U = \frac{1}{z} \int_0^z U_z(\bar{z}) d\bar{z} \quad (17)$$

дает среднее поле температуры $\bar{T}(z)$ в цилиндрической насадке

$$\frac{\bar{T}(z) - T_w}{T_A - T_w} = \exp\left(-\frac{A}{L} \frac{U}{\dot{m}_0 c_p} z\right). \quad (18)$$

В соответствии с определением коэффициента теплопередачи U выразим термическое сопротивление центрального ядра слоя α_s в виде

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{\alpha_w} + \frac{1}{\alpha_s}, \quad (19)$$

где α_w вычисляется согласно уравнению (13), а α_s — с помощью суперпозиции решений для короткого и длинного отрезков времени:

$$\alpha_s = \frac{\Lambda}{D} \sqrt{K^2 + \frac{4}{\pi} \frac{\dot{m}_0 c_p}{\Lambda} \frac{D^2}{L}}, \quad (20)$$

где Λ — эффективный радиальный коэффициент теплопроводности, полученной с помощью уравнений (7) и K из (3) § 2.8.1.

Е. Тепловая мощность $\dot{Q}$. Тепловая мощность $\dot{Q}$, передаваемая через полную поверхность стенки реактора,

$$\dot{Q} = \int_0^L d\dot{Q}(z). \quad (21)$$

Из выражения для полного теплового баланса в насадке с текущим через нее газом

$$\dot{Q} = \dot{m}_0 c_p [T_A - \bar{T}(L)], \quad (22)$$

С учетом уравнения (22) имеем

$$\dot{Q} = U A \Delta T_m, \quad (23)$$

где среднелогарифмическая разность температур

$$\Delta T_m = \frac{T_A - \bar{T}(L)}{\ln[(T_A - T_w)/(\bar{T}(L) - T_w)]}. \quad (24)$$

Г. Уравнения, определяющие поле температур $T_s(r, z)$ в твердой фазе и $T_g(r, z)$ в газовой фазе. В тех случаях, когда профили температур в насадке изменяются быстро, например в регенераторах или при быстрых реакциях с высоким тепловыделением, необходимо делать различие между температурами твердой фазы и газовой. Эти температурные поля можно получить, если известны адекватные модели для переноса энергии в твердой и в газовой фазах и если имеются параметры этих моделей. В этой ситуации оказываются пригодными следующие взаимосвязанные уравнения баланса энергии:

для твердой фазы

$$(1 - \psi) \Lambda_s \left(\frac{d^2 T_s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_s}{dr} \right) = k a^* (T_g - T_s) \quad (25)$$

с граничным условием при $r = D/2$

$$-\Lambda_s \frac{dT_s}{dr} \Big|_{D/2} = \alpha_{\max} (T_{0s} - T_w); \quad (26)$$

для газовой фазы

$$\psi \Lambda_g \left(\frac{d^2 T_g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_g}{dr} \right) + \dot{m}_0 c_p \frac{dT_g}{dz} = -k a^* (T_g - T_s) \quad (27)$$

с граничным условием при $r = D/2$

$$-\Lambda_g \frac{dT_g}{dr} \Big|_{D/2} = \alpha_{wg} (T_{0g} - T_w). \quad (28)$$

Выражения для расчета параметров переноса в этой гетерогенной модели можно получить, распределив параметры гомогенной модели таким образом, что часть, описывающая неподвижный слой, присоединяется к твердой фазе, а часть, описывающая течение, — к газовой фазе. Получаем

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \psi}} \left[\varphi \frac{\lambda_s^*}{\lambda} + (1 - \varphi) \frac{\lambda_{s0}^*}{\lambda} \right], \quad (29)$$

где λ_{s0} определяется из уравнения (76) § 2.8.1, и

$$\frac{\lambda_g}{\lambda} = (1 - \sqrt{1 - \psi}) \left(\frac{1}{\psi - 1 + \lambda/\lambda_D} + \frac{\lambda_R}{\lambda} \right) + \frac{1}{\psi} \frac{\lambda_g}{\lambda}, \quad (30)$$

где отношение λ_g/λ определяется согласно уравнению (8).

В уравнениях (25) и (27) k — коэффициент теплоотдачи, который определяется разностью между средней температурой газа T_g и средней температурой частиц T_s ; его можно рассчитать с учетом результатов, полученных в § 2.5.4; a^* — эффективная удельная площадь поверхности. В настоящее время не существует удовлетворительной теоретической модели для расчета коэффициента теплоотдачи от стенки α_{wg} в уравнениях (28) и (13). Этот вопрос требует дальнейших исследований.

2.8.3. Плотнупакованные и перемешиваемые слои

Е. Мушовский

А. Теплоотдача к плотноупакованным слоям. Коэффициент теплоотдачи стенки. Молекулярная теплопроводность газа между частицами плотноупакованного слоя сильно влияет на процессы теплообмена в слое и на перенос теплоты от стенок к слою. Так, значение эффективного коэффициента теплопроводности слоя на порядок величины меньше, чем теплопроводность самих твердых частиц, особенно когда слой находится при пониженном давлении. Когда теплота переносится от стенок к слою из частиц, оказывается, что сопротивление стенки сильно зависит от свойств переноса газовой фазы. Кроме того, происходит перенос теплоты излучением и теплопроводностью через площадь контакта между гранулами.

Все явления переноса, упомянутые выше, можно считать независимыми друг от друга. Поэтому полный коэффициент теплоотдачи α_w у стенки можно представить в виде

$$\alpha_w = \alpha_g + \alpha_c + \alpha_r, \quad (1)$$

где g означает перенос теплоты молекулярной теплопроводностью газа; c — перенос теплоты теплопроводностью через площадь контакта; r — то же излучением.

Теперь определим α_w :

$$\alpha_w = \frac{\dot{q}_w}{T_w - T_s} \quad (2)$$

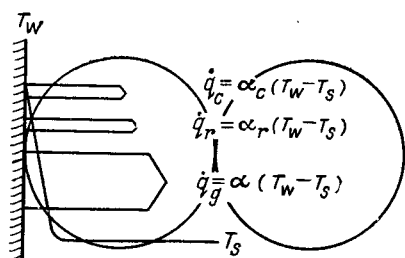


Рис. 1. Распределение температуры и плотности тепловых потоков вблизи стенки

— отношение плотности теплового потока $\dot{q}_w$ к температурному напору у стенки (рис. 1). Термическое сопротивление стенки прямо пропорционально перепаду температуры. Это упрощенное представление является также правильным и для случая термического сопротивления площади контакта [1]. Таким образом, в случае нестационарного переноса теплоты от стенки к плотноупакованному слою коэффициент теплопередачи ограничивается сопротивлением стенки, когда время стремится к нулю.

Вклад молекулярной теплопроводности газа в α_w . Для сферических частиц α_g можно рассчитать по формуле [2]

$$\alpha_g = \frac{2\lambda_g}{R} \left[(Kn + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{Kn} \right) - 1 \right], \quad (3)$$

где модифицированное число Кнудсена

$$Kn = \frac{2\Lambda}{R} \frac{2 - \gamma}{\gamma}; \quad (4)$$

Λ — средняя длина свободного пробега молекул газа; R — радиус частиц; γ — коэффициент аккомодации. В уравнении (3) учтено, что средняя длина свободного пробега молекул газа, зависящая от давления, превышает зазор между частицами и стенкой в окрестности зоны соприкосновения. В этой зоне теплопроводность газа становится зависящей от давления (рис. 2). Величину Λ можно оценить по формуле Сатерленда

$$\Lambda(P, T) = \frac{\Lambda_\infty P/P}{1 + T_v/T}, \quad (5)$$

где $\Lambda_\infty P$ — постоянная для газа; T_v — константа Сатерленда. Значения $\Lambda_\infty P$, T_v , λ_g и γ приведены в табл. 1 для ряда газов; данные по кинетике процесса взяты из [3].

Коэффициент аккомодации γ является функцией молекулярной массы и температуры (см. § 2.8.2). Зависимость коэффициентов теплоотдачи от давления представлена для воздуха на рис. 3. Очевидно, что коэффициент теплоотдачи стенки значительно снижается с уменьшением давления. Таким образом, при атмосферном давлении

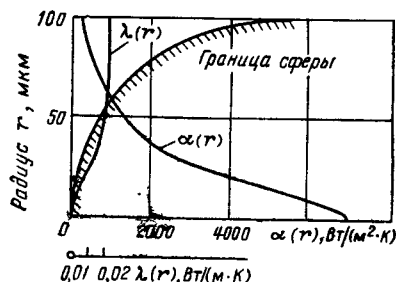
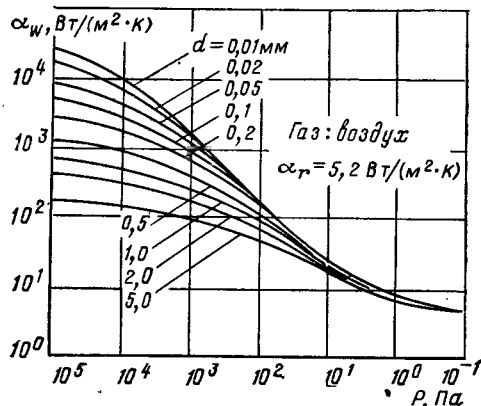

 Рис. 2. Локальные коэффициенты теплоотдачи α и теплопроводности $\lambda(r)$ для сферы диаметром 200 мм при атмосферном давлении газа

 Таблица 1. Средняя длина свободного пробега Λ_∞ , температура Сатерленда T_v , коэффициент теплопроводности λ_g и коэффициент аккомодации γ для различных газов при комнатной температуре

Газ	$\Lambda_\infty P \times 10^3$, МПа	T_v , К	λ_g , Вт/м·К	γ
He	21,35	79	0,148	0,4
H ₂	14,09	76	0,189	0,146
Воздух	8,49	116	0,026	0,9
H ₂ O	12,67	600	0,0231	0,82
CO ₂	7,6	273	0,016	0,95
C ₂ H ₅ OH	6,15	525	0,015	0,95

лении вклад конвективной составляющей в процесс теплообмена между стенкой и частицей намного больше вклада радиационной составляющей и переноса теплоты теплопроводностью в месте контакта частицы и стенки.


 Рис. 3. Зависимость коэффициента теплоотдачи на стенке $\alpha_w = \alpha_c + \alpha_r$ для воздуха от давления для частиц разных диаметров

Теплообмен излучением у стенки. Вклад излучения в перенос теплоты от стенки к уплотненному слою можно выразить при помощи радиационного коэффициента теплоотдачи

$$\alpha_r = 0,04c_s \varepsilon \left(\frac{T_m}{100} \right)^3, \quad (6)$$

где $c_s = 5,76 \cdot 10^{-8}$ Вт/м² — модификация постоянной Стефана — Больцмана; ε — степень черноты; T_m — средняя температура у поверхности. Что для частиц с шероховатыми поверхностями $\varepsilon = 0,9$ дает хорошее согласие с экспериментальными данными. Таким образом, $\alpha_r = 5,2$ Вт/(м²·К) при комнатной температуре и $\alpha_r = 78$ Вт/(м²·К) при 450°C.

Термическое сопротивление площади контакта. Вклад α_c — переноса теплоты теплопроводностью через площадь контакта в коэффициент теплоотдачи от стенки сильно зависит от материала, геометрии частиц и структуры их поверхности. Величина α_c пренебрежимо мала для гранул из материала с плохой теплопроводностью. В [1] получены $\alpha_c = 30 \div 55$ Вт/(м²·К) для сфер из бронзы диаметром 0,1–1,0 мм. Окисление металлической поверхности снижает значения α_c .

Коэффициент теплопередачи при нестационарном теплопереносе к плотноупакованным слоям. Коэффициент

теплопередачи от стенок к плотноупакованным слоям

$$\alpha_{0v} = \frac{\dot{q}}{T_w - \bar{T}}, \quad (7)$$

где $\bar{T}$ — средняя температура объема. Он удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\alpha_{0v}} = \frac{1}{\alpha_w} + \frac{1}{\alpha_i}, \quad (8)$$

где внешнее и внутреннее термические сопротивления объединены, α_i — внутренний коэффициент теплоотдачи, который можно рассчитать с помощью теории теплопроводности Фурье; α_i зависит от граничных условий [4]. При постоянной температуре стенки мгновенный коэффициент теплоотдачи описывается следующим образом:

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(\lambda \rho c)_{ap}}{t}} = \frac{\lambda_{ap}}{s} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{Fo}}, \quad (9)$$

для постоянной плотности теплового потока он имеет вид

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(\lambda \rho c)_{ap}}{t}} = \frac{\lambda_{ap}}{s} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{Fo}}, \quad (10)$$

где λ_{ap} — стационарный истинный коэффициент теплопроводности уплотненного слоя (см. § 2.8.2); κ_{ap} — истинная температуропроводность пористой набивки;

$$Fo = \kappa_{ap} \frac{t}{s^2} \quad (11)$$

есть число Фурье, в которое входит высота слоя s . Уравнения (9) и (10) правильны до тех пор, пока температурное поле не достигает края объемного тела (например, до $Fo \leq 0,1$).

Для больших чисел Фурье решение уравнения теплопроводности при больших диапазонах времени для плоской пластины приводит к выражению

$$\alpha_i = \frac{\pi^2 \lambda_{ap}}{4 s} \quad (12)$$

для постоянной температуры стенки и к

$$\alpha_i = 3\lambda_{ap}/s \quad (13)$$

для случая постоянной плотности теплового потока.

Коэффициент теплопередачи ограничивается тремя асимптотическими кривыми. Для очень коротких промежутков времени внутренним термическим сопротивлением можно пренебречь. Тогда коэффициент теплопередачи будет равен коэффициенту теплоотдачи стенки α_w . Для больших промежутков времени α_{0v} становится по-

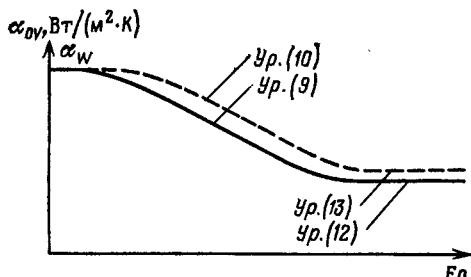


Рис. 4. Зависимость мгновенного коэффициента теплопередачи α_{0v} от числа Фурье для процессов нестационарного переноса теплоты от стенок к плотноупакованным слоям. Сплошная кривая — $T_w = \text{const}$, штриховая — $\dot{q}_w = \text{const}$

стоянной [см. (12), (13)]. В интервале между этими значениями α_{0v} зависит от времени и определяется согласно уравнениям (9), (10) (рис. 4).

В. Теплоотдача к движущимся и перемешиваемым слоям. Теплоотдача к движущемуся слою. Предполагается, что течение частиц в канале описывается с помощью однородного профиля скорости ($u = \text{const}$; рис. 5). Каждая частица, находящаяся в контакте с нагреваемой стенкой на площади $0 < x < L$, имеет скорость u . Стенка находится при постоянной температуре T_w . При стационарном процессе теплообмена средний коэффициент теплоотдачи от стенки к потоку частиц определяется следующим образом:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{t_s} \int_0^{t_s} \alpha_{0v}(t) dt, \quad (14)$$

где время, в течение которого частицы соприкасаются с нагретой стенкой,

$$t_s = u/L. \quad (15)$$

Местный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{0v}(t)$ можно получить из уравнений (8), (9). Интегрирование уравнения (14) приводит к выражению

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_w} = \frac{2}{\sqrt{\pi} Bi \sqrt{Fo_s}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi} Bi \sqrt{Fo_s}} \ln(1 + Bi \sqrt{Fo_s}) \right], \quad (16)$$

где число Био

$$Bi = \alpha_w s / \lambda_{ap}, \quad (17)$$

а

$$Fo = \kappa_{ap} t_s / s^2. \quad (18)$$

Выражение (16) правильно для $Fo < 0,1$. Как видно из рис. 6, между расчетными значениями, полученными из уравнения (16), и экспериментальными значениями [5] наблюдается хорошее согласие.

Теплоотдача к перемешиваемым слоям. Как описано выше, коэффициент теплопередачи в уплотненном слое уменьшается с ростом времени контакта частиц у стенки. Это происходит из-за падения градиента температур у стенки. Периодическое перемещение частиц от нагретой поверхности внутрь объема слоя при перемешивании сохраняет более крутой температурный градиент у стенки и таким образом улучшает теплоотдачу (рис. 7).

Чем чаще частицы удаляются от нагретой поверхности при помощи перемешивающих устройств, тем выше интенсификация теплообмена. Если есть зазор между стенкой и устройством для перемешивания, появляется

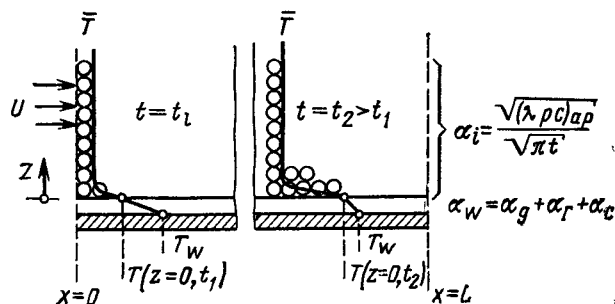


Рис. 5. Профили температур при теплообмене в движущемся слое. Температурный напор $T_w - T_s(z=0)$ падает с увеличением времени контакта, порождая внутреннее термическое сопротивление, зависящее от времени. Внешний коэффициент теплоотдачи представлен зазором

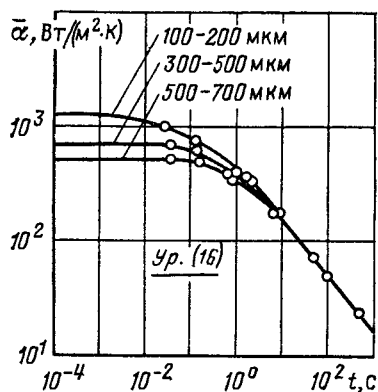


Рис. 6. Средний коэффициент теплопередачи α к движущемуся слою из частиц песка (кружки — результат эксперимента) [5]

дополнительное термическое сопротивление из-за возникновения области, в которой частицы не перемешиваются.

На рис. 8 представлены зависимости измеренных коэффициентов теплоотдачи от стенок к перемешиваемым слоям от времени при различных давлениях, полученные в [6]. После начального периода времени α приближается к постоянному значению. Асимптотические значения α увеличиваются с ростом скорости перемешивания.

Модель, описывающая идеальный перемешиваемый слой, начинает действовать с полностью развитого периодического перемешивания у каждого элемента нагретой

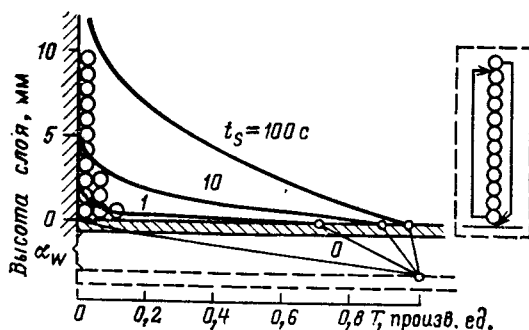


Рис. 7. Уменьшение температурного напора $T_w - T(z=0)$. Удаление нагретых частиц от стенки после каждых t_s секунд приводит к периодическому восстановлению температурного напора

стенки, когда перемешивающие устройства проходят его. Между последовательными проходами мешалок частицы покоятся на плоскости. Среднее время контакта частиц со стенкой

$$t_s = (fn)^{-1}, \quad (19)$$

где f — частота перемешивания; n — число перемешивающих устройств вблизи поверхности.

В стационарном процессе значения α могут быть получены как средние числа α для плотноупакованного слоя в течение времени контакта t_s (рис. 9). Когда число Фурье [см. (18)] определено с помощью t_s из (19), значе-

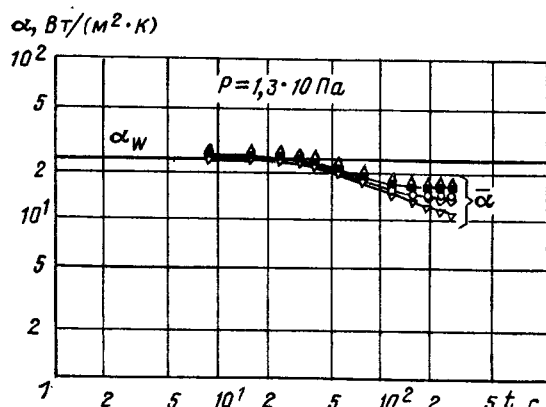
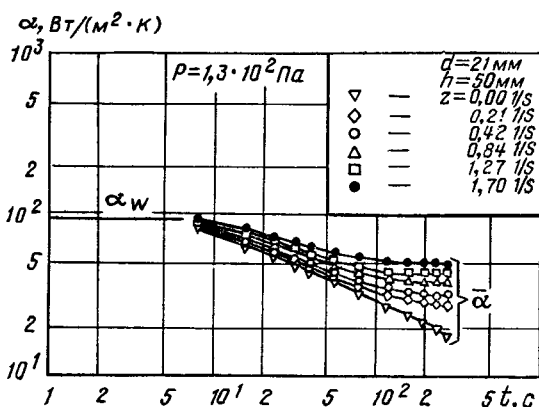
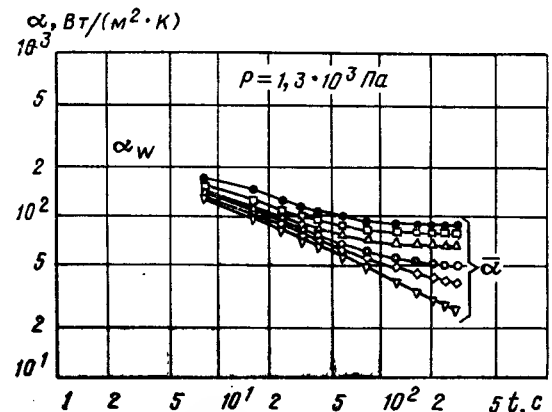
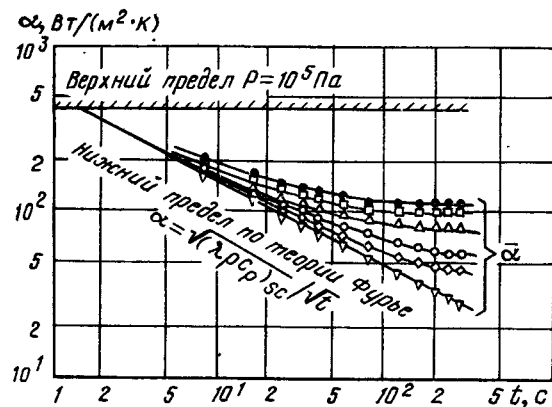


Рис. 8. Зависимость экспериментальных данных для коэффициентов теплоотдачи α от горизонтальных стенок к перемешиваемым слоям от времени [6]. Сплошные линии — аппроксимирующие кривые

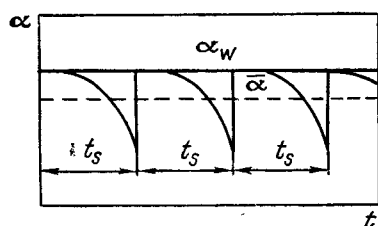


Рис. 9. Схема влияния периодического восстановления частиц на стационарные значения α в идеально перемешиваемом слое

ния $\bar{\alpha}$ для идеального газа перемешиваемого слоя можно рассчитать с помощью (16).

На рис. 10 сравниваются зависимости $\bar{\alpha}$ от Fo для идеального и реального перемешиваемых слоев. Полученные значения $\bar{\alpha}$ меньше рассчитанных, и разница увеличивается при наличии зазора между стенкой и мешалками.

Теплообмен во вращающихся барабанах. В [7] отмечено, что движение частиц во вращающемся барабане вызывается напряжением трения между частицами и стенкой. Частицы движутся по циклическому пути, как показано на рис. 11. При отсутствии проскальзывания частицы у стенки скорость частицы у стенки равна скорости барабана. В этом случае время контакта частиц $t_s = \varphi / 2\pi f$,

где φ — угол заполнения; f — частота вращения барабана. При применении этой модели, которая является

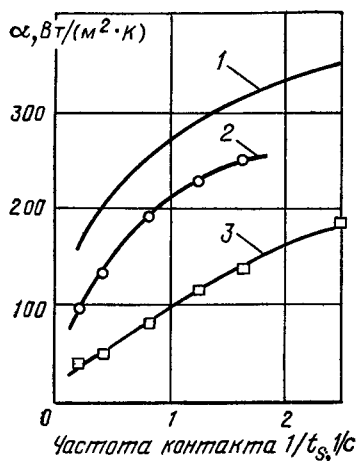
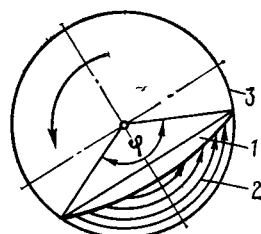


Рис. 10. Сравнение расчетных и экспериментальных значений коэффициента теплоотдачи $\bar{\alpha}$ для перемешиваемого слоя: 1 — расчет для идеального перемешиваемого слоя; 2 — экспериментальные данные для перемешивания без зазора около поверхности; 3 — экспериментальные данные для зазора $s=3,7$ мм

только приближенным описанием реального случая, из уравнения (16) можно получить значения $\bar{\alpha}$. На рис. 12 сравниваются экспериментальные значения $\bar{\alpha}$ с расчетными, полученными с помощью такого подхода. Расчетные значения $\bar{\alpha}$ в 2 раза превышают измеренные значения.

Теплоотдача к вибрирующим слоям. Движение частицы в вибрирующем слое довольно сложно. Частицы диаметром 0,5 мм и более движутся кругообразно в вибрирующем сосуде, тогда как частицы диаметром 0,1 мм и меньше участвуют в турбулентном перемешивании под влиянием вибраций. Из рис. 13 видно, что напряжения трения между частицами и вертикальными стенками вибрирующего сосуда вызывают кругообразное движение.

Рис. 11. Схема движения частицы во вращающемся барабане: 1 — зона скатывания; 2 — объем материала; 3 — стенка барабана; φ — угол наполнения



Когда известна скорость частицы, можно рассчитать коэффициенты теплоотдачи. Более детальное описание дано в [8].

Перенос теплоты от дна вибрирующего сосуда к гранулированному материалу вызывает дополнительное термическое сопротивление. Оно связано с периодическим возникновением зазора между дном сосуда и насадкой.

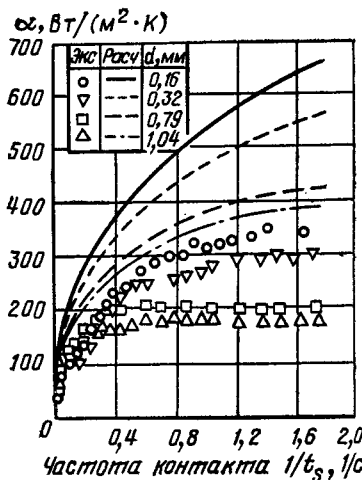


Рис. 12. Сравнение расчетных значений $\bar{\alpha}$ для идеального вращающегося барабана (кривые) и экспериментальных данных

Зазор возникает при таких условиях вибрации, когда ускорение частиц превышает ускорение силы тяжести. На рис. 14 приведена зависимость экспериментальных значений колеблющихся стеклянных шариков при давлениях $1 \cdot 10^6$ и $0,13 \cdot 10^6$ Па. На рис. 15, а, б (см. с. 446) представлена зависимость значений $\bar{\alpha}$ для стеклянных шариков диаметром 0,1 мм при $p=1 \cdot 10^6$ Па от частоты колебаний. После резкого роста с увеличением частоты значения $\bar{\alpha}$

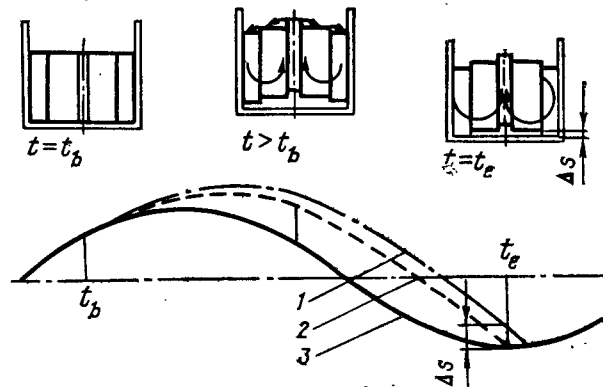


Рис. 13. Схема влияния напряжения трения между частицами и вертикальными стенками вибрирующего сосуда на движение частиц на различных расстояниях от стенок: Кривые — зависимость расположения различных зон от диаграммы времени при синусоидальном движении сосуда (часть периода колебаний); 1 — главная зона; 2 — пристенный слой; 3 — сосуд

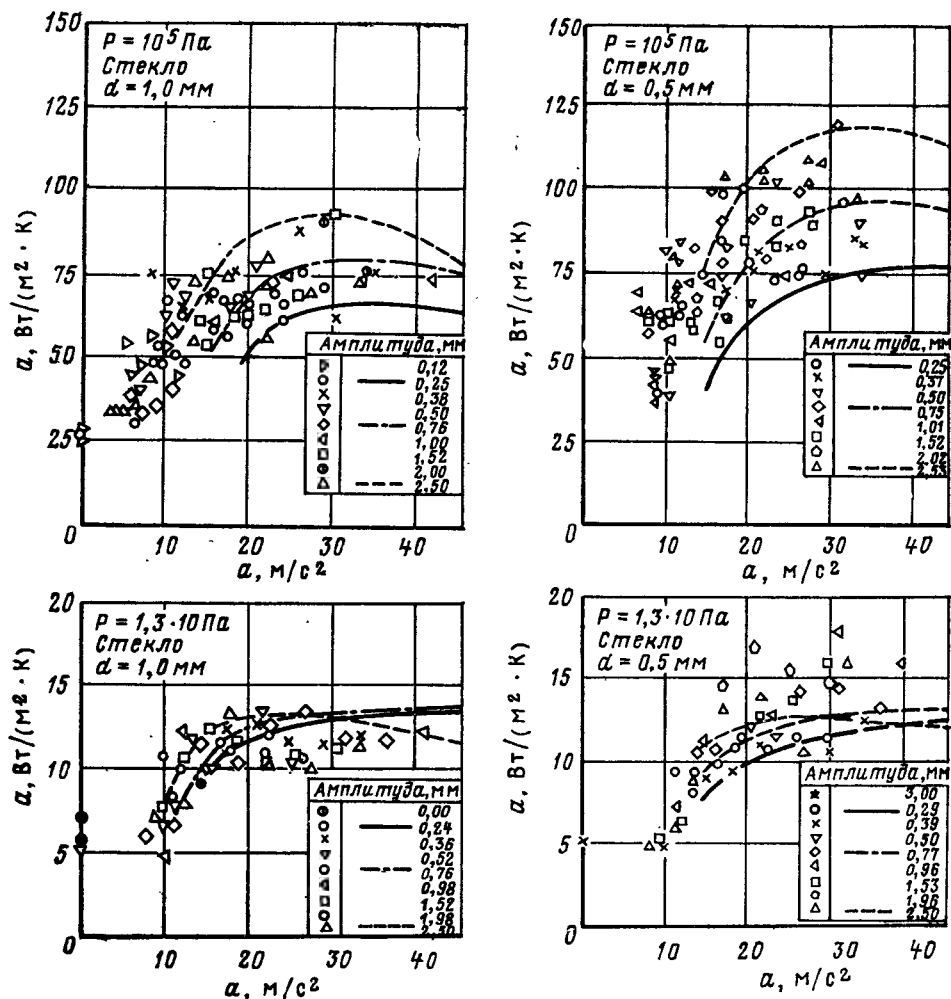


Рис. 14. Зависимость коэффициента теплоотдачи α между основанием колеблющегося сосуда и слоем стеклянных шариков от ускорения a . Кривые соответствуют различным A , рассчитанным по модели циркуляции потока [8]

достигают максимума во всех случаях при частоте около 42 Гц.

Если в колеблющемся сосуде рассматривается теплообмен на нагретой вертикальной стенке, никакого зазора между частями и этой стенкой не возникает. На рис. 16 (см. с. 446) приведены зависимости экспериментальных значений α от вертикально нагретых стенок к колеблющимся стеклянным шарикам [9].

2.8.4. Псевдоожигенные слои

Дж. С. М. Боттерил

А. Введение. Основные особенности поведения псевдоожигенных систем описаны в § 2.2.6, а также, например, в работах [1—4]. Частицы в условиях ожигения поддерживаются действующей на них силой сопротивления жидкости, текущей вверх через слой. Системы, псевдоожигенные газом, характеризуются сильным перемешиванием, возникающим внутри объема слоя при подъеме газовых «пузырей». Объемная скорость движения таких пузырей приблизительно равна скорости газа, необходимой, чтобы привести слой в состояние ожигения, т. е.

несколько превышающей минимальную скорость псевдоожигения u_{mf} . Для тонкодисперсных материалов низкой плотности (средний диаметр частиц насадки 20—100 мкм, плотность 1400 кг/м³) имеется область устойчивого расширения слоя с ростом скорости ожигающего газа, перед тем как начинается возникновение пузырьков (группа А [5]). При частицах больших размеров и более плотных пузырение возникает, как только достигается минимальная скорость псевдоожигения.

Ожигение требует энергии для его достижения. Падение давления в слое равно массе слоя на единицу площади, и оно может быть чрезмерно велико для глубоких слоев, хотя его относительная важность уменьшается при увеличении статического рабочего давления. Очевидно, что рабочие условия ограничиваются областью течения газа, в которой можно ожигать слой. Если скорость газа очень низка, может произойти разделение слоев с более или менее широким распределением частиц по размерам, и слой перестанет быть псевдоожигенным, если скорость течения станет ниже минимальной скорости псевдоожигения. Напротив, если скорость газа очень большая, вынос материала из слоя станет чрезмерным. Это зависит от размера частиц и физических свойств жидкости и твердого тела [1—4]. Такое рассмотрение

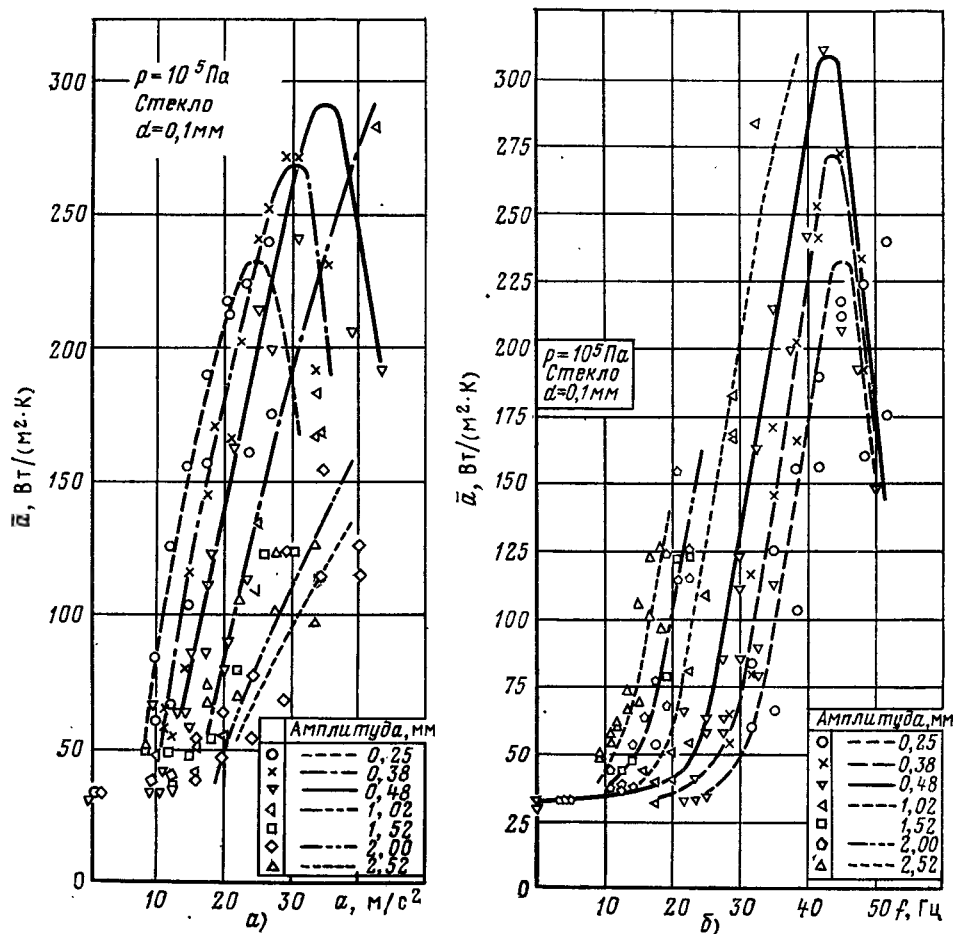


Рис. 15. Экспериментальные значения коэффициентов теплоотдачи от основания колеблющегося сосуда к стеклянным сферам ($d = 0,1 \text{ мм}$):

a — зависимость $\bar{\alpha}$ от ускорения; b — зависимость $\bar{\alpha}$ от частоты вибрации

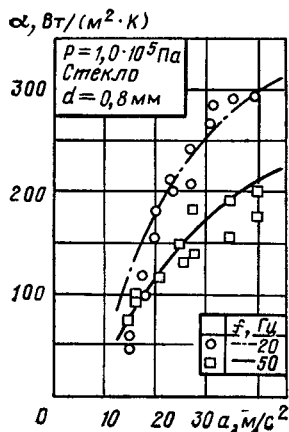


Рис. 16. Коэффициенты теплоотдачи от вертикальной нагретой стенки к вибрирующему слою сфер в зависимости от ускорения. Линиями представлены значения $\bar{\alpha}$, рассчитанные по модели циркулирующего потока [8], точками — экспериментальные значения [9]

оказывает влияние на выбор материалов при конструировании.

Из-за большой площади поверхности частиц, находящихся внутри псевдоожидженного слоя (1 м^3 частиц диаметром 100 мкм имеет площадь поверхности более $30\,000 \text{ м}^2$), коэффициент теплоотдачи от газа к частицам является

определяющей величиной, хотя контакт газа с твердыми частицами далеко неоднороден в объеме слоя. Прежде всего хорошие термические свойства псевдоожидженного газом слоя определяются теплоемкостью частиц и их циркуляцией внутри слоя [1]. При атмосферном давлении теплоемкость твердых частиц приблизительно в 1000 раз больше теплоемкости газа. Перемешивание частиц создает изотермические условия внутри объема слоя. Широкий интервал возможных поведений слоев порождает определенные трудности. Поведение псевдоожидженного слоя очень мелких частиц может очень сильно отличаться от поведения слоя, состоящего из более крупных частиц, так что тестовые испытания, проведенные на мелкомасштабном псевдоожидженном слое с маленькими частицами, вполне могут ввести в заблуждение [6]. Это происходит потому, что при мелкомасштабном моделировании оборудования в слоях небольшого размера с мелкими частицами подавляются появление и рост пузырей газа, а в промышленных установках большого размера образование и рост пузырей могут быть очень важными для характеристик слоя. Таким образом, в слоях из более мелких, менее плотных частиц установившийся максимальный размер пузыря меньше, чем в слоях, состоящих из более крупных, более плотных частиц. Соответственно большие пузыри газа, не содержащие частиц, поднимаются быстрее через слой, чем более мелкие. Вслед-

ствие этого имеются довольно большие различия между характеристиками полного расширения слоя из-за изменения объемного содержания пузырей; аналогично подвергается изменениям и скорость циркуляции твердых частиц. Когда изменяется рабочая температура и, следовательно, вязкость оживающего газа, из-за изменения степени расширения газовой фазы ситуация еще больше усложняется [7]. Погружение поверхностей теплообмена внутрь слоя также влияет на поведение пузырей и может иметь различные последствия при различных рабочих характеристиках [1—4]. Поэтому при использовании опубликованных корреляций должна проявляться осторожность.

В качестве первой аппроксимации можно предположить, что коэффициент теплоотдачи α между погруженной поверхностью и псевдооживленным слоем состоит из трех частей, которые рассмотрены ниже.

1. Конвективная составляющая, связанная с движением частиц, α_{pc} , которая зависит от процесса переноса теплоты посредством обмена частицами между объемом слоя и областью, примыкающей к поверхности теплообмена.

2. Конвективная составляющая, связанная с межфазным теплообменом, α_{conv} , которая увеличивает теплообмен между частицами и поверхностью за счет межфазного теплообмена.

3. Радиационная составляющая α_{rad} . Таким образом,

$$\alpha = \alpha_{pc} + \alpha_{conv} + \alpha_{rad} \quad (1)$$

Приблизительная область определения значений

α_{pc}	α_{conv}	α_{rad}
40 мкм $\rightarrow$ 1 мм	> 800 мкм при повышенных статических давлениях	Более высокие температуры (> 1000 К) и температурные напоры

Конвективная составляющая, связанная с движением частиц. Частицы в объеме слоя обмениваются теплотой с оживающим газом и путем теплопроводности через газ — друг с другом. Обычно они остаются внутри объема слоя достаточно долгое время, чтобы достигнуть той же самой температуры, что и их соседи. Затем некоторые частицы, имеющие температуру слоя, выносятся вследствие воздействия на них созданного внутри слоя циркуляционного движения пузырей, в непосредственную близость к поверхности теплообмена. Теплота передается от частиц к поверхности посредством теплопроводности через газ, что является ограничивающим этапом в данном механизме. Когда первые поступившие частицы приближаются близко к поверхности теплообмена, возникает высокий локальный градиент температур и вследствие этого происходит быстрая передача теплоты. Чем дольше частицы находятся вблизи теплопередающей поверхности, тем ближе становятся температуры поверхности и локальная температура слоя. Таким образом, самые высокие средние коэффициенты теплоотдачи будут получены при условии, что происходит быстрый обмен вещества между окрестностями поверхности теплообмена и объемом слоя, т. е. при низких временах соприкосновения частиц с теплопередающей поверхностью. При высокодисперсном порошкообразном материале частиц ($d_s < 20$ мкм) циркуляция внутри слоя затормаживается вследствие возникновения сил взаимодействия между частицами. Сильная обратная зависимость коэффициента α_{pc} от размера частиц в интервале примерно от 80 мкм до 1 мм (рис. 1) является следствием уменьшения относительной площади, через которую может передаваться теплота к поверхности от примыкающих к ней частиц, преодолев короткий промежуток, заполненный газом, в котором теплота передается теплопроводностью. Это происходит до тех пор, пока размер частиц и(или) статическое рабочее

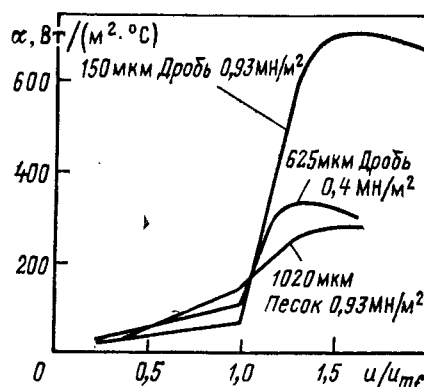


Рис. 1. Влияние среднего диаметра частиц d_s на коэффициент теплоотдачи от слоя к поверхности α :

1 — уменьшение циркуляции частиц; 2 — рост с k_g ; 3 — рост с давлением

давление значительно не возрастает для условий оживающего потока газа, чтобы войти в переходный или турбулентный режим течения, который очень важен для происходящего в нем процесса конвективной передачи теплоты, и теплообмен между поверхностью и слоем увеличивается с дальнейшим ростом размера частиц. В условиях свободного слоя частиц коэффициент теплоотдачи растет с увеличением скорости газа выше точки минимальной скорости псевдооживления, потому что слой становится подвижным под влиянием движения пузырей (рис. 2). При более высоких скоростях газового потока достигается максимум, а затем коэффициент уменьшается с дальнейшим ростом скорости газа из-за затормаживающего влияния увеличения потока пузырей через теплопередающую поверхность. Когда размер частиц увеличивается, этот максимум возникает при скоростях, более близких к минимальной скорости псевдооживления. Для высокодисперсного порошка группы А [5], для которого происходит устойчивое расширение слоя, при увеличении скорости газа выше минимальной скорости псевдооживления имеется дополнительный меньший пик на увеличивающейся части кривой, когда частицы начинают циркулировать под воздействием диффузионного перемешивания [8]. Затем с дальнейшим расширением слоя коэффициент падает до тех пор, пока не превысится минимальная скорость подъема пузырей; тогда слой сплющивается опять и развивается порожденная пузырями циркуляция твердых частиц.

Конвективная составляющая, связанная с межфазным теплообменом, α_{conv} . До тех пор пока условия течения газа через непрерывную фазу не становятся турбулентными или, по крайней мере, не входят в переходный режим течения, межфазный теплообмен конвекцией через газ имеет только вторичное значение по сравнению с механизмом переноса теплоты за счет перемешивания

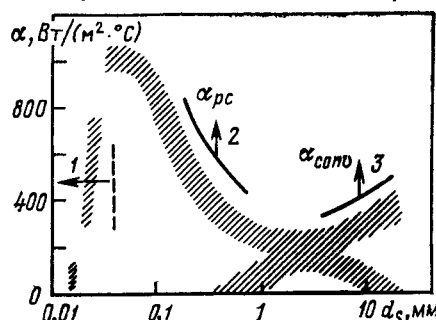


Рис. 2. Влияние скорости газа на коэффициент теплоотдачи от слоя к поверхности

Таблица 1. Измеренные эффективные степени черноты [10]

Материал слоя	d_s , мм	Скорость газа u_{mf}	Среднемассовая температура слоя, К	Степень черноты частиц	Эффективная степень черноты слоя
Расплавленный магнезитовый состав MgO и SiO_2 (частицы неправильной формы)	1—1,5	1,2—3,0	775—1475	—	0,95
Речной песок (круглые частицы)	1—1,5	1,2—3,0	775—1375	0,60	0,85
Шамот (частицы неправильной формы)	1—1,5	1,2—3,0	725—1375	0,60	0,80
Двуокись циркония ZrO_2 (круглые частицы)	0,25—1	1,2—4,0	875—1425	0,23	0,59
Корунд Al_2O_3 (круглые частицы)	1,5—2	1,2—3,0	1075—1725	0,27	0,59

частиц. Поэтому порог, за которым проявляется важность этой составляющей, зависит от среднего диаметра частиц (свыше 800 мкм) и статического рабочего давления (см. рис. 1). Однако для слоев с очень большими средними диаметрами частиц, когда максимальный размер частицы может составлять несколько миллиметров, влияние более мелких частиц, находящихся в далеких крыльях широкого распределения частиц по размерам, может быть преобладающим из-за их воздействия на условие течения газового потока. Действительно, более крупные фракции могут быть ожижены средой, которая образует псевдоожиженный слой мелких частиц и частиц среднего размера, но затем они перестают играть важную роль, какую играют фракции более мелких частиц [9].

Радиационная составляющая α_{rad} . Оценки радиационной составляющей представляют наибольшую трудность. Излучение определяет передачу теплоты в режиме переноса теплоты частицами, и этот эффект тем заметней, чем больше размеры частиц, потому что поверхность теплообмена получает энергию излучением со всей видимой поверхности частиц. Относительно меньшее количество теплоты передается теплопроводностью от частиц к теплопередающей поверхности через короткий газовый промежуток, расположенный вблизи точки контакта [1]. Хотя частицы, используемые в высокотемпературных псевдоожиженных слоях, вероятно, должны быть сделаны из огнеупорного материала и поэтому должны обладать низкой излучательной способностью, эффективная излучательная способность частиц в объеме слоя, так же как и видимая на поверхности слоя, отличается от излучательной способности отдельной изолированной частицы. В [10] представлены измеренные величины излучательной способности (табл. 1), которые в [11] оценены как заниженные на 10—20%.

Даже учитывая изменение излучательной способности с температурой, которое получено в [11], в практических

случаях еще остается влияние затопленной поверхности теплообмена на температуру слоя, непосредственно прилегающего к ней. Таким образом, наличие более холодной поверхности, например, изменяет локальную температуру слоя, уменьшая плотность радиационного теплового потока. В [12] сделана попытка решить эту проблему учетом температуры объема слоя с помощью эффективной излучательной способности ϵ_{ef} . Она уменьшается с увеличением разности температур между слоем и поверхностью (рис. 3). Эффективная излучательная способность также уменьшается с увеличением абсолютной температуры слоя.

Кроме того, радиационная составляющая процесса теплообмена увеличивается по отношению к составляющей за счет перемешивания частиц, когда растет средний диаметр частицы [12]. В противоположность низкотемпературным системам максимальные коэффициенты теплоотдачи в высокотемпературных условиях нужно ожидать в более высоких газовых слоях, когда происходит энергичный барботаж пузырьков газа через слои. Это делает слой более разреженным, так что воздействие поверхности теплообмена может глубже проникать внутрь слоя, где меньше чувствуюется влияние стенки на локальную температуру и поведение ядра слоя больше похоже на абсолютно черный излучатель. Приемлемая эффективная излучательная способность ϵ_{ef} между поверхностью и слоем при обычных обстоятельствах составляет около 0,7.

В. Расчетные формулы. Условие, при котором максимален коэффициент теплоотдачи от слоя к поверхности. Скорость ожижающего газа, обеспечивающая максимальный коэффициент теплоотдачи от слоя к стенке, является функцией среднего размера частиц. Она лучше всего выражается в виде произведения коэффициента на минимальную скорость ожижения u_{mf} ; этот коэффициент уменьшается, когда средний диаметр частицы растет. Из-за трудностей в учете формы частиц и ее влияния, в особенности на пористость слоя, корреляции, предлагаемые в [1—4], для расчета минимальной скорости ожижения ненадежны. Следовательно, лучше непосредственно измерять минимальную скорость ожижения, но это не всегда возможно при высоких рабочих температурах и давлениях. В этих условиях рекомендуется интерполяционная форма зависимости [13]. Например, найдено, что она удовлетворительно учитывает влияние изменения вязкости и плотности газа с температурой [7] в предположении, что значение пористости при минимальном ожижении E_{mf} равно значению, которое используется в корреляции для температурных условий окружающей среды, когда u_{mf} можно легко определить. Рекомендуемая формула принимает вид

$$Re_{mf} = \frac{Ar}{150 [(1 - E_{mf})/E_{mf}]^3 + \sqrt{(1,75/E_{mf}) Ar}} \quad (2)$$

Однако при ее использовании все еще остаются трудности, если интервал изменения физических свойств попадает

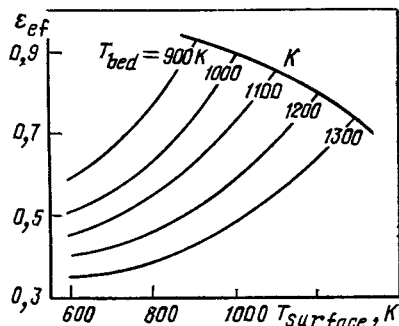


Рис. 3. Зависимость изменения эффективной излучательной ϵ_{ef} способности от температуры теплоотдающей поверхности $T_{surface}$ и слоя T_{bed}

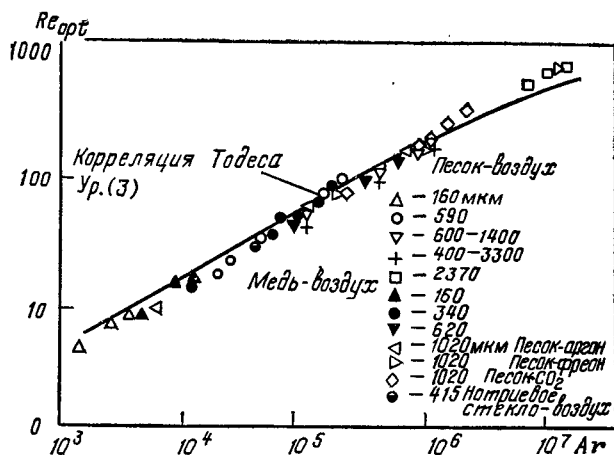


Рис. 4. Иллюстрация совпадения корреляционной кривой [14] для оптимальной скорости газа с экспериментальными результатами

внутри переходных режимов течения газа, потому что корреляция очень чувствительна к значению пористости. В отличие от влияния сферичности на пористость, которое будет меньше для близких по значению сферических частиц, чем для имеющих углы, пористость также стремится к уменьшению с ростом среднего размера частиц. Поскольку в качестве приближенного значения пористости плотноупакованного слоя близких по величине сферических частиц часто используется величина 0,4, пористость свободноупакованного слоя, согласно его состоянию при минимальном псевдооживлении, может быть выше на 25% для частиц, имеющих углы. Пористость также увеличивается с ростом рабочей температуры, пока условия течения оживающего газа остаются ламинарными [7], так что этот весьма чувствительный фактор Em_f имеет сложный характер изменения.

В развитие корреляции [13] в [14] предложена следующая корреляция для расчета числа Рейнольдса Re_{opt} для течения газа, при котором коэффициент теплоотдачи от слоя к поверхности приобретает максимальное значение:

$$Re_{opt} = \frac{Ar}{18 + 5,22 \sqrt{Ar}} \quad (3)$$

Расчеты по этой формуле сравниваются с некоторыми экспериментальными результатами, полученными для ряда условий при статических рабочих давлениях вплоть до 1 МПа [15] (рис. 4). Для более крупных частиц, когда скорость оживления, при которой получается максимальный коэффициент теплоотдачи, близка к минимальной скорости псевдооживления, совпадение сравнительно хорошее, но корреляцию нельзя рекомендовать для работы с порошкообразным материалом со средним диаметром частиц меньше 400 мкм, где различие между этими двумя скоростями растет.

Максимальный коэффициент теплоотдачи от слоя к стенке в условиях, когда преобладает составляющая α_{rc} ($d_s \approx 80 \div 800$ мкм). Конструкция распределителя и других внутренних устройств, очевидно, будет иметь сильное влияние на режимы перемешивания частиц внутри слоя [1-4], и из работы [6], на которую мы ссылались выше, следует, что резко выраженные изменения в поведении слоя может иметь место при изменении масштабов оборудования. Таким образом, опубликованные зависимости отражают режимы циркуляции твердых частиц, полученные при использовании в экспериментах слоя. Эти слои в большинстве случаев имели малые размеры с устойчи-

выми, вполне определенными режимами циркуляции частиц; пузыри стремятся подняться в потоке до центра слоя и при возвращении потока твердых частиц приближаются к стенке оболочки. Тем не менее в [4] предложена аппроксимационная зависимость, которую можно рекомендовать для расчета максимальных коэффициентов теплоотдачи от слоя к стенке без учета радиационной составляющей и для порошкообразных материалов, у которых можно пренебречь падением стабильного расширения слоя в интервале размеров от 80 до 800 мкм (порошкообразные материалы группы В согласно [5]). Эта зависимость имеет следующий вид:

$$\alpha_{max} = 35,8 p_s^{0,2} \lambda_g^{0,6} d_s^{-0,36} \quad (4)$$

с постоянными, взятыми в единицах СИ.

Зависимость показывает увеличение коэффициента теплоотдачи в результате изменения коэффициента теплопроводности газа, когда рабочая температура растет до тех пор, пока при $T > 600^\circ\text{C}$ не становится заметным перенос теплоты излучением. Можно ожидать получение коэффициента теплоотдачи, раннего приблизительно 70% его максимального значения уже при приемлемых рабочих условиях. Если непрерывная фаза достигает степени стабильного расширения, число частиц, находящихся в соприкосновении с единицей площади поверхности теплообмена, уменьшается с последующим уменьшением коэффициента теплоотдачи из-за наличия составляющей α_{rc} [1]. Для случая более мелких и менее плотных порошкообразных материалов, попадающих в группу А, в [8] предложена корреляция

$$Nu_{max} = 0,157 Ar^{0,475}, \quad 2 < Ar < 70, \quad (5)$$

но она не проверяна во всем интервале рабочих температур.

Были предложены многие фундаментальные модели процесса теплообмена, учитывающие в основном конвективный перенос теплоты за счет движения частиц [1], но их обычно нельзя применять для расчетов, потому что неизвестны условия их определения и термические свойства слоя непосредственно соприкасающегося с теплопередающей поверхностью.

Максимальный коэффициент теплоотдачи от слоя к стенке при преобладающем влиянии α_{conv} ($d_s > 800$ мкм) и повышенных статических давлениях. Считая, что коэффициент теплоотдачи от слоя к стенке в точке оживления определяется только межфазной газовой конвективной составляющей α_{conv} (нет никакой составляющей коэффициента теплоотдачи за счет движения частиц, когда слой находится в покое), авторы [15] предложили использовать зависимость, описывающую полученные ими результаты для статических давлений вплоть до 1,0 МПа в виде следующего размерного уравнения (размерность

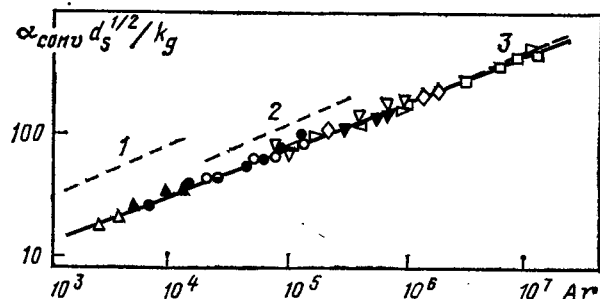


Рис. 5. Корреляция для коэффициентов теплоотдачи неподвижных слоев, связанных с межфазным теплообменом. Кривые 1-3 рассчитаны по модели [16] для меди ($d_s=160$ мкм), песка (590 мкм) и песка (2370 мкм) в воздухе соответственно. Другие обозначения см. на рис. 4

$m^{-1/2}$ (рис. 5):

$$\frac{\alpha_{conv} d_s^{1/2}}{\lambda_g} = 0,86 \text{ Ar}^{0,39}, \quad 10^3 < \text{Ar} < 2 \cdot 10^6. \quad (6)$$

Соответствующая максимальная составляющая коэффициента теплоотдачи за счет движения частиц $\alpha_{p,c \max}$ (в предположении, что эти две составляющие аддитивны) связана с числом Архимеда следующим безразмерным уравнением:

$$\frac{\alpha_{p,c, \max} d_s}{\lambda_g} = 0,843 \text{ Ar}^{0,15}. \quad (7)$$

Как отмечено выше, если имеется широкое распределение по размерам, частицы мелкого помола могут подавлять турбулентность в оживающем газе, уменьшая таким образом конвективную газовую составляющую. Доказательства этого видны из результатов, опубликованных в [9].

В [16] ранее оценена конвективная составляющая, связанная с межфазным теплообменом по аналогии с процессом массопереноса. Их корреляция дает сходные результаты при атмосферном давлении, но с ростом давления различие между ними растет (рис. 5).

Радиационная составляющая коэффициента теплоотдачи от слоя к поверхности α_{rad} . Для практических оценок радиационную составляющую можно рассчитать, используя абсолютные температуры и уравнение Стефана — Больцмана с помощью соотношения

$$\alpha_{rad} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \epsilon_r (T_{bed}^4 - T_{surface}^4)}{T_{bed} - T_{surface}}, \quad (8)$$

где T_{bed} — абсолютная температура объема слоя; ϵ_r — степень черноты, учитывающая разные излучательные свойства поверхности и слоя и влияние поверхности на температуру слоя, непосредственно примыкающего к теплопередающей стенке. Как обсуждалось выше, приемлемое значение ϵ_{ef} для обычных условий составляет около 0,7 (см. рис. 3), но ϵ_r легко можно уменьшить до 0,1 при использовании блестящей металлической стенки трубы, через которую отводится теплота.

В [17] дана корреляция для максимального коэффициента теплоотдачи от слоя к поверхности для горячего слоя из алюминия и охлаждаемого водой зонда в виде

$$\text{Nu}_{\max} = 0,0434 \left(\frac{T}{273} \right)^2 \text{ Ar}^{0,271}. \quad (9)$$

С. Затопленные трубы. Свободные поверхности теплообмена можно увеличить, погружая трубы внутрь слоя. Присутствие затопленных поверхностей оказывает воздействие на местные условия ожигения и влияет на локальную составляющую коэффициента теплоотдачи, обусловленную перемешиванием частиц. Таким образом, когда горизонтальные трубы погружаются в слой, например большая поверхность теплообмена подвергается воздействию поперечного потока твердых частиц, что выгодно с точки зрения теплообмена, неподвижный слой неожигенных частиц будет скапливаться на верхней части трубы, а пузыри газа могут окутывать обращенную вниз поверхность. Когда трубы устанавливают в шахматном порядке, имеется тенденция к всплыванию пузырей. Хотя очень тесное расположение труб друг к другу серьезно влияет на циркуляцию частиц, в [18] показано, что коэффициенты теплоотдачи, которые были определены в экспериментах при низких температурах, не уменьшались при этом катастрофически. Найдено, что коэффициент теплоотдачи уменьшился приблизительно на 25%, в то время как зазор между трубами изменился от 300 до 15 мм в экспериментах со слоями золы, имеющими широкое распределение по размерам при среднем размере частиц

около 450 мкм, но включающих маленькие фракции частиц диаметром, большим 1,7 мм. Вертикальное расположение труб может интенсифицировать отложения в глубоких слоях, хотя использование вертикальных вставок можно отставать как средство контроля за ростом пузырей. Из-за влияния труб на поведение слоя слои с такими включениями менее чувствительны к общим эффектам изменения масштаба.

В [19] сделан довольно полный обзор опубликованных результатов и корреляций для всех типов и конфигураций затопленных труб. Однако нет никакого сомнения, что если перенос излучения значителен, то еще большая неточность была бы внесена при использовании оценок, основанных на простых уравнениях (4) или (6) и, когда они подходят, (7) или (8). Их следовало бы полагать равными приблизительно $\pm 20\%$.

На практике разумно проводить эксперименты на моделях возможно большего масштаба. Предпочтительно, когда имеешь дело с многоэлементными системами, использовать «единичную ячейку» предложенной системы, имеющую натуральный размер, т. е. включающей все черты одной полимасштабной единицы предложенной конструкции. Например, для конструкции камеры сгорания это была бы площадь слоя, снабжаемого топливом из одной точки распределения.

Чаще всего самый маленький коэффициент теплоотдачи реализуется на внутренней стороне трубы, но использование развитой поверхности пропагандируется в совсем других ситуациях (например, при охлаждении жидким металлом, текущим через трубы). Другое применение оребренных труб дано в конструкции высокоскоростных с мелкими слоями теплообменников для регенерации теплоты отработавших газов [20]. В этом последнем примере области между ребрами ведут себя как отдельные разбавленные слои и пузыри сохраняют неизменный размер из-за близости расположения ребер, которое может составлять 3—5 мм, или в 15—20 раз превышать диаметр частиц. В таких объемах расширение слоя может достигать 400% при все еще высоких коэффициентах теплоотдачи от слоя к стенке вследствие очень коротких времен пребывания частиц у теплоотдающей поверхности. Отнесенные к площади внешней поверхности трубы коэффициенты теплоотдачи равны примерно 4 кВт/(м²·К). Из-за того что частицы в слое имеют очень большую площадь поверхности, через которую передают теплоту газу, может быть достигнута очень хорошая регенерация теплоты от газа; необходимо только использовать мелкие слои. Таким образом, эти конструкции могут действовать без повышения потерь давления, т. е. без недостатка, присущего системам с более глубоким погружением в слой. Обычно такая установка может действовать при полных потерях давления около 50 мм по водяному манометру при использовании вдува от вытяжных вентиляторов для обеспечения течения горячего оживающего газа через слой. Максимальные коэффициенты теплоотдачи, отнесенные к полной площади, выражаются зависимостью, предложенной в [21],

$$\text{Nu}_{\max} = 0,36 \text{ Ar}^{0,22} \left(\frac{T}{273} \right)^{0,82}, \quad (10)$$

в диапазоне температур, при котором значителен перенос теплоты излучением.

Хотя и невыгодное в общем случае расположение горизонтальных труб вблизи распределительного устройства может иногда иметь преимущества. Так, газ, впрыскиваемый струей через сопло или начинающий образовывать пузыри у распределительного устройства, может усилить перемешивание частиц в трубе и, следовательно, увеличить составляющую коэффициента теплоотдачи за счет перемешивания частиц $\alpha_{p,c}$. Однако в другом случае вблизи распределительного устройства могут

образовываться зоны потери ожигания и обволакивания газом. В этом случае газ, вводимый струей через сопло, может также приводить к увеличению эрозионного износа труб и изнашиванию частиц из-за трения. В процессах регенерации теплоты разница температур между газом и поверхностью теплообмена будет наиболее высока

вблизи распределительного устройства, тогда как в камерах сгорания или в экзотермических реакторах наиболее низкая разница температур будет в области входа. Следовательно, скорее можно ожидать выгоду от процесса теплообмена в таких системах в первом случае, чем в последнем.

Раздел 2.9 ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

2.9.1. Введение

Д. К. Эдвардс

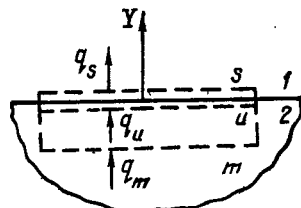
А. Радиационный теплообмен при конструировании тепловых устройств. В каких случаях нужно учитывать радиационный теплообмен? Нет необходимости рассматривать излучение внутри жидкости, сильно непрозрачной по отношению к спектру источника. В такой жидкости, как вода, излучение дает просто вклад в теплопроводность. Не нужно рассматривать излучение и в жидкости, полностью прозрачной по отношению к спектру источника. Если не существует физического механизма, посредством которого жидкость может поглощать энергию проходящего через нее излучения, то, как следует из термодинамики, она не может ни излучать, ни нагреваться или охлаждаться излучением. Такая жидкость называется диатермичной. Стенки, ограничивающие диатермичную жидкость, тем не менее могут обмениваться теплотой посредством излучения, однако лишь в том случае, когда их температуры различны. Таким образом, излучение внутри каналов теплообменников, содержащих масло, воду или воздух, обычно не рассматривается, поскольку масло и вода непрозрачны, а воздух диатермичен.

Плотность радиационного потока теплоты между двумя стенками с различными температурами или между стенкой и средой (ни непрозрачной, ни диатермичной) может быть большой при большом значении $\Delta C_s T^4$, где C_s — постоянная Стефана — Больцмана, равная $5,6697 \times 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴). Если ΔT мало по сравнению с уровнем температуры, то $\Delta C_s T^4$ можно представить в виде $4C_s T_m^3 \Delta T$, где T_m — средняя температура. При 300 К величина $4C_s T_m^3$ несколько превосходит 6 Вт/(м²·К), т. е. имеет тот же порядок, что и коэффициент теплоотдачи при естественной конвекции. При $T_m = 2000$ К величина $4C_s T_m^3$ примерно в 300 раз больше, т. е. составляет 1800 Вт/(м²·К), и этим объясняется существование радиационного теплообмена при пленочном кипении. Излучение играет важную роль в случаях высоких температур и больших размеров (поскольку коэффициенты конвективного теплообмена зависят от размера D как $D^{-1/5}$ при турбулентном течении или D^{-1} при ламинарном) или в условиях вакуума, когда коэффициенты конвективного теплообмена малы вследствие малости плотности жидкости.

В. Термодинамические поверхности и системы поверхностей. Конструктору тепловых устройств необходимо знать плотности потоков теплоты через поверхности, примыкающие к границе раздела фаз. Когда одна из фаз сильно непрозрачна, а другая нет, используется понятие непрозрачной системы поверхностей. Такая система изображена на рис. 1. Поверхность s расположена вне сильно непрозрачной фазы, поверхность u — внутри нее, непосредственно вблизи границы раздела. Поверхность m расположена достаточно далеко от межфазной границы, так что, во-первых, излучение, пересекающее поверхности

s и u , не доходит до поверхности m и, во-вторых, поток излучения, пересекающий поверхность m , описывается уравнением диффузии излучения и включается в теплопроводность. В том случае, когда поток жидкости через поверхность отсутствует, а тепловая энергия, запасаемая

Рис. 1. Образующие систему поверхностей термодинамические границы s , u и m



в жидкости, заключенной между поверхностями m и u , пренебрежимо мала, имеем

$$q_s = q_u = q_m = -k_2 \frac{dT_2}{dy} \Big|_m, \quad (1)$$

где q — плотность потока теплоты, Вт/м², в более прозрачной среде

$$q_s = -k_1 \frac{dT_1}{dy} \Big|_s + q_r, \quad (2)$$

где q_r — плотность потока излучения через поверхность s в среде 1. Отметим, что в определении радиационного теплового потока в непрозрачной среде 2 необходимости нет.

С. Интенсивность и плотность потока излучения. Интенсивность излучения описывает распределение по направлениям плотности потока излучения, проходящего через поверхность s . Плотность потока излучения можно разделить на две части: плотность эффективного (направленного от среды 2) потока q^+ и плотность падающего на среду 2 потока q^- . Для обозначения q^+ употребляются также символы J и B , для q^- — G и H . Результирующая плотность потока

$$q_r = q = q^+ - q^-. \quad (3)$$

Плотность эффективного потока, приходящаяся на единственный телесный угол, называется интенсивностью I^+ . Телесный угол определяется площадью поверхности dA_s сферы радиусом R :

$$d^2\Omega = dA_s / R^2. \quad (4)$$

В сферических координатах (рис. 2) элемент поверхности dA_s есть $R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, при этом

$$d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5)$$

Единицей измерения телесного угла является стерадиан, подобно тому, как угол на плоскости измеряется в радианах. Интенсивность I^+ представляет собой мощность излучения, приходящуюся на единицу поверхности и на

¹ Пер. с англ. И. Г. Зальцмана.

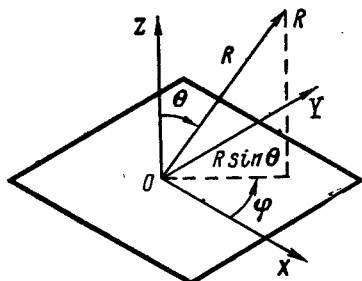


Рис. 2. Полярный угол θ и азимутальный φ

единицу телесного угла (при этом направление I^+ совпадает с нормалью к поверхности). Вклад $I^+ d^2\Omega$ в плотность потока через поверхность s равен:

$$d^2q^+ = I^+ \cos \theta d^2\Omega, \quad (6)$$

аналогично

$$d^2q^- = I^- \cos \theta d^2\Omega. \quad (7)$$

Объединяя (5) и (6), получаем

$$q^+ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I^+(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (8)$$

и

$$q^- = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I^-(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (9)$$

В том случае, когда $I^+(\theta, \varphi)$ не зависит от направления, излучение называется диффузным. Для диффузного излучения

$$q^+ = \pi I^+, \quad I^+ \neq f(\theta, \varphi), \quad (10)$$

$$q^- = \pi I^-, \quad I^- \neq f(\theta, \varphi). \quad (11)$$

Для теплообменников, в которых часто используются длинные цилиндрические трубки, удобна система координат, показанная на рис. 3. В этих координатах $dA_s = R d\beta R \cos \beta d\gamma$ и

$$d^2\Omega = \cos \beta d\beta d\gamma; \quad (12)$$

$$\cos \theta = \cos \beta \cos \gamma; \quad (13)$$

$$d^2q^\pm = I^\pm \cos^2 \beta d\beta \cos \gamma d\gamma; \quad (14)$$

$$q^\pm = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} I^\pm(\beta, \gamma) \cos^2 \beta d\beta \cos \gamma d\gamma. \quad (15)$$

Для примера вычислим плотность потока излучения от бесконечно длинного стержня диаметром 2,5 см, падающего на ближайший элемент стенки, расположенной параллельно стержню и удаленной от него на 10 см. Стержень диффузно излучает 1850 Вт/м. Если интенсивностью излучения окружающей среды можно пренебречь по

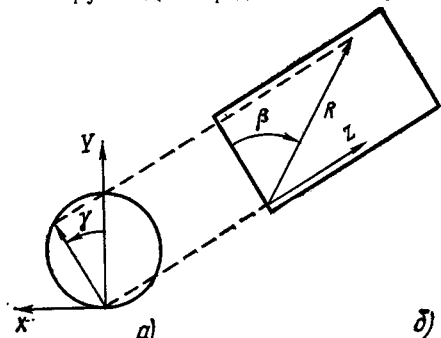


Рис. 3. Угол при основании γ и аксиальный угол β . Вид с торца цилиндра (а) и сбоку (б) (проекция луча R на третье направление)

сравнению с излучением стержня, то согласно (15) имеем

$$q^- = I^- \int_{-\gamma_1}^{+\gamma_1} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \beta d\beta \cos \gamma d\gamma = I^- (2 \sin \gamma_1) \frac{\pi}{2};$$

$$I_{\text{wall}}^- = I_{\text{rod}}^+ = \frac{q_{\text{rod}}^+}{\pi} = \frac{\dot{Q}}{\pi DL} \frac{1}{\pi}, \quad 2 \sin \gamma_1 = \frac{2,5}{10};$$

$$q^- = \frac{1850}{\pi(0,025)} \frac{1}{\pi} \frac{2,5}{10} \frac{\pi}{2} = 2944 \text{ Вт/м}^2.$$

Д. Излучение черного тела. Полость, окруженная стенками, имеющими температуру T , заполнена излучением, находящимся в термодинамическом равновесии со стенками. Если сделать небольшое отверстие в стенке, то равновесие нарушится незначительно. Наблюдаемое излучение, выходящее из полости, называется черным излучением. Слово «черное» употребляется потому, что полость поглощает все входящее в отверстие излучение, ничего не отражая, и поэтому при низкой температуре выглядит черной. Интенсивность излучения I_b^+ , выходящего из полости, изотропна; излучение черного тела диффузно. Закон Стефана связывает интенсивность и плотность потока излучения черного тела с температурой соотношением

$$q_b^+ = \pi I_b^+ = C_s T^4, \quad (16)$$

где постоянная Стефана — Больцмана

$$C_s = 5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4\text{)}.$$

Волновые пакеты, испускаемые при тепловом движении электрически заряженных частиц в стенках полости, распространяются со скоростью света c , поскольку при исчезновении электрического поля возникает магнитное поле, которое, в свою очередь, исчезает, чтобы породить электрическое поле вдоль пути распространения волны. Энергия E , частота ν , волновое число γ и длина волны λ связаны соотношением Эйнштейна

$$E = h\nu_f = h c \gamma = h c / \lambda, \quad (17)$$

где h — постоянная Планка; c — скорость света ($h = 6,6256 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $c = 2,997925 \cdot 10^8$ м/с). Волновое число γ , частота ν и длина волны λ связаны соотношениями $\nu = \nu_f / c = 1/\lambda$.

В размерных единицах

$$\nu (\text{см}^{-1}) = 10^4 / \lambda (\text{мкм}); \quad \lambda (\text{мкм}) = 10^4 / \nu (\text{см}^{-1}); \quad 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м} = 10^3 \text{ Å}.$$

Энергию фотонов можно выразить в электрон-вольтах:

$$E (\text{эВ}) = 1,240 / \lambda (\text{мкм}).$$

Спектральной интенсивностью и спектральной плотностью потока называются соответственно интенсивность и плотность потока, приходящиеся на единичный спектральный интервал:

$$I_{bv} = \frac{dI_b}{d\nu}; \quad I_{b\lambda} = \frac{dI_b}{d\lambda}; \quad (19)$$

$$q_{bv}^\pm = \frac{dq_b^\pm}{d\nu}; \quad q_{b\lambda}^\pm = \frac{dq_b^\pm}{d\lambda}; \quad (20)$$

$$q_{bv}^\pm d\nu = q_{b\lambda}^\pm d\lambda; \quad d\lambda = d\nu / \nu^2; \quad (21)$$

$$q_{b\lambda}^\pm = \nu^2 q_{bv}^\pm; \quad q_{b\lambda}^\pm = q_{bv}^\pm / \lambda^2; \quad (22)$$

$$d^3q^\pm = I^\pm \cos \theta d^2\Omega d\nu; \quad (23)$$

$$q^\pm = \int_0^\infty q_v^\pm d\nu = \int_0^\infty q_\lambda^\pm d\lambda; \quad (24)$$

$$I^\pm = \int_0^\infty I_v^\pm d\nu = \int_0^\infty I_\lambda^\pm d\lambda.$$

Закон Планка дает спектральное распределение излучения черного тела

$$I_{\nu} = \frac{2hc^2\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}; \quad I_{\lambda} = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \quad (25)$$

$$q_{\nu}^+ = \frac{2\pi hc^2\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}; \quad q_{\lambda}^+ = \frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \quad (26)$$

где k — постоянная Больцмана, равная газовой постоянной, деленной на число Авогадро: $k = 1,38054 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Первая и вторая постоянные излучения

$$c_1 = 2\pi hc^2 = 3,7415 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} \cdot \text{м}^2/\text{с};$$

$$c_2 = hc/k = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К} = 1,4388 \text{ см} \cdot \text{К} = 14\,388 \text{ мкм} \cdot \text{К}.$$

Постоянная Стефана—Больцмана определяется следующим соотношением:

$$q_b^+ = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = C_s T^4; \quad (27)$$

$$C_s = \frac{2\pi k^4}{15h^3c^2} \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}.$$

Отметим два предельных случая закона излучения Планка. При больших значениях отношения T/ν имеем предел Рэлея — Джинса

$$e^{h\nu/kT} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT} = \frac{hc}{\lambda kT}, \quad (28)$$

а при малых T/ν — предел Вина

$$e^{h\nu/kT} - 1 \approx e^{h\nu/kT}. \quad (29)$$

В пределе Рэлея — Джинса величина $q_b^+ \sim T$. В пределе Вина q_b^+ ведет себя как $e^{-c_2/\lambda T}$, подобно зависимости Аррениуса для константы скорости химической реакции. По мере роста температуры излучение черного тела растет при всех значениях длины волны или волнового числа, однако относительно в большей степени растет излучение в коротковолновой области спектра и в меньшей степени — в длинноволновой области.

Е. Функции излучения черного тела. Доля интегрального излучения черного тела, заключенная в диапазоне длин волн от 0 до λ , называется функцией излучения первого рода, или внешней долей f_e :

$$f_e(\lambda T) = \frac{1}{C_s T^4} \int_0^\lambda q_b^+(\lambda, T) d\lambda; \quad (30)$$

$$f_e(\lambda T) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}, \quad \xi = \frac{c_2}{\lambda T}.$$

Согласно закону смещения Вина максимум спектральной плотности потока излучения черного тела, определяемый условием $\partial q_b^+(\lambda, T)/\partial \lambda = 0$, соответствует фиксированному значению λT :

$$\partial q_b^+/\partial \lambda = 0 \quad \text{при} \quad \lambda T = c_2/4,965 = 2898 \text{ мкм} \cdot \text{К},$$

при этом $f_e = 0,25$. Отметим, однако, что максимум зависимости от волнового числа соответствует другому значению λT :

$$\partial q_b^+/\partial \nu = 0 \quad \text{при} \quad \lambda T = c_2/2,821 = 5100 \text{ мкм} \cdot \text{К}.$$

Функция излучения второго рода, или внутренняя доля, определяется согласно соотношению

$$f_i(\lambda T) = \frac{1}{4C_s T^3} \int_0^\lambda \frac{\partial q_b^+(\lambda, T)}{\partial T} d\lambda. \quad (31)$$

Таблица 1. Зависимость λT от внешней и внутренней доли излучения черного тела

f	Δf	$\Sigma \Delta f$	$(\lambda T)_e, \text{см} \cdot \text{К}$	$(\lambda T)_i, \text{см} \cdot \text{К}$
0.002 5	0.005	0.005	0.123 0	0.107 3
0.007 5	0.005	0.010	0.139 5	0.120 9
0.012 5	0.005	0.015	0.145 5	0.129 1
0.017 5	0.005	0.02	0.157 3	0.135 2
0.025	0.01	0.03	0.166 2	0.142 3
0.035	0.01	0.04	0.176 2	0.150 1
0.045	0.01	0.05	0.184 8	0.156 5
0.055	0.01	0.06	0.192 2	0.162 5
0.07	0.02	0.08	0.202	0.170 1
0.09	0.02	0.10	0.214	0.179 1
0.11	0.02	0.12	0.225	0.187 4
0.13	0.02	0.14	0.235	0.194 9
0.15	0.02	0.16	0.245	0.202
0.17	0.02	0.18	0.254	0.209
0.19	0.02	0.20	0.263	0.216
0.21	0.02	0.22	0.272	0.222
0.23	0.02	0.24	0.281	0.229
0.25	0.02	0.26	0.290	0.235
0.27	0.02	0.28	0.299	0.242
0.29	0.02	0.30	0.308	0.248
0.31	0.02	0.32	0.317	0.255
0.33	0.02	0.34	0.326	0.261
0.35	0.02	0.36	0.335	0.268
0.37	0.02	0.38	0.344	0.275
0.39	0.02	0.40	0.353	0.281
0.41	0.02	0.42	0.363	0.288
0.43	0.02	0.44	0.373	0.295
0.45	0.02	0.46	0.384	0.303
0.47	0.02	0.48	0.394	0.310
0.49	0.02	0.50	0.405	0.318
0.51	0.02	0.52	0.416	0.326
0.53	0.02	0.54	0.428	0.334
0.55	0.02	0.56	0.440	0.342
0.57	0.02	0.58	0.453	0.351
0.59	0.02	0.60	0.467	0.361
0.61	0.02	0.62	0.482	0.371
0.63	0.02	0.64	0.497	0.382
0.65	0.02	0.66	0.513	0.393
0.67	0.02	0.68	0.531	0.405
0.69	0.02	0.70	0.550	0.417
0.71	0.02	0.72	0.570	0.430
0.73	0.02	0.74	0.593	0.446
0.75	0.02	0.76	0.616	0.462
0.77	0.02	0.78	0.642	0.479
0.79	0.02	0.80	0.671	0.498
0.81	0.02	0.82	0.704	0.521
0.83	0.02	0.84	0.741	0.546
0.85	0.02	0.86	0.783	0.574
0.87	0.02	0.88	0.825	0.609
0.89	0.02	0.90	0.899	0.653
0.91	0.02	0.92	0.982	0.690
0.93	0.02	0.94	1.090	0.774
0.945	0.01	0.95	1.200	0.846
0.955	0.01	0.96	1.298	0.909
0.965	0.01	0.97	1.433	0.997
0.975	0.01	0.98	1.63	1.123
0.982 5	0.005	0.985	1.87	1.28
0.987 5	0.005	0.990	2.22	1.43
0.992 5	0.005	0.995	2.56	1.70
0.997 5	0.005	1.000	7.34	2.49

Таблица 2. Зависимость длины волны от внешней доли излучения черного тела

f	Δf	$\Sigma \Delta f$	Длина волны λ , мкм			
			Солнечное излучение (вне земной атмосферы)	Солнечное излучение на поверхности Земли	Излучение вольфрамовой пластины при 2900 К	Излучение вольфрамовой спирали ($P/D=2$) при 2900 К
0,01	0,02	0,02	0,29	0,35	0,44	0,45
0,03	0,02	0,04	0,33	0,39	0,54	0,55
0,05	0,02	0,06	0,36	0,41	0,58	0,59
0,08	0,04	0,10	0,39	0,44	0,65	0,66
0,15	0,10	0,20	0,45	0,48	0,75	0,76
0,25	0,10	0,30	0,52	0,55	0,88	0,90
0,35	0,10	0,40	0,59	0,62	1,01	1,03
0,45	0,10	0,50	0,68	0,68	1,15	1,17
0,55	0,10	0,60	0,79	0,76	1,30	1,32
0,65	0,10	0,70	0,93	0,84	1,48	1,51
0,75	0,10	0,80	1,11	1,04	1,73	1,78
0,85	0,10	0,90	1,43	1,27	2,15	2,21
0,92	0,04	0,94	1,87	1,64	2,71	2,80
0,95	0,02	0,96	2,23	1,84	3,19	3,30
0,97	0,02	0,98	2,70	2,15	3,73	3,89
0,99	0,02	1,00	3,93	3,10	5,34	5,50

В табл. 1 приведены значения λT для различных f_e или f_i . Приведены также значения Δf для численного интегрирования с использованием правила трапеций. В табл. 2 представлены значения λ для некоторых источников нечерного излучения.

Рассмотрим для примера осушение материала почти черным электрическим нагревательным элементом, находящимся на расстоянии 10 см, имеющим диаметр 2,5 см и излучающим энергию 1850 Вт/м. Материал поглощает 95% излучения с длиной волны, большей 2,7 мкм, и только 30% излучения с меньшей длиной волны. Требуется определить плотность поглощенного потока. Напомним, что в предыдущем примере для той же геометрии мы получили $q^- = 2944$ Вт/м². Согласно закону Стефана

$$C_s T^4 = q_b^+ = \frac{\dot{Q}}{\pi D L};$$

$$T = \left[\frac{1850}{\pi (0,025) (1) (5,6697 \cdot 10^{-8})} \right]^{1/4} = 803 \text{ К.}$$

Соответственно $\lambda T = (2,7 \text{ мкм})(803 \text{ К}) = 2168 \text{ мкм} \cdot \text{К}$ и $f_e \approx 0,095$. Таким образом, плотность поглощенного потока

$$\alpha q^- = [(0,095) (0,30) + (0,905) (0,95)] 2944 = 2615 \text{ Вт/м}^2.$$

2.9.2. Радиационные характеристики поверхностей

Д. К. Эдвардс

А. Введение. Для конструктора тепловых устройств радиационные характеристики поверхностей — это числа, которые нужно ввести в ЭВМ, чтобы получить ответы на заданные вопросы о размерах, ориентации, размещении элементов, о выборе материалов и т. д. Конструктор надеется, что значения этих характеристик можно найти в справочниках. Однако иногда оказывается, что этих значений для нужного материала в справочнике нет или приведен столь большой диапазон изменения величины,

что появляется необходимость в контрольных измерениях. Затем становится ясно, что можно провести много различных видов измерений, получить много различных чисел. Какое именно измерение или серию измерений нужно провести? Как из полученных результатов выбрать одно число? Что означают числа, приведенные в справочнике? Реально ли их применение?

Очевидно, что следует различать две категории радиационных характеристик: модельные характеристики, используемые для моделирования поведения поверхностей в программе для ЭВМ или в вычислительной схеме, и реальные характеристики, показывающие, как поверхность ведет себя в действительности. Ниже проведен обзор реальных характеристик и методов их измерения, затем обзор электромагнитной теории отражения излучения и, наконец, обсуждается использование характеристик поверхностей при конструировании тепловых устройств.

Обозначения, используемые в литературе для радиационных характеристик поверхностей, довольно разнообразны. Часто возникает вопрос о различии значений терминов, имеющих окончания *ivity* и *ance*. Национальное бюро стандартов США в свое время предложило использовать окончание *ivity* для свойств чистых полированных поверхностей, а *ance* — для поверхностей, имеющих шероховатости, оксидных пленок и т. п. Некоторые авторы следовали этому предложению. В данной работе термины, оканчивающиеся на *ivity* и *ance*, взаимозаменяемы.

В. Поглощательные и излучательные характеристики. Поглощательная способность системы поверхностей (значение ее заключено между 0 и 1) определяет долю падающего излучения, поглощенную системой поверхностей. Степень черноты (излучательная способность — значение ее тоже заключено между 0 и 1) определяет, какая доля излучения черного тела в действительности излучается системой поверхностей. Чем определяются эти величины? Очевидно, они зависят от используемой системы поверхностей, материала, из которого она изготовлена, его структуры, определяемой обработкой, толщиной окисных пленок, неровностями и т. д. Если структура поверхности стабильна (это не всегда имеет место), то радиационные характеристики рассматривают как функции термодинамического состояния, определяемого температурой T_s . Более того, характеристики зависят от природы теплового излучения: направления и длины волны, а иногда и поляризации.

Соответственно различаются направленные и усредненные по направлению, спектральные и усредненные по спектру значения. Слово *полусферический* относится к значениям, усредненным по всей полусфере (по телесному углу 2π ср) над поверхностью, а слово *интегральный* относится к значениям, усредненным по всему спектру, т. е. по длинам волн или волновым числам от нуля до бесконечности. Следует отметить, что такие обозначения не универсальны, иногда термин «интегральный» используется и в смысле интеграла по направлениям (вместо термина «полусферический»).

Пусть $\alpha(\theta, \phi, \lambda, T_s)$ означает спектральную направленную поглощательную способность поверхности при температуре T_s для неполяризованного излучения. Пусть $\epsilon(\theta, \phi, \lambda, T_s)$ означает спектральную направленную степень черноты. Тогда плотность результирующего потока, выходящего с поверхности s ,

$$q = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [\epsilon(\theta, \phi, \lambda, T_s) I_{b\lambda}(\lambda, T_s) - \alpha(\theta, \phi, \lambda, T_s) I_\lambda^-(\theta, \phi, \lambda)] \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi d\lambda. \quad (1)$$

Волновое число ν и длина волны λ здесь и ниже взаимозаменяемы.

Принцип детального баланса требует в условиях термодинамического равновесия отсутствия передачи энергии между двумя поверхностями с одинаковыми температурами, причем не только в целом, но для каждого направления и волнового числа. Если окружающая среда представляет собой черное тело с температурой T_s , то в соотношении (1) интенсивность $I_{\lambda}^{-} = I_{b\lambda}(\lambda, T_s)$, и принцип детального баланса требует выполнения соотношения $\varepsilon(\theta, \varphi, \lambda, T_s) = \alpha(\theta, \varphi, \lambda, T_s)$. (2)

Это соотношение называется законом Кирхгофа.

Даже в том случае, когда окружающая среда, например черное тело с температурой $T_e \neq T_s$, не находится в равновесии с поверхностью, сделанное предположение о том, что поверхность остается в термодинамически равновесном микросостоянии, характеризуемом температурой T_s , достаточно, чтобы соотношение (2) было справедливо. Можно представить себе и даже организовать неравновесное состояние поверхности. В этом случае закон Кирхгофа несправедлив.

Пусть окружающая среда представляет собой черное тело при температуре T_e . Тогда интенсивность $I_{\lambda}^{-}(\theta, \varphi, \lambda) = I_{b\lambda}(\lambda, T_e)$, и из уравнения (1) и закона Кирхгофа получаем

$$q = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [\alpha(\theta, \varphi, \lambda, T_s) I_{b\lambda}(\lambda, T_s) - \alpha(\theta, \varphi, \lambda, T_s) I_{b\lambda}(\lambda, T_e)] \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi d\lambda = \varepsilon_{TH}(T_s) C_s T_s^4 - \alpha_{TH}(T_s, T_e) C_s T_e^4. \quad (3)$$

Это выражение определяет интегральные полусферические степень черноты и поглощательную способность соответственно. Данные радиационные свойства усреднены по спектру и по направлению. Можно, конечно, разделить два усредняющих шага на полусферическое усреднение, обозначаемое индексом H ,

$$\alpha_H(\lambda, T_s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha(\theta, \varphi, \lambda, T_s) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4)$$

и усреднение по спектру, обозначаемое индексом T ,

$$\varepsilon_{TH}(T_s) = \frac{1}{C_s T_s^4} \int_0^{\infty} \alpha_H(\lambda, T_s) \pi I_{b\lambda}(\lambda, T_s) d\lambda; \quad (5)$$

$$\alpha_{TH}(T_s, T_e) = \frac{1}{C_s T_e^4} \int_0^{\infty} \alpha_H(\lambda, T_s) \pi I_{b\lambda}(\lambda, T_e) d\lambda. \quad (6)$$

Из уравнения (30) § 2.9.1 видно, что

$$\pi I_{b\lambda}(\lambda, T_s) d\lambda / C_s T_s^4 = df_e(\lambda T_s).$$

Поэтому уравнения (5) и (6) можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_{TH}(T_s) = \int_0^1 \alpha_H(\lambda, T_s) df_e(\lambda T_s); \quad (7)$$

$$\alpha_{TH}(T_s, T_e) = \int_0^1 \alpha_H(\lambda, T_s) df_e(\lambda T_e). \quad (8)$$

Можно заметить, что при приближении T_e к T_s значение $\alpha_{TH}(T_s, T_e)$ приближается к $\varepsilon_{TH}(T_s)$. Однако это не имеет глубокого смысла. Когда T_e приближается

к T_s , уравнение (3) можно представить в виде

$$q = \int_0^{\infty} \alpha_H(\lambda, T_s) [\pi I_{b\lambda}(\lambda, T_s) - \pi I_{b\lambda}(\lambda, T_e)] d\lambda = \int_0^{\infty} \alpha_H(\lambda, T_s) [\partial q_b^+ / \partial T_s] (T_s - T_e) d\lambda = \varepsilon_{TH}(T_s) 4C_s T_s^3 (T_s - T_e),$$

где внутренняя интегральная (полусферическая) степень черноты

$$\varepsilon_{TH}(T_s) = \frac{1}{4C_s T_s^3} \int_0^{\infty} \alpha_H(\lambda, T_s) \left[\frac{\partial q_b^+}{\partial T_s}(\lambda, T_s) \right] d\lambda. \quad (9)$$

Сравнение уравнения (9) с (31) § 2.9.1 показывает, что

$$\varepsilon_{TH} = \int_0^1 \alpha_H(\lambda, T_s) df_i(\lambda T_s). \quad (10)$$

Теперь следует заметить, что внутренняя интегральная степень черноты $\varepsilon_{TH}(T_s)$ и внутренняя интегральная поглощательная способность $\alpha_{TH}(T_s)$ неразличимы.

Отметим, что закон Кирхгофа в том виде, как он здесь сформулирован, представляет собой довольно важное соотношение (2), а не значительно более слабое утверждение о том, что $\varepsilon_{TH}(T_s) = \alpha_{TH}(T_s, T_e = T_s)$.

Для примера использования уравнений (7), (8) и (10) допустим, что зависимость $\alpha_H(\lambda)$ для данного материала и значения T_s известны. Так, для нержавеющей стали при $T_s = 300$ К зависимость $\alpha_H(\lambda)$ в диапазоне $1 \text{ мкм} < \lambda < 100 \text{ мкм}$ можно аппроксимировать выражением $\alpha_H(\lambda) \approx 0,44\lambda^{-1/2}$. Допустим, что нам нужно определить внешнюю полусферическую степень черноты при 300 К, внутреннюю интегральную полусферическую степень черноты при 300 К и интегральную полусферическую поглощательную способность для источника, представляющего собой черное тело при 1000 К. Таблица 1 построена по данным, взятым из табл. 1 § 2.9.1, и приведенным значениям $\alpha_H(\lambda)$. Имеем $\varepsilon_{TH} = 0,120$, $\varepsilon_{TH} = 0,135$, $\alpha_{TH} = 0,219$.

С. Измерение поглощательной и излучательной характеристик. Как следует из предыдущего, можно измерять спектральные или интегральные и(или) направленные или полусферические степень черноты и поглощательную способность, а также внутренние или внешние интегральные величины.

Когда необходимо знать спектральные значения при высоких T_s , обычно измеряют спектральную направленную степень черноты, помещая нагретый образец в низкотемпературную полость и сравнивая интенсивность I_{λ}^+ образца со значением $I_{b\lambda}$ из полости, излучающей при температуре T_s . Когда нужно знать спектральные значения при умеренных или низких T_s , обычно определяют спектральную направленную отражательную способность $\rho(\theta, \varphi, \lambda, T_s)$ и путем вычитания из единицы (для непрозрачных образцов) находят степень черноты $\varepsilon(\theta, \varphi, \lambda, T_s) = \alpha(\theta, \varphi, \lambda, T_s) = 1 - \rho(\theta, \varphi, \lambda, T_s)$. (11)

Для прозрачных образцов измеряют отражательную и пропускательную способности, а поглощательную способность определяют вычитанием из единицы. Для спектральных измерений используют фильтр, призму, спектрометр с дифракционной решеткой или интерферометр. Прибор обычно помещают так, чтобы образец был виден под малым телесным углом в окрестности θ и φ , что дает возможность получить направленные значения. Возможно, однако, использование полу-

Таблица 1. Пример расчета интегральной степени черноты и поглощательной способности

Прираще- ние доли интеграль- ного излу- чения чер- ного тела	Внешняя интегральная степень черноты при 300 К				Внутренняя интегральная степень черноты при 300 К				Интегральная поглощательная спо- собность при температуре источника 1000 К			
	λT_s , см·К	λ , мкм	α_H	$\alpha_H \Delta f_e$	λT_s , см·К	λ , мкм	α_H	$\alpha_H \Delta f_i$	λT_e , см·К	λ , мкм	α_H	$\alpha_H \Delta f_e$
0,005	0,1230	4,10	0,217	0,0011	0,1073	3,58	0,233	0,0012	0,1230	1,23	0,397	0,0020
0,005	0,1395	4,65	0,204	0,0010	0,1209	4,03	0,219	0,0011	0,1395	1,40	0,373	0,0019
0,005	0,1495	4,98	0,197	0,0010	0,1291	4,30	0,212	0,0011	0,1495	1,50	0,360	0,0018
0,005	0,1573	5,24	0,192	0,0010	0,1352	4,51	0,207	0,0010	0,1573	1,57	0,351	0,0018
0,01	0,1662	5,54	0,187	0,0019	0,1423	4,74	0,202	0,0020	0,1662	1,66	0,341	0,0034
0,01	0,1762	5,87	0,182	0,0018	0,1501	5,00	0,197	0,0020	0,1762	1,76	0,332	0,0033
0,01	0,1848	6,16	0,177	0,0018	0,1565	5,22	0,193	0,0019	0,1848	1,85	0,323	0,0032
0,01	0,1922	6,41	0,174	0,0017	0,1625	5,42	0,189	0,0019	0,1922	1,92	0,317	0,0032
0,02	0,202	6,73	0,170	0,0034	0,1701	5,67	0,185	0,0037	0,202	2,02	0,310	0,0062
0,02	0,214	7,13	0,165	0,0033	0,1791	5,97	0,180	0,0036	0,214	2,14	0,301	0,0060
0,02	0,225	7,50	0,161	0,0032	0,1874	6,25	0,176	0,0035	0,225	2,25	0,293	0,0059
0,02	0,235	7,83	0,157	0,0031	0,1949	6,50	0,173	0,0035	0,235	2,35	0,287	0,0057
0,02	0,245	8,17	0,154	0,0031	0,202	6,73	0,170	0,0034	0,245	2,45	0,281	0,0056
0,02	0,254	8,47	0,151	0,0030	0,209	6,97	0,167	0,0033	0,254	2,54	0,276	0,0055
0,02	0,263	8,77	0,149	0,0030	0,216	7,20	0,164	0,0033	0,263	2,63	0,271	0,0054
0,02	0,272	9,07	0,146	0,0029	0,222	7,40	0,162	0,0032	0,272	2,72	0,267	0,0053
0,02	0,281	9,37	0,144	0,0029	0,229	7,63	0,159	0,0032	0,281	2,81	0,262	0,0052
0,02	0,290	9,67	0,142	0,0028	0,235	7,83	0,157	0,0031	0,290	2,90	0,258	0,0052
0,02	0,299	9,97	0,139	0,0028	0,242	8,07	0,155	0,0031	0,299	2,99	0,255	0,0051
0,02	0,308	10,3	0,137	0,0027	0,248	8,27	0,153	0,0031	0,308	3,08	0,251	0,0050
0,02	0,317	10,6	0,135	0,0027	0,255	8,50	0,151	0,0030	0,317	3,17	0,247	0,0049
0,02	0,326	10,9	0,134	0,0027	0,261	8,70	0,149	0,0030	0,326	3,26	0,244	0,0049
0,02	0,335	11,2	0,132	0,0026	0,268	8,93	0,147	0,0029	0,335	3,35	0,240	0,0048
0,02	0,344	11,5	0,130	0,0026	0,275	9,17	0,145	0,0029	0,344	3,44	0,237	0,0047
0,02	0,353	11,8	0,128	0,0026	0,281	9,37	0,144	0,0029	0,353	3,53	0,234	0,0047
0,02	0,363	12,1	0,127	0,0025	0,288	9,60	0,142	0,0028	0,363	3,63	0,231	0,0046
0,02	0,373	12,4	0,125	0,0025	0,295	9,83	0,140	0,0028	0,373	3,73	0,228	0,0046
0,02	0,384	12,8	0,123	0,0025	0,303	10,1	0,138	0,0028	0,384	3,84	0,225	0,0045
0,02	0,394	13,1	0,121	0,0024	0,310	10,3	0,137	0,0027	0,394	3,94	0,222	0,0044
0,02	0,405	13,5	0,120	0,0024	0,318	10,6	0,135	0,0027	0,405	4,05	0,219	0,0044
0,02	0,416	13,9	0,118	0,0024	0,326	10,9	0,134	0,0027	0,416	4,16	0,216	0,0043
0,02	0,428	14,3	0,117	0,0023	0,334	11,1	0,132	0,0026	0,428	4,28	0,213	0,0043
0,02	0,440	14,7	0,115	0,0023	0,342	11,4	0,130	0,0026	0,440	4,40	0,210	0,0042
0,02	0,453	15,1	0,113	0,0023	0,351	11,7	0,129	0,0026	0,453	4,53	0,207	0,0041
0,02	0,467	15,7	0,112	0,0022	0,361	12,0	0,127	0,0025	0,467	4,67	0,204	0,0041
0,02	0,482	16,1	0,110	0,0022	0,371	12,4	0,125	0,0025	0,482	4,82	0,200	0,0040
0,02	0,497	16,6	0,108	0,0022	0,382	12,7	0,123	0,0025	0,497	4,97	0,197	0,0039
0,02	0,513	17,1	0,106	0,0021	0,393	13,1	0,122	0,0024	0,513	5,13	0,194	0,0039
0,02	0,531	17,7	0,105	0,0021	0,405	13,5	0,120	0,0024	0,531	5,31	0,191	0,0038
0,02	0,550	18,3	0,103	0,0021	0,417	13,9	0,118	0,0024	0,550	5,50	0,188	0,0038
0,02	0,570	19,0	0,101	0,0020	0,430	14,3	0,116	0,0023	0,570	5,70	0,184	0,0037
0,02	0,593	19,8	0,099	0,0020	0,446	14,9	0,114	0,0023	0,593	5,93	0,181	0,0036
0,02	0,616	20,5	0,097	0,0019	0,462	15,4	0,112	0,0022	0,616	6,16	0,177	0,0035
0,02	0,642	21,4	0,095	0,0019	0,479	16,0	0,110	0,0022	0,642	6,42	0,174	0,0035
0,02	0,671	22,4	0,093	0,0019	0,498	16,6	0,108	0,0022	0,671	6,71	0,170	0,0034
0,02	0,704	23,5	0,091	0,0018	0,521	17,4	0,106	0,0021	0,704	7,04	0,166	0,0033
0,02	0,741	24,7	0,089	0,0018	0,546	18,2	0,103	0,0021	0,741	7,41	0,162	0,0032
0,02	0,783	26,1	0,086	0,0017	0,574	19,1	0,101	0,0020	0,783	7,83	0,157	0,0031
0,02	0,825	27,5	0,084	0,0017	0,609	20,3	0,098	0,0020	0,825	8,25	0,153	0,0031
0,02	0,899	30,0	0,080	0,0016	0,653	21,8	0,094	0,0019	0,899	8,99	0,147	0,0029
0,02	0,982	32,7	0,077	0,0015	0,690	23,0	0,092	0,0018	0,982	9,82	0,140	0,0028
0,02	1,090	36,3	0,073	0,0015	0,774	25,8	0,087	0,0017	1,090	10,9	0,133	0,0027
0,01	1,200	40,0	0,070	0,0007	0,846	28,2	0,083	0,0008	1,200	12,0	0,127	0,0013
0,01	1,298	43,3	0,067	0,0007	0,909	30,3	0,080	0,0008	1,298	13,0	0,122	0,0012
0,01	1,433	47,8	0,064	0,0006	0,997	33,2	0,076	0,0008	1,433	14,3	0,116	0,0012
0,01	1,63	54,3	0,060	0,0006	1,123	37,4	0,072	0,0007	1,63	16,3	0,109	0,0011
0,05	1,87	62,3	0,056	0,0003	1,28	42,7	0,067	0,0003	1,87	18,7	0,102	0,0005
0,05	2,22	74,0	0,051	0,0003	1,43	47,7	0,064	0,0003	2,22	22,2	0,093	0,0005
0,05	2,56	85,3	0,048	0,0002	1,70	56,7	0,059	0,0003	2,56	25,6	0,087	0,0004
0,05	7,34	245,0	0,028	0,0001	2,49	83,0	0,048	0,0002	7,34	73,7	0,051	0,0003
				0,120				0,135				0,219

сферических образцов, при этом непосредственно измеряют полусферические величины.

Для измерения интегральной степени черноты можно использовать детектор, который воспринимает весь падающий на него радиационный тепловой поток. Можно наблюдать плоский или полусферический образец, можно также проводить калориметрические измерения, нагревая образец, помещенный в низкотемпературную полость. Подобным образом можно проводить и калориметрические измерения поглотительной способности, облучая образец высокотемпературным излучением черного тела.

Следует отметить, что лабораторные измерения степени черноты не соответствуют в точности ни внешней интегральной степени черноты, определяемой выражениями (5) или (7), ни внутренней интегральной степени черноты, определяемой соотношениями (9) или (10), если температура окружающей образец среды T_e не очень сильно отличается и не очень близка к температуре образца T_s . Лабораторное измерение обычно дает

$$\alpha_{ОН}(T_s, T_e) = \int_0^\infty \alpha_H(\lambda, T_s) [\pi I_{b\lambda}(\lambda, T_s) - \pi I_{b\lambda}(\lambda, T_e)] d\lambda / (C_s T_s^4 - C_s T_e^4). \quad (12)$$

Это выражение аппроксимирует (5), только когда величина T_e очень мала по сравнению с T_s ; оно аппроксимирует (9), только когда T_e очень близка к T_s . По этой причине, а также по другим причинам, которые будут разъяснены в последующих пунктах, наряду с интегральными данными (или даже вместо них) желательно иметь данные спектральных измерений.

Д. Отражательные и пропускательные характеристики. Часто нужно знать, какая часть плотности падающего на стенку потока излучения q^- дает вклад в плотность эффективного потока q^+ на одной или другой стороне стенки. Часть, относящаяся к облучаемой стороне стенки, называется отражательной способностью, а относящаяся к другой стороне, — пропускательной способностью. Очевидно, что эти величины являются свойствами материала и структуры стенки, ее термодинамического состояния, а также распределения падающего излучения по спектру и направлениям. Термины «спектральная» и «интегральная» употребляются по отношению к отражательной и пропускательной способностям в том же значении, как и по отношению к поглотительной способности. Тот же смысл, что и выше, имеют термины «направленная» и «полусферическая». Соответственно спектральной направленной отражательной способностью называется отраженная часть плотности эффективного потока излучения q_R^+ , отнесенная к спектральной плотности падающего потока $I^- \cos \theta - \Delta\Omega^-$:

$$\rho_\lambda(\theta, \varphi^-, \lambda, T_s) = \frac{q_R^+}{I_\lambda^-(\theta^-, \varphi^-, \lambda) \cos \theta - \Delta\Omega^-}. \quad (13)$$

Спектральная направленная пропускательная способность $\tau(\theta^-, \varphi^-, \lambda, T_s)$ определяется аналогичным образом, но с дополнительным условием о том, что состояние стенки близко к термодинамически равновесному, характеризуемому температурой T_s . Для стенки, пропускающей излучение, представление о наличии поверхности m (см. рис. 1, § 2.9.1) неприменимо. В приведенных определениях не предусмотрена возможность флуоресценции или флуоресценции.

Отметим, что приведенные направленные характеристики не содержат информации о распределении по направлениям отраженной и прошедшей частей падающего потока. Если нужно знать не просто отраженную часть плотности эффективного потока q_R^+ , а ее интенсивность I_R^+ , требуется характеристика, зависящая не только от

направления падения θ^- , φ^- , но и от направления отражения θ^+ , φ^+ . Для полностью диффузной поверхности, конечно, выполняется соотношение $q_R^+ = \pi I_R^+$. Соответственно спектральную двунаправленную отражательную способность определим следующим образом:

$$\rho_{BL}(\theta^+, \varphi^+, \theta^-, \varphi^-, \lambda, T_s) = \frac{\pi I_R^+(\theta^+, \varphi^+, \lambda)}{I^-(\theta^-, \varphi^-, \lambda) \cos \theta - \Delta\Omega^-}. \quad (14)$$

Эта величина на практике применяется, главным образом, при конструировании приборов, для определения их свойств и изучения принципа их действия. Она используется также в термометрии и для дальнего обнаружения (путем регистрации теплового излучения).

Рассматривая перенос излучения от черной поверхности с температурой T_1 к другой черной поверхности с температурой T_2 путем отражения от нечерной поверхности с температурой T_s и перенос от 2 к 1 по тому же пути, устремляя затем T_1 к T_2 и применяя принцип детального баланса, получаем соотношение, называемое принципом обратимости Гельмгольца:

$$\rho_{BL}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \lambda, T_s) = \rho_{BL}(\theta_2, \varphi_2, \theta_1, \varphi_1, \lambda, T_s). \quad (15)$$

Принцип обратимости имеет важные следствия при конструировании и применении приборов. Его необходимо учитывать при построении математических моделей двунаправленного отражения поверхности.

При полностью диффузном отражении двунаправленная отражательная способность не зависит от направления. Для полностью диффузных поверхностей нет различия между полусферической, направленной и двунаправленной отражательными способностями. Все три характеристики имеют одно и то же численное значение. При неполностью диффузном отражении двунаправленная отражательная способность, определяемая соотношением (14), конечно даже в предельном случае $\Delta\Omega^- \rightarrow 0$. В этом случае, как ясно из (13), (14) и соотношения (8) § 2.9.1, направленная отражательная способность

$$\rho_\lambda(\theta^-, \varphi^-, \lambda, T_s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_{BL}(\theta^+, \varphi^+, \theta^-, \varphi^-, \lambda, T_s) \times \times \cos \theta^+ \sin \theta^+ d\theta^+ d\varphi^+, \quad (16)$$

а полусферическая отражательная способность

$$\rho_{H\lambda}(\lambda, T_s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_\lambda(\theta^-, \varphi^-, \lambda, T_s) \cos \theta^- \sin \theta^- d\theta^- d\varphi^-; \quad (17)$$

$$\rho_{H\lambda}(\lambda, T_s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_{BL}(\theta^+, \varphi^+, \theta^-, \varphi^-, \lambda, T_s) \times \times \cos \theta^- \sin \theta^- d\theta^- d\varphi^- \cos \theta^+ \sin \theta^+ d\theta^+ d\varphi^+. \quad (18)$$

Зеркальное отражение дает интенсивность отраженного излучения, полностью заключенную в телесном угле $\Delta\Omega^+$ вокруг направления отражения θ^+ , φ^+ , который равен телесному углу $\Delta\Omega^-$ вокруг направления падения θ^- , φ^- , где $\theta^+ = \theta^-$, $\varphi^+ = \varphi^- + \pi$ (при измерении φ^+ и φ^- относительно одной и той же оси x , как показано на рис. 2, § 2.9.1). Интенсивность отраженного излучения I_R^+ есть доля интенсивности падающего излучения I^- , определяемая зеркальной отражательной способностью,

$$\rho_s(\theta^-, \varphi^-, \lambda, T_s) = I_R^+ / I_\lambda^-. \quad (19)$$

Это определение в точности соответствует уравнению (13) вследствие равенства $\cos \theta^+ \Delta\Omega^+$ и $\cos \theta^- \Delta\Omega^-$. Для

полусферической отражательной способности применительно также и уравнение (17).

Е. Измерение отражательных и пропускательных характеристик. Приведем кратко несколько соображений относительно измерения отражательных и пропускательных характеристик, чтобы дать конструктору представление об обычно используемых методах измерений.

Одно общее соображение касается возможности отличать отраженное или прошедшее излучение от испускаемого. Может оказаться, что значения $I_b(\lambda, T_s)$ очень мало из-за малости температуры T_s , и им можно пренебречь по сравнению с интенсивностями падающего или отраженного излучения. Если условие малости $I_b(\lambda, T_s)$ не выполняется, то можно использовать отсечку падающего излучения. Падающий поток $I - \cos \theta - \Delta\Omega$ периодически прерывается или модулируется и производится обработка сигнала детектора так, чтобы регистрировалось только излучение, находящееся в фазе с падающим. Тем самым тепловое излучение, которое постоянно во времени, исключается. Правильность синхронизации прерывателя и детектора проверяют, изменяя температуру образца. В отсутствие облучения регистрируемый сигнал (нулевой) не должен зависеть от температуры образца.

При измерении направленной отражательной (или) пропускательной способности часто бывает намного легче обеспечить однородность падающего излучения (I не должно зависеть от θ и φ), чем добиться однородной регистрации (величина $I + \cos \theta + \Delta\Omega$ должна хорошо регистрироваться независимо от направления). Использование принципа обратимости Гельмгольца позволяет поменять индексы плюс и минус у углов в выражении (16) и тем самым наблюдать $I_{R\lambda}^+(\theta^+, \varphi^+, \lambda)$ и сравнивать ее с однородной интенсивностью I_{λ}^- . Наблюдаемая величина (которую согласно [27] можно назвать полусферически-направленной отражательной способностью) идентична направленной (или полусферически-направленной), определяемой уравнением (13). Это обстоятельство лежит в основе принципа действия рефлектометров с нагреваемой полостью [12–15], с зеркальной полусферой [18–23] и с интегрирующей сферой [8–10].

Например, в рефлектометре с нагреваемой полостью [12, 15] охлаждаемый водой или газом образец помещают в полость, стенки которой поддерживают при температуре $T_c = 1000$ К. Падающий на образец поток излучения имеет, следовательно, однородную интенсивность $I_{b\lambda}(T_c)$, за исключением малого телесного угла, определяемого размером смотрового отверстия (рис. 1). Смотровое отверстие позволяет измерять интенсивность излучения образца в небольшом телесном угле $\Delta\Omega$ вокруг направления θ, φ . Определяется разность регистрируемых детектором сигналов V_s от образца и V_0 от полости, имеющей температуру стенок, равную температуре образца T_s . Для этого используется прерыватель с зеркальным ножом, направляющим в детектор излучение полости с температурой T_s . Затем образец заменяется платиновой пластинкой, имеющей температуру T_c , и измеряется сигнал $V_r - V_0$, соответствующий разности интенсивностей $I_{b\lambda}(T_c) - I_{b\lambda}(T_s)$. Имеем

$$\frac{V_s - V_0}{V_r - V_0} = \frac{I_{s\lambda}^+ - I_{b\lambda}(T_s)}{I_{b\lambda}(T_c) - I_{b\lambda}(T_s)}.$$

Поскольку

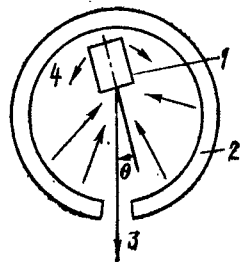
$$I_{s\lambda}^+ = \varepsilon_{\lambda}(\theta, \varphi, \lambda, T_s) I_{b\lambda}(T_s) + \rho_{\lambda}(\theta, \varphi, \lambda, T_s) I_{b\lambda}(T_c) = [1 - \rho_{\lambda}(\theta, \varphi, \lambda, T_s)] I_{b\lambda}(T_s) + \rho_{\lambda}(\theta, \varphi, \lambda, T_s) I_{b\lambda}(T_c),$$

в результате получим

$$\frac{V_s - V_0}{V_r - V_0} = \rho_{\lambda}(\theta, \varphi, \lambda, T_s) \frac{I_{b\lambda}(T_c) - I_{b\lambda}(T_s)}{I_{b\lambda}(T_c) - I_{b\lambda}(T_s)} = \rho_{\lambda}(\theta, \varphi, \lambda, T_s). \quad (20)$$

Рис. 1. Рефлектометр с нагреваемой полостью:

1 — охлаждаемый водой или газом образец во вращающемся держателе; 2 — изотермическая горячая стенка; 3 — излучение, отраженное в направлении детектора; 4 — падающее излучение



Когда полностью зеркальный образец ориентирован под углом $\theta = 0^\circ$, в поле зрения оказывается выходное отверстие. Если оно направлено на область, имеющую температуру T_s , то величине $V_s - V_0$ соответствует сигнал, равный нулю. Когда полностью диффузный образец повернут в сторону выходного отверстия (при $\theta = 0$), детектор не фиксирует изменений. Вклад излучения, падающего на образец из выходного отверстия, меняется как $\cos \theta$, который при θ , близких к нулю, примерно равен единице. Таким образом, малое изменение в потоке излучения, падающего на диффузный образец, не детектируется.

В рефлектометре с зеркальной полусферой [18–23] образец однородно облучается излучением полости (или любого источника, имеющего непрерывный спектр), отраженным от зеркала. В рефлектометре с интегрирующей сферой [8–10] диффузное облучение образца достигается путем отражения излучения источника от обладающей высокой отражательной способностью диффузной поверхности сферы. Многократные отражения внутри сферы

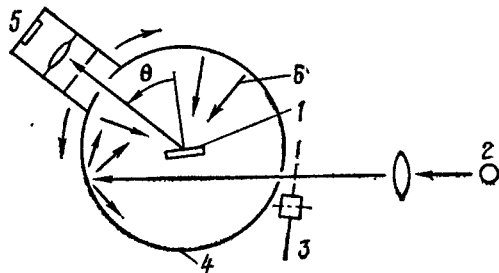


Рис. 2. Рефлектометр с интегрирующей сферой (источник и входное отверстие для ясности показаны повернутыми на 90° и смещенными вниз):

1 — образец (горизонтальный); 2 — источник; 3 — вращающийся прерыватель; 4 — диффузно отражающая стенка; 5 — детектор (вращающийся со сферой); 6 — падающее излучение

сглаживают неоднородности в потоке излучения источника, падающего на сферическую поверхность. В этих приборах легко достигается прерывание излучения источника (рис. 2).

Г. Электромагнитная теория и соотношения Френеля. В классическом пределе поток фотонов образует непрерывную электромагнитную волну с напряженностями электрического поля E и магнитного поля H . Значения напряженностей полей подчиняются уравнениям Максвелла и соотношениям, характеризующим электрические и магнитные свойства изотропной среды. Электромагнитная теория дает описание зеркального отражения от гладкой границы раздела сред или набора таких границ, образующего поверхностный слой.

Уравнения Максвелла и соотношения, характеризующие свойства среды, имеют следующий вид [34]:

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}; \quad (24)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e; \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (24)$$

$$\mathbf{j} = \sigma_e \mathbf{E}; \quad (25)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_e \mathbf{E}; \quad (26)$$

$$\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}, \quad (27)$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция; $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока; $\mathbf{D}$ — электрическая индукция; ρ_e — плотность электрического заряда; σ_e — электропроводность; ϵ_e — диэлектрическая проницаемость; μ_m — магнитная проницаемость. Скорость света в вакууме (обозначаемая индексом 0) равна:

$$c_0^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0. \quad (28)$$

Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляют собой действительные части периодических переменных

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z) e^{i\omega t}]; \quad (29)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \text{Re} [\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z) e^{i\omega t}], \quad (30)$$

где волнистой линией обозначены комплексные величины, и $\omega = 2\pi c_0/\lambda_0$.

Условие электронейтральности требует, чтобы $\rho_e = 0$.

Уравнения (21) — (27) приводят к системе не зависящих от времени уравнений

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega \mu_m \tilde{\mathbf{H}}; \quad (33)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = (\sigma_e + i\omega \epsilon_e) \tilde{\mathbf{E}}, \quad (34)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0; \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0. \quad (36)$$

Применяя операцию ротора к обеим частям уравнения (33) и исключая $\tilde{\mathbf{H}}$ с помощью (34), получаем

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega \mu_m (\sigma_e + i\omega \epsilon_e) \tilde{\mathbf{E}}; \quad (37)$$

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega^2 \mu_m \tilde{\epsilon}_e \tilde{\mathbf{E}},$$

где

$$\tilde{\epsilon}_e = \epsilon_e - i\sigma_e/\omega. \quad (38)$$

Учитывая тождества

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}$$

и используя (35), получаем

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\omega^2 \mu_m \tilde{\epsilon}_e \tilde{\mathbf{E}}. \quad (39)$$

Обезразмерим длины с помощью масштаба ω/c_0 и обозначим безразмерные величины индексом d . Тогда уравнение (39) примет вид

$$\nabla_d^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\tilde{n}^2 \tilde{\mathbf{E}}, \quad (40)$$

где $\tilde{n}$ — комплексный показатель преломления:

$$\tilde{n}^2 = \left(\frac{\mu_m}{\mu_0} \right) \left(\frac{\tilde{\epsilon}_e}{\epsilon_0} \right) = (n - ik)^2. \quad (41)$$

Показатели преломления n и поглощения k представляют собой оптические постоянные среды. Они в общем случае зависят от длины волны или частоты излучения. Отметим, что в вакууме $n=1$ и $k=0$. Вещество с $k=0$ имеет в то же время и $\sigma_e=0$, т. е. является диэлектриком.

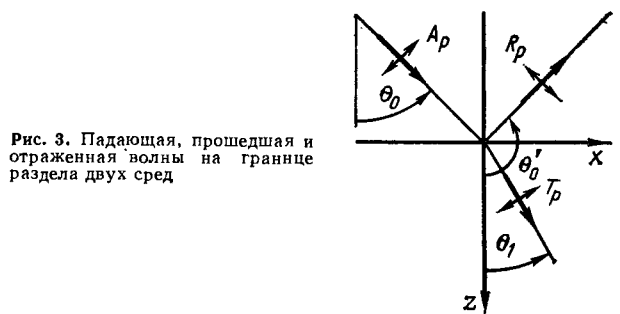


Рис. 3. Падающая, прошедшая и отраженная волны на границе раздела двух сред

Уравнение для $\tilde{\mathbf{E}}$ допускает решение, периодичное в пространстве. Рассмотрим волну в первом квадранте плоскости xz :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial x_d} = -i\tilde{a} \tilde{\mathbf{E}}; \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial y_d} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial z_d} = -i\tilde{b} \tilde{\mathbf{E}}; \quad \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{A} e^{i(\omega t - \tilde{a}x_d - \tilde{b}z_d)}. \quad (42)$$

Уравнение (40) требует выполнения соотношения $\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 = \tilde{n}^2$.

Введем параметр $\tilde{\theta}$ так, чтобы $\tilde{a} = \tilde{n} \sin \tilde{\theta}$; $\tilde{b} = \tilde{n} \cos \tilde{\theta}$.

В результате получим, что уравнения электромагнетизма допускают решение в форме волны

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ \tilde{\mathbf{A}} \exp \{ i(\omega t - \tilde{n} \sin \tilde{\theta} x_d - \tilde{n} \cos \tilde{\theta} z_d) \}. \quad (45)$$

Соответствующее значение магнитного поля определяется с помощью уравнений (30) и (34).

Поток энергии электромагнитной волны в единицу времени через единичную площадку в направлении единичного вектора $\mathbf{r}$ задается выражением

$$I d\Omega r = \frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* + \tilde{\mathbf{E}}^* \times \tilde{\mathbf{H}}) = \frac{1}{2} \text{Re} (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*), \quad (46)$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину, т. е. если $\tilde{z} = x + iy$, то $\tilde{z}^* = x - iy$.

Для того чтобы определить отражательную способность границы раздела сред, нужно потребовать выполнения на ней определенных граничных условий. Это условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей полей и нормальной составляющей магнитной индукции, а также условие сохранения электрического заряда. Пусть граница раздела имеет нормаль $\mathbf{N}$, а индексы 1 и 2 обозначают величины по обе стороны от границы. Имеем

$$\mathbf{N} \times (\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1) = 0; \quad (47)$$

$$\mathbf{N} \times (\tilde{\mathbf{H}}_2 - \tilde{\mathbf{H}}_1) = 0; \quad (48)$$

$$\mathbf{N} \cdot (\tilde{\mathbf{B}}_2 - \tilde{\mathbf{B}}_1) = 0; \quad (49)$$

$$\mathbf{N} \cdot (\tilde{\mathbf{j}}_2 - \tilde{\mathbf{j}}_1) = -\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{N} \cdot (\tilde{\mathbf{D}}_2 - \tilde{\mathbf{D}}_1)]. \quad (50)$$

Рассмотрим волну с амплитудой $\mathbf{A}$ (рис. 3), падающую из вакуума (среда 0) на границу раздела со средой 1. Вектор $\tilde{\mathbf{A}}$ разложим на составляющие: параллельную (индекс s) и перпендикулярную (индекс p) плоскости падения (определяемой лучом распространения волны $\mathbf{r}$ и нормалью к поверхности). Пусть лучу, отраженному от границы раздела, соответствуют амплитуда $\tilde{\mathbf{R}}$ и угол θ_0 , а лучу, прошедшему в среду 1, — амплитуда $\tilde{\mathbf{T}}$ и угол θ_1 .

Граничные условия (47) — (50) дают шесть соотношений между параметрами. Два из них известны под названием закона Снелла:

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1; \quad (51)$$

$$\cos \theta_0 = -\cos \theta_1. \quad (52)$$

Остальные четыре приводят к соотношениям Френеля (при дополнительном предположении $\mu_1 = \mu_0$)

$$\tilde{r}_{p,0-1} = \frac{\tilde{R}_p}{\tilde{A}_p} = \frac{\tilde{n}_1 \cos \theta_0 - n_0 \cos \theta_1}{\tilde{n}_1 \cos \theta_0 + n_0 \cos \theta_1}; \quad (53)$$

$$\tilde{t}_{p,0-1} = \frac{\tilde{T}_p}{\tilde{A}_p} = \frac{2n_0 \cos \theta_0}{\tilde{n}_1 \cos \theta_0 + n_0 \cos \theta_1}; \quad (54)$$

$$\tilde{r}_{s,0-1} = \frac{\tilde{R}_s}{\tilde{A}_s} = \frac{n_0 \cos \theta_0 - \tilde{n}_1 \cos \theta_1}{n_0 \cos \theta_0 + \tilde{n}_1 \cos \theta_1}; \quad (55)$$

$$\tilde{t}_{s,0-1} = \frac{\tilde{T}_s}{\tilde{A}_s} = \frac{2n_0 \cos \theta_0}{n_0 \cos \theta_0 + \tilde{n}_1 \cos \theta_1}. \quad (56)$$

Если имеется еще одна граница раздела сред, то соответствующий ей набор соотношений получается заменой индекса 0 на 1, а 1 на 2, при этом n_0 заменяют на $\tilde{n}_1$, а $\cos \theta_0$ — на $\cos \theta_1$.

Из уравнения (46) получаем, что плотность потока энергии в падающей волне

$$I^- d\Omega = (I_p^- + I_s^-) d\Omega; \quad (57)$$

$$I_p^- \cos \theta_0 d\Omega = \frac{n_0}{\mu_0 c_0} \cos \theta_0 A_p^2; \quad (58)$$

$$I_s^- \cos \theta_0 d\Omega = \frac{n_0}{\mu_0 c_0} \cos \theta_0 A_s^2. \quad (59)$$

Плотность потока энергии в отраженной волне I_R^+ также представляет собой сумму двух слагаемых:

$$I_R^+ = I_R^+, p + I_R^+, s. \quad (60)$$

Коэффициенты отражения ρ_p и ρ_s можно определить следующим образом:

$$\rho_p = \frac{I_R^+, p}{I_p^-} = \frac{(n_0/\mu_0 c_0) |\cos \theta_0| \tilde{R}_p \tilde{R}_p^*}{(n_0/\mu_0 c_0) \cos \theta_0 A_p^2} = \tilde{r}_p \tilde{r}_p^*; \quad (61a)$$

$$\rho_s = \frac{I_R^+, s}{I_s^-} = \tilde{r}_s \tilde{r}_s^*, \quad (61b)$$

где индексы 0 и 1 опущены для упрощения записи. Аналогично, для отношения потоков энергии в прошедшей и падающей волне получаем

$$\tau_p = \text{Re} \left(\frac{\tilde{n}^* \cos \theta_1 \tilde{t}_p \tilde{t}_p^*}{n_0 \cos \theta_0} \right); \quad (62a)$$

$$\tau_s = \text{Re} \left(\frac{\tilde{n}^* \cos \theta_1 \tilde{t}_s \tilde{t}_s^*}{n_0 \cos \theta_0} \right). \quad (62b)$$

Отметим различие в членах $\cos \theta_1$ и $\cos \theta_1^*$.

Поскольку сама по себе граница раздела является бесконечно тонкой, она не поглощает, и $\tau_p = 1 - \rho_p$ и $\tau_s = 1 - \rho_s$. Однако если среда 1 поглощает и имеет бесконечную протяженность, то прошедшее излучение в конечном счете поглощается средой; значения τ_p и τ_s границы раздела становятся значениями α_p и α_s системы поверхностей.

В [2] получены коэффициенты Френеля $\tilde{r}_{0-2}$ и т. д. для поверхностного слоя, образованного двумя границами раздела (0—1 и 1—2), отстоящими одна от другой на расстоянии δ_1 . Аналогичным образом путем последователь-

ного использования формул можно получать величины $\tilde{r}_{0-n}$. Вначале путем комбинации коэффициентов Френеля 0—1 и 1—2 получаем коэффициенты 0—2. Затем заменяем коэффициенты 0—1 на 0—2, а 1—2 на 2—3 и получаем коэффициенты 0—3 и т. д. Формулы для $\tilde{r}_{p,0-2}$ и $\tilde{t}_{p,0-2}$ имеют вид

$$\tilde{r}_{p,0-2} = \tilde{r}_{p,0-1} + \frac{\tilde{m}_1^2 \tilde{t}_{p,0-1} \tilde{r}_{p,1-2} \tilde{t}_{p,1-0}}{1 - \tilde{m}_1^2 \tilde{r}_{p,1-2} \tilde{r}_{p,1-0}}; \quad (63a)$$

$$\tilde{t}_{p,0-2} = \frac{\tilde{t}_{p,0-1} \tilde{m}_1^2 \tilde{t}_{p,1-2}}{1 - \tilde{m}_1^2 \tilde{r}_{p,1-2} \tilde{r}_{p,1-0}}; \quad (63b)$$

где

$$\tilde{m}_1^2 = \exp(-i4\pi \tilde{n}_1 \cos \theta_1 \delta_1 / \lambda_0). \quad (64)$$

Соотношения для s-поляризованного излучения находят из приведенных выше выражений заменой индекса p на s . Значения ρ_p и ρ_s для системы 0—2 можно получить подстановкой (63a) и соответствующего соотношения для s-волны в формулы (61a) и (61b).

Важную роль играет интерференция. При некотором значении отношения δ_1/λ_0 величина ρ_p максимальна. Путем создания набора тонких пленок с подходящими оптическими свойствами n и k и толщинами δ можно получить высококачественные зеркала. При некотором другом значении отношения δ_1/λ_0 отражение минимально. Таким способом можно получить сильно поглощающие или излучающие поверхности. Именно так устроены поглощающие поверхности для коллекторов солнечного излучения, а также просветляющие покрытия для стекол.

Когда толщина поверхностного слоя значительно больше длины волны, небольшие изменения толщины слоя или длины волны приводят вследствие интерференции к сильному изменению отражательной способности. Конструктору следует использовать значения ρ_p и ρ_s , усредненные по длине волны или толщине [2].

Г. Некоторые полезные аппроксимации. Принимая различные аппроксимации для оптических свойств, из полученных выше выражений можно получить много полезных соотношений. Так, для некоторых диэлектриков и полупроводников в значительной области спектра показатель преломления n можно считать константой, а показатель поглощения k — малым. Далее, при нормальном падении $\cos \theta_0 = 1$, а $\sin \theta_0 = 0$. Уравнения (61a), (61b) вместе с (53) и (55) дают в этом случае

$$\rho_p(\theta=0) = \rho_s(\theta=0) = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2. \quad (65)$$

Когда k мало, система поверхностей, чтобы быть непрозрачной, должна иметь достаточно большую толщину. В этом случае для поглощательной способности, а следовательно, и для степени черноты имеем

$$\alpha(\theta=0) = 1 - \rho(\theta=0) = 4n/(n+1)^2. \quad (66)$$

Это соотношение показывает, что поглощательная способность равна единице при $n=1$ и падает с ростом n .

Для неполяризованного падающего излучения $I_p = I_s = I/2$ и

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2}[\rho_p(\theta) + \rho_s(\theta)]; \quad (67)$$

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{2}[\alpha_p(\theta) + \alpha_s(\theta)]. \quad (68)$$

Полусферическую поглощательную способность можно получить из (4) с использованием соотношений (51), (53), (55), (61a), (61b), (68) для направленных величин. На рис. 4 [36] приведена зависимость $\alpha_H/\alpha(\theta=0)$ для диэлектриков.

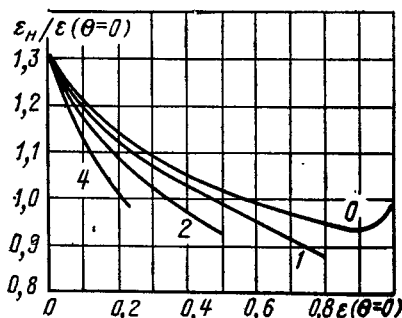


Рис. 4. Зависимость отношения полусферической степени черноты к нормальной от нормальной степени черноты и отношения k/n [36]

На рис. 4 приведены также значения указанного отношения для проводников при различных значениях параметра k/n . Использована аппроксимация $\cos \theta \approx 1$, поскольку n и k в уравнении (51) имеют большое значение. В этом случае

$$\rho_p(\theta) \approx \frac{(n \cos \theta_0 - 1)^2 + k^2 \cos^2 \theta_0}{(n \cos \theta_0 + 1)^2 + k^2 \cos^2 \theta_0}; \quad (69)$$

$$\rho_s(\theta) \approx \frac{(\cos \theta_0 - n)^2 + k^2}{(\cos \theta_0 + n)^2 + k^2}. \quad (70)$$

При нормальном падении

$$\rho(\theta=0) = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}; \quad (71)$$

$$\alpha(\theta=0) = \frac{4n}{(n+1)^2 + k^2}. \quad (72)$$

Эти соотношения вместе с уравнением (4) использованы для построения кривых, приведенных на рис. 4.

Соотношение Хагена — Рубенса, приближенно описывающее оптические свойства некоторых сплавов металлов, связывает оптические константы n и k с удельным электрическим сопротивлением r_e [35]

$$n = k = \left(\frac{30\lambda}{r_e} \right)^{1/2}. \quad (73)$$

Подставляя это соотношение в (72), при $n \gg 1$ получаем

$$\alpha_\lambda(\theta=0, \lambda, T_s) = 2/n = (2r_e/(15\lambda))^{1/2}. \quad (74)$$

Удельное электрическое сопротивление r_e зависит от температуры. Часто r_e растет пропорционально абсолютной температуре, при этом

$$\alpha_\lambda(\theta=0, \lambda, T_s) = C (T_s/\lambda)^{1/2}, \quad (75)$$

где

$$C = \left[\frac{2r_e(T_0)}{15T_0} \right]^{1/2}. \quad (76)$$

Для интегральной поглощательной способности при температуре окружающей среды T_e имеем

$$\alpha_T(\theta=0, T_s, T_e) = CT_s^{1/2} \int_0^1 \lambda^{-1/2} df_e(\lambda T_e);$$

$$\alpha_T(\theta=0, T_s, T_e) = CT_s^{1/2} T_e^{1/2} \int_0^1 u^{-1/2} df_e(u), \quad (77)$$

где $f_e(u)$ — внешняя доля излучения черного тела. Определенный интеграл равен постоянной величине

$$A_e = \int_0^1 u^{-1/2} df_e(u) = 1/(\lambda_e T_e)^{1/2}, \quad (78)$$

где

$$f_e(\lambda_e T_e) \approx 0,49; \quad \lambda_e T_e \approx 4050 \text{ мкм} \cdot \text{К}. \quad (79)$$

Следовательно,

$$\alpha_T(\theta=0, T_e, T_s) = A_e C (T_s T_e)^{1/2}; \quad (80)$$

$$\varepsilon_T(\theta=0, T_e) = A_e C T_s; \quad (81)$$

$$\varepsilon_{T_i}(\theta=0, T_s) = A_i C T_s, \quad (82)$$

где

$$A_i = \int_0^1 u^{-1/2} df_i(u) = 1/(\lambda_i T_s)^{1/2}; \quad (83)$$

$$f_i(\lambda_i T_s) \approx 0,49, \quad \lambda_i T_s \approx 3180 \text{ мкм} \cdot \text{К}. \quad (84)$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом. Интегральная степень черноты чистого (не сильно окисленного) металлического сплава возрастает пропорционально абсолютной температуре. Внутренняя интегральная степень черноты чистого металлического сплава примерно на одну восьмую больше его внешней интегральной степени черноты. Интегральную поглощательную способность сплава можно определить по его интегральной степени черноты, взяв последнюю при температуре T_e и умножив ее на $(T_s/T_e)^{1/2}$. Интегральную степень черноты или поглощательную способность можно оценить по спектральной кривой, взяв спектральное значение для длины волны, при которой соответствующая доля излучения черного тела составляет 49%.

Все эти результаты относятся к нормальным ($\theta_0=0$) интегральным степени черноты и поглощательной способности. Однако, используя данные, приведенные на рис. 4 для $k/n=1$, можно получить приближенно и полусферические значения (кривая строго соответствует спектральным величинам и только приближенно-интегральным).

Как уже отмечалось выше, формула Хагена — Рубенса хорошо работает только для металлов с большим удельным сопротивлением, обычно для сплавов. Для металлов с малым удельным сопротивлением разработана так называемая двухэлектронная модель [38]. Она дает

$$\alpha_\lambda(\theta=0, \lambda, T_s) = Af(\lambda/\lambda_{12}) + B/(C + \lambda^2), \quad (85)$$

где

$$f\left(\frac{\lambda}{\lambda_{12}}\right) = \left[\frac{(1 + \lambda^2/\lambda_{12}^2)^{1/2} - 1}{\lambda^2/2\lambda_{12}^2} \right]^{1/2} \quad (86)$$

и

$$\lambda_{12}(T_s) = \frac{\lambda_0 r_e(T_0)}{r_e(T_s)}; \quad (87)$$

$$A(T_s) = \frac{A_0 r_e(T_s)}{r_e(T_0)}; \quad (88)$$

$$B(T_s) = B_0 - (C + \lambda_x^2) A(T_s); \quad (89)$$

λ_0, λ_x, C — константы.

В табл. 2 приведены значения параметров для никеля и платины [2, 37, 38], и табл. 3 — для некоторых других металлов при $T_s \approx 300$ К. Принимая во внимание уравнения (77) и (82), получаем приближенные значения интегральной степени черноты и поглощательной способности из спектральной формулы (85), используя среднюю длину волны λ_e для поглощательной способности при температуре окружающей среды T_e , и λ_s для степени черноты при температуре T_s :

$$\alpha_T(\theta=0, T_s, T_e) \approx \alpha_\lambda(\theta=0, \lambda_e, T_s); \quad (90)$$

$$\varepsilon_T(\theta=0, T_s) \approx \alpha_\lambda(\theta=0, \lambda_s, T_s); \quad (91)$$

$$\varepsilon_{T_i}(\theta=0, T_s) \approx \alpha_\lambda(\theta=0, \lambda_i, T_s), \quad (92)$$

где

$$\lambda_e T_e = \lambda_s T_s \approx 4050 \text{ мкм} \cdot \text{К}; \quad \lambda_i T_s \approx 3180 \text{ мкм} \cdot \text{К}.$$

Таблица 2. Температурная зависимость спектральной поглотательной способности и степени черноты для никеля и платины

Параметр 300 К < T < 1400 К	1,5 мкм < λ < 25 мкм	
	Никель	Платина
A ₀	0,029	0,034
B ₀ , мкм ²	1,158	0,577
C, мкм ²	3,3	0,0
T ₀ , К	306	306
n	1,7	0,94
λ ₀ , мкм	5,0	7,0
λ _x , мкм	1,5	1,7

Таблица 3. Параметры, определяющие спектральную поглотательную способность металлов при комнатной температуре

Металл	A	B	C	λ ₁₂
Алюминиевая фольга	0,0165	0,23	8,9	14
Кадмий, 99,99%, катаный	0,054	2,15	3,2	9
Хром, полированное гальваническое покрытие	0,076	1,58	3,9	3
Ниобий, 99,99%, катаный	0,15	0,29	~0	1
Медь, 99,99%, полированная	0,018	0,077	3,2	45
Золото, 99,99%, полированное	0,020	0,056	1,4	45
Индий, 99,99%, обработанный шабрением	0,060	0,24	1,3	6
Инконель x, катаный	0,44	0,036	~0	1
Свинец, 99,99%, обработанный шабрением	0,16	0,39	1,1	4
Марганец, 99,99%, полированный	0,19	4,8	11	8
Молибден, 99,99%	0,033	0,36	~0	7
Никель, 99,99%, полированный	0,029	0,83	2,4	5
Платина, 99,99%, холодный прокат	0,038	0,42	~0	4
Родий, полированное гальваническое покрытие	0,06	1,27	10	6
Серебро, полированное гальваническое покрытие	0,011	0,16	11	70
Нержавеющая сталь-303, обработанная протиркой	~0,71	~0	~0	~0,125
Олово, 99,99%, катаное	0,052	0,56	0,8	7
Титан, полированное гальваническое покрытие	0,13	2,9	8,3	12
Титан, 99,99%, обработанный протиркой	0,09	6,5	15	12
Вольфрам, 99,99%, обработанный протиркой	0,05	0,49	0,3	3
Ванадий, 99,99%, катаный	0,17	0,66	0,93	1
Цинк, 99,9%	0,036	0,26	~0	8
Цирконий, 99,99%, катаный	0,64	4	35	1

Н. Поляризация. Поглотательная способность стенки, определяющая ее радиационный нагрев, зависит не только от свойств стенки, но и от состояния поляризации падающего излучения. Конструктор часто может игнорировать поляризацию и тем не менее получать приемлемую точность в практических ситуациях, когда направления поляризации многократно меняются при внутренних отражениях. Например, в [41, 42] показано, что пропускание квадратного и круглого каналов с зеркальными стенками можно рассчитывать с достаточной точностью, пренебрегая поляризацией, однако при расчете пропускания слоя, заключенного между параллельными зеркальными стенками, поляризацию необходимо учитывать. В приборах, таких, как описанные выше рефлектометры с интегрирующей сферой и нагреваемой полостью, поляризация в оптике может быть источником значительных погрешностей для углов падения, существенно отличающихся от нуля.

В § 2.9.4 описан метод Монте-Карло для построения хода лучей. Если при расчете радиационного теплообмена используется этот метод, то учет поляризации не вызывает затруднений. Тем самым отпадает необходимость и проведения оценки погрешности, связанной с пренебрежением поляризацией. При проведении вычислений указанным методом необходимо определять поглощенную поверхностью долю падающего на нее излучения, уже поляризованного при предыдущих отражениях и прохождении. Свойства поверхности будут рассчитаны с использованием коэффициентов Френеля r_{p_2} и r_{s_2} . Индекс 2 означает p и s направления, определяемые падающим лучом (единичный вектор $\mathbf{r}$ направлен к поверхности) и нормалью к поверхности (вектор $\mathbf{n}$):

$$s_2 = \frac{\mathbf{n} \times (-\mathbf{r})}{|\mathbf{n} \times \mathbf{r}|}; \quad p_2 = s_2 \times \mathbf{r}. \quad (93)$$

Однако поляризация луча известна в терминах направлений p_1 и s_1 , определяемых плоскостью падения предыдущей поверхности. Для того чтобы найти I_{p_2} и I_{s_2} , необходимо преобразовать компоненты вектора $\vec{E}$ из координат p_1, s_1 в координаты p_2, s_2 . Определяя затем компоненты $\vec{H}$ из уравнения (34), с помощью (46) получаем I_{p_2} и I_{s_2} . В общем случае в I_{p_1} и I_{s_1} содержится недостаточно информации о векторе электрического поля. Требуется дополнительная информация о спектральном и временном средних синуса и косинуса сдвига фаз между p_1 и s_1 компонентами вектора $\vec{E}$. Следовательно, нужно ввести еще две величины, а именно третий и четвертый коэффициенты Стокса.

Рассмотрим падающую волну, описываемую формулой (42), где координата x соответствует направлению p_1 , y — направлению s_1 , а ось z совпадает с направлением распространения. Из (33) и (46) следует, что

$$I d\Omega = \frac{1}{4} (\mathbf{k} \cdot \vec{E} \times \vec{H}^* + \mathbf{k} \cdot \vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{n}{2\mu_m c_0} (\vec{A}_p \vec{A}_p^* + \vec{A}_s \vec{A}_s^*). \quad (94)$$

Введем

$$\vec{Z}_p = \left(\frac{n}{2\mu_m c_0 d\Omega} \right)^{1/2} \vec{A}_p; \quad \vec{Z}_s = \left(\frac{n}{2\mu_m c_0 d\Omega} \right)^{1/2} \vec{A}_s. \quad (95a)$$

В общем случае в заданный момент времени существует разность фаз между величинами $\vec{E}_p$ и $\vec{E}_s$ (или $\vec{Z}_p$ и $\vec{Z}_s$), а амплитуды $\vec{E}_p$ и $\vec{E}_s$ различаются;

$$\vec{Z}_{p_1} = \vec{M}_{p_1} e^{i\delta p_1}; \quad \vec{Z}_{s_1} = \vec{M}_{s_1} e^{i\delta s_1}. \quad (95b)$$

Определим I_{p_1} и I_{s_1} следующим образом:

$$I = I_{p_1} + I_{s_1}; \quad I_{p_1} = \langle \tilde{Z}_{p_1} \tilde{Z}_{p_1}^* \rangle; \quad I_{s_1} = \langle \tilde{Z}_{s_1} \tilde{Z}_{s_1}^* \rangle, \quad (96)$$

где угловые скобки означают временное и спектральное усреднение.

Пусть направления p_2 и s_2 отличаются от направлений p_1 и s_1 на угол β :

$$\cos \beta = p_2 \cdot p_1; \quad \sin \beta = p_2 \cdot s_1. \quad (97)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{p_2} &= p_2 \cdot p_1 \tilde{Z}_{p_1} + p_2 \cdot s_1 \tilde{Z}_{s_1} = \cos \beta \tilde{Z}_{p_1} + \sin \beta \tilde{Z}_{s_1}; \\ \tilde{Z}_{s_2} &= s_2 \cdot p_1 \tilde{Z}_{p_1} + s_2 \cdot s_1 \tilde{Z}_{s_1} = -\sin \beta \tilde{Z}_{p_1} + \cos \beta \tilde{Z}_{s_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{p_2} &= \langle \tilde{Z}_{p_2} \tilde{Z}_{p_2}^* \rangle = \\ &= \langle (\cos \beta \tilde{Z}_{p_1} + \sin \beta \tilde{Z}_{s_1}) (\cos \beta \tilde{Z}_{p_1}^* + \sin \beta \tilde{Z}_{s_1}^*) \rangle = \\ &= \cos^2 \beta I_{p_1} + \sin^2 \beta I_{s_1} + \sin \beta \cos \beta \langle \tilde{Z}_{p_1} \tilde{Z}_{s_1}^* + \tilde{Z}_{s_1} \tilde{Z}_{p_1}^* \rangle. \end{aligned}$$

Для того чтобы найти I_{p_2} , кроме I_{p_1} и I_{s_1} нужно знать еще третий коэффициент Стикса

$$I_{u_1} = \langle \tilde{Z}_{p_1} \tilde{Z}_{s_1}^* + \tilde{Z}_{s_1} \tilde{Z}_{p_1}^* \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{Z}_{p_1} \tilde{Z}_{s_1}^* \rangle. \quad (98)$$

Четвертый коэффициент Стикса

$$I_{v_1} = \langle i (\tilde{Z}_{p_1} \tilde{Z}_{s_1} - \tilde{Z}_{s_1} \tilde{Z}_{p_1}^*) \rangle = 2 \operatorname{Im} \langle \tilde{Z}_{p_1} \tilde{Z}_{s_1}^* \rangle. \quad (99)$$

Преобразование набора величин I_{p_1} , I_{s_1} , I_{u_1} , I_{v_1} в набор I_{p_2} , I_{s_2} , I_{u_2} , I_{v_2} представимо в компактной форме в виде произведения матриц

$$\begin{pmatrix} I_{p_2} \\ I_{s_2} \\ I_{u_2} \\ I_{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & 0 \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta & 0 \\ -2 \sin \beta \cos \beta & 2 \sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p_1} \\ I_{s_1} \\ I_{u_1} \\ I_{v_1} \end{pmatrix}. \quad (100)$$

Вследствие хаотичности излучения черного тела имеем $\langle M_p \rangle = \langle M_s \rangle$ и $\langle \cos(\delta_p - \delta_s) \rangle = \langle \sin(\delta_p - \delta_s) \rangle = 0$. Отсюда следует, что для излучения черного тела $\langle \tilde{Z}_p \tilde{Z}_p^* \rangle = \langle \tilde{Z}_s \tilde{Z}_s^* \rangle$ и $\langle \tilde{Z}_p \tilde{Z}_s^* \rangle = \langle \tilde{Z}_s \tilde{Z}_p^* \rangle = 0$, поэтому

$$I_{b,p} = I_{b,s} = \frac{I_b}{2}, \quad I_{b,u} = I_{b,v} = 0. \quad (101)$$

В векторной форме

$$|I_b| = |X_b| |I_b|; \quad (102)$$

$$|X_b| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (103)$$

Интенсивность можно представить с помощью вектора-строки, обозначенного индексом t (от слова транспонированный):

$$|E|^t = |1 \ 1 \ 0 \ 0|; \quad (104)$$

$$I = |E|^t \cdot |I|. \quad (105)$$

После того как найдены компоненты интенсивности в координатах p_2 , s_2 , можно с помощью коэффициентов Френеля вычислить компоненты интенсивности отраженного луча. Обозначим штрихом параметры отраженного

луча и опустим индекс 2:

$$\tilde{Z}_{p'} = \tilde{r}_p \tilde{Z}_p; \quad \tilde{Z}_{s'} = \tilde{r}_s \tilde{Z}_s. \quad (106)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_{p'} &= \langle \tilde{r}_p \tilde{Z}_p \tilde{r}_p^* \tilde{Z}_p^* \rangle = \tilde{r}_p^* \tilde{r}_p \langle \tilde{Z}_p \tilde{Z}_p^* \rangle = \tilde{r}_p^* \tilde{r}_p I_p; \\ I_{u'} &= 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{r}_p \tilde{Z}_p \tilde{r}_s^* \tilde{Z}_s^* \rangle = \\ &= \operatorname{Re} (\tilde{r}_p \tilde{r}_s^*) \operatorname{Re} \langle 2 \tilde{Z}_p \tilde{Z}_s^* \rangle - \operatorname{Im} (\tilde{r}_p \tilde{r}_s^*) \operatorname{Im} \langle 2 \tilde{Z}_p \tilde{Z}_s^* \rangle = \\ &= \operatorname{Re} (\tilde{r}_p \tilde{r}_s^*) I_u - \operatorname{Im} (\tilde{r}_p \tilde{r}_s^*) I_v. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно найти $I_{s'}$ и $I_{v'}$. Вектор-столбец для интенсивности отраженного луча определяется произведением

$$\begin{pmatrix} I_{p'} \\ I_{s'} \\ I_{u'} \\ I_{v'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{pp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{uu} & \rho_{uv} \\ 0 & 0 & \rho_{vu} & \rho_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ I_s \\ I_u \\ I_v \end{pmatrix}. \quad (107)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{pp} &= \tilde{r}_p \tilde{r}_p^*; \quad \rho_{ss} = \tilde{r}_s \tilde{r}_s^*; \\ \rho_{uu} &= \rho_{vv} = \operatorname{Re} (\tilde{r}_p \tilde{r}_s^*); \quad \rho_{uv} = -\rho_{vu} = -\operatorname{Im} (\tilde{r}_p \tilde{r}_s^*). \end{aligned} \quad (108)$$

Отношение энергий отраженного и падающего лучей

$$\rho = \frac{|E|^t \cdot |p| \cdot |I|}{|E|^t \cdot |I|} = \frac{|E|^t \cdot |p| \cdot |X|}{|E|^t \cdot |X|}, \quad (109)$$

при этом поглощенная доля падающего излучения составляет $1 - \rho$. Именно эти величины надо знать при проведении вычислений методом построения хода лучей.

Состояние поляризации выходящего луча задается вектором-столбцом $|X'|$:

$$|X'| = \frac{|I'|}{|E|^t \cdot |I'|} = \frac{|p| \cdot |X|}{|E|^t \cdot |p| \cdot |X|}. \quad (110)$$

Нужно знать также направления отраженного луча r' и координатных векторов p' , s' . Следует учесть, что при отражении тангенциальная к поверхности в плоскости падения составляющая сохраняется, а нормальная изменяет знак:

$$r' = - (r \cdot n) n + [r \cdot (n \times s)] (n \times s); \quad (111)$$

$$s' = s; \quad (112)$$

$$p' = s' \times r'. \quad (113)$$

Имея эту информацию, можно рассмотреть последующее отражение луча от стенки методом построения хода лучей, описанным в § 2.9.4. Опустим штрих у r' , возьмем нормаль к следующей стенке n и используем (93) для определения новых направлений p_2 и s_2 . Принимая p' и s' за p_1 и s_1 , находим согласно (97) угол поворота β и преобразуем с помощью (100) $|X'|$ в $|X|$. Затем из уравнения (109) определим коэффициент отражения ρ , используя (110) — (113), продолжим расчеты методом Монте-Карло.

Как уже отмечалось выше, часто можно пренебрегать поляризацией. Исключение составляют случаи, когда происходит несколько отражений с малым углом поворота β или когда приборы имеют поляризующую оптику. Ниже кратко обсуждается выбор материалов, для которых поляризация не играет существенной роли. В § 2.9.3, где поверхности предполагаются полностью диффузными и тем самым деполаризующими по определению, поляризацию учитывать не нужно. В § 2.9.4 рассматривается перенос излучения при зеркальном отражении, в этом случае поляризация может быть существенной. Она важна

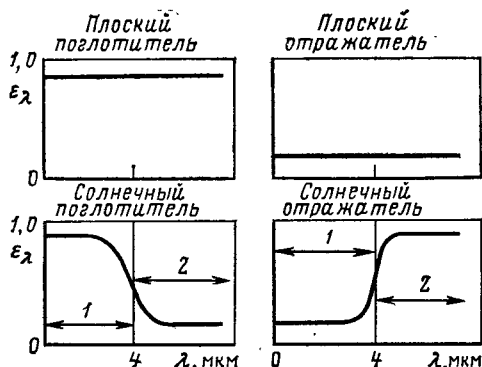


Рис. 5. Типы поверхностей, обычно используемые при конструировании тепловых устройств [43]:
1 — область спектра солнечного излучения; 2 — инфракрасная область

также при рассеянии света на облаках частиц, с ее помощью определяют размеры частиц.

1. Характеристики теплового излучения при конструировании тепловых устройств. Конструктору обычно требуется создать условия, способствующие или препятствующие тепловому излучению в заданной области спектра. Иногда требования к различным спектральным областям различны. Если приблизительно поделить спектральный интервал на длинноволновую и коротковолновую области, то можно выделить четыре комбинации свойств поверхности, ту или иную из которых обычно используют на практике. Эти комбинации представлены на рис. 5. В качестве плоского поглотителя можно использовать черную краску, черную эмаль и черные оксидированные или анодированные покрытия (рис. 6, а, 7 и 8). Плоский поглотитель используется в тех случаях, когда необходима высокая степень черноты в длинноволновой области и нет необходимости избегать сильного поглощения в коротковолновой области. Плоским отражателем могут быть чистые металлы и алюминиевая краска. Иногда слой металла наносится гальваническим способом или вакуумным испарением. Если нужно получить зеркальное отражение, то перед нанесением металла поверхность покрывают блестящей эмалью или пластиком. Если отражатель должен работать при высоких температурах или в коррозионной среде, то можно использовать защитные слои, расположенные над покрытием и под ним. При низких температурах применяются алюминиевая фольга и алю-

минизированные пластиковые пленки. Плоский отражатель обеспечивает высокую отражательную способность и низкую степень черноты как в длинноволновой, так и в коротковолновой области. Поскольку плоский отражатель и плоский поглотитель имеют одинаковые характеристики в обеих спектральных областях, их называют неселективными.

Селективный солнечный поглотитель имеет высокую поглощательную способность при малых длинах волн и низкую степень черноты в длинноволновой области. Такими свойствами обладает металлическая поверхность с тонким полупроводниковым покрытием. Используются тонкие медные, никелевые или хромовые оксидные слои, образованные травлением или электрохимической обработкой покрытой медью стали (рис. 9). Можно также использовать покрытия, полученные на алюминии в результате напыления и обжига и образованные осаждением в вакууме пленки. Такие поверхности используются в коллекторах солнечного излучения, а также в космических кораблях, исследующих отдаленные районы солнеч-

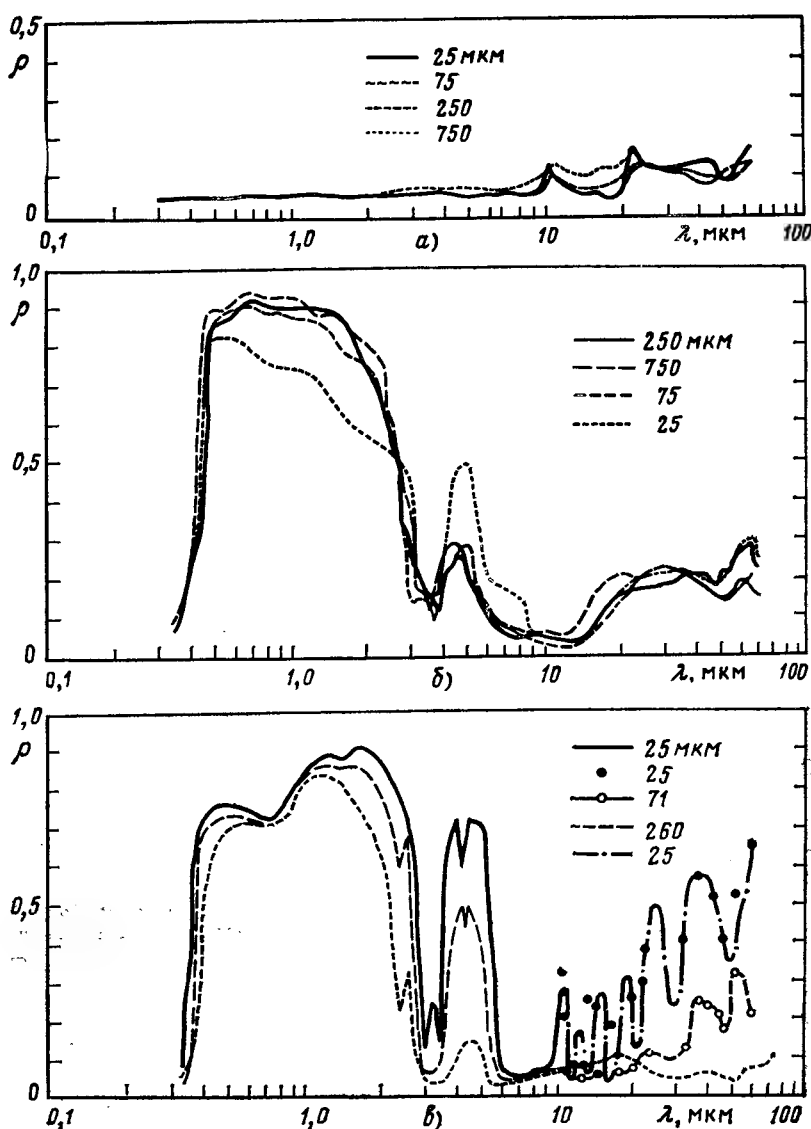


Рис. 6. Спектральная направленная отражательная способность ($\theta \approx 0$) пленок различной толщины для эпоксидной черной краски на алюминиевой подложке (а) для PV-100, силиконалкидной белой краски на алюминиевой подложке (б) и для X-500 полиуретановой прозрачной пленки на алюминиевой подложке (в) [46]

Из уравнений (12), (14) и (17) имеем

$$q_i = q_i^+ - \sum_{j=1}^n F_{i-j} q_j^+ = \sum_{j=1}^n F_{i-j} (q_i^+ - q_j^+). \quad (22)$$

Возвращаясь к исходным уравнениям (12) — (14), видим, что, поскольку i принимает n значений, имеется всего $3n$ уравнений. Имеется также $3n$ неизвестных: по n значений для q_i , q_i^+ , q_i^- . Только одно из уравнений, именно (14), включает n членов, остальные связывают только по три величины для каждого значения i . Следовательно, нетрудно свести систему $3n$ уравнений с $3n$ неизвестными к системе n уравнений с n неизвестными. В качестве последних можно выбрать q_i^- , q_i^+ или любую их линейную комбинацию.

Если в качестве переменных приняты q_i^- , то, подставив (13) в правую часть (14), получим

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{i,j} - \rho_j F_{i-j}) q_j^- = \sum_{j=1}^n F_{i-j} \varepsilon_j B_j, \quad (23)$$

где $\delta_{i,j}$ — дельта-функция;

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{при } j=i; \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases} \quad (24)$$

Если задача формулируется в переменных q_i^+ , подставив (13) в левую часть (14), получим

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{i,j} - \rho_i F_{i-j}) q_j^+ = \varepsilon_i B_i. \quad (25)$$

Если же в качестве переменных выбраны q_i , то, подставив (19) в (14), получим

$$B_i - q_i/\varepsilon_i = \sum_{j=1}^n F_{i-j} [B_j - (\rho_j/\varepsilon_j) q_j].$$

Умножая на A_i , перегруппировывая члены и переходя от плотностей тепловых потоков q_i к новым переменным — тепловым потокам $\dot{Q}_i = A_i q_i$, получаем

$$\sum_{j=1}^n [\delta_{i,j}/\varepsilon_i - (\rho_j/\varepsilon_j A_j) A_i F_{i-j}] \dot{Q}_j = \sum_{j=1}^n A_i F_{i-j} (B_i - B_j). \quad (26)$$

Дальнейшая процедура решения зависит от того, что мы хотим определить. Если нам нужен просто набор значений тепловых потоков при заданных конкретных условиях, можно использовать уравнения (13) и (14) в той форме, в которой они записаны, и применить итерационный способ численного решения. Для начала можно положить все $q_i^- = 0$ (или выражению $\sum \varepsilon_j A_j B_j / \sum \varepsilon_j A_j$, соответствующему точному решению для внутренней поверхности сферы), затем, используя (13), вычислить q_i^+ , далее из (14) найти q_i^- и продолжить расчеты до достижения сходимости. После этого с помощью (18) или (20) можно определить значения q_i и, умножив их на A_i , найти величины тепловых потоков $\dot{Q}_i$.

Чаше, однако, требуется определить не просто набор тепловых потоков для одного заданного набора температур, а набор параметров, описывающих поведение системы для любого набора температур. Такими параметрами системы являются коэффициенты переноса излучения $\mathcal{F}_{i-j}$

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^n A_i \mathcal{F}_{i-j} (B_i - B_j). \quad (27)$$

Они обладают следующим важным свойством:

$$A_i \mathcal{F}_{i-j} = A_j \mathcal{F}_{j-i}. \quad (28)$$

Тот факт, что тепловые потоки линейно зависят от разностей плотностей потоков излучения черного тела, в соответствии с (27), следует из линейности исходных уравнений. Свойство линейности позволяет использовать мощный принцип суперпозиции. Под величиной $A_i \mathcal{F}_{i-j}$ можно понимать тепловой поток на поверхность j (т. е. — $\dot{Q}_j$) в случае, когда $B_i = 1$, а все остальные $B_j = 0$. Отсюда видно, что можно определить значение $A_i \mathcal{F}_{i-j}$ численно с помощью итерационной процедуры, описанной после уравнения (26). Отсюда следует также, что

$$\sum_{j=1}^n A_i \mathcal{F}_{i-j} = \varepsilon_i A_i. \quad (29)$$

Сравнение (26) при $\rho_i = 0$ и $\varepsilon_i = 1$ с (27) показывает, что, если все стенки черные, угловой коэффициент и коэффициент переноса излучения идентичны. В этом случае на поверхность j попадает только та часть излучения черной поверхности i , которая непосредственно излучается в ее направлении. Если же стенки не черные, то плотность потока, испускаемого поверхностью i излучения, равна только $\varepsilon_i B_i$, а поверхность j поглощает не все падающее на нее излучение, но зато излучение поверхности i отражается другими поверхностями и часть его попадает на j . В результате $\mathcal{F}_{i-j}$ возрастает при увеличении ε_i и ε_j (последние можно рассматривать как степень черноты и поглощательную способность соответственно) и при уменьшении ε_k (следовательно, при увеличении ρ_k) для всех остальных поверхностей, $k \neq i, j$.

Обычно набор значений коэффициентов переноса излучения получают в результате обращения и умножения матриц с помощью быстродействующих ЭВМ, обладающих большой оперативной памятью. Для этого можно использовать любое из уравнений (23), (25) и (26). Например, можно записать в матричной форме уравнение (23)

$$|m_{i,j}| |q_j^-| = |F_{i,j}| |b_j|, \quad (30)$$

где $|m_{i,j}|$ обозначает матрицу

$$|m_{i,j}| = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

элементы которой, согласно (23), равны:

$$m_{i,j} = \delta_{i,j} - \rho_j F_{i-j}. \quad (32)$$

Элементами матрицы $|F_{i,j}|$ являются угловые коэффициенты

$$F_{i,j} = F_{i-j}. \quad (33)$$

Матрицы $|q_j^-|$ и $|b_j|$ представляют собой матрицы-столбцы

$$|q_j^-| = \begin{bmatrix} q_1^- \\ q_2^- \\ \vdots \\ q_n^- \end{bmatrix}; \quad (34)$$

$$|b_j| = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 B_1 \\ \varepsilon_2 B_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n B_n \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Правило умножения матриц состоит в следующем: если матрица $|c_{i,j}|$ является произведением двух матриц $|a_{i,k}|$ и $|b_{k,j}|$

$$|c_{i,j}| = |a_{i,k}| |b_{k,j}|, \quad (36)$$

то ее элементы равны:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}. \quad (37)$$

Существуют стандартные численные методы нахождения матрицы $|M_{i,j}|$, обратной матрице $|m_{i,j}|$. Имеем

$$|q_i| = |M_{i,k}| |F_{k,j}| |b_j|. \quad (38)$$

Далее используем принцип суперпозиции. Если среди величин B_j единственной отличной от нуля является $B_k=1$, то

$$q_i = M_{i,1} F_{1-k} e_k + M_{i,2} F_{2-k} e_k + \dots + M_{i,n} F_{n-k} e_k.$$

Но в этих условиях $e_i q_i = \mathcal{F}_{i-k}$, поэтому

$$\mathcal{F}_{i-k} = e_i e_k (M_{i,1} F_{1-k} + M_{i,2} F_{2-k} + \dots + M_{i,n} F_{n-k}). \quad (39)$$

Отсюда видно, что каждый элемент матрицы коэффициентов переноса излучения можно найти, вычислив соответствующий элемент произведения матриц

$$|P_{i,k}| = |M_{i,j}| |F_{j,k}| \quad (40)$$

и умножив его на $e_i e_k$

$$\mathcal{F}_{i-k} = e_i e_k P_{i,k}. \quad (41)$$

Можно использовать другой способ вычисления $\mathcal{F}_{i-k}$, обращая матрицу, определяемую уравнением (25). Из выражении (20) видно, что значения $\mathcal{F}_{i-k}$ равны элементам обратной матрицы, умноженным на $e_i e_k / \rho_i$. Этот способ более прямой, однако он неприменим, если $\rho_i=0$. Для того чтобы избежать затруднений, возникающих при $\rho_i=0$, можно вместо (20) использовать (22), но при этом процедура вычислений несколько усложняется.

Применение метода обращения матриц требуется лишь в том случае, когда n велико (при $n \geq 4$). Когда поверхностей мало, целесообразно использовать описанный ниже метод электрической аналогии, позволяющий лучше уяснить физику явления. Тем не менее ниже рассмотрено использование матричного метода при $n=2$. Рассмотрим область внутри куба, одна грань которого (поверхность 1) имеет известные температуру и степень черноты e_1 , а другие пять граней вместе образуют поверхность 2 со степенью черноты e_2 . Пусть $e_1=e_2=0.5$ и $A_1=1$ м². С точностью до двух десятичных знаков $F_{2-2}=0.80$ и $F_{2-1}=0.20$. Согласно (32) матрица

$$|m_{i,j}| = \begin{vmatrix} +1,00 & -0,50 \\ -0,10 & +0,60 \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица

$$|M_{i,j}| = \begin{vmatrix} +0,60 & +0,50 \\ +0,55 & +0,55 \\ +0,10 & +1,00 \\ +0,55 & +0,55 \end{vmatrix}.$$

Из выражения (40) находим матрицу $|P_{i,k}|$:

$$|P_{i,k}| = \begin{vmatrix} 12 & 10 \\ 11 & 11 \\ 2 & 20 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 11 & 11 \\ 4 & 18 \\ 11 & 11 \end{vmatrix}.$$

Согласно (41) имеем

$$|\mathcal{F}_{i-k}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 22 & 11 \\ 1 & 9 \\ 11 & 22 \end{vmatrix}.$$

Следует отметить, что $A_1 \mathcal{F}_{1-2} = 5/11 = A_2 \mathcal{F}_{2-1} = 5/11$, т. е. соотношение (28) выполняется. Проверим также выполнение (29):

$$A_1 \mathcal{F}_{1-1} + A_1 \mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{22} + \frac{5}{11} = \frac{1}{2} = e_1 A_1;$$

$$A_2 \mathcal{F}_{2-1} + A_2 \mathcal{F}_{2-2} = \frac{5}{11} + \frac{45}{22} = \frac{5}{2} = e_2 A_2.$$

Если поверхности серые, $T_1=1500$ К, $T_2=1000$ К, то согласно (27)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= A_1 \mathcal{F}_{1-2} (C_s T_1^4 - C_s T_2^4) = \\ &= \frac{5}{11} (5,6697 \cdot 10^{-8}) (1500^4 - 1000^4) = 104,7 \text{ кВт}. \end{aligned}$$

С. Адиабатные поверхности. Полностью теплоизолированная поверхность называется адиабатной. Для такой поверхности

$$q_i = 0, \quad (42)$$

или согласно (12)

$$q_i = q_i^+, \quad (43)$$

и, как следует из (12), (13) и (15),

$$B_i = q_i^- = q_i^+. \quad (44)$$

Отметим, что эти соотношения имеют место независимо от того, какова степень черноты поверхности. Адиабатную поверхность можно рассматривать как идеальный отражатель и как идеальный поглотитель и переизлучатель. Разумеется, это утверждение справедливо лишь для полностью диффузных поверхностей. Кроме того, если поверхность не серая, она не может быть адиабатной в спектральном смысле, даже будучи адиабатной по отношению к интегральному излучению.

Если поверхность k — адиабатная, то согласно (14) элементы k -го столбца матрицы $|m_{i,j}|$ равны:

$$m_{i,k} = \delta_{i,k} - F_{i,k}; \quad (45)$$

$$b_k = 0. \quad (46)$$

Соответствующие изменения можно учесть в выражениях (38) и (41). Отметим, однако, что соотношение (41) применимо только для неадиабатных поверхностей; для адиабатной поверхности, при $i \neq k$, величина $\mathcal{F}_{k-j} = 0$.

Пусть поверхности i и j являются неадиабатными, тогда, если сделать поверхность k адиабатной, значение $\mathcal{F}_{i-j}$ возрастает, поскольку адиабатная поверхность действует как идеальный отражатель. А как уже отмечалось выше, отражающая поверхность увеличивает коэффициенты переноса излучения между остальными поверхностями.

Д. Эквивалентная электрическая цепь. Тот факт, что теплота сохраняется (подобно электрическому заряду), а потоки теплового излучения пропорциональны разностям плотностей потоков эффективного излучения (подобно тому, как электрический ток пропорционален разности потенциалов), означает, что для проблемы переноса теплоты излучением можно построить электрическую аналогию [14, 15]. Теплота сохраняется на каждой из n поверхностей. Эти поверхности будем рассматривать как n узлов. Сумма тепловых потоков в каждом узле равна нулю. Тепловой поток теплопроводностью внутрь

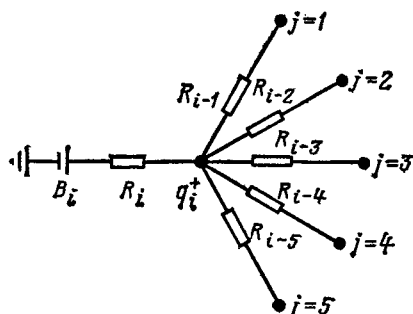


Рис. 5. Связи в эквивалентной электрической цепи для i -го узла

через контрольную поверхность m для i -го узла равен $\dot{Q}_i$. Он должен равняться тепловому потоку наружу через контрольную поверхность s .

Согласно (22) для теплового потока наружу через поверхность s имеем

$$\dot{Q}_i = q_i A_i = \sum_{j=1}^n A_i F_{i-j} (q_i^+ - q_j^+). \quad (47)$$

Отсюда видно, что q_i^+ нужно рассматривать как потенциал i -го узла, вызывающий протекание теплового потока в другие узлы с потенциалами q_j^+ через межузловые проводимости $A_i F_{i-j}$ или соответствующие им межузловые сопротивления,

$$R_{i-j} = \frac{1}{A_i F_{i-j}}. \quad (48)$$

Плотность потока теплоты и плотность потока эффективного излучения связаны между собой соотношением (20). Умножая q_i на площадь A_i , получаем значение теплового потока

$$\dot{Q}_i = \frac{\varepsilon_i A_i}{\rho_i} (B_i - q_i^+). \quad (49)$$

Согласно последнему выражению тепловой поток внутри i -го узла определяется разностью потенциала B_i и потенциала i -го узла q_i^+ и сопротивлением поверхности R_i :

$$R_i = \frac{\rho_i}{\varepsilon_i A_i} = \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}. \quad (50)$$

На рис. 5 приведена схема электрической цепи для одного узла i . Чтобы построить электрическую цепь для всей области, нужно нанести на диаграмму требуемое число (n) узлов и начертить все межузловые связи с соответствующими им сопротивлениями R_{i-j} . Далее изоб-

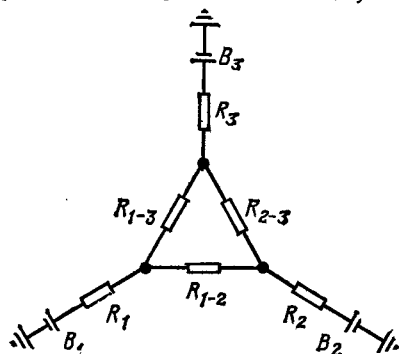


Рис. 6. Эквивалентная электрическая цепь для $n=3$

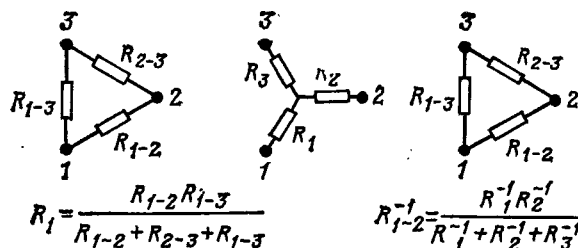


Рис. 7. Преобразования треугольник — звезда и звезда — треугольник

ражаются сопротивления поверхностей R_i и потенциалы B_i . На рис. 6 показана электрическая цепь для $n=3$.

При $n=2$, а также при $n=3$, когда поверхность, соответствующая узлу $i=3$, является адиабатной, цепь легко сводится к одному эквивалентному сопротивлению между потенциалами B_1 и B_2 . Это эквивалентное сопротивление равно $1/A_1 F_{1-2}$. В этом контексте становится довольно прозрачным физический смысл коэффициента переноса излучения. При редуцировании простой последовательно-параллельной цепи следует руководствоваться двумя правилами: при последовательном соединении складываются сопротивления; при параллельном соединении складываются проводимости (величины, обратные сопротивлениям).

При определении коэффициентов переноса излучения для случая $n=3$ можно использовать преобразования треугольник — звезда и звезда — треугольник. Эти преобразования показаны на рис. 7.

Для примера рассмотрим кубическую полость, у которой поверхность 1 (основание) имеет температуру 500 К, поверхность 2 (боковая грань) — 1500 К, а поверхность 3 (остальные три боковые и верхняя грани) — 1000 К. Все поверхности считаем серыми, имеющими степень черноты $\varepsilon=0,5$. Примем $A_1=1$ м². С точностью до двух десятичных знаков угловые коэффициенты равны $F_{1-2}=0,2$, $F_{1-3}=F_{2-3}=0,8$. На рис. 6 показана эквивалентная электрическая цепь, которой соответствуют

$$R_{1-2} = \frac{1}{(1)(0,2)} = 5,0; \quad R_{1-3} = R_{2-3} = \frac{1}{(1)(0,8)} = 1,25;$$

$$R_1 = R_2 = \frac{1-0,5}{(1)(0,5)} = 1,0; \quad R_3 = \frac{1-0,5}{(4)(0,5)} = 0,25.$$

Выполняя преобразование треугольник — звезда, получаем цепь в виде звезды, каждое звено которой состоит из сопротивления поверхности, последовательно соединенного с сопротивлением, найденным при преобразовании. При сложении сопротивлений получаем

$$R_{1, \text{tot}} = R_{2, \text{tot}} = 1,00 + 0,83 = 1,83;$$

$$R_{3, \text{tot}} = 0,25 + 0,2083 = 0,4583.$$

Затем, выполняя преобразование звезда — треугольник, находим значения коэффициентов переноса излучения, м²: $A_1 F_{1-2}=0,0909$; $A_1 F_{1-3}=0,3636$; $A_2 F_{2-3}=0,3636$. Наконец, используя (47), находим тепловые потоки:

$$\dot{Q}_1 = A_1 F_{1-2} (B_1 - B_2) + A_1 F_{1-3} (B_1 - B_3) =$$

$$= 0,0909 (3500 - 287\,000) + 0,3636 (3500 - 56\,700) =$$

$$= -45,1 \text{ кВт};$$

$$\dot{Q}_2 = A_2 F_{2-1} (B_2 - B_1) + A_2 F_{2-3} (B_2 - B_3) =$$

$$= 0,0909 (287\,000 - 3500) + 0,3636 (287\,000 - 56\,700) =$$

$$= +109,5 \text{ кВт};$$

$$\dot{Q}_3 = A_3 F_{3-1} (B_3 - B_1) + A_3 F_{3-2} (B_3 - B_2) =$$

$$= 0,3636 (56\,700 - 3500) + 0,3636 (56\,700 - 287\,000) =$$

$$= -64,4 \text{ кВт}.$$

Построение эквивалентной электрической цепи позволяет глубже проникнуть в проблему переноса излучения, чем это возможно при применении метода обращения матриц. Анализ эквивалентной цепи позволяет понять роль различных физических величин, таких, как степень черноты поверхностей. Поэтому рекомендуется строить эквивалентную цепь, пусть упрощенную (n должно быть не слишком большим), даже в том случае, когда для нахождения численных значений используется метод обращения матриц.

Е. Некоторые рабочие соотношения. Используя в качестве рабочего инструмента эквивалентную электрическую цепь, нетрудно получить полезные результаты для перечисленных ниже случаев:

1. Источник и сток:

- а) общий случай;
- б) одна поверхность не вогнутая;
- в) параллельные стенки;
- г) концентрические трубки;
- д) эффективная степень черноты негладкой поверхности.

2. Источник, сток и адиабатная поверхность:

- а) общий случай;
- б) источник и сток не вогнуты;
- в) набор труб вблизи адиабатной поверхности.

3. Радиационные экраны:

- а) общий случай;
- б) плоские экраны;
- в) концентрические цилиндрические экраны;
- г) концентрические сферические экраны.

Соответствующие результаты получены в предположении, что поверхности полностью диффузные, а потоки эффективного излучения однородны. Последнее условие иногда (при параллельных стенках, концентрических трубках) выполняется точно, а иногда (при коротких каналах) — только приближенно. Длинные каналы, для которых предположение об однородности излучения заведомо неприменимо, кратко рассмотрены в следующем разделе.

Источник и сток. Общий случай, когда границы замкнутой области представляют собой один источник и один сток, можно представить простой последовательной эквивалентной цепью, состоящей из источника напряжения B_1 , сопротивления поверхности $R_1 = (1 - \epsilon_1)/\epsilon_1 A_1$, сопротивления $R_{1-2} = 1/A_1 F_{1-2}$, второго сопротивления поверхности $R_2 = (1 - \epsilon_2)/\epsilon_2 A_2$ и источника напряжения B_2 . Соответственно

$$\dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2 = \frac{B_1 - B_2}{[(1 - \epsilon_1)/\epsilon_1 A_1] + [1/A_1 F_{1-2}] + [(1 - \epsilon_2)/\epsilon_2 A_2]}; \quad (51)$$

$$A_1 F_{1-2} = \frac{1}{[(1 - \epsilon_1)/\epsilon_1 A_1] + [1/A_1 F_{1-2}] + [(1 - \epsilon_2)/\epsilon_2 A_2]}. \quad (52)$$

Если одна из поверхностей не вогнута (обозначим ее индексом 1), то она не может «видеть» сама себя, поэтому $F_{1-1} = 0$ и $F_{1-2} = 1$ и (52) имеет следующий вид:

$$A_1 F_{1-2} = \frac{A_1}{(1/\epsilon_1) + (A_1/A_2)[(1/\epsilon_2) - 1]}. \quad (53)$$

Для бесконечных параллельных пластин $A_1 = A_2$ и

$$A_1 F_{1-2} = \frac{A_1}{(1/\epsilon_1) + (1/\epsilon_2) - 1}. \quad (54)$$

Для бесконечных концентрических трубок длине L соответствует площадь $A_1 = \pi D_1 L$, где D_1 — внешний диаметр внутренней трубки, и $A_2 = \pi D_2 L$, где D_2 — внутренний

диаметр внешней трубки. В этом случае из (53) имеем

$$A_1 F_{1-2} = \frac{\pi D_1 L}{(1/\epsilon_1) + (D_1/D_2)[(1/\epsilon_2) - 1]}. \quad (55)$$

Выражение (53) представим в виде

$$F_{1-2} = \frac{\epsilon_1}{1 + (\epsilon_1 A_1 / \epsilon_2 A_2)(1 - \epsilon_2)}. \quad (56)$$

Если $\epsilon_1 A_1 (1 - \epsilon_2)$ мало по сравнению с $\epsilon_2 A_2$, то коэффициент переноса излучения сводится просто к степени черноты небольшой или нечерной поверхности. Этот предельный случай показывает, что большое пространство 2 можно рассматривать как замкнутую полость, т. е. как черное тело. Присутствие внутри него достаточно малого предмета не изменяет черного излучения, падающего на поверхность, которая «видит» только стенки полости.

Рассмотрим негладкую поверхность 1, расположенную внутри большого пространства 2. Размеры неровности поверхности считаем большими по сравнению с характерной длиной волны излучения. Большое пространство действует как черное тело. Если окружающая среда является черной при температуре T_2 , то площадь A_2 не имеет значения; как видно из (56), при $\epsilon_2 = 1$ величина F_{1-2} не зависит от A_2 . Будем считать, что поверхность 2 является огибающей выступов поверхности 1. Если размеры выступов малы по сравнению с радиусом кривизны, то поверхность 2 можно считать плоской, в то время как поверхность 1 из-за наличия неровностей вогнута. Поэтому положим $F_{2-1} = 1$. Заменяя в (52) $A_1 F_{1-2}$ на $A_2 F_{2-1}$ и учитывая, что $F_{2-1} = 1$, $\epsilon_2 = 1$, получаем

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} = \frac{1}{[(1 - \epsilon_1)/\epsilon_1 A_1] + 1/A_2} = \frac{A_2}{(A_2/A_1)[(1/\epsilon_1) - 1] + 1}.$$

Величина F_{2-1} представляет собой эффективную степень черноты негладкой поверхности. Она определяется так, что $A_1 F_{1-2} = A_2 \epsilon_{\text{ef}}$, когда поверхность находится в замкнутой полости, являющейся черным телом. Имеем

$$\epsilon_{\text{ef}} = \frac{1}{(A_2/A_1)[(1/\epsilon_1) - 1] + 1}. \quad (57)$$

По мере того как поверхность становится гладкой, A_1 приближается к A_2 , при этом ϵ_{ef} приближается к ϵ_1 . Если A_1 велико по сравнению с A_2 , то ϵ_{ef} стремится к единице. Приведенный анализ точен лишь при условии, что неровности поверхности представляют собой сегменты сферы, поскольку использовалось предположение об однородности излучения. Однако качественный результат справедлив и в общем случае: эффективная степень черноты негладкой поверхности заключена между ϵ_1 и единицей и имеет тенденцию к росту при увеличении A_1/A_2 .

Конструктор, незнакомый с основами радиационного теплообмена, может попытаться улучшить радиатор или теплообменник путем увеличения A_1 для увеличения $A_1 F_{1-2}$, даже если фиксирована площадь огибающей поверхности A_2 . Но $A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$, а F_{2-1} ограничена величиной ϵ_2 , которая не может быть больше единицы. Если A_2 является огибающей негладкой поверхности A_1 , то невозможно сделать величину $A_1 F_{1-2}$ больше A_2 , поскольку невозможно сделать $\epsilon_{\text{ef}} > 1$.

Источник, сток и адиабатная поверхность. Эквивалентная цепь для трех поверхностей показана на рис. 6. Если поверхность 3 адиабатная, то тепловой поток через контрольную поверхность m равен нулю, что соответствует отсутствию источника напряжения B_3 . Узел 3 имеет плавающий потенциал, и, поскольку тепловой поток (ток) через сопротивление R_3 не проходит, величина R_3 роли не играет. Эквивалентная проводимость $A_1 F_{1-2}$

определяется выражением

$$A_1 \mathcal{F}_{1-2} = 1 / \{ R_1 + R_2 + 1 / [(1/R_{1-2}) + 1/(R_{1-3} + R_{2-3})] \} = \\ = 1 / \{ (1 - \varepsilon_1) / \varepsilon_1 A_1 + (1 - \varepsilon_2) / \varepsilon_2 A_2 + \\ + 1 / [A_1 F_{1-2} + 1 / (1/A_1 F_{1-2} + 1/A_2 F_{2-3})] \}, \quad (58)$$

которое можно представить в виде

$$A_1 \mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{[(1 - \varepsilon_1) / \varepsilon_1 A_1] + [(1 - \varepsilon_2) / \varepsilon_2 A_2] + 1 / A_1 \mathcal{F}_{1-2, b}}, \quad (59)$$

где $\mathcal{F}_{1-2, b}$ — коэффициент переноса излучения, учитывающий наличие адиабатной поверхности, для случая, когда поверхности 2 и 3 черные:

$$A_1 \mathcal{F}_{1-2, b} = A_1 F_{1-2} + \frac{1}{(1/A_1 F_{1-3}) + (1/A_2 F_{2-3})}. \quad (60)$$

Выражение (59) справедливо, когда потоки эффективного излучения поверхностей 1 и 2 можно считать однородными независимо от однородности излучения адиабатной поверхности. Это обстоятельство имеет отношение к длинным каналам, рассматриваемым ниже.

Часто нужно знать и величину потенциала B_3 , чтобы подобрать материал, пригодный для работы при температуре T_3 . Для этого можно найти потенциалы q_1^+ и q_2^+ и ток ветвления $\dot{Q}_{1-3-2}$. Обращаясь к рис. 6 (при свободном узле 3), получаем

$$\dot{Q}_1 = A_1 \mathcal{F}_{1-2} (B_1 - B_2); \quad (61a)$$

$$q_1^+ = B_1 - \dot{Q}_1 R_1; \quad (61б)$$

$$q_2^+ = B_2 + \dot{Q}_1 R_2; \quad (61в)$$

$$\dot{Q}_{1-2} = \frac{1}{R_{1-2}} (q_1^+ - q_2^+); \quad (61г)$$

$$\dot{Q}_{1-3-2} = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_{1-2}; \quad (61д)$$

$$B_3 = q_1^+ - \dot{Q}_{1-3-2} R_{1-3}. \quad (61е)$$

Если поверхности A_1 и A_2 не вогнуты, то, поскольку при этом $F_{1-1} = F_{2-2} = 0$, имеем

$$F_{1-3} = 1 - F_{1-2}; \quad F_{2-3} = 1 - F_{2-1} = 1 - \frac{A_1}{A_2} F_{1-2},$$

и, следовательно, надо определить только один угловой коэффициент F_{1-2} .

Для примера рассмотрим кубическую полость с длиной ребра 1 м, у которой одна боковая грань является источником с температурой $T_1 = 1500$ К, основание — стоком с температурой $T_2 = 500$ К, а остальные четыре грани — адиабатные с неизвестной температурой T_3 . Поверхности считаем серыми с $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,5$. Нужно определить тепловой поток $\dot{Q}_1$ и T_3 . С точностью до двух десятичных знаков $F_{1-2} = 0,2$, поэтому $F_{1-2} = F_{2-3} = 0,8$. Согласно (60) имеем

$$A_1 \mathcal{F}_{1-2, b} = A_1 F_{1-2} + \frac{1}{(1/A_1 F_{1-3}) + (1/A_2 F_{2-3})},$$

$$\mathcal{F}_{1-2, b} = 0,2 + \frac{1}{(1/0,8) + (1/0,8)} = 0,60.$$

Из 80% излучения поверхности 1, попадающего на поверхность 3, половина излучается обратно к поверхности 1, а остальное — к поверхности 2. Эта половина, т. е. 40% излучения поверхности 1, превосходит прямое излучение к поверхности 2 в 2 раза.

Далее $\mathcal{F}_{1-2, b}$ подставляем в (59) (при $A_1 = A_2 = 1$ м²), что дает

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{[(1 - 0,5)/0,5] + [(1 - 0,5)/0,5] + 1/0,6} = 0,273.$$

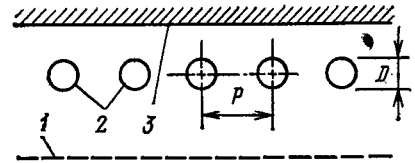


Рис. 8. Ряд круговых цилиндров вблизи адиабатной поверхности

Поток теплоты $\dot{Q}_1$ определяется выражением (27):

$$\dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2 = A_1 \mathcal{F}_{1-2} (C_s T_1^4 - C_s T_2^4) = \\ = (0,273) (5,6697 \cdot 10^{-8}) (1500^4 - 500^4) = \\ = (0,273) (287\,000 - 3500) = 77,3 \text{ кВт.}$$

Для определения B_3 нет необходимости использовать (61), поскольку вследствие симметрии можно сразу получить

$$B_3 = \frac{1}{2} (B_1 + B_2) = 145\,300 \text{ Вт/м}^2;$$

$$T_3 = (B_3 / C_s)^{1/4} = 1265 \text{ К.}$$

На практике часто используется конфигурация в виде набора труб или цилиндров, вблизи которых расположена адиабатная поверхность, действующая как рефлектор-переносчик. В одном типичном случае цилиндры являются электрическими нагревателями в форме стержней. В другом случае по трубам течет нагреваемая жидкость. На трубы со стороны, противоположной адиабатной поверхности, падает излучение из точки. Будем считать, что точка светит как черное тело, и заменим ее воображаемой черной плоскостью 1. Трубы обозначим номером 2, а адиабатную поверхность — номером 3 (рис. 8). Расстояние между осями труб равно P , а внешний диаметр трубы — D . Трубы разнесены для того, чтобы обеспечить более однородный по периметру нагрев или охлаждение и тем самым достичь более высоких значений тепловых потоков на единицу длины трубы (при заданной разности температур). Пусть $P = D$, тогда задние половинны труб вообще не будут участвовать в теплообмене. Желательно знать, как зависит $\mathcal{F}_{1-2}$ от $r = P/D$.

Если трубы обладают высокой степенью черноты (как это обычно и бывает) и если их температура по окружности примерно постоянна (r не очень близко к единице), то их излучение будет близко к однородному и их можно представить в виде одного узла 2. Аналогично, если адиабатная поверхность достаточно удалена от труб или если она является черной и обладает хорошей теплопроводностью, ее тоже можно представить в виде одного узла. Тогда можно непосредственно использовать выражение (58). Остается только найти значения угловых коэффициентов.

Из правила нитей [см. соотношение (11) и рис. 4] имеем

$$F_{2-2} = \frac{2}{\pi} \left[(r^2 - 1)^{1/2} + \sin^{-1} \left(\frac{1}{r} \right) - r \right]. \quad (62a)$$

С помощью алгебры угловых коэффициентов определим остальные коэффициенты:

$$F_{2-1} - F_{2-3} = \frac{1 - F_{2-2}}{2}; \quad (62б)$$

$$F_{1-2} = (A_2/A_1) F_{2-1} = \left(\frac{\pi}{r} \right) F_{2-1}; \quad (62в)$$

$$F_{1-3} = 1 - F_{1-2}. \quad (62г)$$

Например, при $P = 3D$ (при $r = 3$) имеем $F_{2-2} = 0,1071$, $F_{2-1} = F_{2-3} = 0,4464$; $F_{1-2} = 0,4675$; $F_{1-3} = 0,5325$; $\mathcal{F}_{1-2, b} = 0,72$; $\mathcal{F}_{2-1, b} = 0,68$. Коэффициент $\mathcal{F}_{2-1, b} = 0,68$

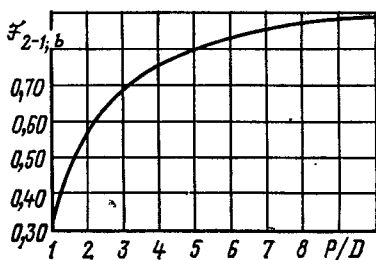


Рис. 9. Коэффициент переноса излучения трубы — топка для одного ряда труб вблизи адиабатной поверхности

на 115% больше отношения $1/\pi$, которое соответствует случаю, когда трубы касаются друг друга ($r=1$), поскольку лучше используются боковые и задние части труб. В пределе $r \rightarrow \infty$ имеем $F_{2-1,b} \rightarrow 1$, что на 214% превышает значение отношения $1/\pi$.

Плотность потока, излучаемого адиабатной поверхностью, можно получить из (61), полагая $B_1=1$ и $B_2=0$. Эта величина равна плотности потока, падающего на участок трубы, ближайшей к адиабатной стенке, и ее можно сравнить с плотностью потока, падающего на участок трубы, наиболее удаленный от стенки, оценивая тем самым степень неоднородности излучения.

Используя (60) и (62), легко найти значение $F_{2-1,b}$. На рис. 9 приведена зависимость $F_{2-1,b}$ от r . С точностью до двух десятичных знаков

$$F_{2-1,b} \approx 1 - \frac{1}{r}, \quad r \geq 4.$$

В [8] приводятся результаты для двойного ряда труб перед адиабатной стенкой.

Радиационные экраны. На практике используются различные радиационные экраны, такие, как алюминизированный пластиковый лист, алюминиевая фольга, тонкий лист из нержавеющей стали, керамические трубки и др. Их цель — уменьшение нежелательного переноса теплоты. При высоких температурах, а также в условиях вакуума перенос теплоты теплопроводностью пренебрежимо мал (в § 2.9.8 рассмотрен случай совместного переноса теплоты). В этом случае радиационный экран можно представить в виде узла с плавающим потенциалом B , имеющего с каждой стороны по сопротивлению поверхности. Радиационный экран представляет собой двустороннюю адиабатную поверхность. Рассмотрим набор из N экранов, сделанных из одного материала, расположенных между внутренним черным источником площадью A_1 и черным стоком площадью A_{N+2} . Как и раньше, в случае, когда источник и сток не черны, нужно добавить соответствующие сопротивления поверхностей, см. (59). Между N экранами имеется $N-1$ областей, каждая из которых обладает сопротивлением

$$R_{s,n} = \frac{1-\varepsilon_f}{\varepsilon_f A_{f,n}} + \frac{1}{A_{f,n}} + \frac{1-\varepsilon_b}{\varepsilon_b A_{b,n+1}}, \quad n=2, \dots, N, \quad (63)$$

где индекс f относится к внешней стороне меньшего экрана, индекс b — к внутренней стороне большего. Кроме этих $N-1$ сопротивлений имеются сопротивления поверхности внутренней стороны внутреннего экрана, сопротивление, соответствующее угловому коэффициенту с внутренней поверхности 1, сопротивление поверхности внешней стороны внешнего экрана $N+1$ и сопротивление, соответствующее угловому коэффициенту с этого экрана. Поэтому

$$A_1 F_{1-(N+2),b} = 1 / \left\{ (1/A_1) + [(1-\varepsilon_b)/\varepsilon_b A_{b,2}] + \sum_{n=2}^N R_{s,n} + [(1-\varepsilon_f)/\varepsilon_f A_{f,N+1}] + 1/A_{f,N+1} \right\}. \quad (64)$$

Для плоских экранов $A_1=A_f, n=A_b, n$. Площади сокращаются, и

$$F_{1-(N+2),b} = \frac{1}{N[(1/\varepsilon_f) + (1/\varepsilon_b) - 1] + 1}. \quad (65)$$

В этом случае коэффициент переноса излучения при большом N пропорционален $1/N$.

Для концентрических цилиндрических экранов с постоянными расстоянием между внешними поверхностями соседних экранов s и толщиной δ при радиусе внутреннего источника или стока r_1 имеем

$$A_1 = 2\pi r_1 L; \quad (66a)$$

$$A_{f,n} = 2\pi (r_1 + ns) L; \quad (66b)$$

$$A_{b,n} = 2\pi (r_1 + ns - \delta) L. \quad (66v)$$

Если s/r_1 мало, суммирование можно заменить интегрированием, при этом для большого N коэффициент переноса излучения пропорционален $1/\ln N$.

Для концентрических сферических экранов имеют место соотношения

$$A_1 = 4\pi r_1^2; \quad (67a)$$

$$A_{f,n} = 4\pi (r_1 + ns)^2; \quad (67b)$$

$$A_{b,n} = 4\pi (r_1 + ns - \delta)^2. \quad (67v)$$

Если s/r_1 мало, то, заменяя суммирование интегрированием, находим, что при большом N коэффициент переноса излучения становится независимым от N .

Для малых s/r_1 можно использовать понятие радиационной теплопроводности, которую можно объединить с теплопроводностью газа (см. § 2.9.8), получая при этом приближенные простые результаты, более удобные, чем выражения (64), (66) и (67).

Г. Каналы с диффузными стенками. Конструктор может захотеть получить оценку роли аксиального излучения, например, в воздухоподогревателе или в регенеративном теплообменнике, используемом в двигателях, работающих по циклу Брайтона или Стирлинга. Утечка теплового излучения через отверстие или трещину в тепловой изоляции является обычным делом. Ниже для определения плотности теплового потока вдоль канала используется алгебра угловых коэффициентов. Если плотности потоков эффективного излучения боковых стенок канала известны (в случае, когда известно распределение температуры и стенки черные) или для них можно использовать разумные аппроксимации (для канала с адиабатными стенками), получаемые выражения можно непосредственно использовать на практике. Если плотности потоков эффективного излучения стенок неизвестны и для них нет подходящих аппроксимаций, то задачу легко сформулировать излагаемым здесь способом, а затем ее решение можно искать численными методами. В современной практике, однако, принято использовать метод Монте-Карло, описанный в § 2.9.4.

Рассмотрим канал длиной L в форме цилиндра произвольного сечения. Обозначим концы цифрами 1 и 2, а боковую поверхность — 3. Пусть ось x направлена от 2 к 1. Рассмотрим воображаемую поверхность 4, расположенную при $x=x_0$. Безразмерная плотность потока излучения, падающего на сторону поверхности 4, обращенную к концу 1, определяется выражением (14), в котором суммирование заменено интегрированием:

$$q_4^+ = F_{4-1} q_1^+ + \int_{x=x_0}^L q_3^+(x) \frac{dF_{4-3}}{d(x-x_0)} d(x-x_0).$$

Угловой коэффициент F_{4-1} имеет тот же вид, что и $F_{1-2}(L)$, но в данном случае длина равна $L-x_0$. Согласно алгебре угловых коэффициентов

$$F_{4-3}(x-x_0) = 1 - F_{4-1}(x-x_0) = 1 - F_{1-2}(x-x_0).$$

Поэтому можно записать

$$q_4^{*-}(x_0) = F_{i-2}(L-x_0) + \int_{x=x_0}^L q_3^{*+}(x) \frac{d}{d(x-x_0)} (1-F_{i-2}(x-x_0)) d(x-x_0). \quad (68)$$

Безразмерные плотности потоков определяются следующим образом:

$$q_n^{\pm} = (q_n^{\pm} - q_2^{\pm}) / (q_1^+ - q_2^+), \quad q^* = q / (q_1^+ - q_2^+). \quad (69)$$

Следует отметить, что $q_1^{*+} = 1$ и $q_2^{*+} = 0$, поэтому они явно не входят в (68) и в последующее выражение (70).

Пусть поверхность 5 является обратной стороной поверхности 4, расположенной при $x=x_0$ и обращенной к концу 2. Тогда для плотности падающего на нее потока излучения имеем выражение, аналогичное приведенному выше для поверхности 4,

$$q_5^{*-} = \int_{x=x_0}^L q_3^{*+} \frac{d}{d(x_0-x)} (1-F_{i-2}(x_0-x)) d(x_0-x).$$

Но поток, падающий на поверхность 5, равен эффективному потоку излучения поверхности 4. Плотность результирующего теплового потока в отрицательном направлении x согласно (12) равна:

$$q^*(x_0) = F_{i-2}(L-x_0) + \int_{x=x_0}^L q_3^{*+} \frac{d}{d(x-x_0)} (1-F_{i-2}(x-x_0)) d(x-x_0) - \int_{x=x_0}^L q_3^{*+} \frac{d}{d(x-x_0)} (1-F_{i-2}(x_0-x)) d(x_0-x). \quad (70)$$

Уравнение (70) представляет собой общее выражение для средней плотности теплового потока в произвольном сечении x_0 канала с диффузными стенками, излучение концов которого однородно. Чтобы продемонстрировать его применение, рассмотрим специальный случай, когда

$$q_3^{*+}(x) = mx + b, \quad (71)$$

т. е. примем, что плотность потока эффективного излучения боковых стенок линейно меняется вдоль канала.

Рассмотрим первый интеграл в (70), обозначим его I_1 . Пусть $u = x - x_0$. Имеем

$$I_1 = \int_0^{L-x_0} (mx + b + mx_0 - mx_0) \frac{d}{du} (1-F_{i-2}(u)) du =$$

$$= (b + mx_0) (1-F_{i-2}(L-x_0)) + m \int_0^{L-x_0} u \frac{d}{du} \times \\ \times (1-F_{i-2}(u)) du.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_1 = (b + mL) (1-F_{i-2}(L-x_0)) - m(L-x_0) + m(L-x_0) S(L-x_0),$$

где

$$S(L) = \frac{1}{L} \int_0^L F_{i-2}(x) dx. \quad (72)$$

Продельвая ту же процедуру со вторым интегралом, находим

$$q^*(x_0) = [1 - (b + mL)] F_{i-2}(L-x_0) + bF_{i-2}(x_0) + m(L-x_0) S(L-x_0) + mx_0 S(x_0). \quad (73)$$

Вспоминая, что $q_1^{*+} = 1$, $q_2^{*+} = 0$, $q_3^{*+}(0) = b$ и $q_3^{*+}(L) = b + mL$, видим, что выражение (73) симметрично относительно x_0 и $L-x_0$.

Величины F_{i-2} и S определяются геометрией сечения канала. Для щели высотой $H=1$ (т. е. L есть $L/H = 2L/D_H$, где D_H — гидравлический диаметр; $x = x/H = 2x/D_H$) из правила нитей имеем

$$F_{i-2}(x) = (1+x^2)^{1/2} - x; \quad (74a)$$

$$S(x) = \frac{1}{2} [(1+x^2)^{1/2} - x] + \frac{1}{2x} \ln(x + (1+x^2)^{1/2}). \quad (74b)$$

Для круга диаметром D ($L = L/D$, $x = x/D$)

$$F_{i-2}(x) = 1 + 2x^2 - 2x(1+x^2)^{1/2}; \quad (75a)$$

$$S(x) = 1 + \frac{2}{3x} [1+x^3 - (1+x^2)^{3/2}]. \quad (75b)$$

Пусть для примера нужно оценить плотность результирующего потока излучения в каналы регенератора длиной 5 см, имеющие форму круговых цилиндров ($D_H = 5$ мм) и сделанные из сильно поглощающего материала. Пусть на входе в регенератор имеется черное тело при $T_1 = 600$ К, на выходе — черное тело при $T_2 = 350$ К и стенка имеет температуру $T_L = 575$ К на входе и $T_0 = 325$ К на выходе. Принято аппроксимировать распределение плотности потока эффективного излучения стенок вдоль канала прямой линией от $C_s T_0^4$ до $C_s T_L^4$. Нужно определить плотность результирующего теплового потока канала внутри канала на входе в него (при $x_0 = L = 5$ см).

В качестве первого шага запишем выражение (73) для $x_0 = L$

$$q^*(L) = 1 - (b + mL) + bF_{i-2}(L) + mL S(L).$$

Значения b и mL определим согласно (69):

$$b = q_3^{*+}(0) = \frac{C_s T_0^4 - C_s T_2^4}{C_s T_1^4 - C_s T_2^4} = \frac{325^4 - 350^4}{600^4 - 350^4} = -0,034;$$

$$mL = q_3^{*+}(L) - q_3^{*+}(0) = \frac{C_s T_L^4 - C_s T_0^4}{C_s T_1^4 - C_s T_2^4} =$$

$$= \frac{575^4 - 325^4}{600^4 - 350^4} = 0,857;$$

$$b + mL = q_3^{*+}(L) = \frac{C_s T_L^4 - C_s T_2^4}{C_s T_1^4 - C_s T_2^4} = \frac{575^4 - 350^4}{600^4 - 350^4} = 0,823.$$

Далее, используя (75a) и (75b), находим F_{i-2} и S при $L = 5/0,5 = 10$ и затем определяем $q^*(L)$:

$$F_{i-2}(10) = 0,0025; \quad S(10) = 0,0642;$$

$$q^* = 1 - 0,823 - 0,034(0,0025) + 0,857(0,0642) = 0,232.$$

Выражение (69) дает значение безразмерной плотности теплового потока

$$q = (C_s T_1^4 - C_s T_2^4) q^* = \\ = (5,6697 \cdot 10^{-8}) (600^4 - 350^4) (0,232) = 1507 \text{ Вт/м}^2.$$

Если плотность потока эффективного излучения стенок неизвестна, но задана зависимость температуры или плотности потока от x , можно поступить следующим образом. Заменим в (14) суммирование интегрированием и, используя (13), исключим из (14) q^+ или q^- . В результате получим линейное интегральное уравнение, которое можно решить численными методами. Возможен и альтер-

нативный подход, когда боковую стенку разбивают на несколько участков и используют уравнение (23) или (25), решаемое описанным выше методом обращения матриц. Алгебра угловых коэффициентов позволяет представить все угловые коэффициенты в виде разностей $F_{1-2}(x_i - x_j)$. Однако более удобно в данной ситуации использовать описанный в § 2.9.4 метод Монте-Карло.

В случае адиабатных боковых стенок зависимость температуры или плотности потока эффективного излучения от x неизвестна. Известно только, что $q_s^+(x) = q_s^-(x)$ независимо от степени черноты стенок. Это условие эквивалентно

$$\frac{d}{dx_0} q^*(x_0) = 0, \quad (76)$$

где $q^*(x_0)$ определяется выражением (70). Отметим, что в отсутствие теплопроводности нельзя поставить граничное условие на стенке. Опять можно разбить боковую стенку на несколько зон, аппроксимировать интегралы суммами и применить метод обращения матриц. Опять можно использовать метод Монте-Карло, легко программируемый для ЭВМ. В результате нужно определить q^* , т. е. величину $\mathcal{F}_{1-2, b}$, необходимую для расчета $\mathcal{F}_{1-2}$ согласно (59).

Приближенное выражение для коэффициента переноса излучения канала с адиабатными стенками можно получить, считая, что q_3^+ линейно зависит от x и равен $1/2$ при $x = L/2$. Незвестный наклон m найдем [16], потребовав, чтобы выражение (73) давало одинаковые результаты для $x_0 = 0$ и $x_0 = L/2$ (а следовательно, из-за симметрии и для $x_0 = L$). Отсюда находим

$$Lm = \frac{G(L) - F(L/2)}{(G(L) - F(L/2)) + (S(L/2) - S(L))}, \quad (77)$$

где

$$G(L) = \frac{1 + F(L)}{2}; \quad F(L) = F_{1-2}(L). \quad (78)$$

Коэффициент переноса излучения

$$\mathcal{F}_{1-2, b} = (1 - mL) G(L) = mL S(L). \quad (79)$$

Для кругового сечения хорошую аппроксимацию дает использование длины экстраполяции E :

$$mL \approx \frac{L}{L + 2E}, \quad E = 0,5 \text{ для круга.}$$

Отметим, что при наличии теплопроводности между горячим источником и концом канала при $x = L$, а также между концом канала при $x = 0$ и холодным стоком E следует считать равным нулю, при этом $mL = 1$.

На рис. 10 приведена зависимость $\mathcal{F}_{1-2, b}$ от отношения длины канала к гидравлическому диаметру (при малых L/D_H коэффициент переноса излучения не зависит от формы сечения). Как следует из (60) или (79), при

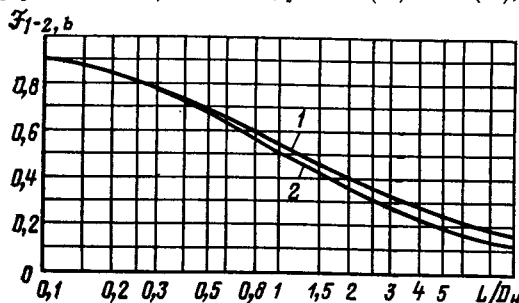


Рис. 10. Коэффициент переноса излучения для щелевого (1) и кругового (2) каналов с диффузными адиабатными стенками [приближенные значения даны согласно выражению (79)]

малых L

$$\mathcal{F}_{1-2, b} = \frac{1 + F_{1-2}}{2}, \quad L \rightarrow 0.$$

Но согласно алгебре угловых коэффициентов

$$F_{1-2} = 1 - F_{1-3} = 1 - \frac{A_3}{A_1} F_{3-1}.$$

Площадь $A_3 = PL$, где P — периметр сечения канала. При малом L коэффициент F_{3-1} тоже мал, поэтому

$$F_{3-1} = F_{3-2} = \frac{1 - F_{3-3}}{2} \approx \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что при малых L независимо от формы сечения

$$\mathcal{F}_{1-2, b} \approx 1 - \frac{PL}{4A_1} = 1 - \frac{L}{D_H} \approx \frac{1}{1 + (L/D_H)}. \quad (80)$$

Как видно из рис. 10, коэффициент переноса излучения остается нечувствительным к форме сечения и при $L/D_H \gg 1$.

Пусть, например, мы хотим определить утечку теплоты на 1 м длины ($\dot{Q}/W$) через трещину шириной 3 мм в слое изоляции толщиной 6 см. Пусть $T_1 = 600$ К, $T_2 = 300$ К. Коэффициент переноса излучения найдем, используя рис. 10,

$$D_H = \frac{4A}{P} = \frac{4WH}{2W} = 2H = 0,6 \text{ см;}$$

$$L/D_H = 6/0,6 = 10; \quad \mathcal{F}_{1-2, b} \approx 0,16.$$

Далее с помощью выражения (27) определим поток теплоты:

$$\begin{aligned} \dot{Q}/W &= qWH/W = Hq = H\mathcal{F}_{1-2, b} C_s (T_1^4 - T_2^4) = \\ &= (0,006)(0,16)(5,6697 \cdot 10^{-8})(600^4 - 300^4) = 6,6 \text{ Вт/м.} \end{aligned}$$

В литературе можно найти значения $\mathcal{F}_{1-2, b}$ для каналов различной формы сечения [19] и для суживающихся каналов [18]. Каналы с зеркальными стенками, а также каналы, излучение стенок которых описывается моделью Торреиса — Спэрроу, обсуждаются в § 2.9.4.

2.9.4. Радиационный перенос между зеркальными и не полностью диффузными поверхностями

Д. К. Эдвардс

А. Зеркальные и не полностью диффузные поверхности. Представление о полностью диффузной поверхности было искусственно введено для построения упрощенного формального математического описания радиационного переноса. Ввиду удобства это представление широко используется в инженерном проектировании и анализе и оказывается, что во многих случаях результаты, полученные таким образом и по более реалистичным аналитическим моделям, достаточно близки.

Тем не менее существует ситуация (например, пропускание длинного канала с зеркальными стенками), когда приближение полностью диффузного отражения приводит к серьезным погрешностям. Таким образом, инженер или проектировщик должен уметь проводить расчеты и в том случае, когда одна или несколько поверхностей не являются полностью диффузными.

Отражение считается полностью диффузным, если двунаправленная отражательная способность постоянна и не зависит от всех четырех углов — от двух углов падения и двух отражения. Противоположностью полностью диффузного отражения является зеркальное отражение,

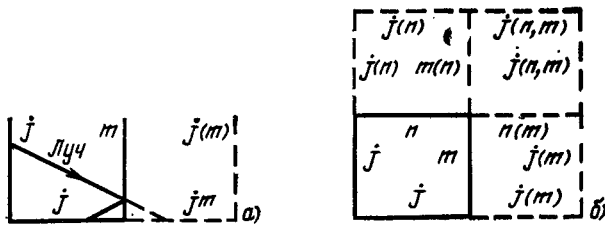


Рис. 1. Понятие зеркального отражения:
а — зеркало m ; б — два зеркала — m и n

когда двунаправленная отражательная способность в точности равна нулю всюду, за исключением угла зеркального отражения, где она имеет интегрируемую особенность. Понятие не полностью диффузной поверхности обычно вводят тогда, когда двунаправленная отражательная способность отлична от нуля и изменяется в зависимости от угла отражения. Смешанное зеркально-диффузное отражение возникает при наличии зеркальной компоненты, например от гладкой поверхности связующего глянцевого эмалевого краски, или (полностью или не полностью) диффузной компоненты, например от расположенных в слое частиц красителя той же эмалевого краски.

В. Зеркальное изображение. Представление о зеркальном изображении формально введено в анализ радиационного переноса теплоты в [1, 2]. Представление является полезным главным образом в том случае, когда рассматриваемая полость состоит лишь из нескольких плоских отражающих поверхностей, установленных таким образом, чтобы количество многократных зеркальных отражений было ограничено или составляло легко суммируемую цепь. Представление основывается на том факте, что траектория луча, прошедшего от элемента диффузной поверхности i и отраженного зеркалом m в направлении элемента диффузной поверхности j , можно принимать за непрерывную прямую линию от i до зеркального изображения точки j . Таким образом, угловой коэффициент в уравнении (6) § 2.9.3 можно ввести между поверхностью i и зеркальным изображением j при расчете переноса между i и j через m . Изображение j в зеркале m обозначим $j(m)$. Угловой коэффициент зеркального изображения запишем в виде $F_{i-j(m)}$.

При наличии другого зеркала n кроме зеркального изображения j в m необходимо учесть также изображение в n . Таким образом, получим зеркальное изображение в n отраженной в m поверхности j . На рис. 1 проиллюстрировано понятие одно- и многократного отражения. Использование представления о зеркальном изображении предполагает отсутствие зависимости отражательной способности зеркал от угла падения и, следовательно, отсутствие такой же зависимости поглощательной и излучательной способностей. В рамках данного представления пренебрегаем связанными с направлением изменениями и поляризациями.

Для модификации полученной в § 2.9.3 формулировки для плотностей потоков падающего и эффективного излучения определим увеличенный вследствие зеркального отражения угловой коэффициент:

$$F_{i-j} = F_{i-j} + \sum_m \rho_{D,m} F_{i-j(m)} + \sum_n \sum_m \rho_{D,n} \rho_{D,m} F_{i-j(m,n)} + \sum_n \dots \sum_m \rho_{D,n} \rho_{D,m} F_{i-j(m, \dots, n)}. \quad (1)$$

В формулировке непосредственно возникает только диффузная часть эффективного излучения зеркал. Можно получить

$$q_{D,m}^+ = \varepsilon_m B_m + \rho_{D,m} q_m^-, \quad (2)$$

где $\rho_{D,m}$ и ε_m в сумме больше не равны единице, а

$$\rho_{D,m} = 1 - \varepsilon_m - \rho_{S,m}. \quad (3)$$

Плотность потока падающего излучения теперь не определяется выражением (14) из § 2.9.3, а имеет вид

$$q_m^- = \sum_{j=1}^N F_{m-j} q_j^+ + q_{D,j}^-. \quad (4)$$

Уравнения (2) и (4), как ранее (13) и (14) из § 2.9.3, составляют систему из $2N$ уравнений для $2N$ неизвестных; уравнение (2) можно использовать для уменьшения до N числа уравнений с N неизвестными, исключив, например, $q_{D,j}^+$. Тогда получим

$$q_m^- = \sum_{j=1}^N F_{m-j} (\varepsilon_j B_j + \rho_{D,j} q_j^-). \quad (5)$$

Уравнение (5) можно решить методом матричной инверсии или итерациями. В последнем случае в качестве начального приближения можно выбрать $q_j^- = 0$ и при помощи уравнения (5) найти последовательность уточненных значений, повторяя эту процедуру до получения полной сходимости q_j^- .

После решения уравнения (5) найдем плотности потоков результирующего излучения и тепловые потоки из уравнения (18) § 2.9.3, которые остаются неизменными:

$$q_m = \varepsilon_m (B_m - q_m^-); \quad (6)$$

$$Q_m = \varepsilon_m A_m (B_m - q_m^-). \quad (7)$$

Как и ранее, коэффициент переноса излучения $\mathcal{F}_{i-j}$ можно определить, подставив $B_i = 1$ и $B_j = 0$ для $j \neq i$. В этом случае столбец матрицы $A_i \mathcal{F}_{i-j}$ представляет величину $-Q_j$.

С. Алгоритм Монте-Карло. Когда инженеру или проектировщику необходимо учесть зависимость от направления, поляризации или другие осложняющие расчет обстоятельства, алгоритм Монте-Карло является, по-видимому, наиболее общим для применения и достаточно легко используемым методом. Метод Монте-Карло применялся в задачах радиационного переноса теплоты в некоторых работах, обзор которых дан в [7]. Это упрощенный, приспособленный для машинных расчетов метод статистических испытаний при построении хода луча. Согласно электромагнитной теории поток энергии падающей волны при взаимодействии со стенкой разделяется на доли — отраженную, поглощенную и, возможно, прошедшую. В алгоритме Монте-Карло происходит сравнение случайного числа с найденной теоретически долей, и на основании этого сравнения весь падающий поток присваивается отраженной, поглощенной или прошедшей волне. При многократном повторении вычислительной процедуры окончательный результат получается правильным для полного потока всех лучей, поглощенной, отраженной и прошедшей составляющих. В основу алгоритма Монте-Карло положено исключение ветвления в процессе процедуры построения хода луча. Энергия не отражается и пропускается одновременно, а отражается или пропускается, и один результат следует за другим. Метод Монте-Карло имеет преимущество при вычислении $\mathcal{F}$; коэффициент переноса излучения находится непосредственно без необходимости определения угловых коэффициентов [8, 9].

Программа Монте-Карло состоит из следующих элементов.

1. Выбор точки излучения.
2. Выбор направления излучения.
3. Построение хода луча к стенке и определения номера узла на стенке,

4. Решение, является ли данный луч поглощенным, отраженным или прошедшим.

5. Выбор направления отражения или пропускания.

6. Суммирование приращения коэффициента переноса излучения.

Коротко обсудим каждый из этих пунктов.

Рассмотрим излучающую поверхность i с $B_i=1$ и все $B_j=0$, $i \neq j$. Если предположить, что из i испущено N лучей, все с энергией e_i/N (e_i — полусферическая излучательная способность поверхности i), то суммарная энергия лучей, поглощенных поверхностью j , определяет коэффициент переноса излучения $\mathcal{F}_{i \rightarrow j}$. Если поверхность i имеет одинаковые температуру и качество обработки, то, очевидно, необходимо провести усреднение по площади. Тогда координаты на поверхности A_i должны выбираться случайно и таким образом, чтобы большее количество их было равномерно распределено по всей поверхности. Для простого прямоугольника, расположенного в области $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$, проще всего выбрать два случайных числа между 0 и 1, P_1 и P_2 и положить координаты источника равными $x=aP_1$, $y=bP_2$.

В более общем случае поверхность A_i может быть расположена между $y_1(x)$ и $y_2(x)$ для интервала $x_1 \leq x \leq x_2$. Тогда можно воспользоваться одним из двух вариантов. Первый сложен для программирования, но обычно приводит к эффективному использованию компьютера; второй прост в программировании, но при этом компьютер часто используется неэффективно. Очевидно, что выбор определяется стоимостью и временными затратами на программирование, а также стоимостью и количеством необходимого машинного времени. В наиболее эффективном с точки зрения использования компьютера варианте необходимо вычислить функцию

$$f_A(x) = \frac{\int_{x_1}^x (y_2(x) - y_1(x)) dx}{\int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx}. \quad (8)$$

Затем с помощью двух независимых случайных чисел P_1 и P_2 найдем

$$x = x_1 + f_A^{-1}(P_1) \quad \text{и} \quad y = y_1(x) + P_2(y_2(x) - y_1(x)). \quad (9)$$

Менее трудоемким для программирования методом является метод простой выборки

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) P_1 \quad \text{и} \quad y = y_{\min} + (y_{\max} - y_{\min}) P_2.$$

Если $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, то вычисления продолжаются. Если неравенство не выполняется, то выбрасывается новая пара чисел P_1 и P_2 . Необходимо, чтобы оба числа P_1 и P_2 были стерты из памяти ЭВМ и выбраны новые случайные величины.

Далее требуется выбрать направления испускания источника. Как и ранее, здесь возможны два подхода. Определим следующую функцию [в данном примере положим $e(\theta, \varphi) = e(\theta)$]:

$$f_e = \frac{\int_0^\theta e(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} e(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta}.$$

Затем с новыми случайными числами P_1 и P_2 находим

$$\theta = f_e^{-1}(P_1); \quad \varphi = 2\pi P_2.$$

Альтернативой может служить простой выбор

$$\theta = \sin^{-1} \sqrt{P_1}; \quad \varphi = 2\pi P_2.$$

С учетом природы абсолютно черного излучения множитель при $\cos \theta d\Omega$ принимается постоянным, однако лучи вдоль исследуемых направлений могут иметь дополицикулярный массовый множитель $e_i(\theta, \varphi)/e_i$. При учете поляризации в дополнение к множителю $(e_i/N)(e(\theta, \varphi)/e_i)$ луч должен рассматриваться как четырехкомпонентный вектор [32].

При известных координатах источника (x_0, y_0, z_0) и фиксированном направлении уравнение прямолинейного луча можно представить в виде

$$x = x_0 + Rr_x;$$

$$y = y_0 + Rr_y;$$

$$z = z_0 + Rr_z,$$

где r_x , r_y и r_z — направляющие косинусы; например, если ось z и нормаль к поверхности i параллельны, то $r_x = \sin \theta \cos \varphi$; $r_y = \sin \theta \sin \varphi$; $r_z = \cos \theta$. Можно найти пересечение луча с плоскостью (или другой поверхностью) каждой из областей j и убедиться, что пересечение лежит в пределах рассматриваемой поверхности. Наличие пересечения при наименьшем положительном расстоянии R вдоль луча является первым попаданием.

Угол падения между лучом и нормалью к стенке p определяется из уравнения

$$\cos \theta = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = -n_x r_x - n_y r_y - n_z r_z,$$

и с учетом поляризации из (93) § 2.9.2 находятся новые направления s и p . Компоненты вектора l сдвигаются в новых координатах s и p при помощи матрицы вращения [уравнения (100) и (97) § 2.9.2]. Далее для угла падения и поляризационной составляющей определяются поглощательная α и отражательная ρ способности.

Окончательный результат можно получить двумя путями. В первом случае необходимо записать в качестве добавки к коэффициенту переноса излучения $i \rightarrow j$ доли α от имеющейся в луче энергии перед его взаимодействием со стенкой. Оставшуюся энергию припишем отраженному лучу. (Когда энергия отраженного луча станет ниже выбранного минимального значения, всю ее можно отнести к оставшейся энергии в луче.) В другом случае генерируется случайное число P . Если оно меньше или равно α , вся имеющаяся энергия поглощается. Если оно больше α , вся энергия отражается. Для построения хода луча после отражения необходимо найти направление отраженного луча. При зеркальном отражении воспользуемся уравнениями (111), (112) и (113) § 2.9.2. При полностью диффузном отражении генерируются два новых случайных числа; угол θ относительно нормали $\mathbf{n}$ равен $\sin^{-1} \sqrt{P_1}$, а угол φ относительно x равен $2\pi P_2$. В случае не полностью диффузного отражения углы θ и φ определяются таким же образом, однако массовые множители для каждого луча необходимо делить на направленную отражательную способность и умножить на двунаправленную отражательную способность для выбранного направления. Вместо этого можно воспользоваться функциями вида (8) при некотором удорожании анализа и времени программирования.

Когда намеченное число лучей (обычно от 4000 до 10 000) выпущено, регистр для хранения коэффициента переноса излучения нормализуется и результат печатается; после этого выбирается другое i .

В случае общего расчета с неселективными поверхностями адиабатность стенки учитывается посредством последующего испускания поглощенного излучения.

Рассмотрим для примера рассчитанные с помощью метода Монте-Карло кривые на рис. 10 § 2.9.3 для щеле-

вого канала бесконечной ширины с полностью диффузными, серыми, преломляющими стенками и абсолютно черными выходными отверстиями. Пример программы на языке FORTRAN приведен в табл. 1.

Д. Канал с зеркальными стенками. В каналах с зеркальными стенками построение хода лучей проводится легко как с помощью алгоритма Монте-Карло, так и без него. На рис. 2 представлены результаты расчета [13] в зависимости от отношения длины к гидравлическому диаметру для параметра ρ_N — нормальной отражатель-

Таблица 1. Пример программы Монте-Карло

```

PROGRAM SLOT
C
COMMON IX,PI
READ(5,11) ZL
11 FORMAT(F10.5)
IX=529814367
PI=3.1415927
F12=0.
DØ 101 I=1,4000
ZØ=0.
CALL RANDU(YØ)
CALL DIRECT(1,RY,RZ)
100 CONTINUE
IF(RY.LT.0.) GØ TØ 102
IF(RY.EQ.0.) GØ TØ 103
J=2
R=(1-YØ)/RY
Z=ZØ+R*RZ
ZØ=Z
YØ=1.
200 CONTINUE
IF(Z.LT.0.) GØ TØ 101
IF(Z.GT.ZL) GØ TØ 201
CALL DIRECT(J,RY,RZ)
GØ TØ 100
102 J=3
R=-YØ/RY
Z=ZØ+R*RZ
ZØ=Z
YØ=0.
GØ TØ 200
103 IF(RZ.LE.0.) GØ TØ 101
201 F12=F12+1.
101 CONTINUE
F12=F12/4000.
WRITE(6,12) ZL,F12
12 FORMAT(2X,8HFØR ZL= ,F7.2,2X,5HF12= ,E12.5)
STOP
END

SUBROUTINE DIRECT(J,RY,RZ)
COMMON IX,PI
CALL RANDU(P)
S=SQRT(P)
C=SQRT(1.-P)
CALL RANDU(P)
PIH=2.*PI*P
IF(J.EQ.2) GØ TØ 200
IF(J.EQ.3) GØ TØ 300
RZ=C*
RY=S*SIN(PIH)
RETURN
200 RY=-C*
RZ=S*CØS(PIH)
RETURN

```

```

300 RY=+C
RZ=S*CØS(PIH)
RETURN
END

SUBROUTINE RANDU(P)
COMMON IX,PI
IY=IX+65539
IF(IY) 5,6,6
5 IY=IY+2147483847+1
6 P=IY
P=P*.4656613E-9
IX=IY
RETURN
END

```

ной способности боковой стенки. Гидравлическим диаметром для квадрата является сторона, а для щели — ее удвоенная ширина. В полном объеме учтены поляризация и зависимость от направлений с использованием показателя поглощения k , равного показателю преломления n для ρ_N , равных или превышающих 0,5, и $k=0$ для меньших ρ_N . При малых значениях L/D результаты определяются только этим отношением и не зависят от сечения, поэтому кривые для двух различных сечений сливаются при разных значениях ρ_N . Однако с ростом L/D кривые резко расходятся из-за влияния поляризации в щели и сильного отражения в квадратном канале.

Изотермические стенки. Непосредственно воспользоваться пропускательной способностью канала τ полезно, когда боковые стенки изотермические и открытые концы являются абсолютно черными. Обозначим концы 1 и 2 соответственно, стенки — 3, при этом τ — коэффициент переноса излучения от 1 к 2, а $1-\tau$ — коэффициент переноса излучения от 1 к 3 или от 2 к 3. Следовательно,

$$\dot{Q}_1 = \tau A (B_1 - B_2) + (1 - \tau) A (B_1 - B_3); \quad (10)$$

$$\dot{Q}_3 = (1 - \tau) A (B_3 - B_1 + B_3 - B_2), \quad (11)$$

где A — площадь поперечного сечения. Как и ранее, B используем для обозначения $C_s T^4$ в случае серых стенок или планковской функции $\pi B_b(\lambda, T)$, если учитывается спектральная зависимость свойств поверхности.

Когда выходные сечения не являются абсолютно черными, легко провести рассмотрение с учетом потоков падающего и эффективного излучений (или необходимого

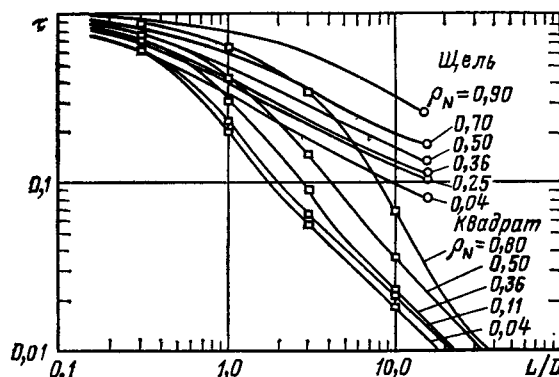


Рис. 2. Пропускательная способность щелевого и квадратного каналов с зеркальными стенками, нормальная отражательная способность которых указана на рисунке

сделать преобразование треугольник — звезда, звезда — треугольник):

$$q_1^+ = \varepsilon_1 B_1 + (1 - \varepsilon_1) q_1^-; \quad (12a)$$

$$q_1^- = (1 - \tau) B_3 + \tau q_2^+; \quad (12б)$$

$$q_2^+ = \varepsilon_2 B_2 + (1 - \varepsilon_2) q_2^-; \quad (12в)$$

$$q_2^- = (1 - \tau) B_3 + \tau q_1^+. \quad (12г)$$

Решая (12a) и (12б) относительно q_1^- , подставляя в $q_1^- = \varepsilon_1 B_1 - \varepsilon_1 q_1^-$ и умножая на A , получаем

$$\dot{Q}_1 = A \mathcal{F}_{1-2} (B_1 - B_2) + A \mathcal{F}_{1-3} (B_1 - B_3), \quad (13a)$$

где

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau}{1 - \tau^2 (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2)}; \quad (13б)$$

$$\mathcal{F}_{1-3} = \frac{\varepsilon_1 (1 - \tau) (1 + \tau - \tau \varepsilon_2)}{1 - \tau^2 (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2)}. \quad (13в)$$

Выражения для $\mathcal{F}_{2-1}$ и $\mathcal{F}_{2-3}$ получаются перестановкой индексов 1 и 2.

Если боковые стенки изотермические вследствие хорошей продольной теплопроводности, но в целом теплоизолированы, а также являются серыми, можно положить $\dot{Q}_3$ в уравнении (11) равной нулю и разрешить это уравнение относительно B_3 . После подстановки результата в уравнение (10) находим полный тепловой поток от 1 к 2:

$$\dot{Q}_{1-2} = A \frac{1 + \tau}{2} (C_s T_1^4 - C_s T_2^4) (B_3 - \text{постоянная}; \dot{Q} = 0; \text{серые стенки}). \quad (14)$$

Неизотермические стенки. Во-первых, рассмотрим задачу о нескольких изотермических участках на боковой поверхности. Считаем неизменными внешние условия и симметрию в щелевом канале. При абсолютно черных концах и зеркально отражающих стенках отраженное излучение не может распространяться в обратном направлении вдоль оси x канала. Тогда коэффициент переноса излучения от конца e к элементу поверхности si , расположенному между x_i и x_{i+1} , примет вид

$$A_{e\mathcal{F}} e-si = A_{si\mathcal{F}} si-e = A (\tau (x_i - x_e) - \tau (x_{i+1} - x_e)). \quad (15)$$

В (15) считается, что свойства обеих боковых сторон не зависят от температуры или такая зависимость была учтена при расчете $\tau(x)$. Помещая в x_j и x_{j+1} изображение выходных сечений A_{ej} и $A_{e(j+1)}$ и принимая во внимание, что разность между $\mathcal{F}_{si-e(j+1)}$ и $\mathcal{F}_{si-ej}$ является коэффициентом переноса излучения от стенки к стенке $\mathcal{F}_{si-sj}$, найдем

$$A_{si\mathcal{F}} si-sj = A_{sj\mathcal{F}} sj-si = A (\tau (x_i - x_{j+1}) + \tau (x_{i+1} - x_j) - \tau (x_{i+1} - x_{j+1}) - \tau (x_i - x_j)). \quad (16)$$

При наличии общих коэффициентов переноса излучения между концами канала, концами и стенками, а также между стенками любая задача может быть легко сформулирована и решена.

Тепловой поток на конце 1 при $x=0$ находится из уравнения (15):

$$\dot{Q}_1 = A \tau (L) (B_1 - B_2) + A \Sigma_i (\tau (x_i) - \tau (x_{i+1})) (B_1 - B_2), \quad (17)$$

где $x_2 = L$ — полная длина канала. В пределе при $x_{i+1} - x_i \rightarrow 0$ суммирование заменяем интегрированием:

$$q_1 = \dot{Q}_1 / A = \tau (L) (B_1 - B_2) + \int_0^L -d\tau / dx (B_1 - B(x)) dx. \quad (18)$$

Интегрирование по частям позволяет получить выражение, зависящее от τ , а не от ее производной:

$$q_1 = (B_1 - B(0)) - \tau (L) (B_2 - B(L)) - \int_0^L \tau (dB/dx) dx. \quad (19)$$

Например, при отсутствии температурных скачков на концах и при наличии линейных градиентов B из уравнения (19) находим

$$q_1 = (B_1 - B_2) \bar{\tau} (L), \quad (20)$$

где

$$\bar{\tau} (L) = \frac{1}{L} \int_0^L \tau (x) dx. \quad (21)$$

Величины $\bar{\tau}$ можно извлечь из приведенных в [13] значений интегралов от τ с переменным пределом интегрирования.

Теплоизолированные стенки. Рассмотрим канал, боковые стенки которого не проводят теплоты в продольном направлении, и не получают и не терпят ее через боковые поверхности, в том числе и в результате конвекции, а также являются спектрально серыми. В таком канале стенки находятся в радиационном равновесии. Тогда равенство эффективного излучения стенок излучению абсолютно черного тела $B(x) = C_s T(x)^4$ представим в следующем виде:

$$dq_R(x)/dx = 0, \quad (22)$$

где q_R — полная плотность теплового потока в положительном направлении оси x в некотором поперечном сечении x . Обобщая уравнение (19) на случай произвольного x , получаем

$$q^*(x) = \frac{q_R(x)}{B_1 - B_2} = \tau(x) + \tau(L-x) \Phi(L) - \tau(x) \Phi(0) - \int_0^x \tau(x-x') \frac{d\Phi}{dx'} dx' - \int_x^L \tau(x'-x) \frac{d\Phi}{dx'} dx', \quad (23)$$

где

$$\Phi = (B(x) - B_2) / (B_1 - B_2). \quad (24)$$

При невозможности непосредственно воспользоваться решением Монте-Карло (напомним, что адиабатная поверхность моделируется в алгоритме Монте-Карло необходимостью испускать поглощенные фотоны) и при наличии расчетных значений $\tau(x)$ можно применить приближенное решение перестановки, изложенное в § 2.9.3, положив $\Phi(x) = \Phi_0 - (x/L) \Delta\Phi$ и потребовав $q^*(0) = q^*(L/2) = q^*(L)$. В этом случае

$$\Delta\Phi = \frac{1 + \tau(L) - 2\tau(L/2)}{1 + \tau(L) - 2\tau(L/2) + 2\bar{\tau}(L/2) - 2\bar{\tau}(L)}; \quad (25a)$$

$$\Phi_0 = (1 + \Delta\Phi)/2; \quad (25б)$$

$$\mathcal{F}_{1-2, б} = \tau(L/2) + [\bar{\tau}(L/2) - \tau(L/2)] \Delta\Phi. \quad (25в)$$

Рассчитанные таким способом приближенные значения [13] представлены на рис. 3. Эти значения можно сравнить с результатами, представленными на рис. 10 § 2.9.3 для каналов с диффузными теплоизолированными стенками. Между ними имеется значительное различие. Во-первых, представленные на рис. 10 § 2.9.3 результаты

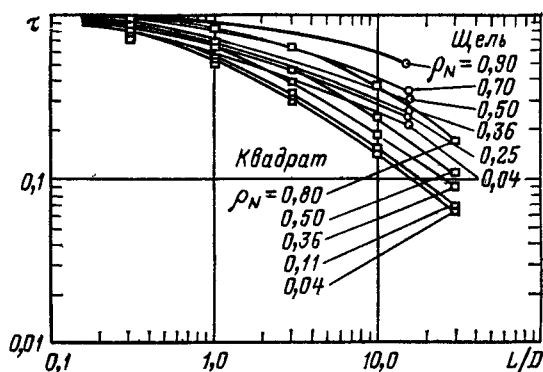


Рис. 3. Пропускательная способность щелевого и квадратного каналов с теплоизолированными и зеркальными стенками, нормальная отражательная способность которых указана на рисунке

совершенно не зависят от отражательной способности боковых стенок, поскольку отсутствует различие между диффузно отраженным и диффузно переизлученным излучением. Результаты, представленные на рис. 3, указывают на сильную зависимость от отражательной способности боковых стенок, поскольку отраженное излучение продолжает распространяться в направлении оси x . Когда отражательная способность зеркальных стенок равна единице, коэффициент переноса излучения канала равен 100% и не зависит от длины; канал становится световодом. Другое отличие связано с зависимостью коэффициента переноса излучения от поперечного сечения канала. Из рис. 10 § 2.9.3 следует, что при $L/D=5$ коэффициент переноса излучения щелевого канала лишь на 30% больше коэффициента переноса излучения канала с круглым сечением, в то время как на рис. 3 это различие для $\rho_N=0,04$ достигает 50%. Отмеченное различие возникает из-за высокой отражательной способности зеркальных стенок при больших углах падения и в щелевом канале из-за наличия s -компоненты поляризации, для которой отражательная способность еще выше.

Напомним, что в п. F из § 2.9.3 для канала с диффузными стенками (щель 3 мм в стене толщиной 6 см, разделяющей полость с температурой 600 и 300 K) были найдены тепловые потери 6 Вт/м. Для зеркально отражающих стенок с нормальной отражательной способностью 36% (что характерно для окисленного металла) рис. 3 дает коэффициент переноса излучения 0,3, и тепловые потери равны 12,4 Вт/м.

Е. Модели поверхностей. Конфигурация длинного канала такова, что его коэффициент переноса излучения, очевидно, существенно зависит от типа отражения зеркального или диффузного. Другие формы объемов, например рассмотренная в [5] кубическая замкнутая полость с зеркальными стенками, не столь чувствительны к характеру отражения от поверхности. Задача моделирования отражения от технических поверхностей возникает, главным образом, в связи с определением коэффициента переноса излучения каналов или подобных ему протяженных объектов.

Необходимо ясно различать два поверхностных эффекта — влияние геометрических свойств поверхности и влияние состояния поверхности. В [15] предполагалось, что различия в поглощательной и излучательной способностях металлов, связываемые с шероховатостью поверхности, вызваны, скорее, поверхностным повреждением, чем поверхностной геометрией. В [16] использовалась платина, которая легко обжигается без окисления, и было показано, что излучательная способность шероховатой отожженной платины практически такая же, как у гладкой и отожженной, однако существенно отличалась от

излучательной способности шероховатого неотожженного материала.

Окисление металла приводит к появлению на поверхности тонкой пленки диэлектрика или полупроводника из окисла металла, что можно моделировать тонкой оптической пленкой, обсуждавшейся в § 2.9.2. Однако пленка, возникающая на шероховатых или поликристаллических металлах, не обязательно одинакова по толщине и однородна по сечению [17].

Хотя геометрия поверхности металла, по-видимому, незначительно влияет на излучательную и поглощательную способности (исключая изменение поверхностного слоя из-за механического повреждения), очевидно, что эта геометрия определяет двунаправленные отражательные характеристики. Ниже кратко обсуждаются три типа моделей поверхности для представления двунаправленной отражательной способности в расчетах радиационного переноса.

Дифракционная модель. В [18—20] предложены модели для элементов шероховатости, имеющих незначительный наклон и малую по сравнению с длиной волны высоту. Вводя понятия среднеквадратичного размера (СКР) шероховатости σ_r , СКР наклона σ_r/a и принимая проводимость металла бесконечной, из уравнения Бэкмана [20] найдем диффузную двунаправленную отражательную способность:

$$\rho_{BA}(\theta^+, \varphi^+, \theta^-, \varphi^-, \lambda) = \frac{\pi^2 (a/\lambda)^2}{\cos \theta^+ \cos \theta^-} BFe^{-G}, \quad (26a)$$

где

$$B = \frac{1 + \cos \theta^+ \cos \theta^- + \sin \theta^+ \sin \theta^- \cos(\varphi^+ - \varphi^-)}{\cos \theta^+ + \cos \theta^-}; \quad (26b)$$

$$G = \left[2\pi \frac{\sigma_r}{\lambda} (\cos \theta^+ + \cos \theta^-) \right]^2; \quad (26a)$$

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G^m}{m!} \exp \left(-\frac{\pi}{m} \left(\frac{a}{\lambda} \right) \times \right. \\ \left. \times [\sin^2 \theta^+ + \sin^2 \theta^- + 2 \sin \theta^+ \sin \theta^- \cos(\varphi^+ - \varphi^-)] \right). \quad (26r)$$

Зеркальная отражательная способность [21, 22]

$$\rho_S(\theta^-, \lambda) = \exp \left[-\left(\frac{4\pi \sigma_r \cos \theta^-}{\lambda} \right)^2 \right]. \quad (27)$$

В [22] найдено, что соотношения [19], за исключением небольшого интервала параметров, не удовлетворяют закону сохранения энергии. Приведенные выше результаты Бэкмана в этом отношении более удовлетворительны и имеют область применимости для $\sigma_r/\lambda=0,01-0,2$ и $a/\sigma_r=5-75$.

Отмечалось (см. [2], § 2.9.2), что поверхности с небольшой шероховатостью, моделируемые уравнением Бэкмана, с инженерной точки зрения можно рассматривать как зеркальные. Углы, в которые проходит рассеяние, равны λ/λ_a и $\lambda/(\lambda \cos \theta^-)$, в то время как доля рассеянного излучения составляет $1 - \exp[-(4\pi \sigma_r \cos \theta^-)^2 (a/\lambda)^2]$. Для поверхностей с $\sigma_r \approx 0,5$ мкм и наклоном порядка или меньше 0,1 величина $a \geq 2,5$ мкм. Когда a/λ велико, количество диффузно отраженного излучения также велико, однако угол, в котором отражение диффузно, мал. Если a/λ мало, то угол, в котором отражение диффузно, велик, но количество диффузно отраженного излучения мало. В теплообмене такие поверхности можно моделировать как зеркальные.

Модель геометрической оптики. В [23] предложена простая модель для определения отражения от поверхности, элементы шероховатости которой велики по сравнению с длиной волны падающего излучения. Статистическое распределение наклонов граней было принято в

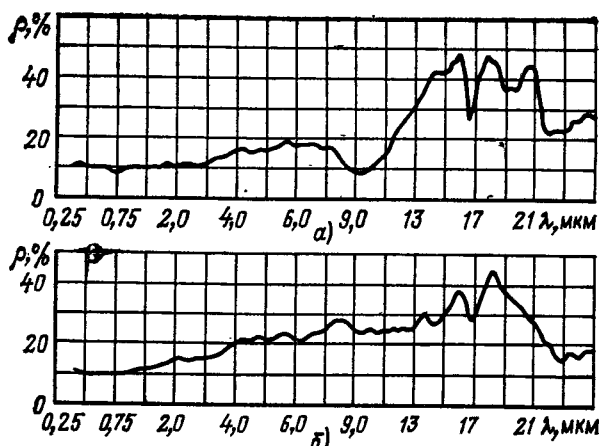


Рис. 7. Спектральная направленная отражательная способность ($\theta \approx 0$) оксидированного никонеля-Х, нагреваемого в течение 4 ч при 1000°C на воздухе, охлажденного воздухом и выдерживаемого 10 ч на воздухе при 705°C (а), и оксидированной нержавеющей стали-301, с черной оксидной пленкой АRМСО (б). Масштаб длины волн изменен при 1 и 7 мкм [45]

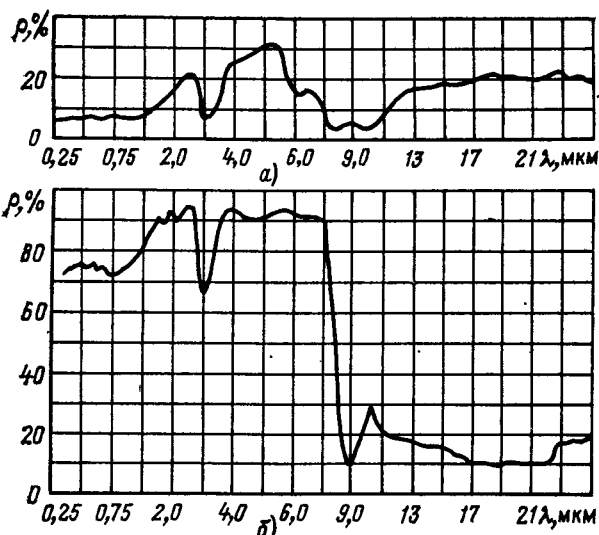


Рис. 8. Спектральная направленная отражательная способность ($\theta \approx 0$) твердоанодированного алюминия (а) и мягкоанодированного алюминия (анодированного в 10%-ном H_2SO_4 при $4,4^\circ\text{C}$ в течение 2 ч, плотность тока $55,5 \text{ A/m}^2$) (б). Масштаб длины волны изменен при 1 и 7 мкм [45] (оксидная пленка толщиной 0,025 мм на алюминии 6061—Т6)

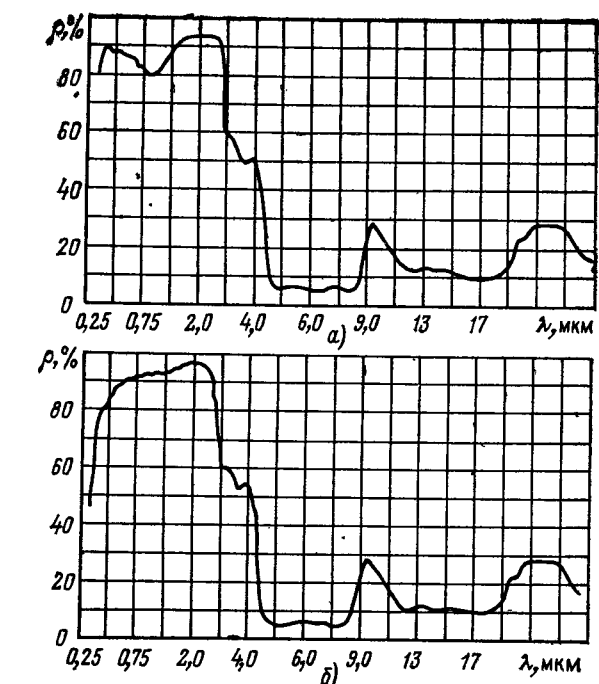
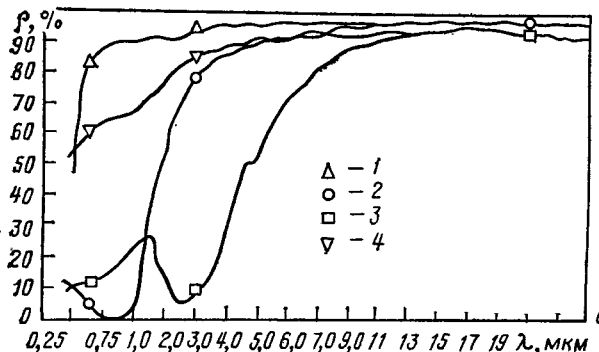


Рис. 10. Спектральная направленная отражательная способность ($\theta \approx 0$) двух зеркал с задней отражающей поверхностью: а — стекла толщиной 1,52 мм на алюминии, нанесенном путем испарения; б — стекла толщиной 1,52 мм на серебре, нанесенном путем испарения. Масштаб длины волны изменен при 1 и 7 мкм [45]

ной системы (для поддержания достаточно высокой температуры внутри корабля).

Солнечный отражатель имеет высокую отражательную способность в коротковолновой области в высокую степень черноты в длинноволновой. Примерами (см. рис. 6, б и в, 8, б, 10 и 11) могут служить белая краска, лакированный алюминий, слабоанодированный алюминий, стеклянные зеркала с покрытой металлом задней поверхностью, обработанные пламенем или плазмой керамические покрытия, керамика и обожженная эмаль. Солнечный отражатель используется тогда, когда нужно излучать нежелательную теплоту и одновременно отражать солнечное излучение. Верхние части различных конструкций и приборов, подверженных солнечному излучению, часто имеют белую окраску.

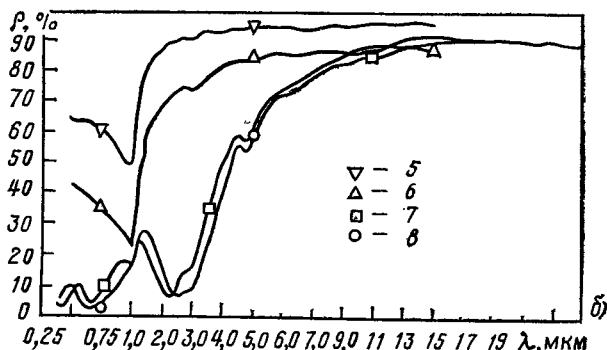


Рис. 9. Спектральная направленная отражательная способность ($\theta \approx 0$) некоторых селективных черных поверхностей: а — селективной черной Табора на меди; б — селективной черной Табора на цинке. Масштаб длины волны изменен при 1 и 7 мкм [50]; 1 — полированная медь; 2 — черный никель Табора (110—30) на меди (обработка для солнечных коллекторов); 3 — черный никель Табора (125—30) на меди (обработка для солнечных коллекторов); 4 — никелированная медь; 5 — полированный цинк; 6 — оцинкованное железо, промышленная обработка; 7 — чернь Табора (120—20) на оцинкованном железе; 8 — чернь Табора (125—20) на оцинкованном железе

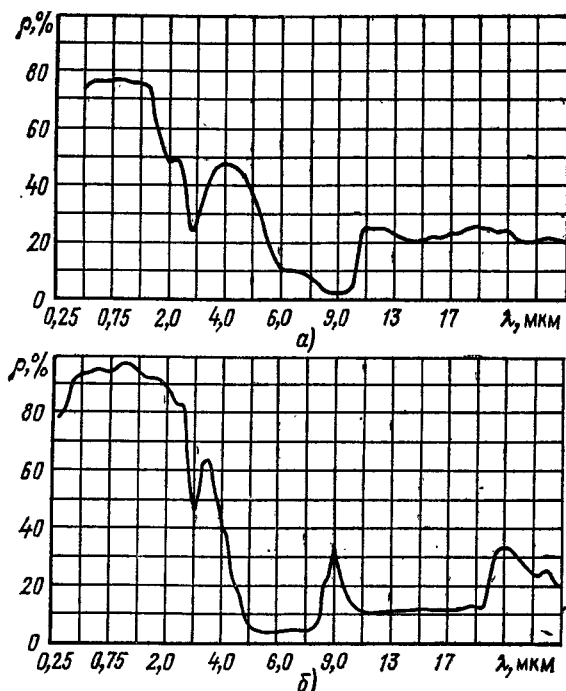


Рис. 11. Спектральная направленная отражательная способность ($\theta \approx 0$) керамик:

а — обожженной окиси алюминия и нержавеющей стали-410; б — плавленого кварца толщиной 2,8 мм. Масштаб длины волны изменен при 1 и 7 мкм [45]

2.9.3. Перенос излучения между полностью диффузными поверхностями

Д. К. Эдвардс

А. Угловые коэффициенты. Запишем уравнение (22) § 2.9.1 — основное соотношение настоящего параграфа:

$$d^3 q^\pm = I_v^\pm \cos \theta d^2 \Omega dv. \quad (1)$$

Индекс $\pm$ означает, что оно выполняется как для плотности падающего потока q^- , так и для плотности эффективного потока q^+ . Из-за этого обстоятельства определяемый ниже угловой коэффициент имеет двойной физический смысл: во-первых, угловой коэффициент F_{i-j} — это доля потока, излучаемого диффузной поверхностью i , которая попадает на поверхность j , во-вторых, угловой коэффициент F_{i-j} — это массовый множитель, с которым нужно взять поток, выходящий с диффузной поверхности j , при определении суммарного потока, падающего на поверхность i .

В последующих выражениях индексы v или λ , обозначающие спектральные величины, опущены. Как показывает анализ соотношений (22) и (23) § 2.9.1, одни и те же выражения оказываются справедливыми и для спектральных, и для интегральных величин.

Рассмотрим первое определение углового коэффициента. Поток энергии, выходящий с элементарной площадкой i , есть произведение плотности потока на площадь:

$$d^4 \dot{Q}_i = d^2 A_i d^2 q_i^+ = d^2 A_i I_i^+ \cos \theta_i d^2 \Omega.$$

Но для диффузной поверхности $I_i^+ = q_i^+ / \pi$ [см. (10) § 2.9.1]. Поток энергии, попадающий на поверхность конечных

размеров j ,

$$d^2 \dot{Q}_{i-j} = d^2 A_i q_i^+ \frac{1}{4} \iint_{\Omega_{i-j}} \cos \theta_i d^2 \Omega,$$

тогда как полный поток энергии, выходящий с диффузной поверхности i ,

$$d^2 \dot{Q}_i = d^2 A_i q_i^+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta_i d^2 \Omega = d^2 A_i q_i^+.$$

Следовательно, доля потока, выходящего с диффузной элементарной площадкой i и попадающая на поверхность j , определяется выражением

$$F_{i-j} = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_{i-j}} \cos \theta_i d^2 \Omega. \quad (2)$$

В литературе описано много различных способов определения значений интеграла (2) графическими или численными методами¹.

Приведенная форма выражения для углового коэффициента особенно удобна в тех случаях, когда пределы интегрирования просты. Так, если нормаль к элементарной площадке совпадает с осью осесимметричной поверхности (например, диска или сферы), используются сферические координаты, при этом

$$F_{i-j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \sin^2 \theta_{\max}. \quad (3)$$

Если нормаль к элементарной площадке i перпендикулярна бесконечному цилиндру (не обязательно круговому), удобно использовать систему координат, изображенную на рис. 3 § 2.9.1, в которой

$$F_{i-j} = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1 - \pi/2}^{\gamma_2 + \pi/2} \int_{\varphi_1 - \pi/2}^{\varphi_2 + \pi/2} \cos^2 \beta d\beta \cos \gamma d\gamma = \frac{1}{2} (\sin \gamma_2 - \sin \gamma_1). \quad (4)$$

Подставляя в (2) значение элемента телесного угла $d^2 \Omega$ (4) § 2.9.1, получаем

$$F_{i-j} = \frac{1}{\pi} \iint_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{R_{i-j}^2} d^2 A_j.$$

Если площадь A_i конечна, нужно провести по ней усреднение, тогда

$$F_{i-j} = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i} \iint_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R_{i-j}^2} d^2 A_j d^2 A_i. \quad (5)$$

Эта форма выражения для углового коэффициента является наиболее общей.

Важным свойством (5) является соотношение обратности

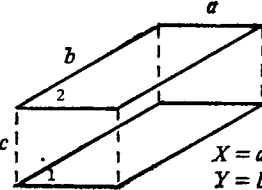
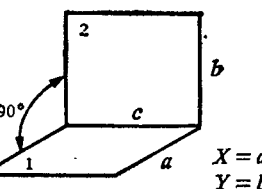
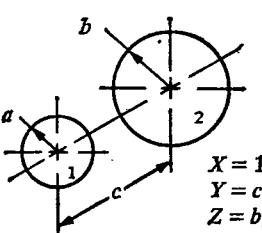
$$A_i F_{i-j} = A_j F_{j-i}, \quad (6)$$

обусловленное симметрией двойного интеграла. Кроме того, согласно определению имеет место соотношение

$$\sum_{j=1}^N F_{i-j} = 1.$$

¹ См. W. Farrell, J. Heat Transfer, 1976, v. 98, p. 311—313.

Таблица 1. Аналитические выражения для некоторых угловых коэффициентов

1.  $X = a/c$ $Y = b/c$	$F_{1-2} = \frac{2}{\pi XY} \left[\ln \sqrt{\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}} + X\sqrt{1+Y^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} + \right. \\ \left. + Y\sqrt{1+X^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} - X \operatorname{tg}^{-1} X - Y \operatorname{tg}^{-1} Y \right]$
2.  $X = a/c$ $Y = b/c$	$F_{1-2} = \frac{1}{4\pi X} \left[4X \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{X} + 4Y \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{Y} - 4\sqrt{X^2+Y^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}} + \right. \\ \left. + \ln \frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2} + X^2 \ln \frac{X^2(1+X^2+Y^2)}{(1+X^2)(X^2+Y^2)} + \right. \\ \left. + Y^2 \ln \frac{Y^2(1+X^2+Y^2)}{(1+Y^2)(X^2+Y^2)} \right]$
3.  $X = 1 + Y^2(1 + Z^2)$ $Y = c/a$ $Z = b/c$	$F_{1-2} = \frac{1}{2} (X - \sqrt{X^2 - 4Y^2Z^2})$

Ко второму смысловому значению углового коэффициента можно прийти, записав (1) (после интегрирования по ν или с индексом ν) в виде

$$d^2 q_i^- = I_i^- \cos \theta_i d^2 \Omega.$$

Но $I_i^- = I_i^+$ внутри телесного угла Ω_{ij} , поскольку среда диатермична. Поэтому

$$d^2 q_i^- = q_i^+ \frac{1}{\pi} \cos \theta_i d^2 \Omega.$$

Используя данное выше определение F_{i-j} в форме (2) для элементарной площадки нлв (5) для конечной A_i , можно записать

$$q_i^- = \sum_{j=1}^N q_j^+ F_{i-j}. \quad (8)$$

Наборы угловых коэффициентов для простых конфигураций приведены во многих работах, например [1—4, 7]. Имеется также несколько программ для вычисления угловых коэффициентов с использованием ЭВМ [5, 6]. В наше время вычислительных машин и программируемых калькуляторов старые графические способы определения F_{i-j} теряют свое значение. Применение же имеющихся выражений для F_{i-j} в замкнутой форме, представлявшее значительные трудности в прошлую эпоху математических таблиц и логарифмических линеек, теперь не вызывает затруднений. В табл. 1 приведены такие выражения для

наиболее важных случаев (для параллельных 1 и перпендикулярных 2 прямоугольников и параллельных и коаксиальных 3 кругов).

Для примера рассмотрим заполненную инертным газом топку с основанием 4×4 м² и высотой 2 м. Обозначим основание индексом 1, боковые стенки индексами 2, 3, 4, 5 и верх индексом 6. С помощью радиометра или пирометра измерены значения плотностей потоков излучения q_1^+ , q_2^+ и т. д. [если радиометр откалиброван таким образом, что он показывает радиационную температуру $T_{1, \text{ap}} = (q_1^+/C_s)^{1/4}$, то $q_1^+ = C_s T_{1, \text{ap}}^4$]. После усреднения по многим измерениям получены следующие результаты:

i	$T_{i, \text{ap}}, \text{ K}$	$q_i^+, \text{ Вт/м}^2$
1	500	3 544
2	1500	287 000
3	1200	117 600
4	1200	117 600
5	1200	117 600
6	1000	56 700

Требуется определить плотность результирующего потока теплового излучения в основании топki.

Искомую величину обозначим $-q_1$ (знак минус означает, что поток направлен к поверхности). Имеет место соотношение

$$-q_1 = q_1^- - q_1^+.$$

Величина q_1^+ нам известна, остается определить плотность падающего потока q_1^- . Последняя задается формулой (8):

$$q_1^- = q_1^+ F_{1-1} + q_2^+ F_{1-2} + q_3^+ F_{1-3} + q_4^+ F_{1-4} + q_5^+ F_{1-5} + q_6^+ F_{1-6}.$$

Нам нужно знать угловые коэффициенты F_{i-j} . Поскольку ни из одной точки поверхности 1 нельзя видеть другие точки этой же поверхности, $F_{1-1} = 0$. Выражения для расчета F_{1-j} ($j=2, 3, 4, 5$) и для F_{1-6} приведены в табл. 1:

$$F_{1-2} = \frac{1}{4\pi X} \left[4X \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) + \dots \right] = 0,14619,$$

где $X=4/4=1$, $Y=2/4=1/2$, и

$$F_{1-6} = \frac{2}{\pi XY} \left[\ln \sqrt{\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}} + \dots \right] = 0,41525,$$

где $X=4/2=2$, $Y=4/2=2$. Для проверки убедимся в том, что выполняется соотношение (7):

$$F_{1-1} + F_{1-2} + \dots + F_{1-6} = 4(0,14619) + 0,41525 = 1,00.$$

Мы могли вычислить F_{1-2} , не обращаясь к таблице, а используя соотношение (7), значение F_{1-6} и симметрию задачи, однако проверка помогает избежать возможной ошибки. Закончим вычисления:

$$\begin{aligned} q_1^- &= (0,14619)(287\,000) + (3)(0,14619)(117\,600) + \\ &+ (0,41525)(56\,700) = 117\,070 \text{ Вт/м}^2; \\ -q_1 &= 117\,070 - 3540 = 113\,500 \text{ Вт/м}^2; \\ -\dot{Q}_1 &= -q_1 A_1 = (113\,500)(16) = 1816 \text{ кВт}. \end{aligned}$$

Приведенный пример показывает, как угловой коэффициент используется в качестве массового множителя в формуле (8), как пользоваться табл. 1 и соотношением (7).

Ценность приведенных в табл. 1 соотношений станет еще очевиднее, если мы обратимся к алгебре угловых коэффициентов. Введем для $A_i F_{i-j}$ в выражениях (5) и (6) обозначения

$$\begin{aligned} G_{i-j} &= G_{j-i} = A_i F_{i-j} = \\ &= \iint_{A_i} \iint_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R_{i-j}^2} d^2 A_j d^2 A_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть площадка A_j состоит из двух площадок: A_k и A_l . Обозначим индексом $(k+l)$ полную поверхность j и введем обозначение для ядра углового коэффициента

$$K_{i-j} = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R_{i-j}^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_{i-(k+l)} &= \iint_{A_i} \left(\iint_{A_k} K_{i-k} d^2 A_k + \iint_{A_l} K_{i-l} d^2 A_l \right) d^2 A_i = \\ &= G_{i-k} + G_{i-l}. \end{aligned} \quad (10)$$

Это соотношение позволяет найти $A_1 F_{1-3}$ (рис. 1). Можно использовать программируемый калькулятор, имеющий программу вычисления G_{i-k} , для расчета $G_{i-(k+l)}$ и G_{i-k} и затем вычитанием определить G_{i-l} .

На рис. 2 показана несколько более сложная ситуация. Необходимо установить, что с учетом условий сим-

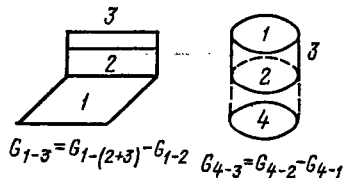


Рис. 1. Примеры использования алгебры угловых коэффициентов

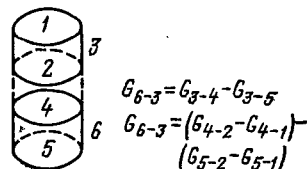


Рис. 2. Алгебра угловых коэффициентов для прямоугольников, смещенных по оси z

В обозначениях номеров площадок:

$$G_{1-3} = \frac{1}{2} [G_{(1+2)} - (3+4) - G_{1-4} - G_{2-3}];$$

в координатах x, y, z :

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, y_1, z_1, z_2) &= \frac{1}{2} [G^{(1)}(x_1, y_1, z_2) - \\ &- G^{(1)}(x_1, y_1, z_1) - G^{(1)}(x_1, y_1, z_2 - z_1)], \end{aligned}$$

где для параллельных прямоугольников (а)

$$\begin{aligned} G^{(1)}(c, a, b) &= ab F_{1-2}(X, Y); \\ X &= a/c; Y = b/c \text{ (см. табл. 1, п. 1)}, \end{aligned}$$

а для перпендикулярных прямоугольников (б)

$$\begin{aligned} G^{(1)}(b, a, c) &= ac F_{1-2}(X, Y); \\ X &= a/c; Y = b/c \text{ (см. табл. 1, п. 2)}. \end{aligned}$$

метрии $G_{1-3} = G_{4-2}$, остальное не представляет затруднений. Указанное равенство для параллельных прямоугольников не вызывает сомнений. Для перпендикулярных прямоугольников оно не столь очевидно. Для его доказательства разобьем прямоугольники на n равных полос и занумеруем их слева направо так, чтобы правая сторона m -й полосы примерно совпадала с линией, разделяющей площадки 1 и 2. В пределе бесконечно большого n совпадение становится точным. Рассматривая ближайшую пару равных полос и постепенно увеличивая их число, можно доказать лемму

$$G_{1-(2'+3'+\dots+k')} = G_{(2+3+\dots+k)-1'},$$

где числа без штриха относятся к полосам в одной плоскости, а со штрихом — в другой. С помощью леммы докажем теорему

$$\begin{aligned} G_{[1+2+\dots+m]-(m+1'+\dots+n')} &= \\ &= G_{[(m+1)+\dots+n]-[1'+2'+\dots+m']}. \end{aligned}$$

Для этого прибавим к $G_{1-(2'+3'+\dots+n')}$ член $G_{2-(3'+\dots+n')}$, взаимно уничтожим члены $G_{1-2'}$ и $G_{2-1'}$ и добавим новые члены вплоть до m -го.

На рис. 3 рассмотрены два более общих случая.

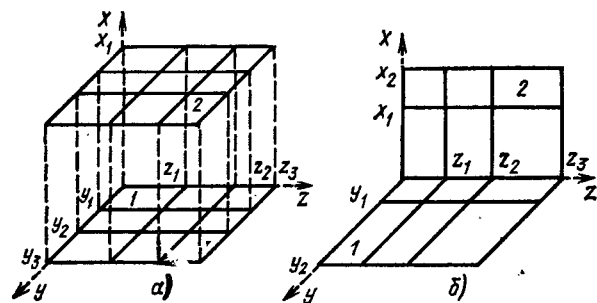


Рис. 3. Алгебра угловых коэффициентов для прямоугольников в параллельных (а) и перпендикулярных (б) плоскостях

$$G_{1-2} = G^{(5)}(x_1, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3) = \\ = G^{(4)}(x_1, y_1, y_3, z_1, z_2, z_3) - G^{(4)}(x_1, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3); \\ G^{(4)}(x_1, y_1, y_2, z_1, z_3) = G^{(3)}(x_1, y_1, y_2, z_1, z_3) - \\ - G^{(3)}(x_1, y_1, y_2, z_1, z_2);$$

$$G^{(3)}(x_1, y_1, y_2, z_1, z_2) = \frac{1}{2} [G^{(2)}(x_1, y_2, z_1, z_2) - \\ - G^{(2)}(x_1, y_1, z_1, z_2) - G^{(2)}(x_1, y_2, y_1, z_1, z_2)]; \\ G^{(2)}(x_1, y_1, z_1, z_2) - \text{см. рис. 2};$$

$$G_{1-2} = G^{(5)}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = \\ = G^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_3) - G^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2); \\ G^{(4)}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_3) = G^{(3)}(x_2, y_1, y_2, z_1, z_3) - \\ - G^{(3)}(x_1, y_1, y_2, z_1, z_2);$$

$$G^{(3)}(x_1, y_1, y_2, z_1, z_2) = G^{(2)}(x_1, y_2, z_1, z_2) - G^{(2)}(x_1, y_1, z_1, z_2), \\ G^{(2)}(x_1, y_1, z_1, z_2) - \text{см. рис. 2}$$

Значения угловых коэффициентов между длинными параллельными поверхностями, например между стержнями ядерного топлива или трубками парового котла, легко получить, используя правило нитей Хоттеля [3]. Согласно этому правилу, угловой коэффициент между цилиндром 1 (не обязательно круговым) длиной $L \rightarrow \infty$ и периметром P_1 и параллельным ему (не обязательно круговым) цилиндром 2 длиной $L \rightarrow \infty$ равен сумме длин диагональных нитей D_1 и D_2 за вычетом суммы для горизонтальных нитей L_1 и L_2 , деленной на $2P_1$:

$$F_{1-2} = (D_1 + D_2 - L_1 - L_2) / 2P_1. \quad (11)$$

Длины нитей измеряются в плоскости, перпендикулярной осям цилиндров (рис. 4). Диагонали представляют собой скрещенные нити между краями двух поверхностей, а горизонтали — нескрещенные нити. Предполагается, что нити туго натянуты и могут прилегать к поверхности тела. Например, пусть поверхность 1 — целый цилиндр $ABCDEA'$, а поверхность 2 — половина цилиндра $HIJF$. Тогда краями 1 будут A и A' , а краями 2 — F и H . При этом имеем диагональ $ABCH$ и $A'EDJF$, горизонтали ABF и $A'EHN$, периметр $P_1 = ABCDEA'$, а периметр $P_2 = HIJF$.

В. Формулировка проблемы расчета потоков падающего и эффективного излучения. В примере, приведенном выше и иллюстрирующем использование угловых коэффициентов, значения плотностей потоков эффектив-

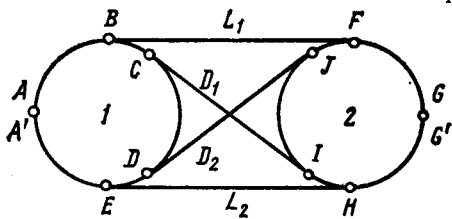


Рис. 4. Диагонали и горизонтали, используемые в правиле нитей

ного (выходящего с поверхностей) излучения предполагались известными из прямых измерений. Если проведение таких измерений сложно или невозможно, а также если мы хотим, чтобы наша модель исследовала результаты конструктивных изменений, плотности потоков эффективного излучения нужно вычислять. Это возможно сделать, если известна температура стенок или плотность теплового потока (или соотношение между ними). Индексы v и λ в дальнейшем будут по-прежнему опускаться. Следует иметь в виду, что полученные уравнения будут справедливы не только для спектральных, но и (в предположении о том, что поверхности являются серыми) для интегральных величин. Считаем поверхности полностью диффузными и непрозрачными.

Инженерная проблема переноса излучения формулируется для области, ограниченной n дискретными поверхностями. В случае необходимости для замыкания грани области используется воображаемая черная поверхность при температуре окружающей среды (окружающая среда вне незамкнутой области образует черное тело). В некоторых случаях (особенно для поллой сферы, полого цилиндра или бесконечных параллельных пластин) можно точно сформулировать задачу, переходя от дискретного (и тем самым приближенного) представления поверхности в виде суммы участков конечных размеров к непрерывному представлению в виде интегралов по элементарным площадкам. Можно начать с точной интегральной формулировки и перейти к дискретной. Для краткости ограничимся только случаем, когда поверхности дискретны.

Для того чтобы сформулировать проблему, требуется несколько соотношений. Первое представляет собой выражение для плотности результирующего потока (3) § 2.9.1, записанное для i -й поверхности:

$$q_i = q_i^+ - q_i^-. \quad (12)$$

Второе необходимое соотношение — это определение плотности потока эффективного излучения, которая для диффузной непрозрачной поверхности равна сумме плотностей потоков испускаемого и отраженного излучения:

$$q_i^+ = e_i B_i + \rho_i q_i^-, \quad (13)$$

где $B_i = q_b^+(T_i) = \pi I_b^+(T_i)$. Наконец, в качестве последнего соотношения используется выражение (8):

$$q_i^- = \sum_{j=1}^n F_{i-j} q_j^+. \quad (14)$$

Существует также ряд вспомогательных соотношений. Так, для непрозрачной поверхности, состояние которой близко к термодинамически равновесному,

$$\rho_i = 1 - \alpha_i = 1 - e_i. \quad (15)$$

Используются также соотношения для угловых коэффициентов

$$A_i F_{i-j} = A_j F_{j-i}; \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^n F_{i-j} = 1. \quad (17)$$

Из уравнений (12) — (14), полностью описывающих задачу, можно вывести несколько полезных выражений. Среди них наиболее важны те, что связывают плотность потока теплоты с другими величинами. Из (12), (13) и (15) получаем

$$q_i = e_i (B_i - q_i^-); \quad (18)$$

$$q_i^- = B_i - q_i / e_i; \quad (19)$$

$$q_i = (e_i / \rho_i) (B_i - q_i^+); \quad (20)$$

$$q_i^+ = B_i - (\rho_i / e_i) q_i. \quad (21)$$

виде $e^{-c^2\alpha^2}$. Каждая грань является одной из двух граней, формирующих симметричную V-образную канавку, продольная ориентация которой полностью случайна, а верхние кромки всех канавок находятся на одном уровне. Полагалось, что грани являются полностью зеркальными при первом отражении и полностью диффузны при взаимном отражении. В [24] модель [23] включена в алгоритм Монте-Карло. В [25] найдено, что острые вершины в модели [23] являются осложняющим фактором и предложено скруглить их, введя еще один параметр.

Включение модели [23] в метод Монте-Карло проводится в следующем порядке. Каждая поверхность параметризуется введением оптических констант n и k для граней и углом распределения наклонов $\alpha_0 = 1/c$. При желании можно зафиксировать $k=n$ и рассчитать полусферическую отражательную способность шероховатой поверхности, далее использовать измеренное значение этой величины, чтобы таким образом установить n и k для данного α_0 . В [24] предлагается находить α_0 на основе дополнительных измерений пропускательной способности щелевого канала. Когда в методе Монте-Карло при построении хода луча встречается стенка с фиксированными оптическими константами и параметром шероховатости α_0 , необходимо получить еще три числа из генератора случайных чисел. Первое, назовем его P_1 , необходимо для установления α при помощи предварительно рассчитанных и подготовленных таблиц, занесенных в память компьютера (таким же образом используются представленные в табл. 1 § 2.9.1 доли энергии интегрального излучения абсолютно черного тела для нахождения длины волны):

$$P_1 = \frac{\int_0^\alpha e^{-\alpha^2/\alpha_0^2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha}{\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha^2/\alpha_0^2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha}. \quad (28)$$

Второе случайное число определяет азимутальную ориентацию V-образной канавки:

$$\beta = 2\pi P_2; \quad (29)$$

третье дает точку входа в канавку относительно вершины. Затем в рамках алгоритма Монте-Карло продолжается движение луча в микромасштабе, от грани к грани в поперечном сечении канавки, до тех пор пока луч не поглотится или после отражения не покинет канавку через верхнюю часть. До отражения от V-образной системы построение хода луча продолжается и в микромасштабе.

В [32] внесено несколько очевидных изменений. Не обязательно рассматривать симметричные канавки. Когда левое α найдено, другое случайное число определяет пра-

вое α на основе некоторого статистического распределения, отражающего свойства шлифовального состава или инструмента для окончательной обработки поверхности. Также нет необходимости полагать угол β независимым от направления, если шлифование, машинная обработка или вращение дают преимущественную азимутальную ориентацию элементов шероховатости.

Модель рассеивающего слоя. Слой краски можно представить как облако частиц красителя, взвешенных в атмосфере окрашенной смолы или керамики, или как облако полостей, разделенных твердым диэлектриком. Тогда можно воспользоваться методом, подобным описанному в § 2.9.6 или в § 2.9.7, для построения процедуры вычисления распределения по направлениям рассеянного поверхностью излучения. Простейшая модель предложена в [26] для облака бесконечной толщины в среде с $n=1$. Вводится только единственный параметр ω_s — альбеда однократного рассеяния. Двухнаправленная отражательная способность не зависит от ϕ и определяется выражением

$$\rho_B(\theta^+, \theta^-) = \frac{\omega_s H(\omega_s, u) H(\omega_s, v)}{4(u+v)}, \quad (30)$$

где ω_s (функция λ и T) — альбеда; функция H получена в [27] и представлена в табл. 2;

$$u = \cos \theta^+; \quad v = \cos \theta^-; \quad (31)$$

направленная отражательная способность запишется в виде

$$\rho(\theta^-) = 1 - (1 - \omega_s)^{1/2} H(\omega_s, v). \quad (32)$$

Далее приведем выражение для полусферической отражательной способности

$$\rho_H(\theta^-) = 1 - (1 - \omega_s)^{1/2} H_H(\omega_s), \quad (33)$$

где индекс обозначает усреднение по полусфере, как и в уравнении (4) § 2.9.2;

$$H_H(\omega_s) = \int_0^1 H(\omega_s, v) 2v dv. \quad (34)$$

Когда рассеивающая среда имеет конечные размеры (как тонкий слой краски), вводят дополнительные параметры: оптические константы подложки и оптическая толщина покрытия, а также ее альбеда для однократного рассеяния. Еще один параметр необходим при отличии от единицы коэффициента преломления смолы. И наконец, поверхность смолы может быть шероховатой [29]. Очевидно, что глянцева эмаль имеет гладкий слой смолы, полностью покрывающий частицы красителя, чего нет в неблестящей и матовой краске.

Таблица 2. Функция H Chandrasekhara и ее полусферическое среднее [27]

ω_s	$H(\omega_s, \mu)$										$H_H(\omega_s)$
	$\mu = 0.05$	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95	
0.2	1.016	1.033	1.044	1.052	1.058	1.064	1.068	1.072	1.075	1.077	1.066
0.4	1.034	1.072	1.098	1.117	1.133	1.145	1.156	1.165	1.173	1.180	1.152
0.6	1.055	1.120	1.167	1.203	1.233	1.258	1.279	1.298	1.314	1.329	1.273
0.8	1.082	1.187	1.266	1.332	1.388	1.437	1.480	1.518	1.553	1.584	1.472
0.9	1.100	1.235	1.343	1.436	1.518	1.592	1.658	1.719	1.775	1.826	1.651
0.95	1.112	1.269	1.401	1.517	1.622	1.719	1.809	1.892	1.970	2.042	1.804
0.975	1.120	1.294	1.443	1.578	1.703	1.820	1.930	2.033	2.132	2.226	1.929
1.000	1.137	1.351	1.547	1.736	1.921	2.104	2.284	2.464	2.642	2.819	2.309

Таблица 3. Пропускательная $\mathcal{F}_{1-2}$ и поглощательная $\mathcal{F}_{1-3}$ способности канала с шероховатыми изотермическими стенками при различных отношениях L/D (L/H) [32] *

Параметр шероховатости α , град	Поперечное сечение **	$\mathcal{F}_{1-2}$				$\mathcal{F}_{1-3}$			
		1	2	4	8	1	2	4	8
0	Круг	0,922	0,860	0,760	0,620	0,078	0,140	0,240	0,380
	Квадрат	0,921	0,862	0,761	0,624	0,079	0,138	0,239	0,376
	1×2	0,941	0,891	0,810	0,683	0,059	0,109	0,190	0,317
10	Круг	0,851	0,752	0,594	0,390	0,090	0,168	0,297	0,483
	Квадрат	0,847	0,736	0,581	0,374	0,093	0,180	0,305	0,499
	1×2	0,880	0,780	0,653	0,457	0,069	0,138	0,245	0,416
20	Круг	0,745	0,588	0,399	0,208	0,098	0,186	0,329	0,479
	Квадрат	0,740	0,589	0,385	0,170	0,101	0,195	0,334	0,518
	1×2	0,792	0,652	0,477	0,251	0,076	0,151	0,273	0,448
40	Круг	0,626	0,423	0,227	0,083	0,117	0,222	0,362	0,437
	Квадрат	0,622	0,436	0,228	0,068	0,120	0,217	0,351	0,494
	1×2	0,681	0,511	0,309	0,122	0,091	0,176	0,302	0,440

* Оптические константы граней: $n=k=50$, дающие $\rho_H=0,95$.

** Поперечное сечение есть круг $\varnothing D$, квадрат со стороной D и прямоугольник $2H \times H$. Гидравлические диаметры соответственно равны D , D и $4H/3$.

Г. Каналы с шероховатыми стенками. В табл. 3 представлены результаты расчетов [32] на основе модели [23] с учетом в полном объеме поляризации. Результаты расчетов с учетом поляризации или без нее для каналов различного сечения и длины практически не отличаются для шероховатых стенок и отличаются менее чем на 5% для гладких стенок. Использование постоянной величины, равной нормальной отражательной способности, вместо изменяющейся с направлением отражательной способности приводит к погрешности до 10%. Введение фиксированной отражательной способности граней, равной полусферической отражательной способности, дает правильные результаты для шероховатых поверхностей, но для гладких поверхностей приводит к погрешности до 16%. Поскольку щель не вошла в число исследованных поперечных сечений, результаты хорошо согласуются при одинаковых отношениях длины к гидравлическому диаметру для данных значений α_0 . Интерпретация пропускательной способности канала, рассчитанной по модели [23], для выявления зеркальности в соответствии с зеркально-диффузной моделью (X_S — зеркальное отражение, $1-X_S$ — диффузное) дает следующие значения [24]:

α_0 , град	X_S
0	1,00
10	0,94
20	0,77
40	0,59

Этот результат показывает, что даже очень грубые поверхности пригодны для теплопередачи в значительной степени путем отражения. Тем не менее из табл. 3 видно, что пропускательная способность канала сильно зависит от α_0 , и, таким образом, приближение полного отражения ($\alpha_0=0$) недопустимо применять для очень грубых поверхностей. Соображение об использовании измеренной пропускательной способности канала для установлении α_0 и X_S может служить основой экспериментального определения зеркальности или шероховатости.

2.9.5. Радиационные свойства газов

Д. К. Эдвардс

А. Уравнение переноса. До сих пор предполагалось, что среда является диатермичной. При прохождении фотонов через такую среду интенсивность излучения I не изменяется. В общем случае фотоны взаимодействуют со средой. Можно выделить три процесса: общее поглощение (полное поглощение за вычетом индуцированного излучения), спонтанное излучение и рассеяние. Последнее можно разделить на рассеяние из пучка и рассеяние в пучок. В результате этих процессов происходит изменение интенсивности dI при прохождении пути ds , как это изображено на рис. 1. Уравнение для производной dI/ds называется уравнением переноса.

Поглощательные, излучательные и рассеивающие свойства среды иногда характеризуют поперечными сечениями. Примером могут служить различные сферические капли топлива, впрыскиваемого в камеру сгорания. Капля радиусом R имеет полную площадь поверхности $4\pi R^2$, а площадь ее проекции равна πR^2 . Последнюю величину называют геометрическим поперечным сечением. Рассмотрим тень, отбрасываемую каплей, размеры которой больше длины волны излучения. Оказывается, что из-за дифракции площадь тени равна $2\pi R^2$, а яркий ореол содержит половину энергии излучения, не прошедшей в область тени, т. е. половину от $I d\Omega 2\pi R^2$. Независимо от того, является ли капля большой или малой, отношение энергии покинувшего пучок излучения к энергии излучения, падающего на площадку, называют фактором эффективности ослабления Q_e . Таким образом, если принимать ореол за рассеянное излучение, т. е. отклонившееся от первоначального направления, то фактор эффективности ослабления для больших частиц равен 2. Если же принимать ореол за неотклонившееся излучение,

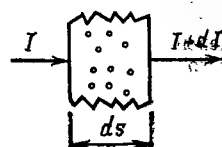


Рис. 1. Изменение интенсивности вдоль приращения длины пути

что является более разумным при инженерных расчетах переноса энергии, то для больших капель $Q_e = 1$.

Энергия, исключенная из пучка наличием тени, может быть поглощена или рассеяна по другим направлениям. Доля излучения, рассеянного по другим направлениям, называется альбедо однократного рассеяния ω_s . Долю $1 - \omega_s$ иногда называют излучательной способностью частицы. В действительности ее лучше было бы назвать поглотительной способностью, однако при этом ссылаются на закон Кирхгофа. Величину $\omega_s Q_e$ называют фактором эффективности рассеяния Q_s , а $(1 - \omega_s) Q_e$ — фактором эффективности поглощения Q_a .

Предположим, что газ содержит N_V частиц в единице объема. В объеме Ads имеется $N_V Ads$ частиц, каждая из которых отбрасывает тень $Q_e \pi R^2$. Расстояние ds настолько мало, что тени не перекрываются. Тогда доля энергии излучения, покинувшего пучок с сечением A в результате взаимодействия с частицами, определяется отношением затененной площади к полной:

$$\kappa_e ds = \frac{N_V Ads Q_e \pi R^2}{A} = Q_e \pi R^2 N_V ds.$$

Величину κ_e (м^{-1}) называют коэффициентом ослабления $\kappa_e = Q_e \pi R^2 N_V$. (1)

Коэффициенты поглощения и рассеяния представим в следующем виде:

$$\kappa_a = (1 - \omega_s) Q_e \pi R^2 N_V = Q_a \pi R^2 N_V; \quad (2)$$

$$\kappa_s = \omega_s Q_e \pi R^2 N_V = Q_s \pi R^2 N_V. \quad (3)$$

Иногда предпочтительнее описывать взаимодействие излучения в терминах массы среды. Плотность поглощающей массы в одной сфере равна:

$$\rho_a = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{solid}} N_V; \quad (4)$$

$$\pi R^2 N_V = \frac{3}{4 R \rho_{\text{solid}}} \rho_a.$$

Таким образом, уравнения (1) — (3) можно записать в следующем виде (вне зависимости от того, имеют частицы сферическую форму или нет):

$$\kappa_e = \kappa_e \rho_a; \quad \kappa_a = \kappa_a \rho_a; \quad \kappa_s = \kappa_s \rho_a. \quad (5)$$

где κ_e — массовый коэффициент ослабления; κ_a — массовый коэффициент поглощения; κ_s — массовый коэффициент рассеяния.

Хотя обсуждаемые здесь представления введены в целях простоты для облака капель топлива, они являются достаточно общими и их можно полностью использовать (с соответствующими значениями Q) для молекул газа, облака сажи частиц или других поглощающих компонентов.

Первое слагаемое в уравнении переноса, определяющее уменьшение интенсивности I вследствие поглощения и рассеяния, как видно, записывается просто: $-\kappa_e I = -(\kappa_a + \kappa_s) I$. Слагаемое, соответствующее излучаемой энергии, при наличии локального термодинамического равновесия находят, используя закон Кирхгофа. Если термодинамическое состояние частиц или молекул можно характеризовать температурой T , то для излучаемой энергии получим $\kappa_a I_b(\nu, T)$. При полном термодинамическом равновесии $I = I_b$ и потери $-\kappa_a I$ в точности компенсируются испусканием излучения $+\kappa_a I_b$. Уравнение переноса для нерассеивающей среды в состоянии локального термодинамического равновесия представим в виде

$$\frac{dI}{ds} = -\kappa_a I + \kappa_a I_b \quad (\kappa_s = 0). \quad (6)$$

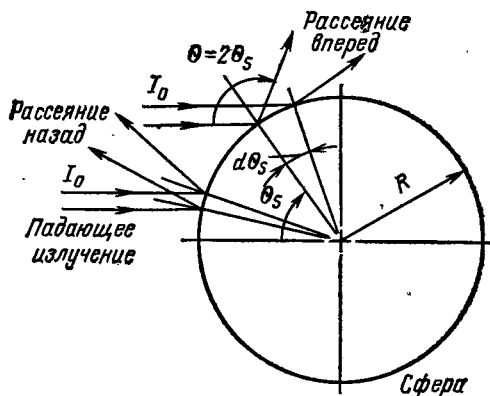


Рис. 2. Рассеяние на непрозрачной зеркальной сфере большого размера

Изотропное рассеяние является математической концепцией, аналогичной полностью диффузному отражению. При изотропном рассеянии интенсивность рассеянного на одной частице излучения не зависит от направления. Рассмотрим большую непрозрачную сферу с независимой от угла падения отражательной способностью, равной ω_s . Обратимся к рис. 2. Излучение, падающее на переднюю часть сферы под углом θ_s , отражается под углом $\theta = 2\theta_s$. Перехваченная из пучка энергия равна $I d\Omega \cos \theta dA = I_0 d\Omega \cos \theta_s \sin \theta_s R d\varphi_s R d\theta_s$, а доля ω_s этой энергии рассеивается в телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi = \sin 2\theta_s 2d\theta_s d\varphi_s$. Интенсивность рассеянного излучения определяется рассеянной энергией, приходящейся на единицу поперечного сечения и единицу телесного угла:

$$I_{\text{scat}} = \frac{\omega_s I_0 d\Omega \cos \theta_s \sin \theta_s R d\varphi_s R d\theta_s}{\pi R^2 \sin 2\theta_s 2d\theta_s d\varphi_s} = \omega_s I_0 \frac{d\Omega_0}{4\pi}. \quad (7)$$

Эта величина не зависит от угла θ_s или θ . Рассматривая облако частиц толщиной ds в пределах пучка с площадью поперечного сечения A , находим рассеяние в пучок как произведение доли площади, перекрываемой частицами $\kappa_e ds$, и величины $I_0 d\Omega_0 / 4\pi$. Учитывая, что $\omega_s = \kappa_e = \kappa_s$, и интегрируя по всему телесному углу, в котором падает излучение, получаем слагаемое, учитывающее рассеяние в пучок, необходимое для окончательной записи уравнения переноса при изотропном рассеянии:

$$\frac{dI}{ds} = -(\kappa_a + \kappa_s) I + \kappa_a I_b + \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_0^{4\pi} I d\Omega. \quad (8)$$

Если рассеяние является анизотропным, как, например, в случае больших непрозрачных зеркально отражающих частиц при зависимости отражательной способности ω_s от угла θ_s , то угловая зависимость объясняется появлением под интегралом так называемой фазовой функции p . Для сферических частиц p зависит только от θ ($\theta = 2\theta_s$). В общем случае несферических частиц, выступающих в цепочки, например в магнитном поле, p должна быть двунаправленной функцией. С учетом поляризации p становится двунаправленной матрицей 4×4 , а I — четырехкомпонентным вектором.

В. Измерение радиационных характеристик газа. Проведение расчетов, не вызывающих сомнения у инженера, зачастую невозможно из-за отсутствия необходимых данных. В практических ситуациях часто неизвестен даже состав среды. Например, возникает вопрос о количестве сажи в пламени горелки или выхлопной струе ракетного двигателя. Даже когда известно, например, сколько золы присутствует в угольной камере сгорания, может оказаться неизвестным распределение частиц по

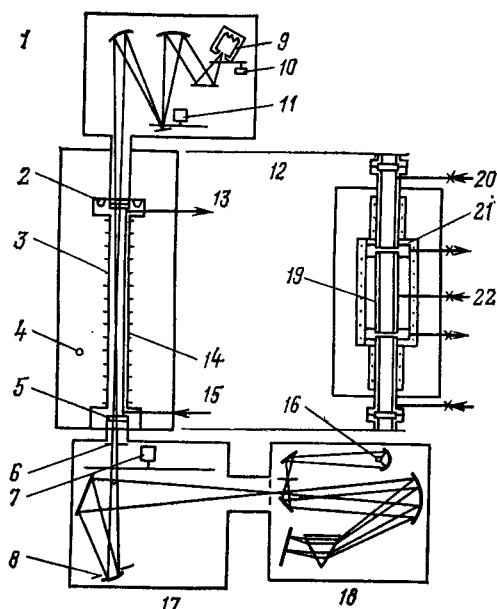


Рис. 3. Установка для измерения радиационных характеристик газа [5]:

1 — корпус источника; 2 — главный нагреватель; 3 — охранный нагреватель; 4 — термическая изоляция; 5 — нижнее окно; 6 — ограничитель поля; 7 — нижний прерыватель; 8 — ограничитель; 9 — источник; 10 — задатка; 11 — верхний прерыватель; 12 — заменяемая измерительная ячейка; 13 — выход газа; 14 — неизотермическая измерительная ячейка; 15 — вход газа; 16 — детектор; 17 — корпус нижнего зеркала; 18 — призма монохроматора; 19 — изотермическая измерительная ячейка; 20 — вход инертного газа; 21 — безоконая герметизация; 22 — вход для исследуемого газа

размерам. Не подтвержденные практикой расчеты едва ли пригодны для установления надежных проекторочных данных. Поэтому почти всегда приходится измерять необходимые свойства или каким-либо другим способом приводить расчетные модели в соответствие с физической реальностью.

Основной экспериментальных методов измерения радиационных характеристик газа является просматривание при помощи радиометра слоя газа, помещенного в замкнутый объем или находящегося в иных условиях. Радиометр может быть интегрирующим прибором типа калориметра или радиометром на основе термисторного моста, прибором малого разрешения, таким, как призма или спектрометр с переменным фильтром, а также прибором с высоким спектральным разрешением — типа прецизионного решеточного спектрометра или интерферометра. Газ помещают в ячейку с окнами или исследуют в открытой струе. Окна, в свою очередь, могут быть нагретыми или холодными. В промежуточном варианте газ заключают в ячейку с открытыми окнами. Обзор экспериментальных методов приведен в [4, 5].

На рис. 3 представлен пример экспериментальной установки. В нижней части рисунка показана детекторная система малого разрешения, основой которой является призма из кристалла галогенида щелочного металла (NaCl, KBr), разворачивающая падающее на входную щель излучение в инфракрасную «радугу». Выходная щель вырезает инфракрасное излучение требуемой длины волны для последующего преобразования при помощи термпары. Падающее на термпару излучение имеет постоянную составляющую, формируемую тепловым излучением полости монохроматора, и флуктуирующую составляющую, проходящую через входную щель. Флуктуирующая составляющая возникает в результате прерывания по-

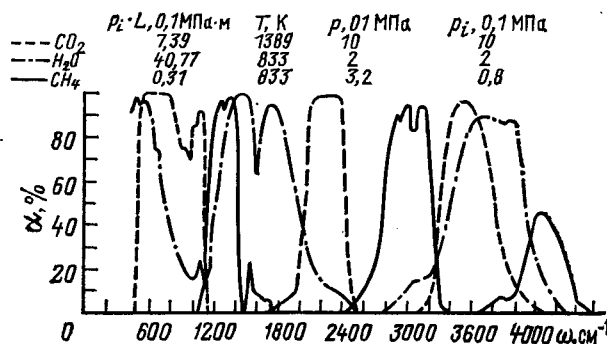


Рис. 4. Спектр при низком разрешении [19]

тока с частотой 13 раз в 1 с при помощи вращающейся крыльчатки. При необходимости измерить пропускательную способность газа излучение источника прерывается в верхней части заполненной газом ячейки и таким образом попадающее на детектор собственное излучение газа остается неизменным. Не изменяющийся во времени поток излучения на детектор непрерывно греет его, вследствие чего на выходе возникает электрический сигнал постоянного тока, или так называемое смещение. Изменяющийся во времени поток излучения на выходе детектора создает переменную составляющую электрического сигнала, которая затем усиливается и записывается. Таким образом, если включен верхний прерыватель, а нижний выключен и открыт, детектируются только прошедшая часть падающего излучения. Поделив сигнал от прошедшего излучения на сигнал, полученный в отсутствие ячейки, получим пропускательную способность. Вычитая из единицы пропускательную способность, находим экспериментальное значение поглощательной способности, пример которой показан на рис. 4.

При необходимости измерить излучение газа источник в верхней части рисунка не включается, верхний прерыватель также выключен и открыт, а нижний работает. Тогда для изотермического газа преобразованный сигнал соответствует $(1 - e^{-\kappa L})/b(T_g, \nu)$. Для предохранения окон ячейки (которые также изготавливают из кристаллов солей галогенидов щелочных металлов) от воздействия высоких температур и химически активных газов используют изотермическую диагностическую ячейку, изображенную на рисунке. Исследуемый газ удерживается тяжелым прозрачным инертным газом, который в свою очередь отжимается легким прозрачным инертным газом (гелием).

Экспериментально обнаружено, что одноатомные газы, такие, как He, Ne, Ar, поглощают излучение с длинами волн существенно короче 1 мкм в линиях, аналогичных наблюдаемым в солнечном спектре. Большая часть сказанного относится и к симметричным двухатомным молекулам типа N_2 и O_2 , за исключением области очень высоких давлений, когда вследствие молекулярных соударений возникает наведенный дипольный момент. Асимметричные двухатомные молекулы типа CO, NO и многоатомные молекулы типа CO_2 , H_2O сильно поглощают в определенных интервалах волновых чисел (или длин волн), которые называются полосами поглощения (рис. 4). Из рисунка видно, что CO_2 имеет полосы 15, 4,3 и 2,7 мкм. Как следует из рис. 4, полосы 9,4 и 10,4 мкм в окрестности 1000 см^{-1} (напомним, что $\nu, \text{см}^{-1} = 10^4/\lambda (\text{мкм})$) сильно поглощают при температурах существенно выше 300 К, однако при 300 К поглощение отсутствует. Такие полосы называют горячими. При высоких давлениях ($P > 0,5 \text{ МПа}$) в CO_2 появляется индуцируемая давлением полоса 7,5 мкм.

С. Качественные замечания о физических основах излучения газов. Обратимся к квантовомеханическому объяснению наблюдаемых явлений. Колебательные уровни

молекулы квантованы, поэтому с молекулой взаимодействуют фотоны, энергия которых находится в резонансе с разностью энергий между уровнями. Взаимодействие происходит при наличии переменного электрического дипольного момента колебательной моды; из-за невыполнения этого условия поглощение симметричных двухатомных молекул отсутствует. При высоком разрешении видно, что полосы имеют линейчатую структуру, т. е. энергия колебательных уровней расщеплена. Расщепление является следствием квантования энергии вращательных уровней, и при поглощении или испускании колебательный и вращательный переходы происходят одновременно. С повышением давления интенсивность линий падает, а ширина увеличивается из-за возмущения энергии вращательных уровней соударениями с молекулами. При очень больших давлениях линии могут перекрыться, и их невозможно наблюдать. С ростом давления наблюдается некоторое увеличение изображенной на рис. 4 поглощательной способности, измеренной с малым разрешением. Влияние температуры более существенно, с ростом температуры полосы становятся шире, а интенсивность в центре уменьшается. Наблюдая спектр при высоком разрешении, можно увидеть, что линии, бывшие очень слабыми, с повышением температуры усиливаются, а сильные линии начинают поглощать слабее и становятся более узкими. Последнее объясняется уменьшением частоты соударений, если температуры не столь высоки, чтобы проявилось доплеровское уширение, связанное со сдвигом частоты при движении молекул к наблюдателю или от него. При появлении слабых линий между сильными может произойти перекрытие линий даже в том случае, если каждая ударно-уширенная линия является узкой.

Температуры, существенно превышающие уровень температур в печах и камерах сгорания, наблюдаются в дугах, в ударно нагретых газах перед движущимися с гиперзвуковой скоростью аппаратами, такими, как планетарные зонды, возвращающиеся космические корабли, и в ядерных взрывах. При столь высоких температурах в спектрах появляются линии одноатомного газа и электронные системы полос многоатомных газов, обязанные переходам между электронными уровнями энергии — связанно-связанным переходам. Фотоионизация, или связанно-свободные переходы, возникают в том случае, когда процессы с участием фотонов и термического возбуждения достаточны для ионизации газа. Эти переходы дают непрерывный спектр, являющийся противоположностью линиям или полосам поглощения, поскольку фотон, обладая энергией ниже требуемого для ионизации минимального значения, тем не менее может вза-

действовать с атомом или молекулой. Когда же температура возрастает настолько, что ионизация газа становится существенной, сталкивающиеся электроны могут испускать или поглощать фотоны в результате так называемых свободно-свободных переходов, или тормозного излучения.

Необходимое для фотоионизации минимальное значение энергии определяет порог поглощения, как это показано на рис. 5 [9] для концентрации азота 10^{17} см $^{-3}$ и при температуре 10 эВ (электрон-вольт — единица энергии, используемая для обозначения температуры $E = kT$ (1 эВ = 116 000 К) и волнового числа $E = h\nu$ (1 эВ = 8066 см $^{-1}$). Когда в газовой смеси имеются компоненты с различными энергиями ионизации, то зависимость коэффициента поглощения от длины волны, построенная в двойном логарифмическом масштабе, часто имеет пилообразный вид. Следует отметить, что пороги не являются очень резкими из-за наличия в высокотемпературном газе распределения по энергетическим состояниям.

Д. Определение спектральных, полосных и интегральных характеристик. Введение спектральных и интегральных характеристик не представляет никаких проблем для непрерывного спектра излучения; они подобны обсуждавшимся ранее характеристикам поверхностей. Например, облако частиц различного размера дает непрерывное излучение. Под словом «непрерывное» понимается тот факт, что величины κ_a и κ_s , а следовательно, и I меняются медленно и непрерывно с изменением длины волны или волнового числа. Например, спектральный массовый коэффициент поглощения сажи можно с достаточной точностью представить в виде

$$\kappa_a = \kappa_0 (\lambda/\lambda_0)^{-n}, \quad (9)$$

где $n \sim 1$. Спектральную излучательную способность вдоль луча длиной L изотермического облака получим в результате интегрирования уравнения переноса (6), считая $I_b = \text{const}$. Используя уравнение (5) и принимая $I=0$ при $s=0$, получаем

$$I = I_b (1 - e^{-\rho_a \kappa_a L}). \quad (10)$$

Отсюда видно, что спектральная степень черноты (и поглощательная способность) равна:

$$\varepsilon_\lambda = 1 - e^{-\rho_a \kappa_a L}. \quad (11)$$

Тогда для интегральной степени черноты получаем

$$\varepsilon = \int_0^\infty I d\lambda / \int_0^\infty I_b d\lambda = \int_0^1 (1 - e^{-\rho_a \kappa_a L}) df_e(\lambda T), \quad (12)$$

где f_e — внешняя доля интегрального излучения черного тела. При медленном и непрерывном изменении спектральных свойств найдем [например, уравнение (79) § 2.9.2], что интегральные характеристики можно приблизительно найти через спектральные при $f_e(\lambda T) \approx 0,49$. Следовательно, грубое приближение ($\pm 7\%$) по уравнению (12) для сажистых частиц дает

$$\varepsilon \approx 1 - e^{-\rho_a L \kappa_0 (\lambda_m/\lambda_0)^{-n}};$$

$$\lambda_m T = 4050 \text{ мкм} \cdot \text{К}; \quad \kappa_0 = 5600 \text{ м}^2/\text{кг}; \quad n = 1,086. \quad (13a)$$

Более точное выражение ($\pm 1\%$) получается при вычислении уравнения (12) с помощью метода трехточечных гауссовых квадратур:

$$\varepsilon \approx \sum_{i=1}^3 a_i (1 - e^{-\rho_a L \kappa_0 (\lambda_i/\lambda_0)^{-n}}); \quad (13b)$$

$$a_1 = 0,28; \quad a_2 = 0,44; \quad a_3 = 0,28;$$

$$f_e(\lambda_1 T) = 0,11; \quad f_e(\lambda_2 T) = 0,50; \quad f_e(\lambda_3 T) = 0,89;$$

$$\lambda_1 T = 2260; \quad \lambda_2 T = 4110; \quad \lambda_3 T = 8900 \text{ мкм} \cdot \text{К}.$$

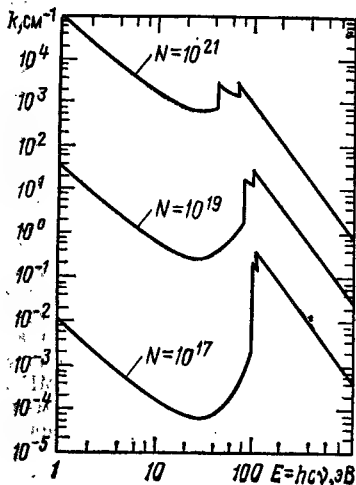


Рис. 5. Поглощение высокоэнергетической области спектра диссоциированного азота [9]

Трехточечное или трехволновое приближение эквивалентно предлагаемому в [17] приближению трех серых полос, которые имеют граничные длины волн, соответствующие $f(\lambda T) = 0; 0,28; 0,28 + 0,44 = 0,72$ и 1.

В отличие от облака распределенных по размерам частиц молекулярный газ поглощает и испускает излучение в линиях, формирующих полосы. Поэтому коэффициент поглощения очень резко меняется в зависимости от волнового числа или длины волны и спектральный коэффициент поглощения определяется суммарным вкладом всех линий:

$$k_a(\nu) = \sum_i k_i(\nu), \quad (14)$$

где каждая линия характеризуется своей собственной формой, интенсивностью и положением. Например, при ударном уширении для лоренцевской формы линий получим

$$k_i(\nu) = \frac{S_i \gamma_i}{\pi [(\nu - \nu_i)^2 + \gamma_i^2]}. \quad (15)$$

Величина S_i (ее не следует путать с интенсивностью источника рассеяния) является интегральной интенсивностью линии:

$$S_i = \int_0^\infty k_i(\nu) d\nu \approx \int_{-\infty}^{+\infty} k_i d(\nu - \nu_i). \quad (16)$$

Параметр γ_i называют полушириной линии, поскольку

$$k_i(\nu - \nu_i = \gamma_i) = \frac{1}{2} k_i(\nu - \nu_i = 0). \quad (17)$$

При комнатной температуре типичные значения γ примерно составляют 10^{-1} см^{-1} . Расстояние между линиями принимает значения от 10^0 до 10^1 см^{-1} . Следовательно, k_a может изменяться на несколько порядков величины при незначительном изменении волнового числа.

Обычно инженеры или научные работники предпочитают проводить расчеты с более плавно меняющимися функциями. Тогда степень черноты $1 - e^{-\rho_a k_a L}$ или пропускательную способность $e^{-\rho_a k_a L}$ обычно сглаживают, усредняя по интервалу, равному нескольким расстояниям между линиями:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\Delta\nu} \int_{\nu - \Delta\nu/2}^{\nu + \Delta\nu/2} e^{-\rho_a k_a L} d\nu. \quad (18)$$

Вследствие такого сглаживания для результата не обязательно выполнение закона Бера — Ламберта, т. е. $\bar{\tau} \neq e^{-\bar{k}_a \rho_a L}$. Вместо этого необходимо принять расположенные в виде ряда линии и в соответствии с уравнением (18) провести интегрирование. Такой подход для вычисления $\bar{\tau}$ называется моделью узкой полосы. Например, согласно предложенной Гуди модели узкой полосы имеем

$$\bar{\tau} = \exp \left\{ \frac{-(S/d) X}{\sqrt{1 + [(S/d) X / (\pi \gamma d)]}} \right\}, \quad (19)$$

где $X = \rho_a L$ — произведение плотности поглощающей компоненты на длину пути; S/d и $\eta = \pi \gamma d$ являются параметрами узкополосной модели и равны соответственно отношениям средней интенсивности линий к расстоянию между линиями и средней ширине линий также к среднему расстоянию.

Таким образом, имеются две спектральные величины: истинная спектральная пропускательная способность τ , которая действительно подчиняется закону Бера — Ламберта, но имеет столь сильную зависимость от волнового числа, что практически непригодна для проведения рас-

четов, и сглаженная спектральная пропускательная способность $\bar{\tau}$. Сглаженная спектральная излучательная способность газа $1 - \bar{\tau}$ зависит от X , как это следует из уравнения (19). При очень малых X излучательная способность линейно возрастает с увеличением X . При некотором увеличении X излучательная способность может расти как $\sqrt{X}$, и, наконец, при очень больших X она увеличивается как $1 - e^{-c \sqrt{X}}$ (в соответствии с особенностями модели узкой полосы). Ширина линий зависит от частоты соударений, а значит, и от давления и состава газа; следовательно, если излучательная способность изменяется как $\sqrt{X}$, это же соответствует зависимости $\sqrt{P_e}$. При высоких давлениях, когда отношение $\pi \gamma d$ становится большим, начинает выполняться закон Бера — Ламберта, причем S/d играет роль $\bar{k}_a$. В этом случае линии становятся перекрытыми.

В рамках широкополосной модели предписывается, каким образом S/d и η зависят от волнового числа. Модель может быть обоснованной, т. е. опирающейся на квантовомеханические представления, или произвольной. К числу первых относится модель осциллятора — жесткого ротатора, которая дает следующие приближенные выражения:

$$\frac{S}{d} = \left(\frac{S}{d} \right)_0 (\nu - \nu_0) e^{-(\nu - \nu_0)^2 / \omega^2}, \quad (20)$$

$$\eta = \beta P_e. \quad (21)$$

К числу вторых относится модель Шака

$$\frac{S}{d} = \begin{cases} 0 & \text{для } |\nu - \nu_0| > \frac{\omega}{2}; \\ \left(\frac{S}{d} \right)_0 \left(1 - 2 \left| \frac{\nu - \nu_0}{\omega} \right| \right) & \text{для } |\nu - \nu_0| \leq \frac{\omega}{2}, \end{cases} \quad (22)$$

$$\eta = \infty$$

и экспоненциальная модель

$$\frac{S}{d} = \left(\frac{S}{d} \right)_0 \exp(-2 |\nu - \nu_0| / \omega); \quad (23)$$

$$\eta = \beta P_e. \quad (24)$$

Уравнения (20) и (21) или (23) и (24) составляют модель, обладающую приемлемой точностью для представления экспериментальных характеристик газа, поскольку она учитывает структуру линий и полосы. Таким образом, в модели широкой полосы вводится три параметра: ω — параметр ширины полосы; β — параметр ширины линий; α — интегральная интенсивность полосы (не путать с поглощательной способностью):

$$\alpha = \int_0^\infty \frac{S}{d} d\nu \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S}{d} d(\nu - \nu_0), \quad (25)$$

с помощью которой находится величина $(S/d)_0$. Начало полосы определяет ее положение в спектре.

Что касается CO_2 , то ω_k для k -й полосы поглощения мало. Даже для полос H_2O неразумно полосное приближение основывать на представлении о значительном разнесении начал полос по сравнению с шириной полос, т. е. $\omega_k \ll \Delta\nu_k$. Таким образом, полосное приближение должно быть следующим:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (1 - e^{-\rho_a k_a L}) I_b(\nu) d\nu \approx \\ & \approx \sum_k I_b(\nu_k) \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\rho_a k_a L}) d(\nu - \nu_k). \end{aligned} \quad (26)$$

Величина с размерностью волнового числа является эквивалентной шириной полосы

$$A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\rho_{ak}L}) d(\nu - \nu_k); \quad (27)$$

$$A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \bar{\tau}) d(\nu - \nu_k). \quad (28)$$

Вводя это понятие, получаем для модели широкой полосы

$$A_k^* = \frac{A_k}{\omega} = F(\tau_{H,k}, \eta_k), \quad (29)$$

где $\tau_{H,k}$ — оптическая глубина в максимуме полосы (для экспоненциальной модели), причем

$$\tau_{H,k} = \alpha_k X / \omega_k. \quad (30)$$

В п. Е приведены выражения, физические величины и графический материал для нахождения $\tau_{H,k}$ и η_k для газообразных продуктов сгорания H_2O , CO_2 , CO , NO , SO_2 и топлива CH_4 . Указанные величины получены для ударно-уширенных линий. При очень высоких температурах и малых давлениях для газов с малым отношением ширины линий к среднему расстоянию (таких, как HF и HCl) необходимо учитывать доплеровское уширение.

Как видно, поглощательные характеристики полосы, проинтегрированные по спектру, тем не менее не являются полными (интегральными), поскольку интегрирование проводилось не по всему спектру. Интегральные степень черноты и поглощательная способности определяются на основе интегрирования по всему спектру. Рассмотрим газ с температурой T_g , окруженный средой, излучающей как черное тело с температурой T_e . Интегральная степень черноты определяется выражением

$$\varepsilon_g = \frac{\int_0^\infty (1 - \bar{\tau}) I_b(\nu, T_g) d\nu}{\int_0^\infty I_b(\nu, T_g) d\nu}; \quad (31)$$

$$\varepsilon_g \approx \frac{\sum_k A_k I_b(\nu_k, T_g)}{C_s T_g^4 / \pi} = \sum_k b_k A_k = \sum_k b_k \omega_k A_k^*, \quad (32)$$

где

$$b_k = \frac{\pi I_b(\nu_k, T_g)}{C_s T_g^4} = \frac{B(\nu_k, T_g)}{C_s T_g^4}. \quad (33)$$

Аналогично для интегральной поглощательной способности имеем

$$\alpha_g = \frac{\int_0^\infty (1 - \bar{\tau}) I_b(\nu, T_e) d\nu}{\int_0^\infty I_b(\nu, T_e) d\nu}; \quad (34)$$

$$\alpha_g \approx \sum_k b_k(T_e) \omega_k(T_g) A_k^*. \quad (35)$$

Иногда возникает необходимость в быстрой оценке интегральной поглощательной способности по графикам расчетных или экспериментальных значений интегральных степеней черноты ε_g . Приближенные правила для нахождения α_g по ε_g следуют из уравнений (32), (33) и (35). Способ заключается в нахождении масштабной длины L' ,

извлекаемой из степени черноты при температуре окружающей среды и скорректированной с учетом температуры газа:

$$\alpha_g(T_e, T_g, PL, P_e) \approx (T_g/T_e)^{1/2} \varepsilon_g(T_e, PL', P_e). \quad (36)$$

Целесообразность нахождения ε_g при температуре T_e связана с правильностью величины $b_k(T_e)$. Поправка $(T_g/T_e)^{1/2}$ основывается на том факте, что $\omega_k(T_g)$ меняется как $T_g^{1/2}$. Метод для определения L' должен включать также изменения $\tau_{H,k}$ и η_k с температурами. При высоких температурах и давлениях линии перекрыты, и, таким образом, большие значения η_k несут незначительный вклад в этом случае

$$\tau_{H,k} = \frac{\alpha_k(T_g) \rho_a(T_g) L}{\omega_k(T_g)} = \tau'_{H,k} = \frac{\alpha_k(T_e) \rho_a(T_e) L'}{\omega_k(T_e)}. \quad (37)$$

Для практически важных основных полос α_k не зависит от T_g , и мы имеем правило Пеннера

$$L' = L(T_e/T_g)^{3/2} (\eta_k > 1). \quad (38)$$

При умеренных температурах и атмосферном давлении A_k^* зависит от $\eta_k \tau_{H,k}$, а η_k изменяется примерно как $T_g^{1/2}$ ($300 < T_g < 1200$ K). В этом случае справедливо правило Хоттеля

$$L' = L(T_e/T_g) \quad \eta_k < 1, \quad \tau_{H,k} > \frac{1}{\eta}. \quad (39)$$

На рис. 6 и 7 представлены интегральные степени черноты газообразных CO_2 и H_2O соответственно. Диаграммы даны для малой примеси излучающей компоненты в азоте при полном давлении 0,101 МПа. Ниже поясняется метод построения диаграмм и дается способ использования их при других полных давлениях. В пределах применимости уравнение (38) не требует поправки на давление. В пределах применимости уравнение (39) $L(T_e/T_g)$ умножается на P_e , т. е.

$$L' = L(T_e/T_g) P_e. \quad (40)$$

Это уравнение и уравнение (39) при $T_e = T_g$ также используют в выражении для степени черноты. Безразмер-

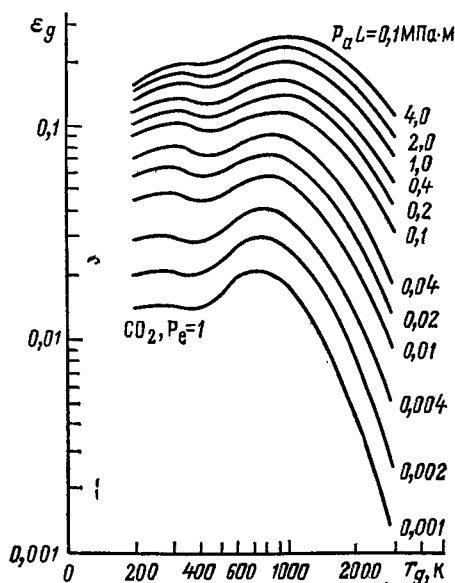


Рис. 6. Интегральная степень черноты газообразного CO_2 [19]

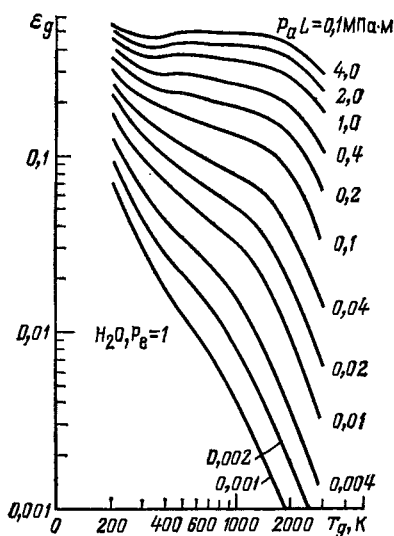


Рис. 7. Интегральная степень черноты газообразной H_2O [19]

ный эквивалент уширяющегося давления P_e находят из уравнения (57).

Е. Радиационные характеристики молекулярных газов. Приняв узкополосную [см. уравнение (19)] или широкополосную [см. уравнения (23), (24)] модель, необходимо определить следующие величины: ширину полосы ω_k , отношение ширины линий к расстоянию между ними β_k , интенсивность полосы α_k или оптическую глубину $\tau_{H,k} = \alpha_k X / \omega_k$. Эти данные позволяют найти спектральные характеристики по (19) и (23), (24) или эквивалентную ширину полосы по (27) — (29). Ниже изложены способы вычисления ω_k , β_k и α_k или $\tau_{H,k}$, а также определения F из уравнения (29).

Параметры широкополосной модели приведены в табл. 1. Для газа даны главные излучающие полосы, такие, как полоса 6,3 мкм H_2O . Каждая полоса представлена набором величин, характеризующих изменение колебательных квантовых чисел $\pm \delta_1, \pm \delta_2, \pm \delta_3 \dots$ (в частности, для полосы 6,3 мкм H_2O эти величины равны 0, 1, 0). Приводится число колебательных степеней свободы ($m=3$ для H_2O), а также колебательный квант v_i и статистический вес g_i каждой из них. Полоса, для которой отнюдь не только одно значение δ_i и оно равно единице, называется основной, и если этот переход не связан с симметричным типом колебаний, то полоса является сильной. Полосы симметричных колебаний, такие, как 1, 0, 0 для CO_2 , имеют очень малую интенсивность, за исключением, как это уже упоминалось, больших давлений, когда возникает наведенный давлением (столкновением) диполь. По этой причине симметричные молекулы двухатомных газов O_2 , N_2 , H_2 и др. в таблице не представлены. Полосу, для которой единственное ненулевое значение $\delta_i \geq 2$, называют обертоном; такие полосы часто настолько слабы, что ими можно пренебречь. Полоса, для которой имеются два или более ненулевых значения δ_i , называют комбинационной полосой; примером может служить полоса 9,4 мкм CO_2 .

Спектральное положение полосы заключено в пределах суммы произведения $\pm \delta_i v_i$. Рекомендуемое для расчетов спектральное положение полос представлено в таблице центрами полос ν_c для приблизительно симметричных полос или верхним пределом ν_u для полосы 4,3 мкм, которая начинается около 2410 cm^{-1} . Также даны параметры уширения a и b и параметры α_0 , β_0 , ω_0 для определения эквивалентной ширины полосы.

Параметр, определяющий ширину ω_k k -й полосы поглощения, легко найти по табличным данным. Он равен:

$$\omega_k = \omega_0 (T/T_0)^{1/2}, \quad (41)$$

где ω_0 связано с вращательной константой B (половина расстояния между линиями d) следующим образом:

$$\omega_0 = 0,90 T_0^2 \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{2kT_0}{hcB} \right)^{1/2}, \quad (42)$$

где $T_0 = 100$ К — величина, выбранная для получения табличных значений. Тогда для полосы 6,3 мкм H_2O при 1000 К получим $\omega = 56,4 (1000/100)^{1/2} = 178,4$ cm^{-1} . Для основных полос значением α_k является α_0 , однако в общем случае для обертонов или комбинационных полос α_k представим в виде

$$\alpha_k(T) = \alpha_0 \frac{(1 - \exp(-\sum_{i=1}^m \pm u_i \delta_i)) \Psi(T)}{(1 - \exp(-\sum_{i=1}^m \pm u_0, i \delta_i)) \Psi(T)}, \quad (43)$$

где

$$u_i = \frac{hc v_i}{kT}; \quad \frac{hc}{k} = 14388 \text{ мкм} \cdot K \quad (44)$$

и

$$\Psi(T) = \frac{\prod_{i=1}^m \sum_{v_i=v_{0,i}}^{\infty} [(v_i + g_i + \delta_i - 1)! / (g_i - 1)! v_i!] e^{-u_i v_i}}{\prod_{i=1}^m \sum_{v_i=0}^{\infty} [(v_i + g_i - 1)! / (g_i - 1)! v_i!] e^{-u_i v_i}}; \quad (45)$$

$$v_{0,i} = \begin{cases} 0 & \text{при } \delta_i \geq 0; \\ \delta_i & \text{при } \delta_i < 0. \end{cases} \quad (46)$$

Следует отметить, что входящие в выражения величины δ_i должны пониматься в смысле абсолютных значений, перед которыми стоит $\pm$; тогда соответствующий знак необходимо связывать с δ_i .

Параметр отношения ширины линий к расстоянию между ними β определяется выражением

$$\beta(T) = \beta_0 (T/T_0)^{-1/2} \frac{\Phi(T)}{\Phi(T_0)}, \quad (47)$$

где

$$\Phi(T) = \frac{\left(\prod_{i=1}^m \sum_{v_i=v_{0,i}}^{\infty} \{ [(v_i + g_i + \delta_i - 1)! / (g_i - 1)! v_i!] e^{-u_i v_i} \}^{1/2} \right)^2}{\prod_{i=1}^m \sum_{v_i=v_{0,i}}^{\infty} [(v_i + g_i + \delta_i - 1)! / (g_i - 1)! v_i!] e^{-u_i v_i}}. \quad (48)$$

Отметим, что полоса 2,7 мкм H_2O возникает в результате наложения трех полос (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 2, 0), перечисленных в порядке их важности. Для такой полосы необходимо рассчитать три значения α_i и три значения β_i , а затем комбинировать их в соответствии со следующим правилом:

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^3 \alpha_{k,j}; \quad (49)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\alpha_k} \left[\sum_{j=1}^3 (\alpha_{k,j} \beta_{k,j})^{1/2} \right]^2. \quad (50)$$

Таблица 1. Параметры экспоненциальной широкополосной модели [15]

Газ	Колебания $\nu_k, \text{см}^{-1}$	Полосы $\delta_1, \delta_2 \dots$	Параметры, относящиеся к давлению		Спектральное положение		Параметры эквивалентной ширины полосы		
			n	$b (T_0 = 100 \text{ K})$	$\dot{\nu}_c, \text{см}^{-1}$	$\nu_{H'}, \text{см}^{-1}$	$\text{см}^{-1}/(\text{г} \cdot \text{м}^{-2})$	β_0	$\omega_0, \text{см}^{-1}$
H_2O	$m=3$	(1) Вращательная							
	$\nu_1=3652$	0, 0, 0	1	$8,6 (T_0/T)^{1/2} \pm 0,5$	140	—	10 400	0,14311 *	57,1 *
	$\nu_2=1595$	(2) 6,3 мкм							
	$\nu_3=3756$	0, 1, 0	1	$8,6 (T_0/T)^{1/2} \pm 0,5$	1600	—	41,2	0,09427	56,4
	$g_1=1$	(3) 2,7 мкм							
CO_2^{*3}	$g_2=1$	0, 2, 0							
	$g_3=1$	1, 0, 0	1	$8,6 (T_0/T)^{1/2} \pm 0,5$	3760	—	0,19	0,07361	60,0
		0, 0, 1					22,40		
		(4) 1,87 мкм	1	$8,6 (T_0/T)^{1/2} \pm 0,5$	5350	—	3,0	0,08169	43,1
		0, 1, 1							
CO_2^{*3}	$m=3$	(5) 1,38 мкм	1	$8,6 (T_0/T)^{1/2} \pm 0,5$	7250	—	2,5	0,11628	32,0
	$\nu_1=1351$	1, 0, 1							
	$\nu_2=667$	(1) 15 мкм	0,7	1,3	667	—	19,0	0,06157	12,7
	$\nu_3=2396$	(2) 10,4 мкм	0,8	1,3	960	—	$2,47 \cdot 10^{-9}$	0,04017	13,4
	$g_1=1$	(3) 9,4 мкм	0,8	1,3	1060	—	$2,48 \cdot 10^{-9*2}$	0,11888 *2	10,1
CO	$g_2=2$	(4) 4,3 мкм	0,8	1,3		2410	110,0	0,24723	11,2
	$g_3=1$	0, 0, 1	0,65	1,3	3660	—	4,0	0,13341	23,5
		(5) 2,7 мкм							
		1, 0, 1	0,65	1,3	5200	—	0,066	0,39305	34,5
		(6) 2,0 мкм							
NO	$m=1$	(1) 4,7 мкм	0,8	1,1	2143	—	20,9	0,07506	25,5
	$\nu_1=2143$	1							
	$g_1=1$	(2) 2,35 мкм	0,8	1,0	4260	—	0,14	0,16758	20,0
		2							
		(1) 5,34 мкм	0,65	1,0	1876	—	9,0	0,18050	20,0
SO_2	$\nu_1=1876$	1							
	$g_1=1$								
	$m=3$	(1) 19,27 мкм	0,7	1,28	519	—	4,22	0,05291	33,08
	$\nu_1=1151$	0, 1, 0							
	$\nu_2=519$	(2) 8,68 мкм	0,7	1,28	1151	—	3,674	0,05952	24,83
CH_4	$\nu_3=1361$	1, 0, 0							
	$g_1=1$	(3) 7,35 мкм	0,65	1,28	1361	—	29,97	0,49299	8,78
	$g_2=1$	0, 0, 1							
	$g_3=1$	(4) 4,34 мкм	0,6	1,28	2350	—	0,423	0,47513	16,45
		2, 0, 0							
CH_4		(5) 4,0 мкм	0,6	1,28	2512	—	0,346	0,58937	10,91
		1, 0, 1							
	$m=4$	(1) 7,66 мкм	0,8	1,3	1310	—	28,0	0,08698	21,0
	$\nu_1=2914$	0, 0, 0, 1							
	$\nu_2=1526$	(2) 3,31 мкм	0,8	1,3	3020	—	46,0	0,06973	56,0
CH_4	$\nu_3=3020$	0, 0, 1, 0							
	$\nu_4=1306$	(3) 2,37 мкм	0,8	1,3	4220	—	2,9	0,35429	60,0
	$g_1=1$	1, 0, 0, 1							
	$g_2=2$	(4) 1,71 мкм	0,8	1,3	5861	—	0,42	0,68598	45,0
	$g_3=3$	1, 1, 0, 1							
CH_4	$g_4=3$								

* Для вращательной полосы H_2O $\alpha(T) = \alpha_0 \exp[-5,0 (T_0/T)^{1/2}]$ и $\beta(T) = \beta_0 (T/T_0)^{-1/2}$. Аппроксимировано по Модаку.** Вследствие ферми-резонанса между уровнями ν_1 и ν_2 функции Ψ и Φ для полосы 1060 см^{-1} должны быть такими же, как и для полосы 960 см^{-1} , т. е. необходимо использовать набор величин δ для полосы 960 см^{-1} , чтобы получить Ψ и Φ для другой полосы.** Полоса 1, 0, 0 линейной молекулы CO_2 появляется только при высоких давлениях из-за ударно наведенного диполя.

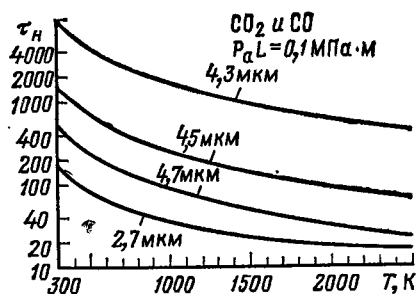


Рис. 8. Оптическая глубина в максимумах полосы CO_2 и CO [15]

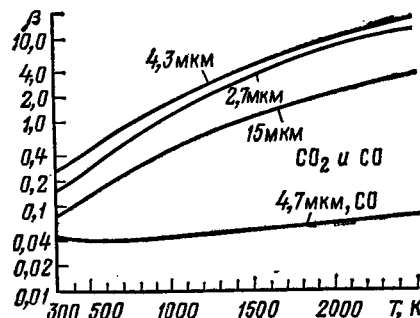


Рис. 9. Параметры ширины линий CO и CO_2 [15]

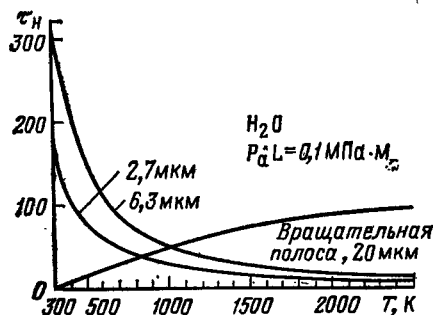


Рис. 10. Оптическая глубина в максимумах полос H_2O [15]

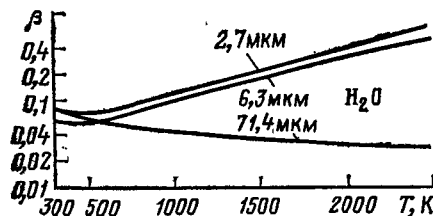


Рис. 11. Параметр ширины линий H_2O

Выражения для расчета Ψ и Φ достаточно сложны, и поэтому более удобным для расчета является графическое представление $\tau_{H,k}$ и β_k (рис. 8—11).

Определение эквивалентного уширяющего давления P_e основано на упрощенной кинетической теории молекул с оптическим столкновительным диаметром D_a для поглощающих и D_b для уширяющих (в данном случае азот) компонентов. Ширина линии γ — результат сдвига естественной ширины в процессе молекулярных столкно-

вений; она пропорциональна частоте столкновений $F_{aa} + F_{ab}$, где

$$F_{ab} = \Delta v D_{ab}^2 \left(\frac{P_b}{kT} \right), \quad (51)$$

$$D_{ab} = \frac{1}{2} (D_a + D_b); \quad (52)$$

$$\Delta v = \left(\frac{16kT}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \right)^{1/2}. \quad (53)$$

Таким образом, получим

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-1/2} \left(\frac{P_b + bP_a}{P_0} \right), \quad (54)$$

где

$$b = \frac{D_{aa}^2}{D_{ab}^2} \left(\frac{2m_b}{m_a + m_b} \right)^{1/2}. \quad (55)$$

Показатель степени n находим по экспериментальным данным. Тогда выражение для η запишем в виде

$$\eta = \frac{\pi\gamma}{d} = \beta P_e, \quad (56)$$

где

$$P_e = \left\{ \left(\frac{P}{P_0} \right) [1 + (b-1)x] \right\}^n; \quad (57)$$

x — молярная доля P_a/P . В табл. 1 приведены рекомендуемые значения n и b для $P_0 = 0,1$ Па. Следует отметить сильную температурную зависимость b для молекул H_2O .

Для известных значений $\tau_{H,k}$ и η_k найдем A_k^* по одному из следующих выражений, представленных для четырех областей.

1. Область линейного изменения для малых оптических глубин и высоких давлений:

$$\text{при } \tau_{H,k} \leq 1, \quad \tau_{H,k} \leq \eta_k \quad A_k^* = \tau_{H,k}. \quad (58a)$$

2. Область квадратного корня от малых до средних оптических глубин и для малых давлений:

$$\text{при } \eta_k \leq \tau_{H,k} \leq \frac{1}{\eta_k}, \quad \eta_k \leq 1, \\ A_k^* = (4\eta_k \tau_{H,k})^{1/2} - \eta_k. \quad (58б)$$

3. Логарифмически-корневая область для больших оптических глубин и низких давлений:

$$\text{при } \frac{1}{\eta_k} < \tau_{H,k}, \quad \eta_k \leq 1, \\ A_k^* = \ln(\tau_{H,k} \eta_k) + 2 - \eta_k. \quad (58в)$$

4. Логарифмическая область для больших оптических глубин и высоких давлений:

$$\text{при } \tau_{H,k} \geq 1, \quad \eta_k \geq 1 \quad A_k^* = \ln \tau_{H,k} + 1. \quad (58г)$$

Приближенные выражения для четырех областей несколько превышают значения, полученные путем точного численного интегрирования (28). Однако приведенные в табл. 1 величины найдены в результате сопоставления приближенных выражений для четырех областей с экспериментальными значениями поглощения полос, и поэтому использование выражений для четырех областей дает результаты, согласующиеся ($\pm 15\%$) с физической реальностью. Если же возникает необходимость приближенных спектральных вычислений по уравнению (23), рекомендуется увеличить на 20% табличное значение Φ_k .

Даже при намерении использовать диаграмму интегральной степени черноты желательно рассчитать $\tau_{H,k}$

Таблица 2. Полосы поглощения для смеси газов [19] *

Компонента газа i	Положение полосы j	Эквивалентная ширина полосы $A_{i,j}, \text{см}^{-1}$	Пропускательная способность полосы $\tau_{g,i,j}$	Ширина полосы, $\Delta\nu_{i,j}, \text{см}^{-1}$	Нижний предел $\nu_{i,j}, \text{см}^{-1}$	Верхний предел $\nu_{u,i,j}, \text{см}^{-1}$
H_2O	Вращательная	775	0,137	898	0	898
	6,3 мкм	638	0,331	954	1123	2077
	2,7 мкм	676	0,332	1012	3254	4266
	1,87 мкм	171	0,594	422	5139	5561
	1,38 мкм	131	0,610	336	7082	7418
CO_2	15 мкм	205	0,232	266	534	800
	10,4 мкм	10	0,90	100	910	1010
	9,4 мкм	10	0,90	100	1010	1110
	4,3 мкм	260	0,161	310	2100	2410
	2,7 мкм	220	0,400	366	3477	3843
	1,9 мкм	9	0,90	90	5155	5245
	4,7 мкм	89	0,527	188	2049	2237
CO	2,35 мкм	3	0,90	34	4243	4277

* 0,18 H_2O + 0,06 CO_2 + 0,03 CO + 0,73 N_2 ; $P=0,1$ МПа, $L=3$ м, $T_g=1400$ К.

и η_k для двух или трех наиболее важных полос и убедиться в применимости уравнений (38) и (39) для нахождения интегральной поглощательной способности, а также в возможности нахождения поправок на давление в соот-

ветствии с уравнением (40). В последующем необходимо знать, как с помощью табл. 1 § 2.9.6 находится связь между длиной луча и средней геометрической длиной (см. § 2.9.6).

Таблица 3. Поинтервальный расчет интегральных степени черноты и поглощательной способности [19] *

Номер интервала k	Нижний предел ν_k	Верхний предел ν_{k+1}	Пропускательная способность интервала $\tau_{g,k}$	Доля энергии интегрального излучения черного тела $f(T_g/\nu_k)$	Вклад интервала $\epsilon_{g,k}\Delta f_k$	Доля энергии интегрального излучения черного тела $f(T_s, \nu_k)$	Вклад интервала $\alpha_{g,k}\Delta f_k$
1	0	534	0,137	1,000	0,006	1,000	0,013
2	534	800	0,032	0,993	0,014	0,985	0,023
3	800	898	0,137	0,979	0,007	0,961	0,011
4	898	910	1,000	0,971	0,000	0,948	0,000
5	910	1110	0,900	0,970	0,001	0,946	0,003
6	1110	1123	1,000	0,957	0,000	0,920	0,000
7	1123	2049	0,331	0,950	0,102	0,909	0,156
8	2049	2077	0,174	0,797	0,004	0,676	0,007
9	2077	2100	0,527	0,792	0,002	0,668	0,003
10	2100	2237	0,085	0,787	0,027	0,662	0,036
11	2237	2410	0,161	0,758	0,033	0,623	0,040
12	2410	3254	1,000	0,719	0,000	0,575	0,000
13	3254	3477	0,332	0,534	0,032	0,357	0,032
14	3477	3843	0,133	0,486	0,063	0,309	0,058
15	3843	4243	0,332	0,413	0,049	0,242	0,040
16	4243	4266	0,299	0,339	0,003	0,182	0,002
17	4266	4277	0,335	0,335	0,002	0,179	0,001
18	4277	5139	1,000	0,332	0,000	0,177	0,000
19	5139	5155	0,594	0,211	0,001	0,090	0,000
20	5155	5245	0,535	0,209	0,005	0,089	0,003
21	5245	5561	0,594	0,199	0,014	0,083	0,008
22	5561	7082	1,000	0,165	0,000	0,064	0,000
23	7082	7418	0,610	0,063	0,005	0,016	0,002
24	7418	∞	1,000	0,050	0,000	0,012	0,000
					0,370		0,438

* 0,18 H_2O + 0,06 CO_2 + 0,03 CO + 0,73 N_2 ; $P=0,1$ МПа; $L=3$ м; $T_g=1400$ К; $T_s=1100$ К.

Г. Смеси газов. При наложении полос одной и той же компоненты линейчатая структура остается подобной, и тогда можно воспользоваться уравнениями (49) и (50). При наложении полос различных компонентов корреляция их линейчатых структур отсутствует, и тогда можно применять закон перемножения индивидуальных пропускательных способностей, каждая из которых определяется выражением (18), применимым на спектральном уровне:

$$\bar{\tau}_{v, \text{mix}} = \prod \bar{\tau}_{v, i} \quad (i - \text{номер компоненты}); \quad (59)$$

$$\bar{\epsilon}_{v, \text{mix}} = \alpha_{v, \text{mix}} = 1 - \bar{\tau}_{v, \text{mix}}. \quad (60)$$

При желании провести расчеты вручную, избегая подробных спектральных деталей, можно воспользоваться представленной ниже последовательностью операций для расчетов по спектральным интервалам.

1. Для каждой полосы всех поглощающих и излучающих компонентов определяют эквивалентную ширину A_i .

2. Пропускательную способность каждой полосы $\tau_{g, i}$ находят в соответствии с выражением

$$\tau_{g, i} = \frac{\tau_{H, i}}{A_i^*} \frac{dA_i^*}{d\tau_{H, i}} \leq 0,90, \quad (61)$$

где A_i^* берут из уравнений (58). Если окажется, что найденная по (61) пропускательная способность больше 0,9, то следует принять ее равной 0,9.

3. Находят ширину полосы

$$\Delta\nu_i = A_i / (1 - \tau_{g, i}). \quad (62)$$

4. Определяют спектральное положение полосы в соответствии с рекомендуемым значением центра или верхнего предела.

5. Располагают пределы полос по мере их возрастания, начиная от нуля, и находят пропускательную способность каждого спектрального интервала, заключенного между ближайшими пределами. Для k -го интервала пропускательная способность

$$\tau_{g, k} = \prod \tau_{g, i}, \quad (63)$$

где произведение берется по всем полосам, попадающим в данный интервал (полосы, не попавшие в интервал, имеют внутри него пропускательную способность 1,0).

6. Используя полученные таким образом поинтервальные значения $\tau_{g, k}$, рассчитывают общий коэффициент переноса излучения или интегральные поглощательную способность и степень черноты. В частности, интегральная степень черноты

$$\epsilon_g = \int_0^1 [1 - \tau_g] df_e \left(\frac{T_g}{v} \right); \quad (64a)$$

$$\epsilon_g = \sum_{k=1}^n (1 - \tau_{g, k}) \left(f_e \left(\frac{T_g}{v_k} \right) - f_e \left(\frac{T_g}{v_{k+1}} \right) \right). \quad (64b)$$

Заметим, что изложенный здесь поинтервальный метод нахождения радиационных характеристик предпочтительнее расчетов по уравнениям (32) или (35) даже в случае одной компоненты (при наличии или отсутствии прозрачного ушляющего газа), когда полосы поглощения широкие.

Пример поинтервального расчета приведен в табл. 2 и 3.

2.9.6. Радиационный перенос при наличии изотермического газа

Д. К. Эдвардс

А. Теплообмен на черной стенке. Для проектирования камеры сгорания или химический реактор часто моделируются, за исключением пристеночного пограничного слоя, объемом, заполненным хорошо перемешанным газом с однородным составом и температурой. В данном случае предположим, что влиянием пограничного слоя можно пренебречь. Спектральную плотность результирующего радиационного потока теплоты через некоторую плоскость запишем в виде

$$q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (I^+ - I^-) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (1)$$

На черной стенке

$$I^+ = I_b(T_w) = B_w/\pi, \quad (2)$$

и из решения уравнения (6) § 2.9.5 с $I = I_b(T_w)$ при $s = 0$ имеем

$$I^- = I_b(T_w) e^{-\kappa_a L(\theta, \varphi)} + I_b(T_g) (1 - e^{-\kappa_a L(\theta, \varphi)}). \quad (3)$$

Здесь $I_b(T_w)$ — интенсивность излучения стенки внутри камеры сгорания; $L(\theta, \varphi)$ — расстояние от стенки; $e^{-\kappa_a L(\theta, \varphi)}$ — пропускательная способность газа; $1 - e^{-\kappa_a L(\theta, \varphi)}$ — излучательная способность газа. Видно, что плотность потока падающего излучения включает две составляющие: прошедшее излучение стенки и излучение газа. Подставив в уравнение (1) величины I^+ и I^- в предположении изотермичности стенок, получим

$$q = (B_w - B_g) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - e^{-\kappa_a L(\theta, \varphi)}) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (4)$$

Поток теплоты

$$\dot{Q} = (B_w - B_g) \int_{A_w} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \times \\ \times (1 - e^{-\kappa_a L(\theta, \varphi)}) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dA_w, \quad (5)$$

и его можно представить в виде

$$\dot{Q} = (B_w - B_g) A_w \mathcal{F}_{wg}, \quad (5)$$

где коэффициент переноса излучения от стенки к газу

$$\mathcal{F}_{wg} = \frac{1}{A_w} \int_{A_w} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - e^{-\kappa_a L(\theta, \varphi)}) \cos \theta \sin \theta \times \\ \times d\theta \, d\varphi \, dA_w. \quad (6a)$$

Поскольку, как следует из уравнения (4) § 2.9.1,

$$d\Omega = \cos \theta' \, dA'_w / L^2,$$

можно получить эквивалентное соотношение

$$\mathcal{F}_{wg} = \frac{1}{A_w} \int_{A_w} \int_{A'_w} (1 - e^{-\kappa_a L}) \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\pi L^2} \, dA'_w \, dA_w. \quad (6b)$$

Видно, что коэффициентом переноса излучения от черной изотермической стенки к изотермическому газу является угловой коэффициент, усредненный по всевозможным направлениям, проходящим от стенки через газ, при этом

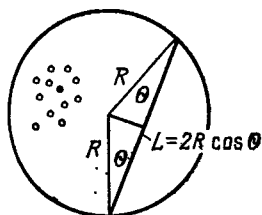


Рис. 1. Длина пути луча в сфере

в качестве массового множителя принимается излучательная способность газа. Очевидно, уравнение (5) требует последующего интегрирования по спектру. Здесь, однако, мы обратимся к геометрическим аспектам процесса переноса.

В. Представление о средней длине пути луча. Используя уравнение (6), определим среднюю длину пути луча L_{mb} из соотношения

$$\mathcal{F}_{wg} = (1 - e^{-\kappa_a L_{mb}}) F_{w-w'} = 1 - e^{-\kappa_a L_{mb}}, \quad (7)$$

где для полного замыкания $F_{w-w'} = 1$. Единственным серьезным мотивом при введении L_{mb} является надежда на более легкое получение инженерного приближения.

Для примера рассмотрим изображенный на рис. 1 сферический объем. Легко увидеть, что $L(\theta, \varphi) = 2R \cos \theta$.

Тогда уравнение (7) преобразуется к виду

$$(1 - e^{-\kappa_a L_{mb}})_{\text{sphere}} = \int_0^{\pi/2} (1 - e^{-2\kappa_a R \cos \theta}) 2 \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (8)$$

Результат для $\kappa_a L_{mb}$ должен зависеть от оптической глубины, например вдоль диаметра $\kappa_a D$. Тогда формально можно записать

$$\frac{L_{mb}}{D} = \frac{1}{t} \ln \frac{t^2/2}{(1 - e^{-t}) - te^{-t}}, \quad t = \kappa_a D. \quad (9)$$

Однако уравнение (8) имеет более ясный физический смысл. Видно, что возможная длина пути изменяется от нуля до размера диаметра. Отсюда следует, что средняя длина пути луча для сферы будет меньше диаметра.

В пределе стремящегося к нулю коэффициента поглощения, что справедливо для оптически тонкого слоя газа, можно воспользоваться приближением

$$1 - e^{-\kappa_a L_{mb}} \approx \kappa_a L_{mb},$$

$$1 - e^{-\kappa_a L} \approx \kappa_a L.$$

Тогда уравнение (8) преобразуется следующим образом:

$$L_{mbg, \text{ sphere}} = D \int_0^1 2\mu^2 d\mu = \frac{2}{3} D. \quad (10)$$

Индекс g в данном случае обозначает среднегеометрическую длину пути луча

$$L_{mbg} = \lim_{\kappa_a \rightarrow 0} L_{mb}, \quad (11)$$

называемую так вследствие зависимости результата только от геометрических характеристик объема при отсутствии влияния параметра κ_a .

Запишем приближенное выражение для $\mathcal{F}_{wg}$:

$$\mathcal{F}_{wg} = 1 - e^{-\kappa_a L_{mb}} \approx 1 - e^{-\kappa_a L_{mbg}}, \quad (12)$$

и сравним его с точным уравнением (8), при этом найдем, что для сферы различие приближенных и точных значений $\mathcal{F}_{wg}$ не превышает 1% при $\kappa_a L_{mbg} < 0,25$ и в худшем случае составляет лишь 5,2%. Если же провести такое же

сопоставление для бесконечного цилиндра и плоского слоя, то точность не будет столь хорошей. Однако принимая $L_{mb} = 0,9 L_{mbg}$, получаем погрешность меньше 7% для $\kappa_a L_{mbg} > 0,1$.

Видно, что вычисление среднегеометрической длины пути луча позволяет легко сделать инженерную оценку коэффициента переноса излучения по уравнению (12). Таким образом, L_{mbg} легко найти для полости, включающей одну стенку и один газ. Напомним, что при нахождении коэффициента переноса излучения необходимо считать эффективное абсолютно черное излучение источника (здесь B_g) равным единице, а сток (здесь B_w) равным нулю. Используя это представление и комбинируя уравнения (5), (7) и (11), получаем

$$L_{mbg} = \lim_{\kappa_a \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}}{A_w \kappa_a B_g}.$$

Но мы уже нашли, что для оптически тонкой сферы

$$\dot{Q} = 4\pi R^2 B_g \frac{2}{3} D \kappa_a = \frac{16}{3} \pi R^3 \kappa_a B_g;$$

$$\dot{Q} = 4V \kappa_a B_g, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Любой произвольный объем газа V_g можно заполнить сколь угодно плотно сферами с подобранным спектром распределения по размерам. Поскольку сумма объемов стремится к V_g , то полная излучаемая мощность стремится к

$$\dot{Q} = 4V_g \kappa_a B_g. \quad (13)$$

Подставляя $\dot{Q}$ в выражение для L_{mbg} , получаем

$$L_{mbg} = 4V_g / A_w. \quad (14)$$

Уравнение (14) определяет среднегеометрическую длину пути луча, которая равна просто учетверенному объему газа, поделенному на площадь полностью охватывающей его поверхности. Найденная таким простым способом величина позволяет также легко оценить коэффициент переноса излучения по уравнению (12) и перенос теплоты по уравнению (5). Заметим, что для длинных каналов или туннелей, где $A_w = P_w L$ и $V_g = A_c L$, среднегеометрическая длина пути луча совпадает с гидравлическим диаметром $4A_c / P_w$. Введенную здесь на основе спектральных представлений концепцию средней длины пути можно обобщить на случай полосы или всего спектра. Проинтегрируем уравнение (4) или (5) по спектру. В приближении спектральной полосы получим

$$\dot{Q} = \sum_k (B_w, k - B_g, k) A_w \omega_k A_k^* (\rho_a L_{mb, k}), \quad (15)$$

где

$$A_k^* (\rho_a L_{mb, k}) = \frac{1}{A_w} \int \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \times \\ \times A_k^* (\rho_a L) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi dA_w. \quad (16)$$

В общем случае точные величины средних длин путей луча отличаются для разных полос поглощения, однако на практике считают $L_{mb, k}$ равным целому значению или доле от L_{mbg} для наиболее сильной полосы. Эта доля определена в рамках экспоненциальной модели полосы с перекрытыми линиями ($\eta = \beta P_e > 1$) для сферы, цилиндра и плоского слоя, и результаты приведены в табл. 1. Из нее следует, что в случае сильной полосы для цилиндра или сферы действительно $L_{mb} = 0,9 L_{mbg}$, однако для плоского слоя $L_{mb} = 0,83 L_{mbg}$.

Таблица 1. Средняя длина пути луча для плоского слоя, цилиндра и сферы

Оптическая глубина в максимуме полосы *	Отношение средней длины пути луча к среднегеометрической длине пути		
	Плоский слой	Цилиндр	Сфера
0,00	1,00	1,00	1,00
0,01	0,99	1,00	1,00
0,02	0,98	1,00	1,00
0,05	0,96	1,00	1,00
0,10	0,95	1,00	1,00
0,20	0,93	1,00	1,00
0,50	0,88	0,98	0,99
1,0	0,86	0,95	0,98
2,0	0,84	0,93	0,97
5,0	0,83	0,91	0,94
10,0	0,83	0,90	0,92
	0,83	0,89	0,91

* Вычисляется по расстоянию между плоскостями или диаметру.

С. Пропускание пограничного слоя. В § 2.9.7 рассматривается радиационный перенос в неизотермическом газе. Плотность потока падающего излучения на холодной стенке, обращенной к горячему газу, меньше в том случае, когда имеется холодный пограничный слой, вследствие того, что не весь путь падающего луча проходит через области с высокой температурой. Проводя анализ термически развивающегося течения поглощающего и излучающего молекулярного газа на входе в канал, образо-

ванный параллельными пластинами, авторы [9] установили, что уравнение (15) умножается на пропускательную способность $\tau_{WL, L, k}$ пограничного слоя:

$$\frac{\dot{Q}_{0-x}}{A_w} = \sum_k (B_{w, k} - B_{g, k}) \omega_k A_k^* (\rho_a L_{mb, k}) \tau_{WL, k}, \quad (17)$$

где

$$\tau_{WL, k} = \frac{\ln(1 + \tau_{HD, k}) - \ln(1 + \tau_{HD, k}^* \tau_{WL})}{\ln(1 + \tau_{HD, k})}; \quad (18a)$$

$$\tau_{WL} \approx \frac{1,37}{Re^{0,37}} \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{x}{10D} \right)^{0,6} \right) \right]. \quad (18b)$$

Здесь D — гидравлический диаметр; Re — вычисленное по гидравлическому диаметру число Рейнольдса; x — расстояние от начала развития температурного пограничного слоя; $\tau_{HD, k}$ — оптическая глубина в максимуме k -й полосы, рассчитанная по гидравлическому диаметру (аналогично среднегеометрической длине пути); $\alpha_k \rho_a D / \omega_k$. Отметим, что уравнение (17) записано не для локальной плотности теплового потока, соответствующего координате x , а для величины, усредненной по интервалу от 0 до x .

D. Формулировка задачи радиационного теплообмена для стенок полости, заполненной изотермическим газом. С учетом спектральных свойств уравнения (2) и (3) необходимо заменить на

$$I_i^+ = \varepsilon_i I_b(T_i) + (1 - \varepsilon_i) I_i^-; \quad (19)$$

$$I_i^- = I_i^+ e^{-\kappa_a L} + I_b(T_g)(1 - e^{-\kappa_a L}). \quad (20)$$

Подставляя эти выражения в (1) и используя понятие средней длины пути луча, для плотности потока получаем

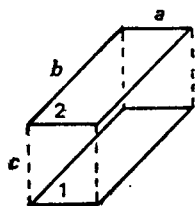
$$q_i = q_i^+ - q_i^-; \quad (21)$$

$$q_i^+ = \varepsilon_i B_i + (1 - \varepsilon_i) q_i^-; \quad (22)$$

$$q_i^- = \sum_{j=1}^n F_{i-j} [q_j^+ \tau_{g, i-j} + (1 - \tau_{g, i-j}) B_g], \quad (23)$$

Таблица 2. Выражения в замкнутой форме для среднегеометрической длины пути луча между прямоугольниками (см. табл. 1 § 2.9.3 для F_{12})

1.



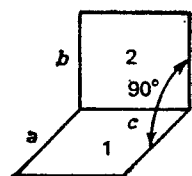
$$X = a/c$$

$$Y = b/c$$

$$Z = L_{g,1-2}/c$$

$$ZF_{1-2} = \frac{4}{\pi XY} \left[XY \ln^{-1} \frac{XY}{\sqrt{1+X^2} + \sqrt{1+Y^2}} + X \ln \frac{X + \sqrt{1+X^2} + Y^2}{(X + \sqrt{1+X^2})\sqrt{1+Y^2}} \right. \\ \left. + Y \ln \frac{Y + \sqrt{1+Y^2} + X^2}{(Y + \sqrt{1+Y^2})\sqrt{1+X^2}} + \sqrt{1+X^2} + \sqrt{1+Y^2} - \sqrt{1+X^2+Y^2} - 1 \right]$$

2.



$$X = a/c$$

$$Y = b/c$$

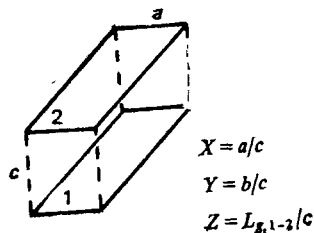
$$Z = L_{g,1-2}/c$$

$$ZF_{1-2} = \frac{1}{3\pi X} \left[3X^2 \ln \frac{(1 + \sqrt{1+X^2})\sqrt{X^2+Y^2}}{X(1 + \sqrt{1+X^2} + Y^2)} + 3Y^2 \ln \frac{(1 + \sqrt{1+Y^2})\sqrt{X^2+Y^2}}{Y(1 + \sqrt{1+Y^2} + X^2)} \right. \\ \left. + 3X^2(\sqrt{1+X^2+Y^2} - \sqrt{X^2+Y^2} - \sqrt{1+X^2}) + 3Y^2(\sqrt{1+X^2+Y^2} - \sqrt{X^2+Y^2} - \sqrt{1+Y^2}) + (1+X^2)^{3/2} + (1+Y^2)^{3/2} + (X^2+Y^2)^{3/2} \right. \\ \left. - (1+X^2+Y^2)^{3/2} + 2X^3 + 2Y^3 - 1 \right]$$

Примечание. 1 — противоположные прямоугольники, 2 — прилегающие прямоугольники.

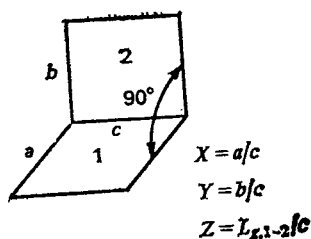
Таблица 3. Краткая таблица среднегеометрических длин путей луча

1.



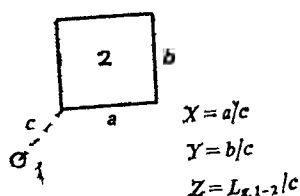
	Z				
Y = 0.0	0.1	1	10	∞	
X = 0	1.00	1.00	1.05	1.23	1.27
0.1		1.00	1.06	1.23	1.27
1			1.11	1.30	1.35
10				1.62	1.75
∞					2.00

2.



		Z					
		Y = 0.1	0.2	1	2	10	20
X = 0.1		0.072	0.098	0.15	0.17	0.18	0.18
	0.2		0.14	0.24	0.27	0.30	0.30
	1			0.56	0.70	0.89	0.92
	2				0.95	1.38	1.47
	10					3.20	3.96
	20						5.49

3.



	Z			
Y = 0	1	2	3	
X = 0	1.00	1.11	1.25	1.32
1		1.22	1.37	1.45
2			1.52	1.63
3				1.76

Примечание. 1—противолежащие прямоугольники, 2—прилежащие прямоугольники, 3—точечная сфера относительно прямоугольника.

где

$$\tau_{g,i-j} = e^{-\kappa_a L_{i-j}} = \frac{1}{A_i F_{i-j}} \int_{A_i} \int_{A_j} e^{-\kappa_a L} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi L^2} \times dA_j dA_i. \quad (24)$$

Величина L является расстоянием между бесконечно малыми элементами поверхностей dA_j и dA_i , а L_{i-j} — средняя длина пути луча между поверхностями конечных размеров A_i и A_j . В [7] получены выражения для геометрически усредненных значений L_{i-j} для прилежащих и противолежащих прямоугольников, а в [8] эти выражения проинтегрированы и приведены численные значения.

Принтегрированные выражения приведены в табл. 2, а некоторые численные значения — в табл. 3. Значение $L_{g,1-2}$ для сферы конечного радиуса R относительно прямоугольника такое же, как для бесконечно малой сферы, но за вычетом $(2/3) R$ [8]. Среднегеометрическая длина пути луча между поверхностями i и j $L_{g,i-j}$ близка по значению к верхнему пределу истинной средней длины пути луча L_{i-j} .

Правила алгебры угловых коэффициентов (см. § 2.9.3, рис. 1 и 2) справедливы по отношению к среднегеометрической длине пути луча, если под G понимать

$$G_{i-j} = G_{j-i} = L_{g,i-j} A_i F_{i-j}. \quad (25)$$

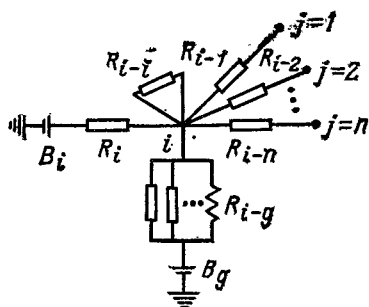


Рис. 2. Схема радиационной цепи для узла i с изотермическим газом g

Уравнения (22) и (23) записаны в такой же форме, что и (13) и (14) § 2.9.3 и поэтому, как указывалось в § 2.9.3, для их решения можно использовать метод обращения матриц (или итераций).

Е. Радиационная электрическая цепь при наличии газа. Существует электрическая интерпретация уравнений (12) — (14) § 2.9.3, и, следовательно, такая же интерпретация должна быть для уравнений (21) — (23). Поскольку уравнения (21) и (22) в точности соответствуют (12) и (13) § 2.9.3, а уравнения (49) и (50) § 2.9.3 остаются справедливыми, видим, что каждая поверхность имеет поверхностное сопротивление, как это изображено на рис. 5 § 2.9.3. Уравнения (47) и (48) § 2.9.3 основаны на уравнениях (12), (14) § 2.9.3 и должны заменяться выражениями, полученными из (21) и (23):

$$\dot{Q}_i = q_i A_i = \sum_{j=1}^n A_i F_{i-j} \tau_{g,i-j} (q_i^+ - q_j^+) + \sum_{j=1}^n A_i F_{i-j} (1 - \tau_{g,i-j}) (q_i^+ - B_g). \quad (26)$$

Из этих выражений следует, что межузловые сопротивления

$$R_{i-j} = \frac{1}{A_i F_{i-j} \tau_{g,i-j}} \quad (27)$$

и для каждого межузлового сопротивления R_{i-j} (включая R_{i-i}) существует параллельное сопротивление от одного узла к другому через газ. С учетом того, что проводимости при параллельном соединении складываются, получаем

$$\frac{1}{R_{i-g}} = \sum_{j=1}^n A_i F_{i-j} (1 - \tau_{g,i-j}). \quad (28)$$

Следует также учитывать вклад F_{i-i} (или подобных величин). Для напоминания об этом обстоятельстве Оппенгейм рекомендует приписывать в цепи дополнительную (бесполезную) величину $R_{i-i} = 1/A_i F_{i-i} \tau_{g,i-i}$, как это показано на рис. 2, где просуммированы правила изображения радиационной цепи. На рис. 3 представлена полная цепь для случая $n=2$.

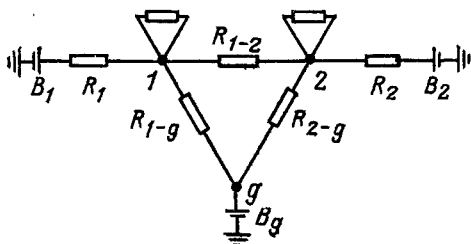


Рис. 3. Радиационная цепь для $n=2$ с изотермическим газом g

Г. Некоторые полезные результаты. В газе, содержащем распыленные капли или частицы, часто можно не учитывать спектральное изменение коэффициента поглощения. Таким же образом можно рассматривать в самом грубом приближении газы типа паров H_2O с несколькими широкими и слабыми полосами. Для газа, содержащего частицы, из уравнения (24) следует, что $\tau_{g,i-j} = \exp(-\kappa_a L_{i-j})$, а $\varepsilon_{g,i-j} = 1 - \tau_{g,i-j}$. Для паров H_2O $\varepsilon_{g,i-j}$ определяется уравнением (7) § 2.9.5 с подстановкой значения средней длины пути луча L_{i-j} и $\tau_{g,i-j} = 1 - \varepsilon_{g,i-j}$. На основе радиационных электрических цепей можно быстро получить рабочие выражения для следующих случаев.

1. Газообразный источник и сток.
2. Газообразный источник, адиабатная стенка и сток.
3. Источник, сток и теплоизолированный газ.
4. Источник, сток, адиабатная стенка и теплоизолированный газ.
5. Источник, сток и газообразный источник или сток.

Как и в п. Е § 2.9.3, результаты получены в предположении полностью диффузных серых поверхностей и, кроме того, хорошо перемешанного серого газа. Отметим, что при наличии в газе источников или стоков, определяемых, в частности, течением с химическими реакциями или фазовыми превращениями, поток теплоты к газу (или от газа) $\dot{Q}_g$ связан с изменением энтальпии следующим образом:

$$\dot{m}_g (\hat{h}_g, i - \hat{h}_g, 0) = \dot{Q}_g, \quad (29)$$

где $\dot{m}_g$ — массовый расход газовой смеси через ограничивающую поверхность; $\hat{h}_g, i$ — удельная энтальпия поступающей газовой смеси с учетом теплоты образования или горения; $\hat{h}_g, 0$ — удельная энтальпия выходящей при температуре T_g газовой смеси. Часто выражение (29) удается записать в приближенном виде

$$\dot{m}_g c_{p,g} (T_{gf} - T_g) = \dot{Q}_g, \quad (30)$$

где T_{gf} — эффективная температура газа (следует обратить внимание, что это не предельная адиабатная температура пламени при полном сгорании), определяемая выражением

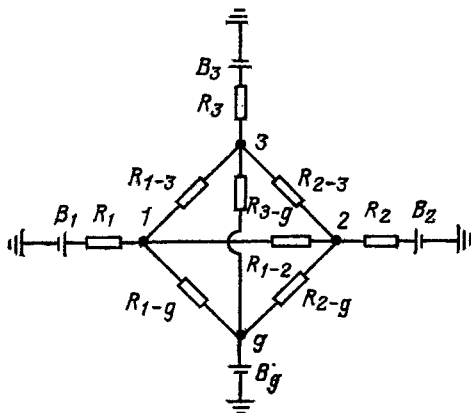
$$T_{gf} = \frac{\dot{m}_f c_{p,f} T_{f,i} + \dot{m}_f \Delta \hat{h} + \dot{m}_a c_{p,a} T_a}{\dot{m}_g c_{p,g}}, \quad (31)$$

где $\dot{m}_f$ — массовый расход топлива; $c_{p,f}$ — удельная теплоемкость; $\Delta \hat{h}$ — теплота, выделяющаяся в реакции с участием $\dot{m}_f$; $\dot{m}_a$, $c_{p,a}$ — массовый расход и удельная теплоемкость воздуха соответственно; $\dot{m}_g$ и $c_{p,g}$ — массовый расход ($\dot{m}_g = \dot{m}_f + \dot{m}_a$) и удельная теплоемкость газообразных продуктов реакции. Возникает вопрос о последовательности вычислений. Полагая, что T_g известно, можно найти $\dot{Q}_g$. В действительности, мы обычно не знаем T_g , а известно $\hat{h}_g, i$ или T_{gf} , и, воспользовавшись уравнениями (29) или (30) совместно с $\dot{Q}_g$, зависящей от T_g , находим T_g .

Газообразный источник и сток моделируют камеру сгорания или реактор с охлаждаемыми стенками. При $F_{w-w}=1$ цепь просто состоит из поверхностного сопротивления и сопротивления газ — стенка. Следовательно,

$$A_w \mathcal{T}_{w-g} = \frac{\dot{Q}_g}{C_s T_g^4 - C_s T_w^4} = \frac{A_w}{[(1 - \varepsilon_w)/\varepsilon_w] + 1/\varepsilon_g}. \quad (32)$$

Газообразный источник, адиабатная стенка и сток моделируют печь прямого сгорания. Схема на рис. 2 с разомкнутой цепью батареи B_2 делает огнеупорную стенку 2

Рис. 4. Радиационная цепь для $n=3$ с изотермическим газом g

адиабатной относительно излучения:

$$A_1 \mathcal{F}_{1-g} = 1 / \{ (1 - \varepsilon_1) / \varepsilon_1 A_1 + 1 / [1/R_{1-g} + 1/(R_{1-2} + R_{2-g})] \}, \quad (33a)$$

где

$$\frac{1}{R_{1-g}} = A_1 F_{1-1} \varepsilon_{g, 1-1} + A_1 F_{1-2} \varepsilon_{g, 1-2}; \quad (33б)$$

$$R_{1-2} = \frac{1}{A_1 F_{1-2} \varepsilon_{g, 1-2}}; \quad (33в)$$

$$\frac{1}{R_{2-g}} = A_1 F_{1-2} \varepsilon_{g, 1-2} + A_2 F_{2-2} \varepsilon_{g, 2-2}. \quad (33г)$$

Когда необходимо определить температуру адиабатной стенки, следует решить уравнение относительно B_2 , как указано ниже:

$$q_1^+ = B_1 + \frac{A_1 \mathcal{F}_{1-g} (B_g - B_1) (1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 A_1}; \quad (34a)$$

$$\dot{Q}_{1-2-g} = \frac{B_g - q_1^+}{R_{1-2} + R_{2-g}}; \quad (34б)$$

$$B_2 = q_2^+ = B_g - \dot{Q}_{1-2-g} R_{2-g}; \quad (34в)$$

$$T_2 = (B_2 / C_s)^{1/4}. \quad (34г)$$

Источник, сток и адиабатный газ могут моделировать процессы в ядерном реакторе, когда горячий стержень топлива излучает на холодную поверхность (элементы крепления, стенки емкости и т. д.) через сухой неподвижный пар. Обратимся опять к схеме на рис. 2, разомкнем цепь батарей B_g для получения условий радиационного равновесия газа:

$$A_1 \mathcal{F}_{1-2} = 1 / \{ (1 - \varepsilon_1) / \varepsilon_1 A_1 + 1 / [1/R_{1-2} + 1/(R_{1-g} + R_{2-g})]^{-1} + [(1 - \varepsilon_2) / \varepsilon_2 A_2] \}, \quad (35)$$

где R_{1-2} , R_{1-g} и R_{2-g} представлены уравнениями (33).

Источник, сток, адиабатная стенка и адиабатный газ можно использовать, например, для оценки влияния запыленности или иных источников поглощения в атмосфере на работу электрической или муфельной печи. Этому случаю соответствует схема на рис. 4 с разомкнутыми цепями батарей B_3 и B_g . Хотя цепь больше не является сложной, тем не менее в ней остаются два узла с подключенными батареями B_1 и B_2 . Цепь можно упростить еще, преобразовав звезду R_{1-3} , R_{2-3} , R_{3-g} в треугольник при помощи изображенного на рис. 7 § 2.9.3 преобразования. Обозначим сопротивление треугольника $R_{1-2, \Delta}$, $R_{1-g, \Delta}$, $R_{2-g, \Delta}$. Тогда, складывая проводи-

мости параллельного соединения, получаем

$$\frac{1}{R_{1-2, (3)}} = \frac{1}{R_{1-2}} + \frac{1}{R_{1-2, \Delta}}; \quad (36a)$$

$$\frac{1}{R_{1-g, (3)}} = \frac{1}{R_{1-g}} + \frac{1}{R_{1-g, \Delta}}; \quad (36б)$$

$$\frac{1}{R_{2-g, (3)}} = \frac{1}{R_{2-g}} + \frac{1}{R_{2-g, \Delta}}. \quad (36в)$$

Эти сопротивления подставим в уравнение (35) для определения требуемого коэффициента переноса излучения.

Источник, сток и газообразный источник или сток моделируют, например, печь прямого сгорания, в которой адиабатность стенки нарушена конвекцией, или ядерный реактор, где испаряются распыленные для охлаждения капли. Отметим, что дополнительная истинно адиабатная поверхность может быть включена при использовании найденных по уравнениям (36) $R_{1-2, (3)}$, $R_{1-g, (3)}$ и $R_{2-g, (3)}$ и подставляемых вместо R_{1-2} , R_{1-g} и R_{2-g} на схеме рис. 3 с учетом или без учета дополнения истинно адиабатной поверхности; цепь не является более простой двухузловой цепью из-за наличия трех неадиабатных узлов. Продолжим преобразование изображенного на рис. 3 треугольника 1—2—g в звезду согласно рис. 7 § 2.9.3. Обозначим полученные значения R_1, γ , R_2, γ , R_g, γ . Складывая затем сопротивления при последовательном включении, получаем полную величину для каждого луча большей звезды:

$$R_1(T) = R_1 + R_1, \gamma, \quad R_2(T) = R_2 + R_2, \gamma, \quad R_g(T) = R_g + R_g, \gamma. \quad (37)$$

И наконец, проводя обратное преобразование звезды в треугольник согласно рис. 7 § 2.9.3, находим

$$A_1 \mathcal{F}_{1-2} = \frac{R_1^{-1}(T) R_2^{-1}(T)}{R_1^{-1}(T) + R_2^{-1}(T) + R_g^{-1}(T)}; \quad (38a)$$

$$A_1 \mathcal{F}_{1-g} = \frac{R_1^{-1}(T) R_g^{-1}(T)}{R_1^{-1}(T) + R_2^{-1}(T) + R_g^{-1}(T)}; \quad (38б)$$

$$A_2 \mathcal{F}_{2-g} = \frac{R_2^{-1}(T) R_g^{-1}(T)}{R_1^{-1}(T) + R_2^{-1}(T) + R_g^{-1}(T)}. \quad (38в)$$

Г. Пример расчета. Рассмотрим печь диаметром 6 м, в которой сгорает 0,15 кг/с газообразного топлива с наименьшей теплотворной способностью $5 \cdot 10^7$ Дж/кг, расход воздуха составляет 2,7 кг/с, воздух и топливо поступают при 500 К. Заготовка при 900 К покрыта слоем шлака 6 мм с коэффициентом теплопроводности 2 Вт/(м·К) и степенью черноты 0,48. Свод из огнеупорных материалов имеет площадь 50 м². Топочные газы имеют теплоемкость 1200 Дж/(кг·К) и степень черноты $\varepsilon_g = 0,25$, соответствующую расчетной средней длине пути луча при оцениваемом значении температуры. Необходимо рассчитать T_g , T_1 и скорость переноса теплоты в заготовку. В пренебрежении конвекцией задача сводится к случаю 2 с газообразным источником, адиабатной поверхностью и стоком. Начнем с расчета $A_1 \mathcal{F}_{1-g}$ по уравнению (33). Получим следующую величину (полагая $\varepsilon_{g, 1-2} = \varepsilon_{g, 2-2}$):

$$R_1 = \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} = \frac{1 - 0,48}{(0,48) (28,3)} = 3,83 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2};$$

$$R_{1-2} = \frac{1}{A_1 F_{1-2} \varepsilon_{g, 1-2}} = \frac{1}{(28,3) (1) (0,75)} = 4,72 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2};$$

$$R_{1-g} = \frac{1}{A_1 \varepsilon_{g, 1-2}} = \frac{1}{(28,3) (0,25)} = 14,15 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2};$$

$$R_{2-g} = \frac{1}{A_2 F_{2-1} \varepsilon_{g, 2-1} + A_2 F_{2-2} \varepsilon_{g, 2-2}} = \frac{1}{(50) (0,25)} = 8,00 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-2};$$

$$A_1 \mathcal{F}_{1-g} = 1 / [3,83 \cdot 10^{-2} + 1 / \{ 1 / (14,15 \cdot 10^{-2}) + 1 / [4,72 + 8,00] \cdot 10^{-2} \}] = 9,5 \text{ м}^2.$$

Далее запишем уравнение (30) для теплового баланса газа

$$\dot{m}_g c_{p,g} (T_{gf} - T_g) = A_1 \mathcal{F}_{1-g} (C_s T_g - C_s T_1^4), \quad (39)$$

где

$$\dot{m}_g c_{p,g} = (2,85) (1200) = 3420 \text{ Вт/К};$$

$$T_{gf} = 500 + \frac{0,15 (5 \cdot 10^7)}{3420} = 2693 \text{ К}.$$

Тепловой баланс на поверхности между границами s и t запишем для области A_1 :

$$A_1 \mathcal{F}_{1-g} (C_s T_g^4 - C_s T_1^4) = \frac{k A_1}{\delta} (T_1 - T_0), \quad (40)$$

где

$$\frac{k A_1}{\delta} = \frac{(2) (28,3)}{6 \cdot 10^{-3}} = 9425 \text{ Вт/К}.$$

Для T_g и T_1 необходимо решить совместно два нелинейных уравнения. При расчете введем независимую переменную $\dot{Q}_{g-1}^{(i)}$ для скорости теплообмена:

$$\dot{Q}_{g-1} = A_1 \mathcal{F}_{1-g} (C_s T_g^4 - C_s T_1^4). \quad (41)$$

Подставляем это значение в правую часть уравнения (39) и разрешаем его относительно T_g , а затем подставляем в левую часть (40) и разрешаем относительно T_1 . Значения T_g и T_1 используем для нахождения по (41) зависящей от них величины $\dot{Q}_{g-1}^{(d)}$. Точные значения $\dot{Q}_{g-1}$, T_1 и T_g найдем при $\dot{Q}_{g-1}^{(i)} = \dot{Q}_{g-1}^{(d)}$. Пример расчета завершим следующей таблицей.

$\dot{Q}_{g-1}^{(i)}, 10^6 \text{ Вт}$	$T_g, \text{ К}$	$T_1, \text{ К}$	$\dot{Q}_{g-1}^{(d)}, 10^6 \text{ Вт}$
3	1816	1218	4,67
4	1523	1324	1,24
3,3	1728	1250	3,49
3,34	1716	1254	3,34

Как видно, $\dot{Q}_{g-1} = 3,34 \cdot 10^6 \text{ Вт}$, $T_g = 1716 \text{ К}$ и $T_1 = 1254 \text{ К}$. Получив расчетное значение T_g , уточним значение ε_g и повторим расчет.

Если учитывать также и конвекцию, то необходимо рассмотреть случай 5 с источником, стоком и газообразным источником. Тогда при найденных $A_1 \mathcal{F}_{1-2}$, $A_1 \mathcal{F}_{1-g}$ и $A_2 \mathcal{F}_{2-g}$ для определения T_1 , T_2 и T_g потребуются совместно решить три нелинейных уравнения:

$$\dot{m}_g c_{p,g} (T_{gf} - T_g) = h_1 A_1 (T_g - T_1) + h_2 A_2 (T_g - T_2) + A_1 \mathcal{F}_{1-g} (C_s T_g^4 - C_s T_1^4) + A_2 \mathcal{F}_{2-g} (C_s T_g^4 - C_s T_2^4); \quad (42)$$

$$h_2 A_2 (T_g - T_2) + A_2 \mathcal{F}_{2-g} (C_s T_g^4 - C_s T_2^4) = A_1 \mathcal{F}_{1-2} (C_s T_2^4 - C_s T_1^4); \quad (43)$$

$$h_1 A_1 (T_g - T_1) + A_1 \mathcal{F}_{1-g} (C_s T_g^4 - C_s T_1^4) + A_1 \mathcal{F}_{1-2} (C_s T_2^4 - C_s T_1^4) = \frac{k A_1}{\delta} (T_1 - T_0). \quad (44)$$

Н. Метод Монте-Карло. Каким образом работающий инженер собирается решать более общие, чем упоминавшиеся выше пять случаев, задачи радиационного обмена? Общим и наиболее легко приспособляемым методом является метод Монте-Карло [10, 11]. Предположим, что распределения температуры и состава среды известны достаточно хорошо для установления свойств. Разделим среду на M объемов, а поверхность на N площадок. При определении теплового потока только на площадки не-

обходимо найти коэффициенты переноса излучения от площадки к площадке и между площадкой и объемом. При необходимости найти поток теплоты к объемам, нужно найти также коэффициенты переноса излучения между объемами. Для определения коэффициентов переноса излучения предположим, что включен только один соответствующий объему или площадке источник i , $B_i = \pi I_{bi} = 1$, а все остальные выключены. Тогда в соответствии с методом Монте-Карло случайно выбираем координаты источника и направление испускания для построения хода луча. В случае поверхности, как разгляделось ранее, луч берется с массовым множителем, равным его направленной степени черноты и $dA \cos \theta d\Omega$. Для объема, заполненного изотропно излучающим веществом, массовый множитель равен $k_a dV d\Omega$, что означает равномерность распределения по объему точек, выбранных внутри объема и однородность распределения направления внутри телесного угла. Таким образом, взяв два случайных числа P_1 и P_2 , определим направление относительно произвольной сферической системы координат:

$$\theta = \cos^{-1} (2P_1 - 1); \quad (45)$$

$$\varphi = 2\pi P_2; \quad (46)$$

поскольку $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi = -d(\cos \theta) d\varphi$.

Построение хода луча проводится таким же образом, как это описано в § 2.9.4. Однако имеется отличие, связанное с необходимостью продвижения вдоль луча с шагом Δs , в то время как раньше луч проходил полное расстояние R от поверхности к поверхности. Приращение Δs выбирают таким, чтобы, например, прохождение j -го объема потребовало целого числа шагов. На каждом шаге Δs сравнивается вероятность поглощения или рассеяния со случайным числом P . Из уравнения (8) § 2.9.5 следует, что эта вероятность равна $[1 - \exp(-\kappa_e \Delta s)]$. Если P больше этой вероятности, то луч продолжает движение вдоль первоначального направления неизменным. Если $P < \omega_s [1 - \exp(-\kappa_e \Delta s)]$, то пучок фотонов рассеивается. Если же луч не пропускается и не рассеивается, он поглощается. При рассеянии в соответствии с уравнениями (45), (46) выбирают новое направление (при учете анизотропии рассеяния к энергии луча вводится массовый множитель, равный значению фазовой функции p) и продолжают построение хода луча до тех пор, пока не наберется необходимое число поглощений.

Предположим, что в расчете методом Монте-Карло с поверхности i испущено 10 000 лучей (с массовыми множителями, скажем, равными отношению направленной степени черноты к полусферической степени черноты) и 3000 были поглощены поверхностью или объемом j . Обозначим f_{ij} долю 3000/10 000. Тогда коэффициент переноса теплоты

$$\mathcal{G}_{ij} = A_i \mathcal{F}_{ij} = \varepsilon_i A_i f_{ij}. \quad (47)$$

Предположим далее, что 10 000 лучей ушли из объема i , а 2000 были поглощены поверхностью или объемом j . Обозначим g_{ij} долю 2000/10 000. Массовый множитель для излучения поверхности равен $\varepsilon_i A_i$, поскольку плотность потока собственного излучения равна $\varepsilon_i B_i$, а тепловой поток собственного излучения равен произведению плотности на площадь. Аналогичный массовый множитель необходимо ввести для объема. Обратимся к уравнению (13). Излучение, испускаемое единицей объема,

$$\dot{Q}_{V, \text{emit}} = \frac{\dot{Q}_{\text{emit}}}{V} = 4\kappa_a B_g. \quad (48)$$

Излучение от объемного элемента i равно $4\kappa_{a,i} V_i B_i$, и доля g_{ij} этого излучения поглощается элементом j . Следовательно, коэффициент переноса теплоты равен:

$$\mathcal{G}_{ij} = 4\kappa_{a,i} V_i g_{ij}. \quad (49)$$

Ранее не возникало необходимости принимать во внимание то, что в больших объемах часть испущенного излучения рассеивается и реабсорбируется. Этот факт учитывается в расчете методом Монте-Карло величинами g_{ij} и g_{ji} .

Введенное здесь обозначение $\mathbb{G}_{ij}$ одинаково для объема и поверхности. Более того, поверхность является объемом, заключенным между поверхностями s и m с контролируемыми термодинамическими параметрами (где κ_a велико). Вследствие того что фотон может пройти путь от i к j точно так же, как от j к i , свойство взаимности справедливо независимо от того, являются ли элементы i и j поверхностями или один из них или оба являются объемами:

$$\mathbb{G}_{ij} = \mathbb{G}_{ji}. \quad (50)$$

Если известно, что тепловой поток, испущенный в i и поглощенный в j , равен $B_i \mathbb{G}_{ij}$, то можно найти результирующий тепловой поток между i и j :

$$\dot{Q}_{ij} = \mathbb{G}_{ij} (B_i - B_j).$$

При равенстве температур T_i и T_j получаем $B_i = B_j$ и $\dot{Q}_{ij} = 0$. Полный тепловой поток от элемента

$$\dot{Q}_i = \sum_j \mathbb{G}_{ij} (B_i - B_j). \quad (51)$$

Следует отметить, что коэффициент переноса теплоты не обладает свойством замкнутости. Однако в дополнение к уравнению (51) хорошей проверкой расчетов методом Монте-Карло является суммирование $\mathbb{G}_{ij}$ по всем j , включая $j=i$. Поскольку сумма f_{ij} или g_{ij} по всем j равна единице, то сумма $\mathbb{G}_{ij}$ по всем N поверхностям и M объемам равна:

$$\sum_{j=1}^{N+M} \mathbb{G}_{ij} = \begin{cases} \epsilon_i A_i & \text{для } i=1, \dots, N; \\ 4\kappa_{a,i} V_i & \text{для } i=n+1, \dots, N+M. \end{cases} \quad (52)$$

В зональном методе, близком методу Монте-Карло, следует подразделить объем на M зои и поверхность на N площадок точно так же, как и в методе Монте-Карло. Однако вместо непосредственного вычисления коэффициента переноса излучения формулируется задача о радиационном переносе. В отсутствие рассеяния эта процедура сравнительно проста, однако она утомительна при наличии более одного газового объема из-за необходимости вычисления угловых коэффициентов с учетом пропускания газа. Действительно, одной из возможностей расчета таких коэффициентов является использование концепции метода Монте-Карло, так как не трудно трудностей при прямом вычислении коэффициента переноса излучения посредством этого алгоритма. С учетом рассеяния угловые коэффициенты между объемами и между поверхностью и объемом рассчитывают точно так же, как в алгоритме метода Монте-Карло, однако последующее построение хода рассеянных лучей не проводят, что в некоторой степени упрощает расчет. Рассматривают только прямолинейные пути и запоминают поглощенные и рассеянные лучи. Понятие эффективного излучения расширяется путем введения функции источника S_i для каждого из M объемов аналогично эффективному излучению q_i^+ поверхностей. Точно так же, как произведение углового коэффициента F_{i-j} и отражательной способности ρ_j при переносе в диатермичной среде определяет вклад эффективного излучения поверхности i в эффективное излучение поверхности j , так и произведение альбедо и рассчитанных параметров (назовем их $\omega_i F_{i-j}^{**}$) определяет вклад эффективного излучения q_i^+ (для поверхности) или функции источника S_j (для объема) в функцию источника объема i . Решение, полученное методом обращения матриц или итерациями, дает набор величин S_i ($i=1, M$) и q_i^+ ($i=m+1, M+N$).

2.9.7. Излучение неизоотермического газа

Д. К. Эдвардс

А. Решение уравнения переноса. Напомним, что уравнение (6) § 2.9.5 для изменения интенсивности при приращении пути на величину ds

$$dl/ds = -\kappa_a l + \kappa_a I_b \quad (\kappa_s = 0) \quad (1)$$

для однородного изотермического газа имеет решение, определяемое уравнением (3) § 2.9.6,

$$l = I_0 e^{-\kappa_a s} + I_b (T_g) (1 - e^{-\kappa_a s}) \quad (I_b = \text{const}). \quad (2)$$

Видно, что здесь $e^{-\kappa_a s}$ — пропускательная способность пути длиной s и $1 - e^{-\kappa_a s}$ — степень черноты. Если κ_a зависит от координаты, например из-за изменения состава газа, необходимо просто перейти от расстояния s к оптической глубине t

$$t = \int_0^s \kappa_a ds \quad (3)$$

и сделать в уравнении (1) подстановку

$$dl/dt = -l + I_b. \quad (4)$$

Пропускательная способность неоднородного газа соответственно равна e^{-t} , а степень черноты — $1 - e^{-t}$. Из этого преобразования следует простой вывод, что для излучения безразлично, распределены ли поглощающие компоненты в виде малой примеси на большом пути или они сосредоточены на коротком отрезке.

Из эксперимента следует, что ударное уширение влияет на величину κ_a через параметр P_g [см. уравнение (7) § 2.9.5], поэтому κ_a зависит от того, сосредоточен ли нет молекулярный газ на коротком отрезке; однако при переходе от s к t считался неизменным параметр P_g .

При изменении T_g и, следовательно, $I_b(T_g)$ вдоль пути можно искать решение уравнения (4) обычным математическим методом вариации постоянных. Однако инженер может представить себе формальное математическое решение и легко запомнить его построение, исходя из следующих физических представлений. На расстоянии s' (оптическая глубина t') прием приращение пути ds' вдоль луча. Согласно уравнению (2) этот элемент испускает $I_b(T_g(s')) \kappa_a ds'$, поскольку $1 - e^{-dt'} = dt' = \kappa_a ds'$ есть степень черноты элемента пути. Доля излучения, прошедшего от оптической глубины t' к t , равна $e^{-(t-t')}$. Тогда вклад от элемента ds' в интенсивность в координате s составляет

$$dl = e^{-(t-t')} I_b(t') dt' = e^{-\int_{s'}^s \kappa_a(s'') ds''} I_b(s') \kappa_a(s') ds'.$$

Суммируя (интегрируя) по всем элементам пути и прибавляя интенсивность прошедшего излучения $I_0 e^{-t}$, получаем

$$I = I_0 e^{-\int_0^t \kappa_a(s'') ds''} + \int_0^t e^{-\int_{s'}^s \kappa_a(s'') ds''} I_b(s') \kappa_a(s') ds'. \quad (5)$$

Следует отметить, что при наличии излучателей с различной температурой, например распределенных по размерам частиц с температурой, зависящей от размера частицы, для получения полной величины κ_a надо просто

просуммировать парциальные значения κ_a , а I_b заменить эффективным значением, полученным в соответствии с выражением

$$I_b = \frac{\sum_{i=1}^n \kappa_{a,i} I_b(T_i)}{\sum_{i=1}^n \kappa_{a,i}}. \quad (6)$$

При учете изотропного рассеяния вместо уравнения (6) § 2.9.5 необходимо воспользоваться уравнением (8) § 2.9.5. Предположим, что средняя интенсивность излучения S равна:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I d\Omega. \quad (7)$$

Тогда уравнение (8) § 2.9.5 перепишем в виде

$$\frac{dI}{dt_e} = -I + (1 - \omega_s) I_b + \omega_s S, \quad (8)$$

где оптическая глубина для ослабления равна:

$$t_e = \int_0^s (\kappa_a + \kappa_s) ds \quad (9)$$

и ω_s — альбеда однократного рассеяния:

$$\omega_s = \kappa_s / (\kappa_a + \kappa_s). \quad (10)$$

Величину $1 - \omega_s$ иногда называют «степенью черноты частиц». Из сравнения уравнений (8) и (4) видно, что они имеют одинаковую форму записи, если заменить функцию источника $(1 - \omega_s) I_b + \omega_s S$ величиной I_b . Следовательно, уравнение (5) также можно записать для отличного от нуля значения κ_s , заменив κ_a на $\kappa_a + \kappa_s$ и I_b на $(1 - \omega_s) I_b + \omega_s S$:

$$I = I_0 e^{-\int_0^s (\kappa_a + \kappa_s) ds'} + \int_0^s e^{-\int_0^{s'} (\kappa_a + \kappa_s) ds''} \times \\ \times [(1 - \omega_s) I_b + \omega_s S] (\kappa_a + \kappa_s) ds'. \quad (11)$$

Уравнение (5) для $\omega_s = 0$ или (11) для $\omega_s \neq 0$ является формальным математическим решением уравнения переноса для неоднородного и(или) неізотермического газа. Очевидно, уравнением можно непосредственно воспользоваться при известной зависимости функции источника от координаты. Например, если известны температура и распределение концентрации сажи в пламени (пренебрегая рассеянием) по уравнению (5) и провести численное интегрирование. Конечно, если желательно найти плотность полного потока, необходимо проинтегрировать I по $\cos \theta d\Omega$, как в уравнениях (1) § 2.9.6 или (8) и (9) § 2.9.1:

$$q_{\text{net}} = \int_0^{4\pi} I \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} (I^+ - I^-) \cos \theta d\Omega. \quad (12)$$

Если желательно получить объемный источник теплоты, проводим интегрирование I по $d\Omega$ и вычитаем объемное излучение, рассчитываемое по уравнению (13) § 2.9.6:

$$\dot{Q}_{V, \text{net absorb}} = \kappa_a \int_0^{4\pi} I d\Omega - 4\pi \kappa_a I_b = 4\pi \kappa_a (S - I_b). \quad (13)$$

Часто необходимо определить интенсивность не в конце пути, а в точке $s=0$. Расстояние от s' до $s=0$ в газе равно s' , и интенсивность прошедшего излучения $I_{L-e^{-s'}}$.

Следовательно, уравнение (5) примет вид

$$I^-(0) = I_{L-e^{-s'}} + \int_0^{s'} e^{-\int_0^{s''} \kappa_a ds''} \int_0^{s''} \kappa_a (s''') ds''' I_b(s''') \kappa_a(s'') ds''. \quad (14)$$

Кроме того, можно использовать более удобную форму записи уравнения (14), если проведено интегрирование по частям. Введем обозначение $u = I_b(s')$ и

$$v = 1 - e^{-\int_0^{s'} \kappa_a ds''} \quad dv = e^{-\int_0^{s'} \kappa_a ds''} \kappa_a ds'.$$

Тогда

$$\int_0^L u dv = uv \Big|_0^L - \int_0^L v du = u_L v_L - \int_0^L v du.$$

Следовательно,

$$I^-(0) = I_b(0) + (I_L - I_{bL}) e^{-\int_0^L \kappa_a ds'} + \int_0^L e^{-\int_0^{s'} \kappa_a ds''} \times \\ \times \frac{dI_b}{ds'} ds'. \quad (15)$$

При необходимости найти интенсивность распространяющегося в противоположном направлении излучения I^+ , соответствующего расстоянию s вдоль пути, нужно просто заменить в уравнениях (14) и (15) нуль на s .

В. Геометрические факторы. Уравнение переноса и его решение достаточно просты. Трудности проблемы радиационного переноса теплоты определяются сложностью учета геометрических факторов и спектральных зависимостей. Оставляя в стороне спектральные изменения, рассмотрим влияние геометрии. Проблему можно классифицировать как одномерную, когда функция источника зависит только от одной переменной, и многомерную при наличии более одного измерения. В первом случае выделим четыре специальных формы объема: плоский слой, параметры которого меняются только в направлении z ; сфера с изменением параметров только вдоль r ; цилиндр с изменением параметров только вдоль r и конус с коэффициентом поглощения, меняющимся как $1/z$, где z — расстояние от вершины, умноженное на функцию угла, отсчитываемого от оси, а температура зависит только от угла. Приближение плоского слоя используется в том случае, когда толщина слоя мала по сравнению с радиусом кривизны; сферой моделируют химические реакторы, болыды, внутренние области звезд; цилиндрической геометрией описываются трубки, камеры сгорания и цилиндрические струи; конус как идеализация представляет конические струи и выхлопы реактивных двигателей.

Если в задаче функция источника одномерна, то тем не менее радиационный перенос является трехмерным, поскольку в плотность полного потока излучения вносят вклад распространяющиеся по всем направлениям лучи. Плоский слой и сфера имеют осевую симметрию, и, таким образом, интегрирование по телесному углу сводится к интегрированию только по полярному углу θ , т. е. $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Для цилиндра и конуса необходимо интегрирование как по углу основания γ , так и по углу β относительно оси (см. рис. 3 § 2.9.1).

Вернемся к рассмотрению плоского слоя. Из рис. 1 следует, что длина луча изменяется от толщины слоя до бесконечности, когда угол θ меняется от нуля до $\pi/2$. Лучи всевозможных длин в указанных пределах вносят вклад в перенос теплоты. Удовлетворительный численный ответ можно получить, выбрав несколько дискретных направлений, каждое из которых соответствует конечному

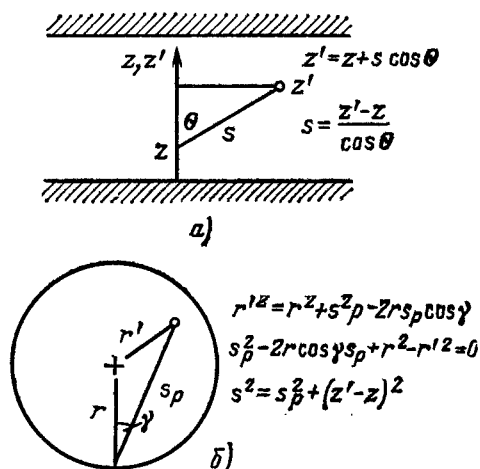


Рис. 1. Зависимость длины пути луча s в плоском слое (а) и цилиндре (б) (S_p — проекция луча s на плоскость сечения)

значению телесного угла, и заменив интегрирование по всему телесному углу суммированием с массовыми множителями. Такое приближение называют методом дискретных ординат, или многопоточным приближением. Однако при простой геометрии можно применять точное проинтегрированное выражение.

Легко увидеть, что для плоского слоя наклонная длина пути s связана с нормальной координатой z соотношением $s = z / \cos \theta$, как это следует из рис. 1. В цилиндре при нахождении связи радиальной координаты r с приращением длины пути ds необходимо воспользоваться тригонометрическим правилом косинусов. Для заданных направления луча и точки его возникновения s определяется через r и r' (см. рис. 1). Для распространяющихся внутрь лучей интегрирование проводится от радиуса в точке возникновения до $r_{\min}$ и затем от $r_{\min}$ до $r_{\max}$, как это изображено на рис. 1. Отметим, что полярный угол используется для сферы, а координатные углы в основании и относительно оси более удобны для цилиндра и конуса.

С. Плоский слой. Подстановка уравнений (5) и (14) в (12) для расстояния s приводит к следующему выражению:

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-\kappa a z / \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Как обычно, выразим $\cos \theta$ через μ или $1/\cos \theta$ через u . Тогда получим специальную функцию

$$E_n(t) = \int_0^1 e^{-t/\mu} \mu^{n-2} d\mu = \int_0^\infty e^{-ut} \frac{du}{u^n}, \quad (16)$$

где для примера $t = \kappa a z$. Интегральная показательная функция по определению обладает следующими свойствами:

$$\frac{dE_n(t)}{dt} = E'_n(t) = -E_{n-1}(t); \quad E'_1(t) = -\frac{e^{-t}}{t}; \quad (17)$$

$$\int E_n(t) dt = E_{n+1}(t); \quad (18)$$

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1}; \quad E_1(t) = \ln \frac{1}{t} - \gamma \text{ при } t \rightarrow 0, \quad (19)$$

$$\gamma = 0,5772156; \quad (19)$$

$$E_n(t) = \frac{1}{t} e^{-t} \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ (} t \gg n \text{)}. \quad (20)$$

Таблица 1. Значение пяти первых интегральных показательных функций

t	$E_1(t)$	$E_2(t)$	$E_3(t)$	$E_4(t)$	$E_5(t)$
0	∞	1.000 0	0.500 0	0.333 3	0.250 0
0.01	4.037 9	0.949 7	0.490 3	0.328 4	0.246 7
0.02	3.354 7	0.913 1	0.481 0	0.323 5	0.243 4
0.03	2.959 1	0.881 7	0.472 0	0.318 8	0.240 2
0.04	2.681 3	0.853 5	0.463 3	0.314 1	0.237 1
0.05	2.467 9	0.827 8	0.454 9	0.309 5	0.233 9
0.06	2.295 3	0.804 0	0.446 8	0.305 0	0.230 9
0.08	2.026 9	0.761 0	0.431 1	0.296 2	0.224 9
0.10	1.822 9	0.722 5	0.416 3	0.287 7	0.219 0
0.20	1.222 7	0.574 2	0.351 9	0.249 4	0.192 2
0.30	0.905 7	0.469 1	0.300 0	0.216 9	0.168 9
0.40	0.702 4	0.389 4	0.257 3	0.189 1	0.148 7
0.50	0.559 8	0.326 6	0.221 6	0.165 2	0.131 0
0.60	0.454 4	0.276 2	0.191 6	0.144 6	0.115 5
0.80	0.310 6	0.200 9	0.144 3	0.111 3	0.090 1
1.00	0.219 4	0.148 5	0.109 7	0.086 1	0.070 5
2.00	0.048 9	0.037 5	0.030 1	0.025 0	0.021 3
3.00	0.013 0	0.010 6	0.008 9	0.007 7	0.006 7

Некоторые значения интегральных показательных функций приведены в табл. 1.

Подставляя уравнение (5) для I ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) и аналогичное ему выражение для I ($\pi/2 < \theta \leq \pi$) в уравнение (12) и используя определение интегральной показательной функции, для диффузных границ получаем

$$q(t) = q_0^+ 2E_3(t) - q_L^- 2E_3(t_L - t) + \int_0^t E_2(t-t') B(t') 2dt' - \int_t^{t_L} E_2(t'-t) B(t') 2dt. \quad (21)$$

Здесь q_0^+ — плотность потока эффективного излучения стенки при $z=0$ (или в терминах оптических глубин $t=0$); q_L^- — плотность потока эффективного излучения стенки, направленного в сторону отрицательных z при $z=L$ ($t=t_L$); $B = \pi I_b$. Анализируя уравнение в случае бесконечно тонкого плоского слоя размером dt' , видим, что $2E_3(t)$ — полусферическая пропускательная способность для проходящего через слой оптической толщины t диффузного излучения, а величина $1-2E_3(t)$ — полусферическая поглощательная способность или (для изотермического газа) степень черноты. Величина $E_3(t-t')$ является пропускательной способностью для недиффузного источника, где для интервала оптических глубин от t' до t $I = I_b \kappa_a dz / \cos \theta$. Величина $2dt'$ является полусферической степенью черноты плоского слоя бесконечно малой оптической толщины $\kappa_a dz'$. Напомним, что средняя длина пути луча оптически тонкого плоского слоя толщиной dz' равна $2dz'$, следовательно, объемное излучение равно $4\kappa_a dz' B$, половина которого распространяется в одном направлении, а половина — в противоположном.

Уравнение (21), так же как и уравнения (5) или (14), интегрированием по частям можно привести к более удобному виду. Введем обозначения $v = 1-2E_3(t-t')$ и $u = B(t')$ в первом интеграле, $v' = 1-2E_3(t'-t)$ и $u' = B(t')$ во втором. Тогда интегрирование по частям дает

$$q(t) = (q_0^+ - B(0)) 2E_3(t) - (q_L^- - B(t_L)) 2E_3(t_L - t) + \int_0^t 2E_3(t-t') (-dB/dt') dt'. \quad (22)$$

Отметим, что если $B(t')$ разрывна, то интеграл в уравнении (21) берется в смысле Стильтьеса.

Для примера рассмотрим газ в плоском канале с черными стенками, полное расстояние между которыми L . Коэффициент поглощения принимается постоянным, а температура изменяется таким образом, чтобы интенсивность излучения черного тела при температуре газа линейно возрастала в пределах толщины пограничного слоя δ_{BL} от B_w на каждой стенке до значения B_g , которое остается неизменным в остальной части канала. Найдем плотность теплового потока на стенку. Учитывая, что стенки черные и температурный скачок на стенке отсутствует, получаем $q_0^+ - B(0) = 0$ и $q_L^+ - B(t_L) = 0$. Тогда уравнение (22) для теплового потока на стенку примет вид:

$$q(0) = \int_0^{t_{BL}} 2E_3(t') \left(-\frac{B_g - B_w}{t_{BL}} \right) dt' + \int_{t_{BL}}^{t_L - t_{BL}} 2E_3(t') dt' + \int_{t_L - t_{BL}}^{t_L} 2E_3(t') \left(+\frac{B_g - B_w}{t_{BL}} \right) dt';$$

$$-q(0) = \varepsilon_{\text{chan}} (B_g - B_w); \quad (23a)$$

$$\varepsilon_{\text{chan}} = \frac{1}{t_{BL}} \left[\frac{2}{3} (1 - 3E_4(t_{BL})) - 2E_4(t_L - t_{BL}) - E_4(t_L) \right], \quad (23b)$$

где $\varepsilon_{\text{chan}}$ — так называемая эффективная степень черноты канала. В полученный результат можно легко подставить численные значения, например если $T_g = 1000$ К; $T_w = 500$ К; $L = 10$ см; $\delta_{BL} = 1$ см и $\kappa_a = 100 \text{ м}^{-1}$ (не зависит от λ в пределах рассматриваемого спектрального интервала, см. табл. 1 § 2.9.1), то плотность потока результирующего излучения на стенке равна:

$$-q(0) = (5,67 \cdot 10^{-8}) (1000^4 - 500^4) \frac{1}{100(0,01)} \times$$

$$\times \left[\frac{2}{3} (1 - 3E_4(1)) - 2(E_4(9) - E_4(10)) \right] =$$

$$= (5,316 \cdot 10^4) (0,4945) = 2,628 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2.$$

Этот пример был выбран не только для иллюстрации уравнения (22), но также и для пояснения такого важного понятия, как самопоглощение. В численном примере ядро газа между $t_{BL} = 1$ и $t - t_{BL} = 9$ в основном непрозрачно. В этом случае плотность потока падающего излучения q^- на внешней стороне пограничного слоя равна полной величине $B_g = C_s T_g^4$, а плотность потока эффективного излучения на стенке $C_s T_w^4$ составляет $(0,5)^4 = 0,0625$ от излучения газа. Однако плотность потока результирующего излучения на стенке составляет лишь 0,4945 от разности $C_s T_g^4 - C_s T_w^4$, а не $1 - 0,0625$. В пограничном слое плотность потока падающего излучения на стенке уменьшается в результате поглощения, которое превосходит испускание. При фиксированном отношении δ_{BL}/L будем увеличивать $t_L = \kappa_a L$ от нуля до бесконечности. При $\delta_{BL}/L = 0$ степень черноты канала возрастает как $1 - 2E_3(t_L)$, т. е. сначала линейно, как $2t_L$ (среднегеометрическая длина пути луча равна 2), а затем более медленно, достигая максимального значения 1. При $\delta_{BL}/L \neq 0$ из уравнения (23b) находим, что степень черноты канала возрастает сначала линейно, как $(2 - \delta_{BL}/L)t_L$, затем более медленно до достижения максимального значения и далее при стремлении $t_L \rightarrow \infty$ снова приближается к нулю, как $2/[3(\delta_{BL}/L)t_L]$. Качественно такой же эффект наблюдается в сажистых пламенах горящей нефти и в камерах сгорания; это означает, что с увеличением размера пламени сначала возрастает радиационный поток

от него, однако затем он падает вследствие поглощения холодным пограничным слоем.

Д. Дифференциальные формулировки. В нерассеивающей среде с заданным распределением температуры, когда известна функция источника, уравнение переноса легко интегрируется вдоль пути и находится I , и далее, интегрируя I по углу θ и ϕ или (при необходимости) по γ и β , находится плотность теплового потока. При необходимости можно провести численное интегрирование или воспользоваться, если это удастся, специальными функциями типа интегральной показательной функции. Когда рассеяние становится заметным или радиационный нагрев или охлаждение приводят к изменению температуры, определяемой из общего уравнения энергии, функция источника неизвестна и решение можно получить методом итераций. Этот метод основан на оценке функции источника с использованием решения уравнения переноса для I , затем уточнением оценки функции источника путем интегрирования I по углу Ω и последующем повторении этих операций. Такая процедура сходится для альбедо, меньших единицы, и для среды с известным распределением температуры. Альтернативным и более удобным вариантом может служить дифференциальная формулировка. Некоторые аспекты различных дифференциальных методов кратко обсуждались здесь, когда они использовались в классических инженерных задачах радиационного переноса теплоты через слой пористого или волокнистого изолирующего материала.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Слой изолирующего материала толщиной L находится в равновесии с излучением. Полагается, что материал должен быть серым, анизотропно рассеивающим, поглощающим и испускающим с коэффициентом поглощения $\kappa = \kappa_a + \kappa_s$. При наличии радиационного равновесия серой среды ($dq_R/dz = 0$) отсутствует необходимость различать изотропное рассеяние и поглощение с последующим испусканием. Ограничивающие стенки считаются черными. Как и для канала с теплоизолированными стенками, условие для степеней черноты нечерных поверхностей устанавливается добавлением поверхностных сопротивлений $(1 - \varepsilon_1)/\varepsilon_1$ и $(1 - \varepsilon_2)/\varepsilon_2$ к сопротивлению изоляции $1/\bar{F}_{1-2}$, как это записано в уравнении (59) § 2.9.3. Оптическая глубина $t = \kappa z$ отсчитывается от одной из стенок и изменяется от 0 до $t_L = \kappa L$.

Для сравнения получим сначала решение для оптически тонкой среды $t_L \ll 1$. В этом случае среда является изотермической и можно воспользоваться полученным на основе радиационных электрических цепей решением для

источника, стока и адиабатного газа, принимая $\tau_g = e^{-2t_L} = 1 - 2t_L$ и $\varepsilon_g = 1 - \tau_g = 2t_L$ (здесь множитель 2 появился из-за равенства средней длины пути луча $2L$). В результате получаем

$$\bar{F}_{1-2} = \tau_g + \frac{1}{2} \varepsilon_g = 1 - \tau_g \quad \text{при} \quad t_L \rightarrow 0. \quad (24)$$

Полученное решение, очевидно, неприменно при возрастании t_L , поскольку не выполняется требование изотермичности среды.

Диффузия излучения. Имеются длины волн, для которых κ_a настолько велико, что $1/\kappa_a$ мало по сравнению с радиусом кривизны, $\kappa_a z_w$ велико (где z_w — расстояние до стенки) и величина dB/dz постоянна на расстоянии нескольких величин $1/\kappa_a$ (здесь z — длина, отсчитываемая в направлении температурного градиента, а $B = \pi I_b$ при температуре среды для рассматриваемой длины волны). Из уравнения (22) видно, что в этом случае спектральная плотность теплового потока описывается простым выражением в форме закона Фурье для кондуктивного переноса теплоты. Слагаемые $2E_3(t)$ и $2E_3(t_L - t)$ обращаются в нуль вследствие того, что оптические глубины t и $t_L - t$

до стенок велики. Величина $dB/dt' = (1/\kappa_a)dB/dz'$ принимается постоянной и равной $1/\kappa_a dB/dz$ в интервале, где $2E_3(t-t') \rightarrow 0$, а интегрирование по t' заменяется на $t-t'$ и $t'-t$. Поскольку значения t и t_L-t велики, пределы интегрирования считаем равными бесконечности. В этом случае получаем

$$q_\lambda = -\frac{1}{\kappa_a} \frac{dB_\lambda}{dz} \left(4 \int_0^\infty E_3(t'') dt'' \right) = \frac{4}{3\kappa_a} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T} \frac{dT}{dz}. \quad (25)$$

Величина $(4/3\kappa_a)(\partial B_\lambda/\partial T)$ является спектральным коэффициентом лучистой теплопроводности. Если κ_a велико во всем рассматриваемом спектральном интервале, определяемом температурой T и внутренней долей энергии интегрального излучения черного тела (см. табл. 1 § 2.9.1), можно проинтегрировать q_λ по спектру и получить

$$q = -K_R \frac{dT}{dz}, \quad (26)$$

где

$$K_R = \int_0^\infty \frac{4}{3\kappa_a} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T} d\lambda = \frac{16}{3} C_s T^3 \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_a} df_i(\lambda T). \quad (27)$$

Величина k_R , равная произведению $(16/3) C_s T^3$ и усредненной с массовым множителем $1/\kappa_a$ внутренней доле энергии интегрального излучения черного тела, является случайным средним коэффициентом поглощения.

Обсуждавшиеся выше выражения получены для нерассеивающей среды. Однако для серой среды, изотропно рассеивающей и находящейся в равновесии с излучением, видно, что альбедо однократного рассеяния не вносит осложнений (так же как не вносит осложнений степень черноты полностью диффузной серой адиабатной стенки) и κ_a заменяется коэффициентом ослабления $\kappa_a + \kappa_s$. Для несерого анизотропного рассеяния ситуация не столь проста, однако в качестве приближения можно воспользоваться заменой k_s на двунаправленный коэффициент рассеяния усредненный с массой $1 - \cos \theta$.

Для обсуждаемого слоя изоляции запишем

$$\frac{d}{dz}(q_R) = 0; \quad q_R = -\frac{16}{3} \frac{1}{\kappa} C_s T^3 \frac{dT}{dz}.$$

Учитывая, что $C_s T^3 dT = dB$, получаем

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{4}{3\kappa} \frac{dB}{dz} \right) = 0, \quad \frac{d^2 B}{dz^2} = 0,$$

полагая $B=B_1$ при $z=0$ и $B=B_2$ при $z=L$, если нельзя воспользоваться так называемой экстраполяционной длиной. Получив общее решение для B , воспользовавшись граничными условиями для вычисления констант и найдя $q_R = -(4/3\kappa)dB/dz = \mathcal{F}_{1-2}(B_1-B_2)$, получим

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{4}{3t_L} \quad \text{при } t_L \rightarrow \infty. \quad (28a)$$

Очевидно, что решение становится непригодным при стремлении $t_L \rightarrow 0$.

Для повышения точности приближения диффузии излучения иногда вводят понятие экстраполяционной длины. Записывая уравнение (22) около стенки с $z=0$ и увеличивая κ , получаем зависимость $q_R = -(2/3\kappa)dB/dz$ от $-(4/3\kappa)dB/dz$ на некотором расстоянии от стенки. Экстраполяция полученного вдали от стенки наклона к пристеночному значению предполагает задание B_w на расстоянии $2/3\kappa$ перед стенкой. В рассматриваемом примере L заменяются на $L+4/3\kappa$, в результате находят

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{1+(3/4)t_L} > 1. \quad (28b)$$

Этот результат имеет хорошую инженерную точность. Однако не ясно, как использовать понятие экстраполяционной длины в задачах совместного радиационного и конвективного переноса.

Многопотоковые методы. Основная идея метода заключается в выборе нескольких дискретных направлений (называемых иногда «дискретными ординатами»), использовании уравнения переноса для получения интенсивностей вдоль этих направлений, чтобы затем, суммируя их, записать приближенные выражения для S и q_R («конечная квадратура»). Для рассматриваемого здесь слоя изоляции наинизшим уровнем приближения является двухпотоковая модель Шустера, которая эквивалентна использованию так называемого замещенного ядра, т. е. приближением функции $E_3(t)$ величиной e^{-at} . Выбор направлений произволен. В двухпотоковом приближении можно выбрать направления назад и вперед вдоль среднегеометрической длины пути луча (это дает правильный результат при $t_L \rightarrow 0$) или вдоль какого-либо более короткого наклонного пути. В двухпотоковом приближении пронумеруем интенсивность I_1, I_2 и плотности потоков q_1, q_2 . Плотность потока результирующего излучения и функцию источника приблизительно запишем в следующем виде соответственно:

$$q_R \approx \pi I_1 - \pi I_2 = q_1 - q_2,$$

$$S \approx \frac{1}{2} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2\pi} (q_1 + q_2).$$

При наличии радиационного равновесия $I_b = S$, уравнения переноса для I_1 и I_2 примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt_1} &= -I_1 + S, & \frac{dq_1}{dt_1} &= -q_1 + \frac{1}{2} (q_1 + q_2), \\ \frac{dI_2}{dt_2} &= -I_2 + S, & \frac{dq_2}{dt_2} &= -q_2 + \frac{1}{2} (q_1 + q_2). \end{aligned}$$

Положим $t_1 = akz = at$, $t_2 = -akz = -t_1$ и выберем $a=2$, устанавливая таким образом направления I_1 и I_2 вдоль среднегеометрической длины пути луча. Получим уравнение для двух плотностей потоков

$$\frac{dq_1}{dt} = q_2 - q_1 = q_R; \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2 - q_1 = q_R,$$

потребовав $q_1=B_1$ при $t=0$ и $q_2=B_2$ при $t=t_L$. Решая совместно эти два уравнения и используя граничные условия для вычисления неизвестных констант, получаем q_1 и q_2 . Затем находим плотность потока результирующего излучения. Для $\mathcal{F}_{1-2}$ окончательно имеем

$$\mathcal{F}_{1-2} = \frac{1}{1+t_L}. \quad (29)$$

Видно, что результат является правильным при $t_L \rightarrow 0$, поскольку была выбрана среднегеометрическая длина пути луча. Однако сравнение с уравнением (28a) показывает, что он на 25% меньше при $t_L \rightarrow \infty$.

Если, например, ввести шесть потоков, то точность многопотокового метода станет приемлемой для инженерных целей. При задании $2n$ потоков необходимо выбрать $2n$ направлений и связать с каждым из них массовый коэффициент a_i для плотности потока результирующего излучения и b_i для функции источника ($i=1, n$):

$$q = \sum_{i=1}^{2n} a_i q_i, \quad S = \sum_{i=1}^{2n} b_i q_i. \quad (30)$$

В простейшем случае можно выбрать равноотстоящие величины μ^2 ($\mu = \cos \theta$) в интервале от 0 до ± 1 , т. е.

$$\mu = \begin{cases} \left(1 - \frac{i-1/2}{n}\right)^{1/2} & \text{при } 1 \leq i \leq n; \\ -\left(\frac{1-1/2}{n} - 1\right)^{1/2} & \text{при } n+1 \leq i \leq 2n. \end{cases} \quad (31)$$

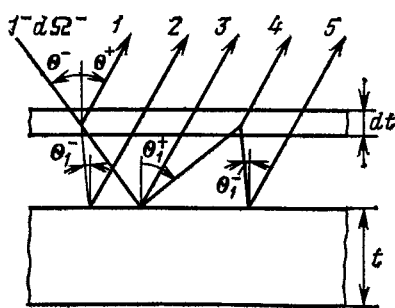


Рис. 2. Вставка сверху (отражение)

Тогда, поскольку $\cos \theta d\Omega/\pi = d\mu^2$ и $d\Omega/4\pi = d\mu/2$, имеем

$$a_i = \frac{1}{n} \quad b_i = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{i-1}{n} \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{i}{n} \right)^{1/2} \right];$$

$$1 \leq i \leq n; \quad \text{МЛНН} \quad (32)$$

$$a_i = -\frac{1}{n} \quad b_i = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{i}{n} - 1 \right)^{1/2} - \left(\frac{i-1}{n} - 1 \right)^{1/2} \right];$$

$$n+1 \leq i \leq 2n.$$

Можно также рассматривать и другие схемы выбора (см., например, [8]).

Вставка. Метод вставки применяют для получения дифференциальных уравнений для двунаправленных отражательной и пропускательной способностей при совместном использовании их с методом дискретных ординат. Рассмотрим задачу о нахождении двунаправленной отражательной и пропускательной способностей слоя снега. Эта задача связана с рассмотренной ранее задачей о слое изоляции, поскольку в пределе стремящегося к единице альбедо однократного рассеяния ω_s рассеивающий слой получается таким же, как и находящийся в радиационном равновесии рассеивающе-переизлучающий слой. В этом случае слой ничего не поглощает, и полусферическая пропускательная способность становится равной разности единицы и полусферической отражательной способности. Полусферическая пропускательная способность идентична $\mathcal{F}_{1-2}$, для слоя, находящегося в радиационном равновесии.

Задача о вставке формулируется следующим образом. Положим, что двунаправленные характеристики плоского слоя оптической глубины t известны. Теперь надо ответить на вопрос, какие изменения произойдут при добавлении к нему бесконечно тонкого слоя dt . Можно предположить, что этот слой добавлен сверху (со стороны падающего излучения) или снизу (с темной стороны). Эта процедура носит название вставки сверху или вставки снизу соответственно. На рис. 2 показано, как для расчета отражательной способности используют метод вставки сверху.

Поскольку dt является бесконечно малой, оставим только слагаемые первого порядка малости. На рисунке изображены все лучи первого и нулевого порядков. Плоский слой облучается с интенсивностью I^- в телесном угле $d\Omega^-$ в направлении угла θ^- . Мы хотим определить интенсивность I^+ в направлении θ^+ . Показаны пять лучей, идущих параллельно интересующему нас выбранному направлению θ^+ . Первый рассеивается непосредственно в направлении θ^+ . Приращение пути в этом направлении равно $dt/\cos \theta^+$, а интенсивность источника в слое $\omega_s I^- d\Omega^-/4\pi$. Тогда получим

$$dI_1^+ = \frac{\omega_s}{4\pi} I^- d\Omega^- \frac{dt}{\cos \theta^+}. \quad (33)$$

Второй луч безвозвратно рассеян в произвольном направлении θ_1^- , а затем отразился двунаправленно вдоль вы-

бранного угла θ^+ . Затуханием второго порядка малости в тонком слое пренебрежем. Из определения двунаправленной отражательной способности [уравнение (14) § 2.9.2] получим

$$dI_2^+ = \frac{1}{\pi} \rho(\theta^+, \theta_1^-) dI_1^- \cos \theta_1^- d\Omega_1^-.$$

Интенсивность рассеянного излучения dI_1^- представим в виде (33) с заменой угла θ^+ на θ_1^- . Далее, интегрируя по всевозможным направлениям θ_1^- , получаем

$$dI_2^+ = \left(\frac{1}{\pi} \int \rho(\theta^+, \theta_1^-) d\Omega_1^- \right) \frac{\omega_s}{4\pi} I^- d\Omega^- dt, \quad (34)$$

где

$$d\Omega_1^- = 2\pi \sin \theta_1^- d\theta_1^- = 2\pi d(\cos \theta_1^-).$$

Третий луч проходит сквозь добавленный слой dt , в результате двунаправленного отражения распространяется в требуемом направлении θ^+ и опять проходит через слой dt . Каждое прохождение сопровождается затуханием

$$I_3^+ = \left(1 - \frac{dt}{\cos \theta^+} \right) \frac{1}{\pi} \rho(\theta^+, \theta^-) \left(1 - \frac{dt}{\cos \theta^-} \right) I^- d\Omega^-.$$

Отбросив слагаемое порядка dt^2 , получим

$$I_3^+ = \frac{1}{\pi} \rho(\theta^+, \theta^-) I^- d\Omega^- \left[1 - \left(\frac{1}{\cos \theta^+} + \frac{1}{\cos \theta^-} \right) dt \right]. \quad (35)$$

Это выражение содержит слагаемые нулевого и первого порядка малости.

Лучи 4 и 5 возникают после двунаправленного отражения прошедшего луча и последующего рассеяния. Луч 4 рассеивается в требуемом направлении θ^+ , луч 5 рассеивается в произвольном направлении θ_1^- , двунаправленно отражается в нужное направление θ^+ . Поскольку имеется рассеяние первого порядка, затухание высшего порядка малости не учитывается. Интегрируя по всем возможным углам рассеяния, получаем

$$dI_4^+ = \frac{1}{\pi} \int \rho(\theta_1^+, \theta^-) d\Omega_1^+ I^- \cos \theta^- d\Omega^- \frac{\omega_s dt}{4\pi \cos \theta^+}; \quad (36)$$

$$dI_5^+ = \frac{1}{\pi} \int \rho(\theta_1^+, \theta^-) d\Omega_1^+ I^- \cos \theta^- d\Omega^- \left(\frac{\omega_s dt}{4\pi} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\pi} \int \rho(\theta^+, \theta_1^-) d\Omega_1^-. \quad (37)$$

Просуммировав пять слагаемых и поделив на $(I^- \cos \theta^- d\Omega^-/\pi)$, получим $\rho(\theta^+, \theta^-)$ для оптической глубины $t+dt$. Введя обозначения $u = \cos \theta^+$, $v = \cos \theta^-$, $u' = \cos \theta_1^+$, $v' = \cos \theta_1^-$, вычтя $\rho(u, v, t)$, поделив на dt и перейдя к пределу $dt \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial \rho(u, v, t)}{\partial t} = \omega_s \left(\frac{1}{2u} + \int_0^1 \rho(u, v', t) dv' \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2v} + \int_0^1 \rho(u', v, t) du' \right) - \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) \rho(u, v, t). \quad (38)$$

Выбрав n дискретных направлений, например, в соответствии с уравнением (31) и приняв значения a_i и b_i по уравнению (32), получим систему из n^2 обыкновенных

дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \rho_{i,j}(t)}{\partial t} = \omega_s \left(\frac{1}{2u_i} + \sum_{k=1}^n b_k \rho_{i,k}(t) \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{2v_j} + \sum_{k=1}^n b_k \rho_{k,j}(t) \right) - \left(\frac{1}{u_i} + \frac{1}{v_j} \right) \rho_{i,j}(t). \quad (39)$$

Эта система решается с помощью явного метода Рунге — Кутты с начальными условиями $\rho_{i,j}(0)=0$ для абсолютно черной границы. Если $\rho_{i,j}(t_L)$ известно, полусферическая отражательная способность определяется выражением

$$\rho_H(t_L) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{i,j}(t_L) \quad (40)$$

и для $\omega_s = 1$ получим

$$\mathcal{F}_{1-2}, b = 1 - \rho_H(t_L). \quad (41)$$

Другие дифференциальные методы. Для анализа радиационного переноса с учетом рассеяния существуют также другие приближенные методы. В классическом приближении Милна — Эддингтона уравнение переноса, уравнение (8) с $dt_e = kds = kdz/\mu = dt/\mu$, интегрируется дважды по телесному углу 4π : сначала по $d\Omega$, а затем по $\cos \theta d\Omega$. Получившиеся два интеграла являются нулевым и первым моментами соответственно. Поэтому данный метод называют моментным методом. Сделаем следующее приближение:

$$K = \int_{-1}^{+1} I \mu^2 d\mu \approx \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I d\mu \right) = \frac{2}{3} S. \quad (42)$$

Тогда получим два взаимосвязанных уравнения для плотности потока результирующего излучения q_R и функции источника S :

$$\frac{dq_R}{dt} = 4\pi(1 - \omega_s)(I_b - S); \quad (43)$$

$$\frac{dS}{dt} \approx -\frac{3}{4\pi} q_R. \quad (44)$$

В упоминавшейся задаче об изоляции полагалось наличие радиационного равновесия и $I_b = S$, тогда из уравнения (43) получим

$$dq_R/dt = 0. \quad (43a)$$

Наконец, можно получить решение двух уравнений, из которого видно, что q_R — постоянная величина, а S — линейная функция t :

$$S = S_0 - \frac{3}{4\pi} q_R t. \quad (45)$$

Две неизвестные константы q_R и S_0 необходимо найти из граничных условий. При этом задача несколько усложняется, что характерно для приближенных дифференциальных методов. Рассмотрим уравнение переноса и получим его решение для I_L^+ и I_0^- , т. е. уравнения (11) и (14) соответственно. Полагая $I_0^+ = B_1/\pi$ и $I_L^- = B_2/\pi$, находим интегрированием по μ S при $t=0$ и $t=t_L$ и, подставляя эти значения в уравнение (45), получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными. Другие моментные методы рассмотрены в [10].

Е. Учет спектральных характеристик и масштабные приближения. Оставим теперь в стороне геометрические, направленные и пространственные особенности решения уравнения переноса и рассмотрим спектральные зависи-

мости. Мы уже видели, что уравнение переноса легко решается [см., например, уравнение (5)], учитывая спектральную зависимость излучения. Это решение верно, как установлено, когда оно получено для источника с непрерывным спектром излучения, какими являются сажа или частицы. Однако когда источником является молекулярный газ, спектральный коэффициент поглощения k_a может изменяться на несколько порядков величины в спектральном интервале, равном расстоянию между линиями или полосами. В этом случае уравнениями (5) или (14) практически нельзя воспользоваться. Напомним, что величина k_a зачастую неопределенна, а известны лишь параметры узкополосной модели S/d (отношение интенсивности к расстоянию между линиями) и β (отношение ширины линии к расстоянию между линиями). Однако в некоторых случаях неизвестны и эти величины, а определены только параметры широкополосной модели α_k (интегральная интенсивность полосы), β_k (отношение ширины линий к расстоянию между линиями) и ω_k (параметр ширины полосы). Соответственно для получения рабочих выражений необходимо воспользоваться так называемыми узкополосным или широкополосным масштабами.

Узкополосный масштаб, приближение Куртиса — Годсона. Рассмотрим спектрально сглаженную пропускательную способность, соответствующую пути L в газе, температура, состав и или давление которого меняется вдоль L . Из уравнений (2), (3) и (18) § 2.9.5 находим

$$\bar{\tau}_g = \frac{1}{d} \int_{v-d/2}^{v+d/2} e^{\int_0^x k_a dX} dv, \quad (46)$$

где k_a находятся суммированием лоренцевских линий в соответствии с уравнением (15) § 2.9.5; X — произведение длины пути на плотность поглощающего газа. В однородном газе k_a не меняется вдоль луча и сглаженная пропускательная способность $\bar{\tau}_g$ определяется уравнением вида (19) § 2.9.5 в зависимости от отношений S/d и γ/d или $\eta = \pi\gamma/d$, где S/d соответствует усреднению k_a по интервалу d . Очевидно, что в оптически тонком неоднородном газе, когда $k_a L \ll 1$, для некоторого спектрального интервала $v-d/2$ и $v+d/2$

$$\bar{\tau}_g = \frac{1}{d} \int_{v-d/2}^{v+d/2} \left(1 - \int_0^x k_a dX \right) dv = 1 - \int_0^x \left(\frac{S}{d} \right) dX = 1 - \bar{\xi}.$$

Соответствующее выражение для однородного газа имеет следующий вид:

$$\bar{\tau}_{g, \text{ homo}} = 1 - \left(\frac{S}{d} \right) X.$$

Следовательно, для оптически тонкого неоднородного газа

$$\bar{\tau}_g = \tau_{g, \text{ homo}} (\xi = \bar{\xi}),$$

где ξ — это $(S/d) X$ для однородного газа и

$$\bar{\xi} = \int_0^x \left(\frac{S}{d} \right) dX = \left(\frac{\bar{S}}{d} \right) X. \quad (47)$$

Когда линии являются сильными, т. е. газ оптически плотный вблизи $v=v_l$ [см. уравнение (15) § 2.9.5], пропускательная способность мала. Оценочное значение пропускательной способности можно получить лишь при $(v-v_0, i)^2$, существенно превышающем γ^2 . В этом случае, сравнивая (46) для неоднородного газа с выраже-

нием для однородного газа, приходим к выводу

$$\bar{\tau}_g = \bar{\tau}_{g, \text{ homo}} (\xi = \bar{\xi}); \quad (48)$$

$$\bar{\xi} = \int_0^X \left(\frac{S}{d} \right) \left(\frac{\pi \gamma}{d} \right) dX = \left(\frac{\bar{S}}{d} \right) (\bar{\eta}) X. \quad (49)$$

В приближении Куртиса—Годсона полагается

$$\bar{\tau}_g = \tau_{g, \text{ homo}} (\xi = \bar{\xi}, \zeta = \bar{\zeta}). \quad (50)$$

В терминах уравнения (19) § 2.9.5 приближение Куртиса—Годсона имеет вид

$$\bar{\tau}_g = \exp \frac{-\bar{\xi}}{(1 + \bar{\xi}^2 / \bar{\zeta}^2)^{1/2}}. \quad (51)$$

Рабочие формулы для неизоотермического газа получаются спектральным сглаживанием уравнений (5) или (14). Сравнение спектрально сглаженного уравнения с (46) показывает, что

$$I_{\text{sm}}^-(0) = I_L \bar{\tau}_g + \int_0^{L'} \left(-\frac{d\tau_g}{ds} \right) I_b(s) ds, \quad (52)$$

$$L' = L / \cos \theta.$$

Здесь полагалось слабое спектральное изменение I_L , что в действительности ограничивает результат случаем малого отражения на границах. Интегрирование по частям (или спектральное сглаживание уравнения (15) дает

$$I_{\text{sm}}^-(0) = I_b(0) + [I_L - I_b(L)] \bar{\tau}_g(L) + \int_0^{L'} \bar{\tau}_g dI_b(s). \quad (53)$$

Становится ясно, как провести практические расчеты при известных параметрах узкополосной модели S/d и $\eta = \pi\gamma/d$, зависящих от ν и T_g . При интегрировании вдоль луча получаем величины $\bar{\xi}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\tau}_g(\bar{\xi}, \bar{\zeta})$ и $\int \tau_g dI_b(s)$, которые затем подставляем в уравнение (53).

Широкополосный масштаб. Уравнение (53) преобразуем к виду

$$I_{\text{sm}}^-(0) = I_L - (I_b(L) - I_L)(1 - \bar{\tau}_g) - \int_0^{L'} (1 - \bar{\tau}_g) dI_b(s). \quad (54)$$

Интегрирование по всем волновым числам и введение полосного приближения [см. уравнения (26) и (15) § 2.9.5] дает интегральную интенсивность подающего на стенку излучения

$$I_T(0) = I_L + \sum_k [I_b(\nu_k, T_L) - I_L(\nu_k)] A_k(L) - \sum_k \int_0^{L'} A_k(S) dI_b(\nu_k, s), \quad (55)$$

где T в индексе означает интегральную величину ($I_{L,T} = C_s T^4 / \pi$); A_k — эффективная ширина полосы для неизоотермического газа. Использование уравнения (55) зависит от возможности расчета эффективной ширины полосы A_k для пути в неизоотермическом газе.

В [13] предложено правило для широкополосного масштаба, согласно которому находят e_1 , e_2 и e_3 и вычисляют $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\eta}$, подставляемые затем вместо α , ω и η в уравнение (58) § 2.9.5 для определения эффективной

ширины полосы A :

$$\xi_{1,k} = \int_0^s \alpha_k \rho_a ds = \int_0^X \alpha_k dX = \bar{\alpha}_k X; \quad (56a)$$

$$\xi_{2,k} = \int_0^s \omega_k \alpha_k \rho_a ds = \int_0^{\xi_{1,k}} \omega_k d\xi_{1,k} = \bar{\omega}_k \xi_{1,k}; \quad (56b)$$

$$\xi_{3,k} = \int_0^s \eta_k \omega_k \alpha_k \rho_a ds = \int_0^{\xi_{2,k}} \eta_k d\xi_{2,k} = \bar{\eta}_k \xi_{2,k}. \quad (56b)$$

Сопоставление с данными по излучению неизоотермического газа показывает, что расчеты с использованием правила для широкополосного масштаба имеют хорошую инженерную точность [13].

Г. Излучение молекулярного газа в плоском слое. Рассмотрим теперь задачу о неизоотермическом плоском слое, в которой учитывается совместное воздействие спектральных зависимостей и изменений по направлениям. Чтобы найти плотность потока результирующего излучения, необходимо провести интегрирование по спектру и по передней и задней полусферам:

$$q_R = \int_{\nu=0}^{\infty} \int_{\mu=0}^1 [I_{\nu}^+(\mu) - I_{\nu}^-(\mu)] 2\pi \mu d\mu d\nu. \quad (57)$$

До сих пор каждое из двух видов интегрирования рассматривалось по отдельности: интегрирование по полусфере определялось уравнением (22), а по спектру — (55). Поскольку порядок интегрирования можно менять, требуемое выражение для q_R получается интегрированием (22) по спектру или уравнения (55) (обобщенного на случай произвольного положения) по полусфере. Выберем последнее, поскольку (55) получено в приближении широкополосного масштаба, а (22) еще нет.

Обозначения. Для того чтобы обобщить (55) на произвольное положение y , отсчитываемое от одной из стенок, необходимо рассмотреть путь от y' до y . Тогда уравнения (56) примут вид

$$\xi_{1,k}(y, y') = \int_{y'}^y \alpha_k \rho_a dy'' = \xi_{1,k}(y) - \xi_{1,k}(y'); \quad (58a)$$

$$\xi_{2,k}(y, y') = \int_{y'}^y \omega_k \alpha_k \rho_a dy'' = \xi_{2,k}(y) - \xi_{2,k}(y'); \quad (58b)$$

$$\xi_{3,k}(y, y') = \int_{y'}^y \eta_k \omega_k \alpha_k \rho_a dy'' = \xi_{3,k}(y) - \xi_{3,k}(y'). \quad (58b)$$

Для пути между y' и y , проходящего под углом θ ($\mu = \cos \theta$), эквивалентная ширина полосы

$$A_{k,\mu}(y, y') = \bar{\omega}_k A_k^* \left(\frac{t_k}{\mu}, \eta_k \right), \quad (59)$$

где

$$\bar{\omega}_k = \frac{\xi_{2,k}(y, y')}{\xi_{1,k}(y, y')}; \quad (60a)$$

$$\bar{t}_k = \frac{\xi_{1,k}^2(y, y')}{\xi_{2,k}(y, y')}; \quad (60b)$$

$$\bar{\eta}_k = \frac{\xi_{3,k}(y, y')}{\xi_{2,k}(y, y')}. \quad (60b)$$

Напомним, что поглощение полосы A_k^* для экспоненциальной модели полосы определяется уравнениями (19),

(23) и (24) § 2.9.5 следующим образом:

$$A_k^*(t_k, \eta_k) = \int_0^\infty \left[1 - \exp \left[\frac{-t_k e^{-v^*}}{\sqrt{1 + (t_k/\eta_k) e^{-v^*}}} \right] \right] dv^*, \quad (61)$$

где $v^* = (v - v_k)/\omega_k$. Из уравнений (47) и (48) § 2.9.5 следует, что при высоких температурах η_k велико, и тогда уравнение (61) приводится к виду

$$A_k^*(t_k) = \ln t_k + E_1(t_k) + \gamma, \quad \eta_k \gg 1. \quad (62)$$

Вспомним также обсуждение уравнения (58) из § 2.9.5; при использовании уравнения (62) необходимо увеличить значение ω_k из табл. 1 § 2.9.5 на 20%.

Интенсивность излучения в передней и задней полусферах. Учитывая, что y пробегает значения от 0 на одной стенке до L на другой, обобщим уравнение (55) на случай произвольного y путем интегрирования с пределами y и L вместо 0 и L (индекс T , обозначающий интегральную величину, для упрощения обозначений опущен):

$$I_\mu^-(y) = I_L + \sum_k (I_{b,k,L} - I_{L,k}) A_{k,\mu}(L, y) - \sum_k \int_y^L A_{k,\mu}(y', y) \frac{dI_{b,k}}{dy'} dy'. \quad (63)$$

Физически нереальное соображение о разрывности $I_{b,k}$ в зависимости от y' отброшено.

Выражение для интенсивности вперед следует из (63) с поворотом системы координат от y к $L - y$:

$$I_\mu^+(y) = I_0 + \sum_k (I_{b,k,0} - I_{0,k}) A_{k,\mu}(y, 0) + \sum_k \int_0^y A_{k,\mu}(y, y') \frac{dI_{b,k}}{dy'} dy'. \quad (64)$$

Поглощение полосы в геометрии плоского слоя. Интегрированием $(I^+ - I^-)$ по μ получаем из эффективной ширины полосы A_k эффективную ширину полосы для плоского слоя A_s . Соответствующими безразмерными величинами являются поглощение полосы A_k^* и поглощение полосы для плоского слоя A_s^* :

$$A_s(t_k, \eta_k) = \int_0^1 A_k \left(\frac{t_k}{\mu}, \eta_k \right) 2\mu d\mu; \quad (65a)$$

$$A_s^*(t_k, \eta_k) = \int_0^1 A_k^* \left(\frac{t_k}{\mu}, \eta_k \right) 2\mu d\mu. \quad (65b)$$

При подстановке (62) в (65b) для больших η_k получаем

$$A_s^*(t_k) = \ln t_k + E_1(t_k) + \gamma + \frac{1}{2} - E_3(t_k), \quad \eta_k \gg 1. \quad (66)$$

Для диффузных стенок, используя разность (64) и (63), получаем выражение

$$\int_0^\infty (I_V^+ - I_V^-) dv, \quad \text{при подстановке которого в (57) имеем}$$

$$q_R(y) = q_0^+ - q_L^+ + \sum_k (B_{k,0} - q_{k,0}^+) A_s(y, 0) - \sum_k (B_{k,L} - q_{k,L}^+) A_s(L, y) + \sum_k \int_0^y A_s(y, y') \frac{dB_k}{dy'} dy' + \sum_k \int_y^L A_s(y', y) \frac{dB_k}{dy'} dy', \quad (67)$$

где обозначение $A_s(y, y')$ имеет смысл

$$A_s(y, y') = \tilde{\omega}_k A_s^*(\tilde{t}_k, \tilde{\eta}_k), \quad (68)$$

а $\tilde{\omega}_k$, $\tilde{t}_k$ и $\tilde{\eta}_k$ определяются уравнениями (60).

Симметричный плоский слой с черными стенками. При наличии черных стенок с одинаковой температурой в (67) остаются лишь два последних слагаемых. Если к тому же имеется симметричное распределение температуры газа относительно центра ($y = \delta = L/2$), то

$$B_k(y') = B_k(y''), \quad y'' = L - y', \quad (69)$$

и интеграл от y до L запишется от y до δ , от δ до $2\delta - y$ и от $2\delta - y$ до $L = 2\delta$. Рассмотрим интеграл от δ до $2\delta - y$:

$$\int_\delta^{2\delta-y} A_s(y', y) \frac{dB_k}{dy'} dy' = - \int_y^\delta A_s(2\delta - y'', y) \frac{dB_k}{dy''} dy''.$$

Аналогично

$$\int_{2\delta-y}^{2\delta} A_s(y', y) \frac{dB_k}{dy'} dy' = - \int_0^y A_s(2\delta - y'', y) \frac{dB_k}{dy''} dy''.$$

Таким образом, уравнение (67) принимает вид

$$q_R(y) = - \sum_k \left\{ \int_0^y [A_s(2\delta - y'', y) - A_s(y, y'')] \frac{dB_k}{dy''} dy'' + \int_y^\delta [A_s(2\delta - y'', y) - A_s(y'', y)] \frac{dB_k}{dy''} dy'' \right\}. \quad (70)$$

Остается найти $A_s(2\delta - y'', y)$, $A_s(y, y'')$ и $A_s(y'', y)$ через интегралы, определенные для половины канала. Обращаясь к уравнению (58), найдем, что интеграл от y до $2\delta - y''$ равен разности интегралов от 0 до δ и от 0 до y , просуммированной с разностью интегралов от 0 до δ и от 0 до y'' . Следовательно,

$$\xi_{i,k}(2\delta - y'', y) = 2\xi_{i,k}(\delta) - \xi_{i,k}(y) - \xi_{i,k}(y''); \quad (71a)$$

$$\xi_{i,k}(y, y'') = \xi_{i,k}(y) - \xi_{i,k}(y''); \quad (71b)$$

$$\xi_{i,k}(y'', y) = \xi_{i,k}(y'') - \xi_{i,k}(y). \quad (71c)$$

Из уравнения (60) и (68) с учетом сделанных пояснений находят искомые величины.

Степень черноты канала. Рассмотрим канал с черными стенками, содержащий газ с трапециевидальным профилем источника B , линейно возрастающим на расстоянии δ_{BL} от B_w до значения B_g , которое остается постоянным в интервале $\delta_{BL} \leq y \leq L - \delta_{BL}$, а затем симметрично спадает от B_g к той же величине B_w . Положим $(T_g - T_w)/T_w \ll 1$, так что все $B[v_k, T(y)]$ зависят от y по указанному трапециевидальному закону. В соответствии с этим допущением мы рассматриваем α_k , β_k и ω_k независимыми от y , а также считаем величину η_k большой. Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_k &= \omega_k; \\ \tilde{t}_k(2\delta - y'', y) &= t_{L,k}(1 - y'' - y''); \\ \tilde{t}_k(y, y'') &= t_{L,k}(y'' - y''), \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где $t_{L,k} = \alpha_k \rho a L / \omega_k$; $y^* = y/L$; $y''^* = y''/L$.

Плотность теплового потока на стенке определяется уравнением (70) при $y = 0$, и, учитывая, что $dB_k/dy = (B_g - B_w)/\delta_{BL}$ в интервале от 0 до δ_{BL} и равна нулю вне этого интервала, получаем

$$q_R(0) = - \sum_k \frac{\omega_k (B_g - B_w)}{t_{BL,k}} \times \int_0^{\delta_{BL}} [A_s(t_{L,k}(1 - y''^*)) - A_s(t_{L,k}y''^*)] dy''.$$

В результате замены переменной интегрирования y'' на y''^* , а затем на t_k'' находим

$$q_R(0) = - \sum_k \frac{\omega_k (B_{g,k} - B_{w,k})}{t_{BL,k}} \times \\ \times \int_0^{t_{B,L,k}} [A_s^*(t_L, k - t_k'') - A_s^*(t_k'')] dt_k''.$$

Для вычисления интеграла необходимо знать

$$S^*(t) = \int_0^t A_s^*(t') dt'. \quad (73)$$

Из (66) для больших η_k имеем

$$S^*(t) = t \left(\ln t + \gamma - \frac{1}{2} \right) + [1 - E_2(t)] - \left(\frac{1}{3} - E_4(t) \right). \quad (74)$$

Тогда

$$q_R(0) = - \sum_k \omega_k (B(v_k, T_g) - B(v_k, T_w)) C^*(t_L, k, t_{BL, k}), \quad (75a)$$

где

$$C^*(t_L, t_{BL}) = \frac{1}{t_{BL}} [S^*(t_L) - S^*(t_L - t_{BL}) - S^*(t_{BL})]. \quad (75b)$$

В табл. 2 помещены значения степени черноты канала для различных пар t_L и t_{BL} . Для сравнения там же

Таблица 2. Степень черноты канала и пропускательная способность пристеночного слоя для экспоненциальной модели полосы с перекрытыми линиями

t_L	t_{BL}	C^*	ϵ_{chan}^1	τ_{wL}	$\tau_{wL, \lambda}^1$
2,0	0,0	1,789	0,940	1,00	1,00
	0,1	1,672	0,848	0,98	0,95
	0,2	1,563	0,770	0,97	0,91
	0,4	1,362	0,643	0,95	0,86
	1,0	0,832	0,372	0,93	0,79
20,0	0,0	4,073	1,000	1,00	1,00
	0,1	3,977	0,913	0,98	0,92
	0,2	3,891	0,839	0,96	0,85
	0,4	3,736	0,721	0,94	0,74
	1,0	3,366	0,494	0,87	0,52
	2,0	2,924	0,308	0,80	0,34
	4,0	2,335	0,167	0,72	0,21
	10,0	1,320	0,067	0,65	0,13
	0,0	6,376	1,000	1,00	1,00
	0,1	6,282	0,913	0,99	0,91
200,0	0,2	6,198	0,839	0,97	0,84
	0,4	6,048	0,721	0,95	0,72
	1,0	5,692	0,494	0,90	0,50
	2,0	5,273	0,308	0,84	0,31
	4,0	4,735	0,167	0,76	0,17
	10,0	3,904	0,067	0,64	0,07
	20,0	3,218	0,033	0,56	0,04
	40,0	2,485	0,017	0,49	0,02
	100,0	1,380	0,007	0,43	0,01

¹ Спектральные значения в максимуме полосы.

приведены спектральные величины, рассчитанные по (23) для максимума полосы (или для серой полосы). При фиксированном отношении δ_{BL}/L с увеличением t_L от 0 до ∞ вследствие возрастания плотности поглощающей компоненты ρ_a уравнение (75) дает монотонный рост плотности теплового потока с выходом на асимптотическое значение, а величина, полученная по уравнению (23), возрастает до максимального значения и затем уменьшается до нуля. Различие зависимостей для всей полосы и для узкого спектрального интервала связано с тем, что спектральная плотность потока для участка спектра, расположенного в хвосте, или крыльях полосы, увеличивается с ростом оптической глубины, и это, несмотря на уменьшение спектральной плотности потока в максимуме полосы, приводит к возрастанию интегрального значения. С ростом оптической глубины спектральное положение максимума спектральной плотности потока все дальше и дальше смещается в сторону хвоста, или крыльев полосы. И только когда оптическая глубина становится очень большой и перекрываются соседние полосы или полосы становятся настолько широкими, что перестает выполняться приближенное равенство $B(v, T_g) \approx B(v_k, T_g)$, при повышении плотности газа достигается максимум в полной плотности потока излучения. Таким образом, холодный пограничный слой не может полностью экранировать стенку от излучения горячего молекулярного газа.

Пропускательная способность пристеночного слоя. Более полное понимание влияния холодного пограничного слоя можно получить при определении пропускательной способности пристеночного слоя.

Для монохроматического излучения

$$\tau_{wL} = \frac{\epsilon_{\text{chan}}(B_{g, \text{vol}} - B_w)}{(1 - 2E_3(t_L))(B_{g, \text{vol}} - B_w)}. \quad (76)$$

Для выбранного трапецеидального профиля B пропускательная способность пристеночного слоя равна:

$$\tau_{wL} = \frac{\epsilon_{\text{chan}}(t_L, t_{BL})}{(1 - 2E_3(t_L))[1 - t_{BL}/t_L]}. \quad (77)$$

Это соотношение отличается от выражения для полосы чисто экспоненциальным спадом

$$\tau_{wL} = \frac{C^*(t_L, t_{BL})}{A_s^*(t_L)[1 - (t_{BL}/t_L)]}. \quad (78)$$

В табл. 2 приведены τ_{wL} , рассчитанные по уравнениям (77) и (78). Спектральное значение в максимуме полосы быстро спадает с увеличением плотности поглощающей компоненты, когда τ_{BL} становится больше единицы; интегральное по полосе значение спадает медленнее, оно спадает как $1/\ln(t_L)$, а не как $1/t_{BL}$.

Одним практическим следствием такой зависимости является то, что при увеличении размеров камеры сгорания или печи в условиях несветящегося горения можно ожидать некоторого увеличения плотности радиационного потока на стенке. Кроме того, области горячего газа, находящиеся далеко от стенки, могут радиационно охлаждаться холодной стенкой вследствие того, что оптическая глубина в крыльях полос невелика и не имеет заметное увеличение ω_k в горячих областях. В отличие от этого в условиях горения с большим количеством сажи при увеличении размеров плотность теплового потока на стенку может падать, а области пламени, удаленные от стенки, не могут «видеть» стенку и, таким образом, не подвержены радиационному охлаждению. Это последнее обстоятельство может привести к увеличению образования загрязняющего компонента — окиси азота.

2.9.8. Взаимодействие излучения с переносом теплопроводностью или конвекцией

Д. К. Эдвардс

А. Совместные явления. В рамках спектрального рассмотрения плотность теплового потока линейна относительно интенсивности излучения абсолютно черного тела B , и когда спектральные характеристики изменяются не очень резко, линейность распространяется и на интегральную плотность эффективного излучения $B_T = C_s T^4$. Плотность теплового потока при переносе теплопроводностью линейна относительно потенциала потока теплоты $q = \int K dT$ и, таким образом, линейна относительно T , если коэффициент теплопроводности $K = \text{const}$. Конвекция также линейна по температуре, когда изменение свойства незначительно. В результате линейная задача переноса теплопроводностью или конвекцией превращается в общем случае в нелинейную при добавлении радиационного переноса. Таким образом, получение аналитического решения в замкнутом виде становится редким явлением, и в большинстве случаев необходимо численное решение. Если не удастся получить решение в замкнутом виде, то в результате представления нелинейной задачи в безразмерном виде число параметров может оказаться достаточно малым, и, таким образом, численный расчет приведет к общим результатам.

В некоторых случаях линеаризация служит приближенным подходом. При линеаризации излучения по T (или, что более редко, конвекции или теплопроводности по B) решение можно получить в замкнутом виде, и эти результаты, если даже они прямо не используются, могут служить иллюстрацией, способствующей развитию инженерных представлений. Даже если задача сильно нелинейна, квазилинеаризация окажется полезной при разработке процедуры решения.

Ниже рассмотрены простейшие совместные задачи, для которых существует решение в замкнутом виде или которые параметризуются малым числом параметров; описана линеаризация, а также даны полезные представления о коэффициенте радиационного переноса теплоты в эквивалентной температуре окружающей среды.

В. Анализ термических цепей. Проведем термический анализ простой системы, включающей как радиацию, так и конвекцию. Например, рассмотрим небольшую комнату, внешняя стена которой площадью 12 м^2 имеет затененное окно с одинарным стеклом, а внутренние стены, потолок и пол площадью 60 м^2 почти полностью теплоизолированы. В комнате имеются источники теплоты мощностью 1 кВт , а температура внешнего воздуха равна 30°C . Воздух в комнате охлаждается до 22°C посредством вдува воздуха при 12°C . Условимся рассчитывать коэффициент конвективной теплоотдачи на всех поверхностях по приближенному выражению $h_c = 1,3 \Delta T^{1/3} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ \text{C})$. Предположим, что поверхности стен со стороны улицы являются абсолютно черными в инфракрасной области спектра и нагреты солнцем до 50°C , угловой коэффициент внешней стороны окна относительно окружающих предметов составляет $0,5$, а остальная часть радиационного взаимодействия относится к небу. Внешний воздух имеет относительную влажность 60% . Инженер-теплотехник должен знать, какое количество воздуха надо подавать в комнату для охлаждения и сколько энергии можно сохранить при двойном стекле в окне и (или) теплоизоляции внешней стены.

Задачу можно разделить на три части: внешний радиационный анализ, внутренний радиационный анализ и термический анализ всей системы. Эти три части иллюстрируют число характерных особенностей при анализе

несложной термической системы с учетом совместных явлений: определение средней температуры излучения, нахождение коэффициента радиационного переноса, определение средней эквивалентной температуры, различие между радиационной и термической цепью и сходимость решения задачи.

Радиационный анализ внешней поверхности. Считая, что излучение внешней поверхности незначительно влияет на излучение окружающих предметов, запишем плотность теплового потока результирующего излучения на внешнюю поверхность 1:

$$q_{r,0} = \alpha_{1R} q_{1R}^+ + \alpha_s q_s^- - \epsilon_1 C_s T_1^4. \quad (1)$$

Заметим, что стекло считается непрозрачной поверхностью, поскольку его характеристическая длина волны для границы пропускания примерно равна $\lambda_{CO} = 2,7 \text{ мкм}$, и значение $\lambda_{CO} T \approx 810 \text{ мкм} \cdot \text{K}$ (см. табл. 1 § 2.9.1) свидетельствует о незначительной внешней доле интегрального излучения абсолютно черного тела для длин волн меньше λ_{CO} . Считая $\alpha_{1R} \approx \epsilon_1 \approx 0,82$, находим плотность потока падающего излучения в инфракрасной области спектра:

$$q_{1R} = F_{1-s} q_s^+ + F_{1-sky} q_{sky}^+. \quad (2)$$

В соответствии с условием задачи $q_s^+ = C_s T_s^4$, а F_{1-s} и F_{1-sky} известны, исходя из геометрических соотношений. Плотность потока эффективного излучения неба

$$q_{sky}^+ = \epsilon_{sky} C_s T_0^4, \quad (3)$$

где ϵ_{sky} для атмосферных CO_2 , H_2O и пыли приблизительно определяется соотношением Брунта

$$\epsilon_{sky} \approx 0,55 + 1,8 \sqrt{\frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_0}} \leq 1, \quad P_0 = 1,0 \text{ МПа}. \quad (4)$$

Поскольку парциальное давление H_2O является произведением относительной влажности и давления паров воды при внешней температуре воздуха T_0 , то с помощью таблиц насыщенного пара имеем $\epsilon_{sky} = 0,836$ и $q_{sky} = 401 \text{ Вт}/\text{м}^2$. Из уравнения (2) находим $q_{1R} = 509 \text{ Вт}/\text{м}^2$. В соответствии с постановкой задачи поток солнечного излучения равен нулю. Итак, мы нашли все величины, входящие в (1), за исключением неизвестной величины T_1 .

Теперь следует рассчитать среднюю температуру излучения окружающих предметов, сопоставляя соотношение

$$q_{r,0} = \epsilon_1 (C_s T_r^4 - C_s T_1^4) \quad (5)$$

с уравнением (1):

$$C_s T_r^4 = \frac{\alpha_{1R} q_{1R}^+ + \alpha_s q_s^-}{\epsilon_1}. \quad (6)$$

Например, для рассматриваемой задачи $T_r = 307,9 \text{ K}$ ($34,7^\circ \text{C}$). Здесь T_r несколько превышает T_0 из-за наличия углового коэффициента относительно горячих предметов с температурой T_s .

Коэффициент радиационной теплоотдачи. Далее можно представить (5) в виде

$$q_{r,0} = h_{r,0} (T_r - T_0), \quad (7)$$

где $h_{r,0}$ — коэффициент радиационной теплоотдачи. Разложив уравнение (5) на множители, получим

$$h_{r,0} = \epsilon_1 C_s (T_r^2 + T_1^2) (T_r + T_1). \quad (8)$$

Следует заметить, что эта величина зависит от неизвестной температуры T_1 . В данном случае на основе простого жизненного опыта можно предположить, что для окна и приведенных выше условий $T_1 = (T_c + T_0)/2 = 26^\circ \text{C}$.

Тогда $h_{r,0} \approx 5,20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$. Напомним, что в уравнение (8) входят, как правило, абсолютные температуры, однако при известном значении $h_{r,0}$ можно использовать уравнение (7) и относительные температуры.

В общем случае

$$\dot{Q}_{r,i-j} = A_i \mathcal{F}_{i-j} (C_s T_i^4 - C_s T_j^4), \quad (9)$$

можно представить это выражение в более удобном виде:

$$\dot{Q}_{r,i-j} = A_i h_{r,i-j} (T_i - T_j), \quad (10)$$

где

$$h_{r,i-j} = \mathcal{F}_{i-j} C_s (T_i^2 + T_j^2) (T_i + T_j). \quad (11)$$

Средняя эквивалентная температура. Представим сумму конвективного и радиационного тепловых потоков на внешнюю поверхность в виде потока, приходящего от одного эквивалентного источника. Соответственно запишем

$$q_{i,0} = h_{c,0} (T_0 - T_1) + h_{r,0} (T_r - T_1) = h_0 (T_e - T_1), \quad (12)$$

где, как и ранее, $h_{c,0} = 1,3 (T_0 - T_1)^{1/3}$ и зависит от T_1 . Используем приведенную выше оценку $T_1 = 26^\circ\text{С}$, чтобы найти $h_{c,0} = 2,06 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$. Из уравнения (12) следует, что

$$h_0 = h_{c,0} + h_{r,0}; \quad (13)$$

$$T_e = (h_{c,0} T_0 + h_{r,0} T_r) / (h_{c,0} + h_{r,0}). \quad (14)$$

Согласно оценке $h_0 = 7,26 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ и $T_e = 33,4^\circ\text{С}$; последняя величина несколько превышает T_0 , вследствие высокого значения T_s .

Радиационный анализ внутренних поверхностей. Предположим, что узел 2 соответствует внутренней поверхности внешней стены, узел 3 — оставшейся поверхности стены и узел 4 — газу внутри комнаты. Сначала проведем радиационный анализ для определения коэффициента переноса излучения. Пренебрегая излучением газа (можно поставить более сложную задачу с поглощающе-излучающим газом) из радиационной цепи, получаем

$$A_2 \mathcal{F}_{2-3} = 1 / \{ [(1 - \varepsilon_2) / \varepsilon_2 A_2] + (1 / A_2 F_{2-3}) + [(1 - \varepsilon_3) / \varepsilon_3 A_3] \}. \quad (15)$$

Используя известные величины и принимая $\varepsilon_2 = 0,82$, $\varepsilon_3 = 0,87$, находим $\mathcal{F}_{2-3} = 0,800$. Затем из (11) определим коэффициент радиационной теплоотдачи $h_{r,2-3}$, используя $T_2 = 26^\circ\text{С}$ (299,15 К) и $T_3 = 24^\circ\text{С}$ (297,15 К); $h_{r,2-3} = 4,81 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Составление и решение термических цепей. Теперь нетрудно составить термическую цепь, как это показано на рис. 1. От внешней среды с эквивалентной температурой T_e в результате конвекции и радиации теплота идет через наружное термическое сопротивление $1/h_0 A_1$, далее через стену имеет место кондуктивный перенос, и от обращенной внутрь комнаты поверхности внешней стены к воздуху теплота передается непосредственно в результате конвекции, а также облучения внутренней поверхности стен с последующим конвективным нагревом ком-

натного воздуха. Следует отметить, что радиационная цепь является введением в термическую. В термическую цепь входят радиационные и конвективные сопротивления, причем и те и другие нелинейны.

Перенос теплоты описывается выражением

$$\dot{Q} = (T_e - T_4) / \{ (1/h_0 A_1) + (\delta_{1,2}/K_{1,2} A_{1,2}) + 1/[h_{c,2} A_2 + 1/h_{r,2-3} A_2 + 1/h_{c,3} A_3]^{-1} \}. \quad (16)$$

Отметим, что порядок индексов в выражении $A_i h_{r,i-j}$ должен соответствовать порядку индексов в $A_i \mathcal{F}_{i-j}$.

Неизвестные температуры T_1 , T_2 и T_3 находят из термической цепи

$$T_1 = T_e - \dot{Q} \left(\frac{1}{h_0 A_1} \right); \quad (17a)$$

$$T_2 = T_e - \dot{Q} \left(\frac{1}{h_0 A_1} + \frac{\delta_{1,2}}{K_{1,2} A_{1,2}} \right); \quad (17b)$$

$$T_3 = T_4 + [\dot{Q} - (T_2 - T_4) h_{c,2} A_2] \frac{1}{h_{c,3} A_3}. \quad (17b)$$

Для решения можно применить простую релаксационную схему; тем не менее сходимость результата не гарантируется, однако в данном примере такой проблемы не возникает. Согласно оценке $h_{c,2} = 2,06 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ и $h_{c,3} = 1,64 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$ для натриевого стекла толщиной 3 мм $\delta_{1,2}/K_{1,2} = 0,0034 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})^{-1}$ — величина пренебрежимо мала. Используя эти значения, из (16) находим $\dot{Q} = 405 \text{ Вт}$ и T_1 , T_2 и T_3 . Далее вернемся к исходным уравнениям для уточнения T_e , h_0 , $h_{r,2-3}$, $h_{c,2}$ и $h_{c,3}$ и будем повторять эту процедуру до получения полной сходимости. Заметим, что в рассматриваемой задаче отсутствует внешняя вынужденная конвекция и нет поступления наружного воздуха в комнату, отсюда такое малое значение $\dot{Q}$.

Необходимая скорость поступления воздуха определяется из первого закона термодинамики, записанного для системы открытой прокачки комнатного воздуха:

$$\dot{m} c_p (T_4 - T_{4,i}) = \dot{Q}. \quad (18)$$

Принимая $c_p = 1,006 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{С})$ и $T_{4,i} = 12^\circ\text{С}$, получаем $\dot{m} = 0,040 \text{ кг/с}$ для 405 Вт и $\dot{m} = 0,140 \text{ кг/с}$ для 405 Вт и дополнительного 1 кВт.

Сходимость упоминавшейся выше процедуры не может быть достигнута посредством простой релаксационной схемы, поскольку недооценка h_r может привести к переоценке T , что в свою очередь дает завышенное значение h_r , сопровождающееся занижением T , без получения сходящихся результатов. Сходимость можно получить с помощью демпфирующего параметра d ; это значит, что в качестве нового значения T_1 берут сумму двух величин, первая из которых равна произведению $(1-d)$ и последнего значения искомой переменной, а вторая — произведению d и вновь найденного значения этой же переменной. В другом подходе можно попытаться составить термическую цепь (по-прежнему отличающуюся от радиационной цепи, используемой для получения коэффициента переноса излучения), в которой движущим потенциалом является $B = C_s T^4$ вместо T , и необходимо непосредственно использовать $A_i \mathcal{F}_{i-j}$ вместо h_r , а также заменить сопротивление $1/h_{c,i} A_i$ на $1/A_i \mathcal{F}_{c,i-j}$, где

$$A_i \mathcal{F}_{c,i-j} (C_s T_i^4 - C_s T_j^4) \equiv A_i h_{c,i} (T_i - T_j); \quad (19)$$

$$\mathcal{F}_{c,i-j} = \frac{h_{c,i}}{C_s (T_i^2 + T_j^2) (T_i + T_j)}.$$

С. Нестационарный нагрев или охлаждение, связанные с переносом излучения. Рассмотрим некоторую массу m с удельной теплоемкостью c и начальной температурой T_0 , которая внезапно подвергается облучению со стороны

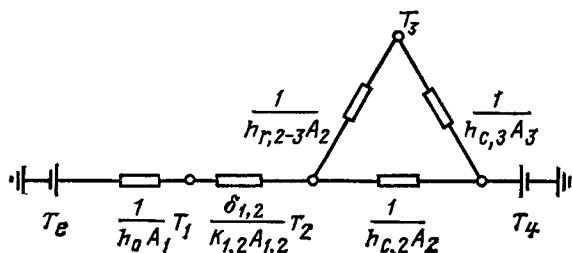


Рис. 1. Термическая цепь для комнаты

окружения при температуре T_r через поверхность A с коэффициентом переноса излучения $\mathcal{F}$, а также одновременно нагревается (+) или охлаждается (—) изнутри со скоростью $\dot{Q}$. Если внутреннее сопротивление, связанное с кондуктивным переносом (или конвективным, если рассматривается жидкость), мало по сравнению с сопротивлением поверхностной радиации, т. е. если $\delta/K\mathcal{A} \ll 1/\mathcal{F}4C_sT^4$, где δ — характерная длина для внутреннего кондуктивного переноса, K — внутренний коэффициент теплопроводности, тогда масса является практически изотермической и можно записать

$$mc \frac{dT}{dt} = \dot{Q} - A\mathcal{F} (C_sT^4 - C_sT_r^4). \quad (20)$$

Уравнение упрощается при введении следующих безразмерных параметров:

$$T_e = \left(T_r^4 + \frac{\dot{Q}}{A\mathcal{F}C_s} \right)^{1/4}; \quad (21a)$$

$$\beta = T_e/T_0; \quad (21b)$$

$$T^* = T/T_0; \quad (21v)$$

$$t^* = t/t_c; \quad (21r)$$

$$t_c = mc/(\mathcal{F}C_sT_0^3). \quad (21d)$$

В безразмерном виде уравнение (20)

$$\frac{dT^*}{dt^*} = - (T^{*4} - \beta^4) \quad (22)$$

допускает разделение переменных и интегрируется в замкнутой форме, приводя к следующей зависимости t^* от T^* :

$$t^* = \frac{1}{2\beta^3} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\beta + T^*)(\beta - 1)}{(\beta - T^*)(\beta + 1)} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{T^* - 1}{\beta + (T^*/\beta)} \right]. \quad (23)$$

Такое решение, очевидно, применимо для расчета радиатора космического корабля при внезапном включении или отключении подводимой энергии, для горячей отливки при быстром экранировании излучения или холодного предмета, который быстро помещают в горячую излучающую печь. По уравнению (21) рассчитаем T_e , β и T_c и, зная необходимое точное или предполагаемое значение T , из (21v) найдем T^* , затем t^* из (23) и, наконец, t из уравнения (21r).

Если учесть также конвективный перенос, то в правой части (20) появится линейный относительно T член, и уравнение еще допускает разделения переменных. Интегрирование можно провести в замкнутой форме, но это приводит к громоздким выражениям. При слабом конвективном переносе его можно учесть согласно уравнению (19) и соответственно модифицировать $A\mathcal{F}$ и T_e . Если конвекция является доминирующим процессом, необходимо ввести h_r . Для практических целей нетрудно в результате численного интегрирования получить в табличном виде зависимость t^* от T^* с параметрами β и $h^* = h_r/\mathcal{F}C_sT_0^3$.

Д. Радиационный теплообменник. Предположим, что имеется поток вещества с температурой T_0 , удельной теплоемкостью c_p и массовым расходом $\dot{m}$, движущийся через трубу или канал общей длиной L и подвергающийся по периметру p облучению источником с температурой T_r и коэффициентом переноса излучения $\mathcal{F}$. Если теплообмен в целом определяется излучением, что возможно при $1/\mathcal{F}4C_sT^3 \gg \delta_w/k_w$ или $1/h_i$, где δ_w — толщина стенок трубы; k_w — коэффициент теплопроводности; h_i — внутренний коэффициент теплоотдачи, то получим уравнение для изменения температуры в направлении потока z

$$\dot{m}c_p \frac{dT}{dz} = - p\mathcal{F} (C_sT^4 - C_sT_r^4). \quad (24)$$

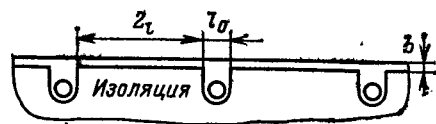


Рис. 2. Схема радиатора

Уравнение (19) позволяет учесть h_i и δ_w/k_w для определения эквивалентного коэффициента переноса излучения и суммирования радиационных сопротивлений.

Видно, что (20) и (24) имеют одинаковую форму. Следовательно, решение получается аналогичным образом. Положим

$$\beta = T_r/T_0; \quad (25a)$$

$$T^* = T/T_0; \quad (25b)$$

$$z^* = pL\mathcal{F}C_sT_0^3/(\dot{m}c_p). \quad (25v)$$

Из уравнения (23) следует, что $z^* = t^*$.

Вид уравнения (23), дающий зависимость z^* от T^* , соответствует поставленной задаче. Он указывает инженеру длину теплообменника, необходимую для получения на выходе требуемой температуры. В соответствии с принятой терминологией теплообменников z^* — число единиц переноса, а T^* связано с эффективностью ϵ_{ef} соотношением

$$T^* = 1 + (\beta^* - 1)\epsilon_{ef}, \quad (26)$$

где

$$\epsilon_{ef} = (T_{out} - T_0)/(T_r - T_0). \quad (27)$$

Например, какую площадь должен иметь рассеивающий теплообменник космического корабля для охлаждения потока $\dot{m}c_p = 100$ Вт/К от 450 до 350 К? Теплообменник находится в тени, удален от поверхности планеты, но получает 100 Вт/м² от солнечного экрана. Коэффициент переноса излучения относительно окружающих предметов составляет 0,90. Начнем с определения $T_r = (100/5,67 \cdot 10^{-8})^{1/4} = 205$ К, следовательно, $\beta = 205/450 = 0,455$. Необходимое значение $T^* = 350/450 = 0,778$. Из (23) имеем $t^* = z^* = 0,407$ и затем из (25v) находим $pL = (100) (0,407/0,90 (5,67 \cdot 10^{-8}) (450)^3) = 8,76$ м².

Е. Радиаторная батарея. В рассмотренном выше примере неявно предполагалось, что каждый элемент периметра является полностью эффективным. В действительности в качестве излучающей поверхности можно использовать оболочку космического корабля, помещая в ней несущие жидкость трубы, расположенные друг от друга на расстоянии $2l$, как это показано на рис. 2. Такая конструкция обеспечивает определенную защиту трубопроводов от микрометеоритов. Разумно предположить, что участок периметра l_0 имеет постоянную температуру; если b мало, то части периметра длиной l по обе стороны от трубопровода существенно неизотермичны.

Пусть x — расстояние от средней точки между трубопроводами в направлении l и площадь излучающего элемента $dx = p dx$ (для рис. 2 p является перпендикуляром к плоскости изображенного поперечного сечения и может быть названо Δz). Примем проводящее телоту поперечное сечение равным $A_c = b \Delta z$ (рис. 2). Коэффициент переноса излучения относительно внешнего окружения равен ϵ , а эквивалентная температура излучения, определяемая (6), равна T_r . При $x = l$ опорная температура равна T_b , а при $x = 0$, исходя из условия симметрии, $dT/dx = 0$. Запишем основное уравнение для постоянного в области A_c коэффициента теплопроводности материала K

$$KA_c \frac{d^2T}{dx^2} = \epsilon p C_s (T^4 - T_r^4). \quad (28)$$

Предположим, что температура поверхности и средняя температура области A_c равны.

Приведем уравнение к безразмерному виду

$$\frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} = N (T^* - \beta^4) \quad (29)$$

при условии, что для

$$x^* = 0 \quad \frac{dT^*}{dx^*} = 0 \quad \text{и для } x^* = 1 \quad T^* = 1,$$

причем

$$T^* = T/T_B; \quad (30a)$$

$$\beta = T_r/T_B; \quad (30b)$$

$$x^* = x/l; \quad (30v)$$

$$N = \frac{\epsilon \rho C_s T_B^3 l^2}{K A_c} = \frac{\epsilon C_s T_B^3 l^2}{K b}. \quad (30r)$$

Параметр N подобен радиационному числу Био $h_r b/K$, умноженному на квадрат отношения l/b .

Эффективность радиатора определим следующим образом:

$$\eta = \frac{\int_0^1 \epsilon \rho C_s (T^4 - T_r^4) dx}{\epsilon \rho C_s (T_B^4 - T_r^4) l} = \int_0^1 \left(\frac{T^* - \beta^4}{1 - \beta^4} \right) dx^*. \quad (31)$$

Посредством теплового баланса η также связано с dT^*/dx^* в точке $x^* = 1$.

Видно, что η зависит от N и β . Нетрудно провести численные расчеты, обезразмеривая относительно температуры T_0 в $x=0$, т. е. заменяя в уравнении T^* на $\theta = T/T_0$ и β на $\theta_r = T_r/T_0$, а также вводя $\Phi = d\theta/dx^*$. Используя затем θ_r ($0 \leq \theta_r < 1$) в качестве произвольного параметра, получаем, избегая разнесенных граничных условий, следующие начальные значения задачи: $x^* = 0$; $\theta = 1$ (соответствующее θ_r); $\Phi = 0$;

$$\frac{d\Phi}{dx^*} = N (\theta^4 - \theta_r^4); \quad \frac{d\theta}{dx^*} = \Phi.$$

Два уравнения решаются совместно методом Рунге — Кутты, накапливая текущее значение суммы $S^* = \int \theta^4 dx^*$ для нахождения $\theta = \theta_B$ в точке $x^* = 1$. При известном θ_B , $\beta = \theta_r/\theta_B$ находим

$$\eta = [(S^* l/\theta_B^4) - \beta^4]/(1 - \beta^4).$$

Таким образом, можно построить зависимость η от β для нужных значений N . На рис. 3 представлена другая зависимость η от N с β в качестве параметра [4].

Если вместо показанной на рис. 2 неизменной толщины b принять сужающееся сечение b , можно сделать более легкий радиатор. С учетом изменения A_c уравнение (28) примет вид

$$K \frac{d}{dx} \left(A_c \frac{dT}{dx} \right) = \epsilon \rho C_s (T^4 - T_r^4). \quad (32)$$

Учитывая, что $dT/dx = \text{const} = (T_B - T_0)/l$, T является известной функцией x , и можно провести интегрирование для определения зависимости A_c от x . Положим

$$A^* = A_c/A_B = b/b_B; \quad (33a)$$

$$T^* = T/T_B; \quad (33b)$$

$$x^* = x/4; \quad (33v)$$

$$\beta = T_r/T_B; \quad (33r)$$

$$N_B = \frac{\epsilon \rho C_s T_B^3 l^2}{K A_B} = \frac{\epsilon C_s T_B^3 l^2}{K b_B}. \quad (33d)$$

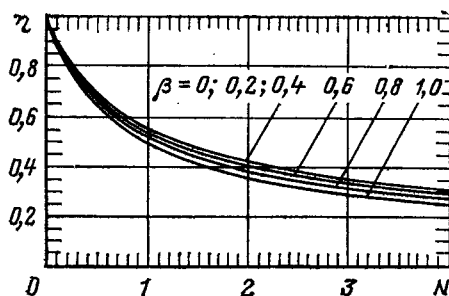


Рис. 3. Эффективность простого радиатора

Здесь удобнее ввести в качестве параметра T_0^* ($\beta < T_0^* < 1$). Для известной T_0^*

$$N_B = \frac{5(1 - T_0^*)^2}{(1 - T_0^*) - 5(1 - T_0^*) \beta^4} \quad (34)$$

и

$$A^* = \frac{(T^* - T_0^*) - 5(T^* - T_0^*)}{(1 - T_0^*) - 5(1 - T_0^*) \beta^4}, \quad (35)$$

где

$$T^* = T_0^* + (1 - T_0^*) x^*. \quad (36)$$

Эффективность радиатора определяется выражением

$$\eta = \frac{(1 - T_0^*) - 5\beta^4(1 - T_0^*)}{5(1 - \beta^4)(1 - T_0^*)}. \quad (37)$$

Например, какая толщина b_B требуется для радиатора с эффективностью 90% с $K=200$ Вт/(м·К), $l=5$ см, $T_B=450$ К, $T_r=225$ К, $\epsilon=0,903$ и каким образом должно меняться отношение b/b_B в зависимости от x/l ? Определим $\beta=0,50$ и из (37) найдем $T_0^*=0,95076$. Из уравнений (34) и (33) находим $N_B=0,05836$ и $b_B=0,996$ мм соответственно. Теперь мы имеем следующий профиль ребра радиатора:

x^*	b/b_B	x^*	b/b_B
1,00	1,00	0,40	0,633
0,80	0,958	0,20	0,354
0,60	0,835	0,0	0,0

Следует отметить, что существует много возможностей в задачах излучения радиаторов. Многие из них рассмотрены в [4]. В следующем разделе обсуждается (в линейном приближении) радиатор, элементы которого находятся в поле зрения друг друга таким образом, что плотность падающего излучения определяется распределением температуры вдоль всего радиатора.

Г. Линеаризация радиационного и кондуктивного переноса для полого цилиндра. Полый цилиндр часто используется в качестве подпорки или стойки космического корабля. Если такая конструкция с одной стороны подвергается нагреву солнечным излучением, то ее форма может измениться из-за изгиба, вызванного большим температурным расширением горячей стороны. В рассматриваемой здесь задаче приведен пример точного решения для замкнутой полости с диффузными стенками и указан удобный способ линеаризации задачи о-совмест-

ном радиационном и кондуктивном переносе. В [4] показано, что полый круговой цилиндр относится к числу тех поверхностей, для которых возможно получить точное решение задачи для плотности потока эффективного излучения. В [5] рассмотрен полый теплопроводный цилиндр с черной внутренней поверхностью. В [6] получены результаты для полого цилиндра с серой диффузной внутренней поверхностью и анизотропно проводящими теплоту стенками.

Рассмотрим полый цилиндр с толщиной стенок b и радиусом R , температура которого $T(\theta)$ близка к T_0 и b достаточно мало, чтобы $b/R \ll 1$ и $4C_s = T_0^3 b/K \ll 1$. Угол θ отсчитывается от направления на солнце: $\theta = \pm \pi/2$ соответствует линии тени, а $\theta = \pi$ — темновой стороне. Уравнение радиатора получим, исходя из теплового баланса для одного элемента между θ и $\theta + d\theta$:

$$\frac{Kb}{R^2} \frac{d^2 T}{d\theta^2} = \epsilon_0 C_s T^4 + q_i - \alpha_S G_S \cos \beta \cos \theta U; \quad (38)$$

где ϵ_0 — интегральная полусферическая степень черноты внешней поверхности; q_i — плотность потока результирующего излучения с внутренней стороны стенки; $\alpha_S \theta$ — поглощательная способность относительно солнечного излучения; G_S — плотность потока солнечного излучения при нормальном падении $I_S \Delta \Omega_S$; β — угол солнечного луча относительно нормали к плоскости основания на оси цилиндра [см. рис. (3) § 2.9.1] (угловой размер солнца считается малым); U — единичная ступенчатая функция; $U=1$ на солнце ($0 \leq \theta < \pi/2$) и $U=0$ в тени ($\pi/2 < \theta \leq \pi$).

Первым упрощающим шагом при получении решения задачи является линеаризация. Запишем

$$C_s T^4 \approx C_s T_0^4 + 4C_s T_0^3 (T - T_0) \quad (39)$$

и введем обозначение

$$T^* = (T - T_0)/T_0. \quad (40)$$

Уравнение (38) примет вид

$$K^* \frac{d^2 T^*}{d\theta^2} = 4T^* + q_i^*(\theta) - G^*(\theta), \quad (41)$$

где

$$K^* = \frac{Kb}{R^2 \epsilon_0 C_s T_0^3}; \quad (42a)$$

$$q_i^* = \frac{q_i}{\epsilon_0 C_s T_0^4}; \quad (42b)$$

$$G^* = \frac{1}{\epsilon_0 C_s T_0^4} (\alpha_S G_S \cos \beta \cos \theta U - \epsilon_0 C_s T_0^4). \quad (42в)$$

В дальнейшем, проводя анализ задачи для полости внутри оболочки, предположим, что внутренние стенки являются диффузными с постоянной интегральной полусферической степенью черноты ϵ_i . Плотность потока падающего излучения найдем из уравнения (8) § 2.9.3 в виде интеграла

$$q^- = \int_{-\pi}^{+\pi} q^+(\theta') dF(\theta, \theta'), \quad (43)$$

где в соответствии с уравнением (4) § 2.9.3

$$dF(\theta, \theta') = \frac{1}{2} \cos \gamma d\gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} |\theta' - \theta|.$$

Таким образом, имеем уравнение для плотностей потоков падающего и эффективного излучения

$$q^-(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} q^+(\theta') \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) d\theta' + \int_{\theta}^{\pi} q^+(\theta') \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right) d\theta'; \quad (44a)$$

$$q^+(\theta) = \epsilon_i C_s T^4 + (1 - \epsilon_i) q^-(\theta) = \epsilon_i C_s T_0^4 + 4\epsilon_i C_s T_0^4 T^* + (1 - \epsilon_i) q^-(\theta). \quad (44b)$$

Плотность потока результирующего излучения

$$q_i = q^+ - q^- = \epsilon_i C_s T_0^4 (4T^* - q^*);$$

$$q_i^* = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0} (4T^* - q^*), \quad (45)$$

где

$$q^* = (q^- - C_s T_0^4)/(C_s T_0^4). \quad (46)$$

Подставляя (44b) в (44a) и используя уравнение (46), получаем линейное интегральное уравнение для q^* , связанное при помощи T^* с линейным дифференциальным уравнением (41):

$$q^*(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} [4\epsilon_i T^*(\theta') + (1 - \epsilon_i) q^*(\theta')] \times \times \frac{1}{4} \sin\left(\frac{|\theta - \theta'|}{2}\right) d\theta'. \quad (47)$$

Решение в виде ряда получается разложением G^* в ряд Фурье по косинусам

$$G^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad (48)$$

где T_0 выбирают таким образом, чтобы a_0 принимало нулевое значение;

$$C_s T_0^4 = \frac{1}{\pi \epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \alpha_S C_S \cos \beta \cos \theta d\theta. \quad (49)$$

Коэффициенты a_n находят умножением обеих частей (48) (в котором n заменяется на m) на $\cos n\theta$ с последующим интегрированием от $\theta=0$ до π :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha_S G_S \cos \beta}{\epsilon_0 C_s T_0^4} \cos \theta \cos n\theta d\theta - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\theta d\theta. \quad (50)$$

Видно, что последний член равен нулю. Для постоянной α_S (диффузная внешняя поверхность) из (49) и (50) получаем

$$G_S T_0^4 = \frac{\alpha_S G_S \cos \beta}{\epsilon_0 \pi}; \quad (49a)$$

$$a_1 = \frac{\pi}{2}; \quad a_{2m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{2(m)^2 - 1}; \quad (50a)$$

$$a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0.$$

Тогда очевидно, что (41) и (47) удовлетворяют следующие выражения:

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta; \quad (51)$$

$$q^* = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta, \quad (52)$$

если коэффициенты b_n и c_n сделать совместными с a_n . Теперь определим S_n :

$$S_n = \frac{1}{\cos n\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} \sin \left(\frac{|\theta - \theta'|}{2} \right) \cos n\theta' d\theta' = \frac{-1}{4n^2 - 1}. \quad (53), (54)$$

Тогда из уравнения (47) имеем

$$c_n = 4\varepsilon_i S_n b_n + (1 - \varepsilon_i) S_n c_n = \frac{4\varepsilon_i S_n}{1 - (1 - \varepsilon_i) S_n}, \quad (55)$$

а из (41), (45) и (47)

$$-K^* n^2 b_n = 4b_n + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right) (4b_n - c_n) - a_n.$$

Подставляя уравнение (55) и решая относительно b_n , получаем

$$b_n = \frac{1}{4(1 + (\varepsilon_i/\varepsilon_0) \{ (1 - S_n)/(1 - (1 - \varepsilon_i) S_n) \}) + n^2 K^2} a_n. \quad (56)$$

Теперь задача решена. В практических инженерных расчетах достаточно удержать два слагаемых. Тогда для температуры получается следующее выражение:

$$T \approx T_0 [1 + b_1 \cos \theta + b_2 \cos 2\theta], \quad (51a)$$

где T_0 определяется уравнением (49a), и

$$b_1 = \frac{\pi/2}{4[1 + 4\varepsilon_i/\varepsilon_0(4 - \varepsilon_i)] + Kb/R^2 \varepsilon_0 C_s T_0^3}; \quad (56a)$$

$$b_2 = \frac{2/3}{4[1 + 16\varepsilon_i/\varepsilon_0(16 - \varepsilon_i)] + 4Kb/R^2 \varepsilon_0 C_s T_0^3}. \quad (56b)$$

Смысл полученных выражений очевиден. Разность температур максимальной при $\theta=0$ и минимальной при $\theta=\pi$ составляет $2b_1 T_0$. Для ее уменьшения необходимо выбирать малые b_1 . Следовательно, требуются большие ε_i и малые ε_0 , тогда как большие значения Kb/R^2 должны быть совместимы с расчетной массой конструкции и требованиями прочности. Чтобы получить малые ε_0 , поддерживая расчетное значение T_0 , необходимо выбрать α_S в соответствии с уравнением (49). Как указывалось в § 2.9.2, для получения нужного отношения α_S/ε_0 можно нанести на поверхность полосы белой краски или использовать металлизированную ленту.

Предположим, например, что $\varepsilon_i=0.9$, $\varepsilon_0=0.2$, $K=50$ Вт/(м·К) (графитоармированная фенольная пластмасса), $b=0.5$ мм, $R=4$ см и $T_0=300$ К. Из уравнения (56) находим $b_1=0.0201$ и $b_2=0.00293$. Тогда из уравнения (51a) определяем минимальную и максимальную температуры: $T(\theta=0)=306.9$ К и $T(\theta=\pi)=294.9$ К соответственно.

Г. Конвективный и радиационный перенос в молекулярном газе. Рассмотрим пример сложного конвективно-радиационного переноса теплоты. Предположим, что молекулярный газ с начальной температурой T_0 входит в секцию плоскопараллельного канала с температурой стенок T_w . Для простоты будем считать, что течение полностью гидродинамически развитое, излучение линеаризуется, газ имеет одну полосу (или несколько одина-

ковых полос), описываемую экспоненциальной моделью с перекрытыми линиями, стенки канала черные. В [18] анализировалась такая задача, а также рассматривался случай нелинейного и многополосного газа. Общие вопросы сложного конвективно-радиационного теплообмена рассмотрены в [9—18].

Постановка задачи. Основное уравнение энергии для малоскоростной, стационарной, гидродинамически установившейся (в пренебрежении вязкой диссипацией и совершаемой потоком работой) вынужденной конвекции, когда несущая теплопроводность в осевом и радиальном направлениях, имеет вид

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho c_p (\alpha_m + \varepsilon_H) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} (-q_R), \quad (57)$$

где ρ — плотность; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; α_m — коэффициент молекулярной теплопроводности $K_m/\rho c_p$ (все значения принимаются для предварительно выбранного уровня температур); u — скорость в направлении x вдоль потока; y — расстояние от одной стенки; ε_H — коэффициент турбулентной теплопроводности; $T(x, y)$ — температура газа; q_R — плотность потока излучения в направлении y . Распределение скорости $u(y)$ в условиях гидродинамически установившегося течения ($\partial u/\partial x \approx 0$ и, следовательно, согласно условию неразрывности $v=0$) примет вид

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho (v_m + \varepsilon_M) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (58)$$

где v_m — коэффициент молекулярной кинематической вязкости; ε_M — коэффициент турбулентной вязкости. Градиент давления связан с коэффициентом трения c_f (или параметром трения $f=4c_f$ Блазиуса) следующим соотношением:

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{c_f (1/2) \rho U^2}{\delta}, \quad (59)$$

где U — средняя скорость; δ — полуширина канала.

Учитывая турбулентную диффузию, получаем

$$v_m + \varepsilon_M = v_m \varepsilon^+, \quad (60)$$

где

$$\varepsilon^+ = 1 + \frac{1}{1 + by^*} \left\{ \frac{1}{2} (1 + 4K^2 y^{*2} [1 - e^{-y^+/A^+}]^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \right\} \quad (61)$$

и расстояние безразмеривается относительно полуширины канала или турбулентной длины смещения

$$y^* = y/\delta, \quad (62a)$$

$$y^+ = y^* R_t. \quad (62b)$$

Турбулентное число Рейнольдса

$$R_t = \delta^+ = \frac{(c_f/2)^{1/2} U \delta}{v_m} = \left(\frac{f}{128} \right)^{1/2} Re, \quad (63)$$

и оно, как видно, связано с числом Рейнольдса для гидравлического диаметра

$$Re = \frac{U(4\delta)}{v_m}. \quad (64)$$

В (61) постоянные равны:

$$b = 3.4; K = 0.4; A^+ = 26. \quad (65)$$

Турбулентная теплопроводность учитывается в ответствии с выражением

$$\alpha_m + \varepsilon_H = \frac{v_m}{Pr_m} \left[1 + \frac{Pr_m}{Pr_t} (\varepsilon^+ - 1) \right], \quad (66)$$

где Pr_m — молекулярное число Прандтля ν_m/α_m ; Pr_t — турбулентное число Прандтля ϵ_m/ϵ_H . Излучение в некоторой степени оказывает влияние на Pr_t [16], однако обычно используемое значение равно примерно 0,9.

Плотность потока излучения запишем через эквивалентную ширину полосы для плоского слоя в соответствии с уравнением (70) § 2.9.7:

$$q_R = \sum_{k=1}^n \omega_k B'_k \int_0^\delta K^*(y, y') \frac{\partial T}{\partial y'} dy', \quad (67)$$

где ω_k — параметр ширины полосы; B — функция Планка; $B'_k = \partial B(\nu_k, T)/\partial T$ для рассматриваемых температур. Линеаризация излучения, таким образом, заключается в вынесении из-под интеграла и представления в виде множителя величины B'_k . Ядро K^* определяется (70):

$$K^*(y, y') = A_s^* [t_H (2 - y^* - y'^*)] - A_s^* (t_H |y^* - y'^*|), \quad (68)$$

где A_s^* определяется уравнением (66) § 2.9.7; t_H — оптическая глубина в максимуме полосы для полуширины δ . Используя понятие интегральной интенсивности полосы α_k , получаем выражение для оптической глубины в максимуме:

$$t_H = \alpha_k \rho_a \delta / \omega_k. \quad (69)$$

Для последующего рассмотрения обезразмерим основное уравнение. Положим

$$u^+ = \frac{u\delta}{\nu_m R_t}; \quad (70a)$$

$$T^* = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}; \quad (70б)$$

$$R_{dm} = \frac{\delta}{K_m} \sum_{k=1}^n \omega_k B'_k A_s^*; \quad (70в)$$

$$q_R^* = \frac{-q_R}{\sum_{k=1}^n \omega_k B'_k A_s^* (T_0 - T_w)}, \quad (70г)$$

где для сокращения введены следующие обозначения:

$$A_s^* = A_s^* (2t_H); \quad (70д)$$

$$x^* = \frac{x}{\delta Pr_m R_t}. \quad (70е)$$

Отметим, что параметр $A_s^* 2t_H$ вводится для удобства последующего выделения из результатов пропускательной способности пристеночного слоя. Теперь мы запишем уравнения в безразмерном виде

$$0 = R_t + \frac{d}{dy^*} \left(\epsilon + \frac{du^+}{dy^*} \right), \quad (71)$$

$$u^+ \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\epsilon + \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) + R_{dm} \frac{\partial}{\partial y^*} q_R^*, \quad (72)$$

где

$$q_R^* = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{K^*(y^*, y^{*1}) (\partial T^* / \partial y^{*1}) dy^{*1}}{A_s^*}. \quad (73)$$

Граничные условия имеют вид $u^+ = 0$, $T^* = 0$ при $y^* = 0$; $du^+ / dy^* = 0$ и $dT^* / dy^* = 0$ при $y^* = 1$; $T^* = 1$ при $x^* = 0$.

Численное решение. Уравнение для момента (71) решается численным интегрированием

$$u^+ = R_t \int_0^{y^*} \frac{1}{\epsilon^+} (1 - y^*) dy^*.$$

Уравнение энергии решается при помощи конечно-разностных методов после координатного преобразования от y^* к z^* для увеличения относительного вклада пристеночного слоя по сравнению с центральной областью. Определим теперь среднее число Нуссельта:

$$\overline{Nu}_T = \frac{Re Pr_m}{4(x/D)} \ln \left(\frac{1}{T_b^*} \right), \quad (74)$$

где T_b^* — безразмерная среднemasовая температура:]

$$T_b^* = \frac{\int_0^1 T^*(x^*, y^*) u^+(y^*) dy^*}{\int_0^1 u^+(y^*) dy^*}; \quad (75)$$

D — гидравлический диаметр. В [18] предложено выражение для инженерных расчетов

$$\overline{Nu}_T \approx \overline{Nu}_C + \overline{Nu}_R, \quad (76)$$

где

$$\overline{Nu}_C = 0,020 Re^{0,8} Pr_m^{0,33} \bar{F}; \quad (77)$$

$$\bar{F} = 1 + \frac{0,88}{1 + 0,4(x/D)}; \quad (78)$$

$$\overline{Nu}_R = \frac{D}{K_m} \sum_{k=1}^n \omega_k B'_k A_s^* \bar{\tau}_{WL, k}; \quad (79)$$

$$\bar{\tau}_{WL, k} = \frac{\ln(1 + t_{D, k}) - \ln(1 + t_{D, k} \bar{\tau}_{WL})}{\ln(1 + t_{D, k})}; \quad (80)$$

$$\bar{\tau}_{WL} = \frac{1,37}{Re^{0,37}} \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{x}{10D} \right)^{0,6} \right) \right], \quad (81)$$

где A_s^* — поглощение полосы для плоского слоя, соответствующее $(1/2) t_{D, k}$ ($t_{D, k}$ — оптическая глубина, рассчитанная по гидравлическому диаметру). Считается, что эти результаты можно использовать для плоскопараллельного канала и для трубы [18].

Пример расчета. Оценим средний коэффициент теплопередачи в результате совместного воздействия радиации и турбулентной конвекции в потоке водяного пара при давлении 60 атм и уровне температур 1000 К, движущемся со скоростью 10 м/с в трубе с внутренним диаметром 60 мм и длиной 1 м; стенки трубы черные. Принимаются следующие номинальные значения параметров: $K_m = 0,09$ Вт/(м·К), $\nu_m = 2,6 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $Pr_m = 0,9$. Для простоты ограничимся только вкладом полос 6,3 мкм ($k=1$) и 2,7 мкм ($k=2$).

Сначала определим $\tau_{H, k}$ из рис. 10 § 2.9.5 для $PL = 0,1$ МПа·м. Для $P = 6,06$ МПа и $L_{mbg} = D = 60$ мм имеем

$$t_{D, 1} = (60) \left(\frac{60}{1000} \right) (50) = 180;$$

$$t_{D, 2} = (60) \left(\frac{60}{1000} \right) (30) = 100.$$

Из табл. 1 § 2.9.5 найдем параметр ширины полосы:

$$\omega_1 = 56,4 \left(\frac{1000}{100} \right)^{1/2} (1,2) = 214 \text{ см}^{-1};$$

$$\omega_2 = 60 \left(\frac{1000}{100} \right)^{1/2} (1,2) = 228 \text{ см}^{-1}.$$

Поскольку уравнение (66) § 2.9.7 получено интегрированием по спектру, значением ω увеличено на 20%, как это следует из обсуждения выражения (58) § 2.9.5.

Из уравнения (66) § 2.9.7 имеем

$$A_{s,1}^* = \ln \frac{180}{2} + 0,577 + 0,500 = 5,58;$$

$$A_{s,2}^* = \ln \frac{100}{2} + 0,577 + 0,500 = 4,99.$$

Теперь определим $\bar{r}_{WL}$ и $\bar{\tau}_{WL,k}$. Чтобы проделать это, необходимо вычислить число Рейнольдса:

$$Re = \frac{UD}{\nu_m} = \frac{(10)(60 \cdot 10^{-3})}{2,6 \cdot 10^{-6}} = 2,3 \cdot 10^5.$$

Из уравнения (81)

$$\bar{r}_{WL} = \frac{1,37}{(2,3 \cdot 10^5)^{0,37}} (1 - e^{-(1000/600)^{0,6}}) = 0,011.$$

Из уравнения (80)

$$\bar{\tau}_{WL,i} = \frac{\ln(1+180) - \ln(1+1,9)}{\ln(1+180)} = 0,80;$$

$$\bar{\tau}_{WL,2} = \frac{\ln(1+100) - \ln(1+1,1)}{\ln(1+100)} = 0,84.$$

Значения $\omega_k A_s^*$ столь велики, т. е. полосы H_2O являются очень широкими, что предпочтительнее использовать определенную в § 2.9.1 долю интегрального излучения черного тела. Теперь мы сделаем следующую подстановку в уравнение (79):

$$\omega_k A_s^* B_k' = 4C_s T^3 \Delta f_{i,k}. \quad (82)$$

Для нахождения $\Delta f_{i,k}$ из табл. 1 § 2.9.1 в зависимости от $\lambda T = T/\nu$ необходимо знать верхний и нижний пределы по ν для каждой полосы. Как видно из табл. 1 § 2.9.5,

полоса 6,3 мкм имеет центр при 1600 см^{-1} , а полоса 2,7 мкм — при 3760 см^{-1} . Тогда

$$\nu_{i,u} = \nu_{i,c} + \frac{1}{2} \omega_i A_{s,1}^* = 1600 + \frac{1}{2} (214)(5,58) = 2197 \text{ см}^{-1};$$

$$\nu_{i,l} = \nu_{i,c} - \frac{1}{2} \omega_i A_{s,1}^* = 1600 - \frac{1}{2} (214)(5,58) = 1003 \text{ см}^{-1};$$

$$\nu_{2,u} = 3760 + \frac{1}{2} (228)(4,99) = 4329 \text{ см}^{-1};$$

$$\nu_{2,l} = 3760 - \frac{1}{2} (228)(4,99) = 3191 \text{ см}^{-1}.$$

Таким образом, пределы по λT и f_i следующие:

полоса 1: $\lambda T = 0,455 - 0,997$; $f_i = 0,741 - 0,965$;

$\Delta f_i = 0,224$;

полоса 2: $\lambda T = 0,231 - 0,313$; $f_i = 0,237 - 0,478$;

$\Delta f_i = 0,241$.

Подставляя (82) в (79) и используя численные значения, получаем

$$\overline{Nu}_R = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{0,09} (4)(5,67 \cdot 10^{-8})(1000^3) \times$$

$$\times [0,224(0,80) + 0,241(0,84)] = 57,7.$$

Вклад конвективной составляющей задается (77) и (78):

$$Nu_C = 0,020 (2,3 \cdot 10^5)^{0,8} (0,9)^{0,33} \left(1 + \frac{0,88}{7,67}\right) = 419,3.$$

Таким образом, суммарное число Нуссельта равно 477. В заключение найдем средний коэффициент теплоотдачи:

$$\bar{h} = \frac{K_m}{D} Nu_T = \frac{0,09}{60 \cdot 10^{-3}} (477) = 715 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно чёрная поверхность:**
 спектральная отражательная способность некоторых селективных чёрных поверхностей 465
 теплообмен с газом 494—495
- Адиабатные поверхности** 471
- теплообмен излучением между источником, стокм и адиабатной поверхностью 473—474
- Азот, таблицы критических тепловых потоков для кипения в вертикальной трубе** 359
- Активаторы для капельной конденсации** 359—360
- Активные методы интенсификации теплообмена:**
 определение 322
 при вынужденной конвекции 326—327
 при конденсации 360—362
 при свободной конвекции 322—323
- Альбедо однократного рассеяния излучения** 502
- Анализ размерностей:**
 л-теорема 106
 теория подобия 105—107
- Анализ термических сетей. Система, включающая излучение, теплопроводность и конвекцию** 511—512
- Аналитические решения для теплообменников** 32—34
- Аналогия между переносом тепла, массы и импульса** 22, 87—90
- Аналогия Чилтона — Колбурна** 21
- Безразмерные числа:**
 в переносе тепла свободной конвекцией к погруженным телам 274—275
 в псевдооживлении 155—156
 таблицы 105
 в тепло и массообмене 88
- Бинарные смеси:**
 кипение в большом объеме 415—419
 критический тепловой поток 417—418
 минимальный коэффициент теплоотдачи 416
 — тепловой поток 418
 пленочное кипение 418—419
 пузырьковое парообразование 415—417
 фазовый переход при кипении 418
 конденсация 90—92, 354
 образование пузырей 413
 рост пузырей 414—415
 фазовое равновесие 410—412
- Бойлеры как тип теплообменников** 12
- Вдуг:**
 влияние на ламинарный поток на плоской пластине 114
 — при нестационарном обтекании плоской пластины 116
 — при турбулентном обтекании плоской пластины 120
 использование в интенсификации теплообмена 322—328
- Вертикальные поверхности:**
 комбинированный тепло- и массообмен 282—283
 кипение в большом объеме 369, 378
 перенос массы свободной конвекцией 281—283
 пленочная конденсация 340—345
 пленочное кипение при вынужденной конвекции 400
 теплообмен при свободной конвекции 272—283
 безразмерные числа 272
 ламинарный поток с однородной температурой стенки 273—274
 неньютоновские жидкости 281—282
 нестационарное течение при однородной температуре стенки 274—275
 переходный режим 280—282
 решение для однородного теплового потока 274—277
 уравнение для случая однородной температуры стенки 275—276
 теплообмен при смешанной конвекции 312—315
- Вертикальные трубы:**
 захлебывание:
 в газожидкостном вертикальном потоке 198—199
 при конденсации с противотоком 343—345
 кипение 378—402
 в насыщенной жидкости 384—387
 в недогретой жидкости 381—387
 критический тепловой поток 387—400
 режимы течения и теплообмен 379—385
 теплообмен в области, где критический тепловой поток превышен 398—400
 кольцевое течение 201—202
 конденсация 340—345
 влияние волн и турбулентности 341—342
 — межфазного сдвига 342—343
 конденсация с противотоком 343—345
 ламинарное течение 340—345
 перенос тепла смешанной конвекцией при:
 ламинарном течении (при противоположно направленных силах свободной и вынужденной конвекции) 318—319
 — — (совпадающие по направлению силы свободной и вынужденной конвекции) 316—318
 режимы 316
 пневматическая транспортировка 204
 пузырьковое течение 195—196
 режимы течения газожидкостного потока 183
 снарядное (или пробковое) течение 196
 теплообмен свободной конвекцией с внешней стороны 289
- Взаимопроникающие среды:**
 дифференциальные уравнения в частных производных 28—32
 пористость 29
- Вибрация:**
 при интенсификации теплообмена 322, 323, 326, 327, 424
 численные методы, предсказание возникновения 40
- Вихреобразование:**
 в трубных пучках 151—152
 на одиночных цилиндрах 137
- Влияние подъемных сил:**
 на ламинарное течение через плоскую пластину 115
 на потоки 104—105
 на развивающиеся течения в каналах 128
 на течения в каналах при теплообмене свободной конвекцией 287
- Внутренние источники тепла, распределение температуры в телах** 216—217
- Вода:**
 значения критического теплового потока в трубах (таблица) 390—391
 кривая кипения в большом объеме при атмосферном давлении 369
- Возникновение пузырькового течения:**
 при кипении в большом объеме 369—370
 — — недогретой жидкости в вертикальных трубах 381—383
- Впадины резервуарного типа для интенсификации кипения** 423—424
- Впрыск пара, влияние на теплообмен при кипении в трубных пучках** 409
- Входные потери для входа в кожухотрубный теплообменник** 164—165
- Входные эффекты при тепло и массообмене:**
 сравнение ламинарных и турбулентных потоков 83—84
 в турбулентных потоках 237
- Высыхание:**
 введение 378—379
 как механизм кризиса теплоотдачи: высыхание жидкой пленки 394—402
 под паровым образованием 394
- Выходные потери для труб в кожухотрубных теплообменниках** 164—165
- Вязкая диссипация, влияние на теплообмен при тении неньютоновских жидкостей** 331—336
- Вязкий подслои при течении в трубах** 122
- Вязкость:**
 аномальная 166
 жидкостей, влияние на критический тепловой поток при кипении в большом объеме 375—376
 изменение с температурой:
 формула Чепмена — Рубекина для 104
 формула Сатерленда 104
 малых изменений 104
 связь с плотностью газов 104
- Газожидкостные течения:**
 гидродинамика отдельных режимов течения (горизонтальных) 199—202
 кольцевое течение 201
 снарядное течение 200
 расслоенное течение 199
- Гидродинамика отдельных режимов течения (вертикальных)** 195—199
- кольцевое течение 196
- пузырьковое течение 195
- противоточное течение и захлебывание 198
- снарядное (пробковое) течение 196
- критические двухфазные потоки 202—204
- применение одномерных уравнений 187—195
- зависимость для истинного объемного паросодержания 191—193
- изменение давления при переходе через особые точки 193—195
- перепады давления в теплообменниках 191
- перепады давления, обусловленные трением в прямых каналах 189—191
- режимы течения 182—187
- вертикальные трубы 183—184
- горизонтальные трубы 184—185
- наклонные трубы 185
- кожухотрубные теплообменники 185—186
- системы с фазовыми превращениями 186—187
- Газоходы с зеркальными стенками, теплообмен излучением** 480—482
- Адиабатные поверхности** 481—482
- Изотермические поверхности** 480
- Неизотермические поверхности** 481
- Газоходы с шероховатыми стенками, теплообмен излучением** 484
- Газы:**
 как непрерывная фаза многофазных течений 176
 радиационные свойства 484—494
 измерения 485—487
 молекулярные 490—493
 полос и общие 487—489
 смеси газов 494
 спектральные 487—488
 уравнения переноса 484—485
 физика 486—487

- радиационный теплообмен в изотермических газах 494—501
 — в неізотермических газах 501—510
 сложный теплообмен излучением и конвекцией 516—518
 Гетерогенная нуклеация 366—367
 Гидравлически гладкие поверхности 122
 Гидравлическая транспортировка:
 гомогенная и псевдогомогенная 211—212
 в горизонтальных трубах:
 гетерогенная транспортировка 212—214
 режимы течения 210—211
 Гидродинамический начальный участок, при однофазном течении в канале 127—128
 Гипотеза о локальных условиях для критического теплового потока при течении кипящей жидкости 387
 Гистерезис:
 на кривой кипения 374
 снижение гистерезиса, использование пористых поверхностей 425
 Гомогенная конденсация (образование тумана) 339
 образование центров парообразования 362—363
 пересыщение 362
 условия, вызывающие пересыщение 363
 Гомогенная модель:
 в газожидкостных потоках:
 корреляции для падения давления, обусловленного трением 189
 оценка критического потока 202—203
 падение давления в особых точках потока 193—195
 для течения жидкость — твердые частицы 211—212
 уравнения сохранения 187—189
 — для многофазных потоков 178—179
 Гомогенная нуклеация:
 капель в перенасыщенном паре 362
 пузырьков пара в жидкости 365—366
 таблица предельных перегревов для различных веществ 365—366
 Горизонтальные поверхности:
 кипение в большом объеме 369—378
 смешанная конвекция при поперечном обтекании 314—315
 теплоотдача при свободной конвекции 283—287
 опускное течение от обращенных вверх обогреваемых поверхностей 283—287
 подъемное течение от обращенных вверх обогреваемых поверхностей 283—287
 Горизонтальные трубы:
 гидравлическая транспортировка 211—214
 кипение в большом объеме 369—378
 — на внешней стороне при поперечном обтекании 406—409
 кипение в условиях вынужденной конвекции 402—406
 конденсация на внутренней поверхности 347—349
 кольцевое течение 348
 расслаивающееся течение 347—348
 режимы течения 347
 конденсация на наружной поверхности 345—347
 влияние парового сдвига, одиночная труба 345
 ламинарное течение, одиночная труба 345
 в пучках 345—346
 кризис теплоотдачи 403—406
 переход тепла к горизонтальной трубе в псевдооживленном слое 450
 режимы двухфазного течения 199—202
 кольцевое течение 201
 расслоенное течение 199
 снарядное течение 200
 совместная свободная и вынужденная конвекция 315—321
 при постоянной температуре 319
 при одностороннем обогреве 319
 теплоотдача при совместной свободной и вынужденной конвекции около погруженных в жидкость 312—315
 теплоотдача при свободной конвекции около погруженных в жидкость 287—290
 Градиент давления:
 влияние в переходном пограничном слое на плоской пластине 116
 Градиенты как тип теплообменника 12
 Давление насыщения 364
 Движущиеся слои, теплообмен 442
 Двухпараметрические модели для турбулентных пограничных слоев 119
 Двухфазные течения:
 жидко-жидкостные потоки 176
 классификация 176
 численный расчет 39
 Диаграмма Моуди:
 для коэффициента трения однофазного потока в круглых трубах 120, 122
 для критического двухфазного потока 203
 Диаграмма состояния, псевдооживленные слои 155
 Диаграмма Метаяса и Эккерта для режимов конвекции:
 в вертикальных трубах 315
 в горизонтальных трубах 316
 Диаграммы:
 двухфазные газожидкостные течения 193
 коэффициенты потерь 135
 Днатурмическая жидкость 451
 Дискретизация в численном анализе:
 влияние сеток 35—36
 при конструировании теплообменников с описанными полями течения 35—38
 для случаев, где необходимо рассчитывать поле течения 38—39
 разбиение по временной координате 36
 разбиение по пространственным координатам 35—36
 Диссипация энергии турбулентности 108, 110
 Дифракционная модель для излучения с поверхностей 482
 Дифференциальная кривая конденсации:
 расчет 352
 описание 350, 351
 Дифференциальные методы описания перепада излучения в неізотермическом газе 504—507
 диффузионный 504—505
 метод вставки 506—507
 многопоточковый 505—506
 Диффузоры:
 однофазное течение и падение давления 132—134
 влияние условий на входе 133
 методы улучшения характеристик 135
 со свободным выходом 134
 характеристики 132—133
 Диффузные поверхности, перенос излучения между ними 466—477
 Длина волны излучения, абсолютно черное тело 452—453
 Длина пути перемешивания 123
 Добавки:
 влияние на коэффициент трения 125
 использование для интенсификации теплообмена 322, 426
 Жидкие металлы:
 в теплообменниках 338
 конденсация 349—350
 обтекание пучков, стержней 337—338
 теплообмен 337—339
 течения в каналах 337
 Жидкости как непрерывная фаза в многофазных потоках 175—176
 Жидкость Бингама (неньютоновская) 171
 Жидкость неньютоновская, теплообмен при свободной конвекции 281—282
 Жидкость Эйрига (неньютоновская) 171
 Зависимость Боришанского для пузырькового кипения в большом объеме 372
 Зависимость Боурига для критического теплового потока 383
 Зависимость Дженса и Лотса для вынужденной конвекции при кипении неогретой воды 383
 Зависимость Гроенвельда для теплоотдачи в закризисной области 401
 Зависимость Гроенвельда и Делорма для теплоотдачи закризисной области 401
 Зависимость Гуернери и Телтун для теплоотдачи при вынужденной конвекции в двухфазных потоках 374
 Зависимость Стефана и Корнера для кипения бинарной смеси 415
 Зависимость Уоллеса:
 для захлебывания 199
 применение в противоточной конденсации 344
 для межфазного коэффициента трения 197
 Зависимость Уолли и Хьюитта:
 для межфазной шероховатости 197
 для уноса 199
 Зависимость Форстера и Зубера для пузырькового кипения 371
 Зависимость Френеля для отражения излучения 459—460
 Зависимость Шаха для кипения в горизонтальных трубах 405
 Задача Нуссельта — Гретца, ламинарный теплообмен в трубах 234
 Закон Бера — Ламберта 488
 Закон Генри для парциального давления 411
 Закон дефекта скорости:
 для турбулентного пограничного слоя 117—118
 универсальный 117, 121
 Закон Кирхгофа в радиационном теплообмене 455
 Закон Ньютона для переноса импульса 70
 ограничения 69—70
 Закон Плаика для спектрального распределения излучения черного тела 452
 Закон следа Коулса 117
 Закон Снелла в излучении 460
 Закон Стефана для излучения абсолютно черного тела — 452
 Закон Фика 71
 ограничения применения 71—72
 распространение закона Фика на многокомпонентные смеси — 88
 Закон Фурье для теплопроводности 71, 72, 88—90, 214—215
 Закон Хагена — Пуазейля 71, 120, 121
 Законы для турбулентного течения:
 дефекта скорости 117—118
 спутного следа 117
 стенки 116
 Законы идеального газа 103
 Закрученные ленты:
 в качестве вставок для интенсификации теплообмена 322, 324—325
 интенсификация конденсации с помощью 362
 интенсификация теплообмена при кипении 424
 Застой циркуляции как механизм возникновения критического теплового потока 396
 Затупленные тела, коэффициент сопротивления 136—137
 Зеркала, спектральные характеристики отражательной способности 464—465
 Зеркальные изображения, в радиационном теплообмене 478
 Зеркальные поверхности 477—478
 теплообмен излучением между не полностью диффузными и зеркальными поверхностями 477—484
 Змеевики:
 интенсификация теплообмена при кипении 462
 кипение в условиях конвекции 403—405
 Идеальный газ, скорость звука 103—104
 Изгибы:
 интенсификация конденсации 360—362
 кризис кипения в трубах с изгибом 403—406
 однофазные течения и перепад давления 130—132
 коэффициенты потерь 130
 потери давления в многофазных системах:
 газожидкостные системы 191
 системы твердые частицы — газ 209
 системы твердые частицы — жидкость 213
 Излучение:
 абсолютно черного тела 452—454
 влияние на пленочное кипение 378
 влияние на теплообмен в теплоупакованных слоях 441
 дифференциальный метод расчета неізотермического газа 504—505
 коэффициент радиационной теплоотдачи 511—512
 при теплообмене в псевдооживленном слое 448, 450—451
 численный расчет течений, с излучением 40—41
 Изогнутые каналы:
 ламинарное течение 131

- турбулентное течение 132
Изотермический газ, радиационный теплообмен на чёрной стенке 494—501
Изотермическое течение, сжимаемое в канале 129—130
Изотропное рассеяние 485
Инертные газы, влияющие на конденсацию 90—91
Интеграл Крокко, приложение к уравнениям пограничного слоя 118
Интергальная кривая конденсации: описание 350
расчет кривых конденсации 351—352
Интергальное излучение, закон Стефана 453—454
Интегрирующая сфера
для измерений отражательных и пропускательных характеристик 458
Интенсификация теплообмена:
активные методы:
определение 322
при вынужденной конвекции 326
при свободной конвекции 322
при кипении:
в большом объеме 424
внутри труб
при конденсации:
в паровом объеме 360—361
при вынужденной конвекции 361—362
пассивные методы:
определение 321—322
при вынужденной конвекции 323—326
при свободной конвекции 322
рабочие оценочные критерии 327
Испарение:
на границе раздела фаз 364—365
микроосла, при кипении бинарных смесей 412
основные понятия 97—98
режимы течения 186—187
Испарители как тип теплообменника 11—12
Испарители с падающей плёнкой, массоперенос 92
Истинное объемное влагосодержание 177
Истинное объемное газосодержание 178
зависимости для газосодержания в газожидкостном потоке 192—193
гомогенные 192
Мартинелли 192
CISE 193
модели потока дрейфа 192
модели для газосодержания в газожидкостных потоках:
вертикальное пробковое течение 196
вертикальное пузырьковое течение 195—196
горизонтальное расслоенное течение 196
кипение недогретой жидкости 383
Источник излучения:
радиационный теплообмен между адiabатной поверхностью, стоком и источником 473—475
радиационный теплообмен между стоком и источником 473
Каналы прямоугольного и квадратного сечения:
ламинарное течение 131
критический тепловой поток при кипении в каналах 387
продольный радиационный перенос тепла 477
теплообмен при свободной и вынужденной конвекции в 320—321
турбулентное течение 131
шероховатые стенки, продольный радиационный перенос тепла 482
Капли:
использование для интенсификации теплообмена 326
образование капель в перенасыщенных парах 362
осаждение и унос капель, кольцевое течение (горизонтальное) 196
Карта режимов течения Бейкера для горизонтальных газожидкостных течений 184
Карта режимов течения Тейлора и Даклера, горизонтальные и наклонные газожидкостные потоки 185
Касательные напряжения:
влияние межфазных касательных напряжений на пленочную конденсацию на вертикальных поверхностях 342—343
распределение на стенке при обтекании одиночного цилиндра 137—139
турбулентные, при течениях в трубе 123—124
Кипение:
бинарных и многокомпонентных смесей:
в большом объеме 415—419
при вынужденной конвекции 419—423
основные процессы 410—415
в горизонтальных трубах:
интенсивность теплоотдачи 402—406
кризис теплоотдачи 403—404
в вертикальных трубах 378—402
критический тепловой поток 387—389
интенсификация теплообмена:
в большом объеме 423—424
внутри труб 425—427
возникновение пузырькового кипения 369
кривая кипения 369—370, 374
критический тепловой поток 374—375
минимальный тепловой поток 377
на наружной поверхности труб и трубных пучков 406—410
при поперечном обтекании одиночных труб 406—407
в трубных пучках 408—410
основные процессы 364—369
гетерогенная нуклеация 366—367
гомогенная нуклеация 365—366
классификация активных центров парообразования — 367
парообразование 364
отрыв пузырьков и частота образования 368—369
рост пузырьков 367—368
пузырьковое кипение 370—373
переходный режим кипения 377
Кипение в большом объеме 369—378
бинарных и многокомпонентных смесей 415—419
критический тепловой поток 417—418
минимальный тепловой поток 418
плёночное кипение 418—419
переходное кипение 418
пузырьковое кипение 415—417
возникновение пузырькового кипения 369—370
интенсификация теплообмена 423—424
кривая кипения 369—370, 374
критические тепловые потоки 374—377
влияние вязкости жидкости 375—376
влияние геометрии 375
влияние недогрева 376—377
влияние состояния поверхности 377
минимальный тепловой поток 377
переходное кипение 377—378
плёночное кипение 370—374
пузырьковое кипение 370—374
влияние давления 373
влияние недогрева жидкости 374
влияние размера и ориентации поверхности 374
влияние растворенного газа 374
влияние смачиваемости поверхности 374
влияние условий на поверхности 373—374
влияние ускорения гравитационного 374
гистерезис кривой кипения 374
зависимости 370—373
Кипение в переходном режиме:
бинарных смесей 418
при вынужденной конвекции 422—423
при вынужденной конвекции около вертикальных поверхностей 398—400
при кипении в большом объеме 377
Кипение насыщенной жидкости:
в вертикальных трубах 384
область вынужденной двухфазной конвекции 385—387
пузырьковое 384
при кипении в большом объеме 369—376
Кипение недогретой жидкости:
в большом объеме 376—378
в вертикальных трубах 381—381
начало 381
неразвитое 383
полностью развитое 382
объемное паросодержание 383—384
с однофазной конвекцией 381
Клапаны:
коэффициенты потерь 135
открытые, потери давления двухфазного газожидкостного потока 195
Ключообразное кольцевое течение, области возникновения 183
Кожухотрубные теплообменники:
введение к конструкционным особенностям 12
диаграммы F — фактора и θ — NTU — 43—56
многоходовой 8
неоднородный теплообмен в 85—86
падение давления в коллекторах, соплах и поворотах 159—165
перетечка через перегородки, численный расчёт 37—38
приближенные коэффициенты теплопередачи 74
численные решения
поле скоростей подложит расчету 38—39
при заданном поле скоростей 35—38
Кожухотрубные теплообменники типа ТЕМА E , поправка на среднюю разность температур (F) и θ — NTU диаграммы 44—52
Кожухотрубные теплообменники типа ТЕМА G , поправка на среднюю разность температур (F) и θ — NTU диаграмма 55—56
Кожухотрубные теплообменники типа ТЕМА J , поправка на среднюю разность температур (F) и θ — NTU диаграмма 46, 53—54
Кольбура J -фактор:
определение 82
значения при теплообмене в трубах 84
Колена и змеевики:
кризис кипения 403—404
однофазный жидкостный поток и падение давления 131—132
характеристики течения 131
Коллекторы в кожухотрубных теплообменниках 159—160, 161
входные распределяющие коллекторы 162
выходные комбинированные коллекторы 162—163
выходные/выходные потери давления 162—163
Кольцевые каналы:
критический тепловой поток при течении 393
однофазные течения и потери давления 126—127
при ламинарном течении 126—127
при турбулентном течении 127
перенос тепла свободной конвекцией в каналах, закрытые с концов 305—307
теплообмен при вынужденной конвекции в однофазном потоке:
ламинарное течение 235
течение жидких металлов 337
турбулентное течение 237
Кольцевые течения:
гидродинамика в вертикальных трубах 196—198
зависимость для уноса и осаждения капель 196
соотношения для шероховатости границы раздела фаз 197
гидродинамика в горизонтальных трубах 201—202
критический тепловой поток 393, 395
режимы течения:
в горизонтальных трубах 184
в наклонных трубах 185
в системах с фазовыми превращениями 186
Компоненты трубопроводов:
газожидкостные течения и перепад давления 193—195
при внезапных расширениях 193
при внезапных сужениях 194
при диафрагмах 195
при изгибах 194
при плавном изменении поперечного сечения 193
при открытых клапанах 195
однофазное течение жидкости и падение давления 130—135
искривлённых каналов 131—132
расширениях 132—134
в разнообразных соединительных частях 135
Конвективная компонента, перенос тепла от частицы в псевдоожженных слоях 447
Конвективный перенос тепла, однофазный:
вокруг погруженных тел:
гладкие плоские пластины 242—244
однородные тела 244—247
влияние излучения 516—518

- вынужденная конвекция в каналах 233—242
 ламинарное течение 234—236
 турбулентное течение 236—241
 в жидких металлах 337—338
 в неьютоновских жидкостях 327—337
 интенсификация теплообмена 321—327
 в теплообменниках и перемешивающихся слоях 440—445
 при свободной конвекции:
 в слоях и полостях 295—312
 около погруженных в жидкость тел 234—295
 совместная свободная и вынужденная конвекция:
 погруженные в жидкость тела 312—315
 течения в каналах 315—321
- Конденсаторы:
 как тип теплообменника 12
 образование тумана 362—361
 приближенные коэффициенты теплопередачи 74
 типичные варианты изменения температуры 10
- Конденсация:
 в горизонтальных трубах, режимы течения 186—187
 каплевая 359—360
 активаторы 359, 360
 механизм 359
 порядок величины коэффициента теплоотдачи 359
 расчёт теплоотдачи 359—360
 паровой смеси 350—355
 бинарных паровых смесей 354
 многокомпонентных 354—355
 пара с неконденсирующимся газом 352—353
 паровых смесей, образующих несмешивающиеся жидкости 355—359
 с неконденсирующимися газами 357—359
 неэвтектических смесей 357
 эвтектических смесей 355—356
 образование туманов 362—363
 методы уменьшения 363
 образование ядер конденсации 362—363
 перенасыщения 362
 условия, вызывающие перенасыщения 363
 пленка, введение 91—92
 пленочная конденсация чистого пара 340—350
 на вертикальной поверхности 340—345
 на внешней стороне горизонтальных и наклонных труб 345—347
 на внутренней поверхности горизонтальных труб 347—349
 межфазное сопротивление при жидких металлах 349—350
 при прямом контакте 339
 совместный тепло- и массообмен 90—92
 Корреляция Деилера и Адамса для теплоотдачи в областях двухфазной вынужденной конвекции 385
 Корреляция Дюранда для гетерогенной горизонтальной гидротранспортировки 212
 Корреляция Пэлена и Сигаля для критического теплового потока в трубных пучках 410
 Корреляция Розензуга для пузырькового кипения 370
 применение к кипению в вынужденной конвекции в вертикальных трубах 383
 Корреляция Чена для кипения при вынужденной конвекции 386
 Корреляция Черчила и Чу для теплоотдачи при свободной конвекции:
 на вертикальных цилиндрах:
 ламинарное течение 275
 турбулентное течение 276
 на горизонтальных цилиндрах 283
 Корреляция Широка и Гроссмана для теплообмена в области вынужденной двухфазной конвекции 385
 Котлы с мешалками, приближенный коэффициент теплопередачи 76
 Коэффициент давления:
 для обтекания одиночного цилиндра 141
 для обтекания трубы в трубном пучке 142—143
 Коэффициент ослабления 485
 Коэффициент переноса массы:
 некоторые определения 17, 87—90
 в неподвижных слоях 260—261
- Коэффициент поверхностного трения 112
 при обтекании трубных пучков 142—143
 при обтекании цилиндров 138—140
 при турбулентном обтекании плоских пластины 119
 формула Стратфорда для пограничных слоев 113
 формула Людвига — Тильмана 115
 Коэффициент поглощения 485
 Коэффициент потерь 130
 для диффузоров 132
 для колен 131
 в комбинированном и разделяющемся потоке 134—135
 для соединительных узлов 135
 Коэффициент рассеяния 485
 Коэффициент сопротивления:
 круглые цилиндры 138
 определение 136
 псевдооживленные слои 155
 сферы 136
 трубных пучков 142—143
 Коэффициент теплоотдачи:
 в движущихся, колеблющихся и перемешивающихся слоях частиц 440—445
 жидкие металлы 337—339
 при излучении 511—512
 кипение в большом объеме 415—419
 при кипении бинарных и многокомпонентных смесей:
 вынужденная конвекция 419—423
 при кипении на внешней стороне одиночных труб и трубных пучков 406—410
 при кипении в вертикальных трубах 378—402
 при кипении в горизонтальных трубах, коленах и элеваторах 402—410
 при конденсации 339
 местные, определение 233—234
 в неподвижных слоях:
 между стенкой и слоем 433
 от частицы к жидкости 259, 261, 440—441
 общее определение 16, 72
 в различных теплообменниках 74—76
 при однофазном потоке в трубах:
 ламинарное течение 234—236
 турбулентное течение 236—241
 объемные 9—10
 при свободной конвекции:
 в слоях и закрытых полостях 295—312
 при совместном действии свободной и вынужденной конвекции:
 в каналах 315—321
 средние и полные значения 16, 233—234
 в псевдооживленных слоях:
 теплоотдача от частицы к жидкости 261—262
 от слоя к стенке 448—450
 около погруженных в жидкость тел 274—295
 при течиении неьютоновских жидкостей 327—337
 при течиении в трубных пучках 247—259
- Коэффициент теплопередачи:
 приближенные значения 76
 в жидкометаллических теплообменниках 338
 в различных теплообменниках 74—76
- Коэффициент трения:
 межфазный 197, 342
 в неподвижных слоях 152—153
 определение 19
 в системах интенсификации теплообмена:
 трубы со спиралью 324
 в трубах с внутренним оребрением 324
 шероховатые поверхности 323, 324
 в трубах с закрученными лентами 325
 течение в круглой трубе 120—121
 определение 120
 диаграмма Моуди 20, 123
 твердых тел при течиении среды газ — твердые частицы 207—209
 определение 207
- Коэффициенты взаимодействия в теплообменниках 9—10
 Краевой угол 176
 влияние при пузырьковом кипении 366, 369
- Кривая кипения:
 в бинарных смесях 364
 для одиночной горизонтальной трубы при поперечном обтекании 406
 для трубных пучков 408
 при кипении в большом объеме 369—370
- влияние чистоты обработки поверхности 370
- Кривые конденсации:
 дифференциальные 351
 интегральные 351
 описание 350
- Критерий критического теплового потока при поперечном обтекании одиночной трубы 407
- Критерий начала пузырькового кипения 381
- Критерий Сю для возникновения пузырькового кипения 370
- Критическая скорость при рассмотрении потока в изгибах и горизонтальных трубах 403—405
- Критические двухфазные потоки 202—204
 модель Генри — Фауске 204
 модель гомогенного течения 203—204
- Критический тепловой поток:
 на внешней поверхности труб в трубных пучках 409—410
 корреляции 409—410
 при кипении при вынужденной конвекции бинарных и многокомпонентных смесей 422—423
 отклонение от пузырькового кипения 422—423
 кризис кипения 423
 при кипении в большом объеме 374—377
 влияние вязкости жидкости 375
 влияние недогрева жидкости 376
 влияние условий на поверхности 377
 геометрические эффекты 375
 метод Зубера 37
 при кипении в большом объеме бинарных и многокомпонентных смесей 417—418
 механизмы 387—398
 методы расчета кольцевых потоков 387—398
 для неводных жидкостей 397
 на наружной стороне одиночной трубы в поперечном потоке 407
 при неоднородном тепловом потоке 391—393
 при однородном тепловом потоке 387
 в пучках стержней 393
 в прямоугольных каналах 393
 при противотоке 396—397
 при течиении в вертикальных кольцевых каналах 393
 при течиении в вертикальных трубах 387—393
- Критическое число Рейея, при свободной конвекции 296—300
- Ламинаризация турбулентного потока 119—120
- Ламинарное течение:
 в круглых трубах 120—122
 в некруглых трубах 125—126
 конденсация на вертикальных поверхностях 340—345
 теплообмен при свободной конвекции 275, 276, 283
 теплообмен в каналах 234—237
 влияние свободной конвекции 236
 жидкие металлы 337
 концентрические кольцевые 235
 между параллельными пластинами 234, 236
 прямых круглых 236—237
 теплообмен в трубных пучках 234
 теплоотдача при смешанной свободной и вынужденной конвекции 315—321
- Максвелловская скорость пара, лимитирующее явление при конденсации 95
- Максимальная теплоотдача от слоя к поверхности, в псевдооживленных слоях 448, 450
- Максимальные касательные напряжения при свободно-молекулярном режиме течения 71
- Максимальный поток массы:
 при конденсации 95
 при свободно-молекулярном режиме течения 71
- Максимальный тепловой поток:
 при конденсации 95
 при свободно-молекулярном течении в газах 71
 при теплопроводности в твердых телах 71
- Массовая доля, в многокомпонентных смесях 15
- Массовое газоудержание, в многофазных потоках;

- балансовый массовый расход 16, 178—179, 380
расходное массовое газосодержание 16, 178—179
- Массовый коэффициент ослабления 485
Массовый коэффициент поглощения 485
Массовый коэффициент рассеяния 485
- Массоперенос:
аналогия с теплопереносом 87—90
в неоднородных системах 84—87
в неподвижных слоях 260—261
при конденсации:
в бинарных смесях 354
в многокомпонентных смесях 354—355
пара с неконденсирующимися добавками 352—353
в псевдооживленных слоях 263—266
в ударяющейся струе 272
объемный коэффициент 9—10
Массо- и теплообмен, сложный:
при конденсации 90—92
при сушке 90
- Масштабные приближения при излучении неизолированного газа 507—508
узкополосный масштаб, приближение Куртиса — Годсона 507—508
широкополосный масштаб 508
- Межфазная шероховатость, соотношения в кольцевом потоке газожидкостной среды 197—198
- Межфазное касательное напряжение, влияние на пленочную конденсацию:
на вертикальной поверхности 342—343
- Межфазное сопротивление при конденсации 349
- Металлы:
жидкие, однофазный перенос тепла 337—338
конденсация 349—350
спектральный коэффициент поглощения 462
- Метастабильное равновесие пара и жидкости 364
- Метод Белла и Гейли для расчетов многокомпонентных систем:
при испарении 422
при конденсации 352
- Метод вставок для радиационного теплообмена в неизолированных газах 506—507
- Метод Колбурна и Дрю для конденсации бинарного пара 354
- Метод Колбурна и Хагена для конденсации в присутствии неконденсирующихся газов 353
- Метод Монте-Карло, в радиационном теплообмене 478—480, 500—501
- Метод F -коррекции:
диаграммы F -фактора и уравнения для различных конфигураций теплообменников 44—70
перекрестное течение (оба перемешиваются) 56—70
применение к теплообменникам с однонаправленным и противоточным движением жидкости 33—34, 43, 44
для расчета теплообменников 24, 41—43
- Метод F -фактора Тонга для критического теплового потока при неоднородном нагреве 392—393
- Метод $P - NTU$:
приложение к однокходовым теплообменникам 33—34
для расчета теплообменников 25
- Метод $\theta - NTU$:
диаграммы и уравнения для проектирования теплообменников 44—70
перекрестное течение (оба потока перемешиваются) 56—70
применение к теплообменникам с однонаправленным и противоточным движением жидкости 33—34, 43—44
для расчета теплообменников 25, 41—44
- Метод $\bar{U}$ 72—73, 76, 79—80
- Метод $\bar{U} - \alpha$ 76—80
- Методы обращения матриц, в радиационном теплообмене 471
- Минимальная скорость псевдооживления 155
- Минимальный тепловой поток при кипении в большом объеме:
бинарных и многокомпонентных смесей 418
чистых компонент 377
- Многокомпонентные смеси:
газов, оптические свойства 493
диффузия в 88—89
кипение с вынужденной конвекцией 420—423
кипение в большом объеме 415—419
конденсация 354—355, 355—359
фазовое равновесие 412—413
- Многомерные области, теплопроводность 223—226
- Многопоточные методы, радиационный теплообмен в неизолированных газах 505—507
- Многоходовой кожухотрубный теплообменник 8
- Модели теории 105—107
- Моделирование больших вихрей при расчетах турбулентных пограничных слоев 110—112
- Модели, основанные на уравнениях для касательных напряжений, турбулентные пограничные 119
- Модели поверхности, при радиационном теплообмене 482—483
дифракционные модели 482
модели геометрической оптики 482
модели рассеивающего слоя 483
- Модели с одним уравнением для турбулентных пограничных слоев 119
- Модель Генри — Фауске для двухфазного критического потока 202, 203, 204
- Модель геометрической оптики для радиационного переноса между зеркальными и не полностью диффузными поверхностями 482—483
- Модель Зубера — Финдлея, двухфазные течения 182
- Модель Максвелла для не-newтоновских жидкостей 171—172
- Модель Олдройда с восемью константами для не-newтоновских жидкостей 172
- Модель потока дрейфа для двухфазных течений 180—181
- Модель раздельного течения:
применение и расчеты расслоенного течения 199—200
уравнение сохранения для:
газожидкостного течения 187—188
многофазных течений 179—180
- Модель узкой полосы Гуди для оптических свойств газа 488
- Модель Уайта — Метцнера, не-newтоновские жидкости 171—172
- Модель широкополосная Шака для определения оптических свойств газа 488
- Наклонные поверхности, теплоотдача при свободной конвекции 283—287
подъемное течение от поверхностей, обращенных вверх 285—287
опускное течение от поверхностей, обращенных вниз 283—284
- Наклонные полости, теплоотдача при свободной конвекции 307—312
большие отношения сторон 307—308
среднее отношение сторон 308—312
- Наклонные течения, воздействие на теплоотдачу к цилиндрам 245
- Наклонные трубы:
пневматическая транспортировка (твердые частицы — газ) 204—205
режимы течения в газожидкостных потоках 185
теплоотдача при свободной конвекции на внешней стороне труб 290—291
- Насадки для неподвижных слоев:
характеристики 152, 153
эффективная теплопроводность различных насадок в неподвижных слоях:
застойные слои 431—432
слои с движущимися через них газом 436—439
- Неводные жидкости, критический тепловой поток 374—400
- Невязкие течения, сжимаемые, с подводом тепла 130
- Недогрев жидкости:
влияние на кипение в большом объеме:
критический тепловой поток 376
пузырьковое кипение 374
влияние на кипение при вынужденной конвекции 387—391
влияние на критический тепловой поток 387
при конденсации пара 362
- Неконденсирующиеся среды:
при кипении 374
при конденсации 90—91, 340, 350—352, 354, 357—359, 360
- Неньютоновские жидкости:
модели 170—172
однофазный перенос тепла вынужденной конвекцией 327—336
определяющие физические свойства 328—330
при течи в каналах 331—334
уравнения и безразмерные числа 330—331
- однофазное течение и падение давления 165—175
соотношения между объемным расходом и падением давления 172—174
- теплоотдача свободной конвекцией:
от сфер 291
вертикальных пластин 281—282
турбулентное течение 174—175
экспериментальные характеристики 166—169
- Неподвижные слои:
влияние теплопроводности 441
двумерное поле температур 435—436
неоднородный перенос тепла 87
одномерное поле температур 439—440
однофазное течение и падение давления 152—154
пористость 152
радиационный теплообмен 441
теплообмен с газом, текущим через слой 435—442
сопротивление площади контакта 441
теплоотдача от жидкости к частице 259—261
эффективная теплопроводность 438
теплообмен при отсутствии протока 420—433
двумерное поле температур
коэффициент теплоотдачи от стенок 433
одномерное поле температур 433
эффективная теплопроводность 430
теплоотдача от стенок 439; 440—441
характеристика насадок 152
- Не полностью диффузные поверхности:
определение 477—478
радиационный теплообмен между зеркальными и не полностью диффузными поверхностями 477—484
- Несмешиваемые жидкости, конденсация паров, образующих
несмешиваемые жидкости 355—359
описание 339, 355
эвтектические смеси 355—356
- Нестационарные течения:
в каналах 130
около цилиндров 139
- Неустойчивость Релея при свободной конвекции 296
- Нуссельт:
описание режимов теплообмена 70
уравнения для конденсации:
внутри горизонтальной трубы 347
на вертикальной поверхности 341
на внешней поверхности горизонтальной трубы 345
- Область действия логарифмического закона, турбулентное течение — 121—122
- Обобщенная жидкость, (неньютоновская) 170
- Обработка поверхности:
влияние на кипение в большом объеме:
критический тепловой поток 377
пузырьковое кипение 370—371, 373—374
- Образование тумана при конденсации 362—363
образование центров парообразования 362—363
перенасыщение 362
эффекты 363
- Объемный коэффициент массопереноса 10
- Объемный коэффициент теплоотдачи 10
- Однонаправленные течения:
диаграмма для F -фактора 44—45
диаграммы $\theta - NTU$ 45
теплообменники 7
однофазного теплоносителя 16
распределение температуры 10
- Однородная температура стенок, смешанная конвекция в каналах:
вертикальные каналы 316—317
горизонтальные каналы 319
- Однородный тепловой поток;

- критический тепловой поток в вертикальных трубах 387—389
горизонтальные и наклонные плоскости 285—287
смешанная конвекция в каналах;
вертикальные каналы 317—318
горизонтальные каналы 319—321
решения и зависимости для теплообмена при свободной конвекции:
вертикальные пластины 277—280
Однофазное течение жидкости:
в коллекторах, соплах и поворотах 159—165
в неподвижных слоях 152—154
около погруженных тел 135—140
в трубах и соединительных элементах трубопроводов 120—134
в трубных пучках 140—152
основные положения 98—120
Определяющая температура:
для ламинарного обтекания плоской пластины 115
для турбулентного обтекания плоской пластины 119—120
при расчете коэффициента трения в круглых трубах 125
Опускное течение в вертикальных трубах, режимы течения в газожидкостных потоках 183
Осаждение капель при кольцевом течении 193, 395
Особые точки, падение давления в двухфазном газожидкостном потоке при переходе через 193—195
Внезапные расширения 193—194
внезапные сужения 194
диафрагмы 195
изгибы 194—195
медленное изменение поперечного сечения 193
открытые клапаны 195
Отверждение, теплопроводность 227—228
Отношение истинных скоростей фаз (коэффициент скольжения):
в газожидкостном потоке 191—192
в потоке твердые частицы — газ 206
Отражатель солнечного излучения 465
Отражательная способность твердых поверхностей 457—458
измерение 458
характеристики 457
Отсос:
влияние на ламинарное обтекание плоской пластины 115
влияние при переходном обтекании плоской пластины 116
влияние при турбулентном обтекании плоской пластины 120
использование для интенсификации теплообмена 322, 326
Падение давления:
в вертикальных трубах при кипении с недогревом 383—384
при внезапном сужении:
двухфазные газожидкостные течения 194
однофазные течения 120
в газожидкостных потоках 189—197
в вертикальных кольцевых потоках 197
в кожухотрубных теплообменниках 191
обусловленное трение, в прямых каналах 189—191
в особых точках потока 193
при стратифицированном течении 199
в коллекторах, соплах и поворотах в кожухотрубчатых теплообменниках 160—165
в многофазных системах 175—182
в обрешеченных внутри трубах 324—325
в однофазных системах:
в каналах и соединениях 120—127, 129, 130, 182
в неподвижных слоях 152—154
основные понятия 98—105, 107—120
в трубных пучках 140, 143—144
при течении невязоупругих жидкостей 168, 172—175
в псевдоожженных слоях 154—155
Парообразование:
в бинарных системах 415—416
в перенасыщенном паре 362
гетерогенное, при кипении 366
гомогенное 365
устройства для интенсификации 423—424
Пассивные методы интенсификации теплообмена 321—322, 323—324
при вынужденной конвекции 323—324
при конденсации 360—362
при свободной конвекции 322
Перегрев жидкости в метастабильном состоянии 364
Перегретый пар, конденсация на вертикальной поверхности 340
Перекрестное течение:
три секции труб, один ход, несмешиваемое 61
три секции труб, три хода, несмешиваемое 64
четыре секции труб, два хода, перемешиваемое 66
четыре секции труб, четыре хода, несмешиваемое 65
Перемежающиеся потоки:
газ — жидкость, в горизонтальных и наклонных потоках 184—185
спаряющее течение в вертикальных трубах 196—198
спаряющее течение в горизонтальных трубах 200—201
Перемешиваемые слои, теплоотдача к перемешиваемым слоям 442—444
Перенасыщение, как причина образования тумана в конденсаторах:
описания 362
условия возникновения 363
Перенос твердых частиц в псевдоожженных слоях 155
Перенос тепла:
аналогия с массопереносом 87—90
излучением в твердых телах:
измерение 458
характеристики 455—458
в неоднородных системах 84—87
в кожухотрубных теплообменниках 85
в теплообменниках 87
при переходном обтекании плоской пластины 115—116
в псевдоожженных слоях, от жидкости к частицам 261—267
в трубах:
зависимости 234, 236, 237
 f — фактор Колбуна (ламинарный и турбулентный) 84—85
числа Нуссельта (ламинарные и турбулентные течения) 82
при турбулентном обтекании плоской пластины 119—120
Переносные свойства, турбулентные 72
Перетечи через перегородки в кожухотрубных теплообменниках: численные методы для оценочных расчетов 38
Переходный режим течения:
при нагреве или охлаждении излучением 512—513
при переносе тепла свободной конвекцией около вертикальных пластин 280
в теплообменниках 13
Периодические изменения температуры, теплопроводность 228—231
Пи-теорема, анализ размерностей 106
Плавление, теплопроводность 227—228
Пластичатые теплообменники:
приближенные коэффициенты теплопередачи 75
Пластины:
нестационарная теплопроводность 217—225
численные методы 223—225
решения в рядах 219
решения с использованием коэффициентов переноса теплоты 222—223
параллельные, ламинарный теплообмен при тении между пластинами 234—235
в гидродинамически развитом потоке 234
в термически и гидродинамически развивающемся 235
теплообмен излучением в неизолированном газе 502—504
теплообмен при охлаждении 80
характеристики, в качестве насадок для неподвижных слоев 152
Пленочное кипение:
при кипении в большом объеме 377—378
при кипении с вынужденной конвекцией на вертикальных поверхностях 400
вертикального стержня 400
вертикальной плоской пластины 400
при поперечном обтекании одиночного цилиндра 408
Пленочные теплообменники 11
Пленочные холодильники, приближенный коэффициент теплопередачи 75
Плоская пластина:
ламинарное обтекание 114—115
влияние архимедовых сил 115
влияние аэродинамического отсоса 115
влияние распределения плотности и вязкости 114
влияние числа Маха 115
влияние числа Прандтля 115
влияние температуры стенки 115
влияние распределения температуры на стенке 115
определяющая температура 115
переходное обтекание 115—116
аэродинамический отсос 116
влияние градиента давления 116
влияние турбулентности внешнего потока 116
шероховатость поверхности 116
теплообмен 116
турбулентное обтекание 119—120
влияние аэродинамического отсоса 120
влияние числа Маха 120
определяющая температура 119—120
теплообмен 120
Плоские оболочки, стационарная теплопроводность 215—217
Плоские ребра, эффективность 254—255
Плотность:
жидкость с малыми изменениями плотности 103
жидкость с постоянной плотностью 104
определение 105
Пневматическая транспортировка: 204—205
в вертикальных трубах 204
в горизонтальных трубах 204
в наклонных трубах 204—205
Поверхности с механическим удалением жидкости:
интенсификация теплообмена 326
в теплообменниках 12
Поверхность термоэкранов для интенсификации кипения 424
Повороты на 180° в теплообменниках 160
потери давления в 164
Поглотитель солнечного излучения 464
Поглощательная способность:
поверхностей 454
частиц 484—485
Поглощение теплового излучения:
газами 485—494
газовыми смесями 494
твердыми телами 460—461
Пограничный слой:
определение 110
на плоской пластине 114—120
над погруженными в жидкость телами 135
при теплоотдаче к плоской пластине:
ламинарный пограничный слой 242
турбулентный пограничный слой 242
при теплоотдаче смешанной конвекцией к погруженным в жидкость телам 312—313
теория 110—120
толщина (вытеснения, потерн импульса, потерн энергии, измерения плотности, потерн температуры) 112—113
уравнения 110—111
внутренней энергии 111
импульса 110
неразрывности 110
преобразования Леви — Лиза 111
решения уравнений 113—114
средней кинетической энергии 110
турбулентной кинетической энергии 111
над цилиндрами 137
Погруженные в жидкость тела:
однофазные течения вокруг 135—140
круглых цилиндров 138—140
искруглых цилиндров 140
режимы течения 135—137
силы, действующие 136—138
смешанная конвекция вокруг 312—315
инерционный режим течения 313
ползуший режим течения 313
поперечное обтекание 315
режим тонкого пограничного слоя 312
турбулентный режим течения 313
теплоотдача вынужденной конвекцией однофазной среды к;

- плоским пластнам 233—235
одноточным телам 236
теплоотдача свободной конвекцией 274—295
вертикальные и наклонные цилиндры 290—291
вертикальные конуса 291
вертикальные пластины 274—283
горизонтальные и наклонные поверхности 283—287
горизонтальные цилиндры 287—290
каналы с открытыми концами 287
тела другой формы 293
обобщенные решения 293—295
сферы 291—293
трубы, теплоотдача к трубам, в псевдоожженных слоях 450—451
- Подавление пузырькового кипения 384—385
Подъемная сила:
при обтекании погруженных в жидкость тел 138
при течения в трубных пучках 151
- Поканальный анализ, критический тепловой поток в пучках стержней 393—394
- Полимеры:
неньютоновский теплообмен 327—336
температура деградации 327
физические свойства 328—330
коэффициент динамической вязкости 328—330
- Полости:
горизонтальные цилиндры 305
кольцевые, теплообмен свободной конвекцией в:
вертикальных 305
горизонтальных 305
концентрические сферы 307
наклонные полости, теплообмен свободной конвекцией 307—309
большое отношение сторон 307—308
средние отношения сторон 308—309
обогреваемые снизу, критическое число Релея 296—299
прямоугольные, обогреваемые и охлаждаемые с боков, теплообмен свободной конвекцией 300—305
с очень большим отношением сторон 300—302
с отношением сторон, близким к единице 303—304
коэффициент теплопроводности 328
удельная теплоемкость 329
- Поляризация излучения 462—464
- Поперечное обтекание:
кипение, горизонтальные трубы и трубные пучки 404—408
теплообменники:
определение 7
падение давления в газожидкостных потоках 191
поправка на разность температур (F -поправка) и θ — NTU -диаграмма для различных конфигураций 56—57
решения для теплоотдачи 30
смешанная свободная и вынужденная конвекция 315
- Поправочный множитель Аккермана в конденсации 353
- Пористость в неподвижных слоях, определение 152
- Пористые поверхности, интенсификация теплообмена при кипении 423
- Пористые структуры:
коэффициенты потерь 130—131
теплообмен при свободной конвекции 309—312
- Порошки:
классификация типов, псевдоожженные слои 150
теплопроводность в вакууме 71
- Постоянная Больцмана 453
Планка — 452
Стефана — Больцмана 451—452
- Правильно Пеннера, Хоттеля для поглощения излучения газами 489
- Приближение Буссинеско:
при влиянии силы тяжести 104
при свободной конвекции 274
- Приведенная скорость в многофазном течении 177
- Принцип взаимности Гельмгольца в радиационном теплообмене 458
- Приспособления для интенсификации теплообмена:
при конденсации 361
при теплообмене в однофазной среде 321—327
Программа для расчетов радиационного теплообмена, метод Монте — Карло 478—480
- Пропускательная способность твердых тел:
измерение 458
определение 457
- Пропускательная способность пристенного слоя 510
- Противоположно направленные свободная и вынужденная конвекция:
в вертикальных трубах 319
около погруженных в жидкость тел 315
- Противоток:
газожидкостный в вертикальных каналах 198—199
критический тепловой поток 396—397
теплообменник 7
температурная характеристика для противоточного течения в однофазном потоке 10
 θ — NTU — диаграммы 44—45, 47—55
- Противоточные конденсаторы, явление захлебывания 343—344
- Противоточные теплообменники с поперечным потоком — 8
решение 32—33
- Прямоугольные:
решение в замкнутом виде для средней длины луча 495
таблицы значений средних длин луча 496, 497
угловые коэффициенты в радиационном теплообмене для противоположащих и смежных 468—469
- Прямоугольные полости, теплообмен при свободной конвекции:
нагреваемые и охлаждаемые с боков 300—305
нагреваемые снизу 298—300
- Псевдоожженные слои:
использование для интенсификации теплообмена 326
однофазное течение жидкости и падение давления 154—159
диаграмма состояния 155
локальная структура 156—159
минимальная скорость псевдоожжения 155
падение давления 154—155
типы псевдоожжения 154
перенос теплоты от слоя к погруженной трубе 450—451
перенос теплоты от слоя к стенке 445—450
конвективная составляющая, связанная с движением частиц 447
конвективная составляющая, связанная с межфазным теплообменом 447—448
радиационная составляющая 448
расчетные формулы 448—450
теплоотдача от жидкости к частице 261—267
низкие числа Пекле 265—266
основные понятия 261—263
рекомендуемые уравнения 263
- Пузыри:
в газожидкостном потоке:
вертикальные трубы 183
горизонтальные трубы 184
в жидкости 195—196
рост скорости газовых пузырьков 195—196
в псевдоожженных слоях 156—159
пространственное распределение 158—159
одиночные пузыри 156—157
слияние 157—158
при кипении бинарных смесей:
образование 413
рост пузырей 414—415
при кипении отдельных компонентов:
зарождение 364—367
отрыв и частота 368—369
рост 367—368
- Пузырьковое кипение:
в горизонтальных трубах 405
интенсификация 424—428
на внешней стороне труб и трубных пучков при поперечном обтекании 406—410
при вынужденной конвекции бинарной и многокомпонентной смесей 419
при кипении в большом объеме:
бинарных и многокомпонентных смесей 415—417
влияние давления 373
влияние недогрева жидкости 374
влияние размера и ориентации поверхности 374
влияние растворенных газов 374
влияние смачиваемости поверхности 374
влияние ускорения силы тяжести 374
влияние условий на поверхности 373
гистерезис 374
зависимости 370—373
при теплообмене вынужденной конвекцией в вертикальных трубах 379—386
- Пузырьковое течение:
модель потока дрейфа в вертикальном потоке 195—196
области существования:
в вертикальном течении 183—184
в горизонтальном течении 184—185
в кожухотрубных теплообменниках 185
в наклонных трубах 185
в системах с фазовым прекращением 186—187
- Пульсации скорости, турбулентное течение в трубах 123
- Пучки стержней, критический тепловой поток при течениях 397
- Пучки трубные с шероховатой поверхностью, влияние шероховатости на число Эйлера 150—151
- Пучки трубные гладкие:
кипение на внешней стороне труб 408—410
коэффициент теплоотдачи 406—407
критический тепловой поток 407—408
конденсация на вертикальных пучках 344—345
конденсация на горизонтальных пучках 345—347
однофазный перенос тепла 247—248
к единичным рядам труб 247
к жидким металлам 337—338
к трубным пучкам 248
однофазное течение и падение давления 140—149
описание 140—142
сопротивление и падение давления 142—149
числа Струхала 151—152
- Пучки трубные, оребренные:
однофазная теплоотдача 251—259
зависимости для теплоотдачи, трубы с высокими ребрами 256
зависимости для теплоотдачи, трубы с низкими ребрами 257
сравнение экспериментальных данных и зависимостей 257—259
эффективность ребер 251—255
однофазное течение и падение давления 149—151
зависимости для шахматных пучков с кольцевыми ребрами 149—151
зависимости для шахматных пучков со спиральными ребрами 150
- Пучки труб, расположенные в шахматном порядке:
зависимости для теплоотдачи 248, 251, 253, 256—259
оребрены трубы 253, 256—259
прямые трубы 248—251
коэффициенты сопротивления для труб 146—147
падение давления, простые трубы 146—147
поправочный коэффициент для расчета общего количества трубных рядов 147—149
падение давления, оребренные трубы 149—150
- Равновесная поверхность раздела фаз:
бинарные и многокомпонентные смеси 411—412
введение 15—16
метабильная и стабильная 304
- Радиаторная батарея 513—514
- Радиационные свойства:
газов 484—494
поверхностей:
измерение 455—457, 458—459
определение 454
степени черноты канала 509

- частицы 501—502
 Радиационный теплообменник 513
 Радиометры, применения для измерений радиационных свойств газа 485—486
 Развивающееся течение в трубах:
 гидродинамический начальный участок 127—128
 однофазный поток и падение давления 127—129
 Распределение скорости:
 влияние на однофазный поток и падение давления 128—129
 возмущения распределения скорости во входе сечения, при течении в круглых трубах 121
 Распределение температур:
 в неподвижных слоях:
 в условиях отсутствия течения через слой 433—434, 439, 440
 с потоком, текущим через слой 435—436
 нестационарная теплопроводность 217—227
 при конденсации 339
 решение в рядах 217—222
 Расслоенное течение:
 как источник кризиса теплоотдачи при теплообмене испарением 403—405
 в горизонтальных трубах 405
 в змеевиках 405—407
 в изгибах 404—406
 расчеты в горизонтальных и наклонных трубах 199—200
 области существования:
 в горизонтальных трубах 184
 в кожухотрубных теплообменниках 185—186
 в наклонных трубах 185
 при конденсации 187
 Расширения в трубах:
 течение двухфазной среды и падение давления в 193—194
 внезапное расширение 193—194
 медленное расширение 193
 течение однофазной среды и падение давления 132—135
 внезапные расширения 132—134
 Расчет Линхарда и Дира критических тепловых потоков при кипении в большом объеме 375
 Регенеративные теплообменники 8—9
 периодическая работа 13
 Режимы теплообмена:
 при кипении в вертикальной трубе 379
 однофазные, в трубах 233
 при свободной и вынужденной однофазной конвекции 315—316
 Режимы течения:
 влияние свободной конвекции на режимы течения в горизонтальных трубах 124—125
 газ — твердые частицы 204—205
 газожидкостные потоки 182—187
 в вертикальных трубах 183—184
 в горизонтальных трубах 185
 в кожухотрубных теплообменниках 185—186
 в наклонных трубах 195
 в системах с фазовыми превращениями 186—187
 в неподвижных слоях 435
 при конденсации несмешивающихся жидкостей 355
 при однофазном течении в пучках труб 140—142
 при однофазном течении вокруг погруженных тел:
 вокруг круглых цилиндров 135—136
 пограничный слой 135
 в псевдооживленных слоях 154
 при свободной конвекции в полостях 295—296
 при смешанной конвекции в каналах:
 круглые трубы 315—316
 прямоугольные каналы 320—321
 при смешанной конвекции вокруг погруженных в жидкость тел 312—315
 Резиноподобная жидкость Лоджа (неньютоновская) — 172
 Решения в рядах, одномерная нестационарная теплопроводность 217—227
 Рефлектометр с нагреваемой емкостью 458
 Свободная конвекция:
 влияние на коэффициент трения при течении в круглой трубе 124—125
 влияние на однофазное течение в вертикальных трубах 128
 влияние на теплоотдачу при ламинарном течении в каналах 236
 в слоях и полостях 295—312
 интенсификация теплоотдачи
 активные системы 322—323
 пассивные системы 322
 область существования при течении в горизонтальных круглых трубах, диаграммы Метаяса и Эккерта 124
 теплоотдача от погруженных в жидкость тел 274—295
 вертикальные и наклонные цилиндры 290—291
 вертикальные конуса 291
 вертикальные поверхности 274—283
 горизонтальные цилиндры 287—290
 горизонтальные и наклонные поверхности 283—287
 каналы с открытыми концами 287
 обобщенные решения 295
 сферы 291—293
 тела других форм 293—295
 Свободно-молекулярное течение, максимальные касательные напряжения, тепловой поток и поток массы 71
 Сдвиговые течения, неньютоновские жидкости 166—169
 Сжимаемые среды:
 в трубах 129—130
 адиабатическое течение Фанно 130
 основные уравнения 129—130
 влияние низкой плотности 130
 вязкое течение с подводом тепла 130
 Сила сопротивления:
 погруженные в жидкость тела 136—138
 труба в пучке труб 142—143
 Скорость звука:
 в двухфазной газожидкостной среде 202
 в идеальном газе 103
 Скорость сдвига, неньютоновская жидкость 166
 Слияние пузырьков как механизм возникновения критического теплового потока 394
 Слияние (коалесценция) пузырьков в псевдооживленных слоях 157—158
 Сложные методы интенсификации теплообмена 327
 Слой жидкости, теплоотдача свободной конвекцией 295—296
 Смазываемость поверхности, влияние на кипение в большом объеме 374
 Смеси газов, радиационные свойства 494
 Смешанная конвекция, возникновение в горизонтальных круглых трубах, диаграммы Метаяса и Эккерта 124
 Снарядное (пробковое) течение:
 в вертикальных каналах 196
 скорость подъема газовых пузырей 196
 возникновение критического теплового потока 394
 гидродинамика 200—201
 области существования:
 в вертикальных потоках 183
 в горизонтальных потоках 184—185
 в наклонных трубах 185
 в системах с фазовыми превращениями 186—187
 в псевдооживленных слоях 154
 Совместный кондуктивный, конвективный и радиационный перенос 511—518
 Совместный тепло- и массообмен:
 в теплообменниках 9, 17—18
 при испарении бинарных и многокомпонентных смесей 421—422
 при конденсации смесей 90—91
 при однофазной свободной конвекции 282—283
 при сушке 90
 Соотношение Блазиуса для коэффициента трения 121
 Соотношение для потоков в теплообменниках 16—18
 Соотношение Зива для истинного объемного паросодержания 348
 Соотношение Локарта — Мартинелли:
 для градиента давления, обусловленного трением 189—190
 для истинного объемного газосодержания 192
 Соотношение Людвига — Тилмана для трения в пограничном слое 119
 Соотношение Макдональда для падения давления в неподвижных слоях 154
 Соотношение Мартинелли и Боултера для смешанной конвекции 316
 Соотношение Мартинелли и Нельсона:
 для градиента давления, обусловленного трением 190—191
 для истинного объемного паросодержания 192
 Соотношение между коэффициентами переноса тепла и импульса 22
 Соотношение Мостинского для пузырькового кипения 372
 Соотношение, учитывающее влияние естественной конвекции на коэффициент сопротивления 125
 Соотношение Хагена — Рубена между электрической и оптической константами 461
 Соотношение Хаузена для развивающегося ламинарного течения 234
 Соотношение Хэндиля и Хеса для падения давления в неподвижных слоях 153
 Соотношения Чизхолма:
 для потери давления за счет трения в прямых каналах 189
 для потери давления в особых точках 195
 Сопла:
 в кожухотрубных теплообменниках:
 изменение давления при переходе через входное сопло 160
 изменение давления при переходе через выходное сопло 161
 описание 159—160
 коэффициенты потерь 133—134
 ударяющиеся струи, теплообмен 267—274
 одиночные сопла 268—269
 ряды сопел 269—274
 Сопряженные температурные поля при нестационарной теплопроводности 226—227
 Спектральная излучательная способность газов 487
 Спектральная поглощательная способность:
 газов 487
 металлов при комнатной температуре 462
 Спектры поглощения газов 486, 493
 Спиральные катушки:
 кризис теплоотдачи при испарении в катушках 403—404
 однофазная теплоотдача 325—326
 однофазное течение и падение давления 135
 Спиральный теплообменник, приближенные коэффициенты теплопередачи 75
 Средняя длина луча в радиационном теплообмене:
 таблицы среднегеометрических длин луча 496—497
 теория 495
 Средняя логарифмическая разность температур 23—24, 73, 234
 Средняя объемная концентрация фазы 177
 Средняя скорость фазы в многофазных потоках 177
 Средняя эквивалентная температура поверхности при радиационно-конвективном теплообмене 512
 Степенной закон для жидкостей (неньютоновских) 170—171
 теплообмен при вынужденной конвекции 327—336
 теплоперенос свободной конвекцией к телам, погруженным в жидкость 293—295
 Сток в излучении:
 теплообмен между источником и стоком 473
 теплообмен между источником, стоком и адиабатной поверхностью 473—475
 Сушка, совместный тепло- и массообмен 90
 Сферические оболочки:
 стационарная теплопроводность 215—217
 Сферы:
 концентрические перенос тепла свободной конвекцией 307
 как насадки для неподвижных слоев 152—153
 коэффициент сопротивления 136
 неподвижные слои из сфер, перенос тепла 259—267, 427—435, 435—440
 нестационарная теплопроводность 218—225
 решения в рядах 219—222
 решения с использованием коэффициента переноса теплоты 222—223
 численные методы 223—225
 однофазный перенос тепла вынужденной

- конвекцией 246—247, 259
перенос тепла свободной конвекцией 293—295
перенос тепла смешанной конвекцией 312—313, 315
в вертикальном потоке 312—313
в поперечном потоке 315
теплообмен слов движущихся, перемещающихся и вибрирующих 442—445
- Твердые тела как составная часть многофазных потоков 175**
Текущие среды:
идеальные в тепловом отношении 103
идеальный газ 103
с малыми изменениями плотности 103
модели 103—104
с постоянной плотностью 104
Температура деградации полимеров 327
Температура насыщения 364
Температура стенки:
влияние при ламинарном обтекании плоской пластины 115
влияние распределения при ламинарном обтекании плоской пластины 115
Тензор напряжений:
в неньютоновских жидкостях 166
в однофазном потоке жидкости 99
в турбулентном потоке жидкости 108
Теория Зубера для критического теплового потока при кипении в большом объеме 375
Теория подобия 105—106
Теория сплошной среды для неньютоновских жидкостей 170—172
модель с восемью константами Олдройда 172
модель Максвелла 170
модель Уайта — Метцера 171
резиноподобная жидкость Лоджа 172
Теория суммарной мощности для критических тепловых потоков при течениях с кипением 392
Тепловое излучение, твердые тела 454—457
измерения 455—457
характеристики 454—455
Тепловые утечки в кожухотрубных конструкциях типа ТЕМА F 56
Тепло- и массообмен:
в теплообменниках 9, 16—17
зависимости 17—18
сложный:
при конденсации 90—92
при однофазной конвекции 282—283
при сушке 90
Теплообмен в закризисной области:
зависимости в вертикальных трубах 400—402
при отклонении от термодинамического равновесия 401—402
полумпирические 401—402
эмпирические зависимости 400—401
Теплообмен излучением:
излучение неизотермического газа 501—510
геометрические соображения 502—503
излучение молекулярного газа 508—510
спектральные характеристики и масштабные приближения 507—508
уравнения переноса для 501—502
формулировка в дифференциальном виде 504—507
перенос излучения между зеркальными и не полностью диффузными поверхностями 477—484
алгоритмы метода Монте — Карло 478—480
газоходы с зеркальными стенками 480—482
газоходы с шероховатыми стенками 484
зеркальные и не полностью диффузные поверхности 477—478
модель поверхности 482—484
понятие зеркального изображения 478
перенос излучения между полностью диффузными поверхностями 466—477
адиабатные поверхности 471
газоходы с диффузными стенками 475—477
некоторые рабочие соотношения 473—475
угловые коэффициенты 466—469
формулировки проблемы расчета потоков падающего и эффективного излучения 469—471
угловые коэффициенты 466—469
- перенос излучения между поверхностями и изотермическим газом 494—501
с абсолютно-черной стенкой 494—495
метод Монте — Карло 500—501
понятие средней длины луча 495—497
расчет 496—500
радиационные свойства газа, 452—454, 484—494
газовых смесей 494
излучение черного тела 452—454
измерение 485—486
интенсивность излучения и плотность теплового потока 451—452
молекулярного 490—494
определение спектральных свойств, свойства полос и интегральных свойств 487—490
уравнение переноса 484—485
физические процессы 486—487
радиационные характеристики поверхностей 454—466
поглощательные и излучательные характеристики 454—457
поляризация 462—464
радиационные характеристики при тепловых расчетах 460—462
характеристики отражения и пропускания 457—458
электромагнитная теория и соотношение Френеля 458—460
совместно с теплопроводностью и конвекцией 511—518
анализ термических цепей 511—513
вокруг полых цилиндров 514—516
излучение, связанное с нестационарным нагревом или охлаждением 512—513
при конвекции молекулярных газов 516—518
в радиационных теплообменниках 513
от радиаторной батареи 513—514
Теплообменник типа ТЕМА Г, перетечки теплоты 56
Теплообменники:
метод F-корректировки:
диаграммы F-фактора 45—66
описание 24—26, 33, 34
метод θ -диаграмм 44—46
описание 25, 33, 34, 41
метод $P-NTU$ 25—26
описание 7—13
взаимодействие между потоками 9—10
виды оборудования 12—13
нестационарный режим работы 13
режимы изменения температуры 10—11
типы конфигураций течения 7—9
определения и количественные соотношения 13—32
взаимопроникающие среды 27—28
зависимости для коэффициентов переноса 18—22
соотношения для плотностей потоков 16—18
термодинамические параметры 14—16
уравнение баланса 22—27
уравнения в частных производных 28—32
падение давления в коллекторах, соплах и поворотных камерах — 159—165
падение давления газожидкостной среды 185—186
радиационные теплообменники 513
типа «труба в трубе» коэффициенты теплопередачи 74
Теплоотдача смешанной конвекцией:
в каналах:
вертикальных 316—319
горизонтальных 319—321
при ламинарном течении (совпадающая по направлению свободная и вынужденная конвекция) 316—317
при ламинарном течении (противоположная по направлению свободная и вынужденная конвекция) 318—319
при турбулентной конвекции 319
вокруг погруженных в жидкость тел 312—315
горизонтальные пластины (поперечное обтекание) 314—315
противоположное значение сил свободной и вынужденной конвекции 313—314
режим инерционного течения (совпадающие по направлению свободная и вынужденная конвекция) 313
режим ползущего течения (совпадаю-
- щие по направлению свободная и вынужденная конвекция) 313
течение в тонком ламинарном пограничном (совпадающие по направлению свободная и вынужденная конвекция) 312—313
Теплопроводность:
нестационарная теплопроводность при ступенчатом изменении температуры 217—227
многомерные системы 225—227
одномерные системы 217—225
основные уравнения 214—215
при периодическом изменении температуры 228—231
при плавлении и затвердевании 227—228
полимеров 328
стационарная теплопроводность 215—217
в плоских, цилиндрических и сферических оболочках без внутренних источников тепла 215—216
в телах с внутренними источниками тепла 216—217
термическое контактное сопротивление 231—233
Термодинамическая поверхность при теплообмене излучением 491
Течение без сдвига, неньютоновские жидкости 169—170
Течение, вызванное силами плавучести при теплообмене свободной конвекцией 287
Течение многофазной среды и падение давления:
основные понятия 175—182
классификация многофазных течений 175—176
конструкционные параметры 176—177
модели потока дрейфа 180—182
уравнения сохранения 177—180
течение газ — твердые частицы 204—210
падение давления 205, 206, 209
принципы пневматической транспортировки 204
режимы течения 204—205
течение жидкость — твердые частицы 210—214
падение давления 212—214
режимы течения 210—214
Течение твердые частицы — газ:
отношение истинных скоростей фаз 206
падение давления при 205, 206, 209
пневматическая транспортировка:
в вертикальных трубах 204
в горизонтальных трубах 204
в наклонных трубах 204
режимы течения 204—205
скорость свободного падения частицы 206
Течение Фанно (адиабатное) 130
Тефлон, интенсификация теплообмена:
при кипении 423
при конденсации 360
Толщины пограничных слоев (вытеснения, потери импульса, энергии, плотности, температуры) 112—113
Трехфазные течения:
газ — жидкость — жидкость 176
газ — жидкость — твердое тело 176
классификация 176
твердые частицы — жидкость — жидкость 176
Тройные смеси, диффузия и массоперенос 89—90
Трехпараметрическое соотношение, кольцевые газожидкостные потоки 197
Трубчатый реактор, неоднородный тепло- и массоперенос 87
Трубы с внутренним обременением, теплообмен и падение давления 321, 324—325
Трубы с высоким обременением, зависимости для однофазного теплообмена 256
Трубы с концами, срезаемыми под углом, для увеличения скорости захлебывания при противоточной конденсации 344
Трубы круглые:
двухфазное (газ — жидкость) течение 182—204
режимы течения 182—186
интенсификация теплообмена 321—327
внутреннее обременение 324—325
кипение бинарных и многокомпонентных смесей в 419—423
вынужденная конвекция (включая явления массопереноса) 419—422
критический тепловой поток 422—423
пузырьковое кипение 419
кипение;

- в вертикальных трубах 378—402
в горизонтальных трубах 402—406
ламнарная теплоотдача 234
в гидродинамически развивающихся течениях 234
в термически и гидродинамически развитых течениях 234
однофазные течения жидкости и падение давления в полностью развитых потоках 120—126
влияние добавок 126
влияние свободной конвекции 124—125
влияние температурной зависимости свойств жидкости 125
коэффициент трения 120
пневматическая транспортировка 204
радиационный перенос тепла вдоль труб 475—477
смешанная свободная и вынужденная конвекция 315—321
в вертикальных трубах 316—319
в горизонтальных трубах 319—321
теплоотдача свободной конвекцией от наружной стороны 287—291
вертикальных и наклонных труб 290—291
горизонтальных труб 287—290
теплообмен жидких металлов в трубах 337
теплообмен к трубам в псевдооживленных слоях 450—451
турбулентный теплообмен 236—237
турбулентные характеристики 122—124
шероховатые поверхности, радиационный перенос вдоль 484
- Трубы некруглые:**
ламнарное течение 125—126
турбулентное течение 126—127
- Трубы с низким оребрением:**
использование для интенсификации кипения 424
соотношения для однофазного теплопереноса при течении газа 257
- Трубы, течение однофазной жидкости и падение давления 120—125**
изогнутые 131
круглые полностью развитое течение 120—127
некруглые полностью развитое течение 125—127
нестационарное течение 130
потери в узлах трубопроводов 130—135
развивающиеся течения 127—129
сжимаемое течение 129—130
- Турбулентная вязкость:**
длина пути перемешивания 123
определение 123
- Турбулентная энергия 111**
диссипация 111, 113
производство 111, 113
- Турбулентное течение:**
при конденсации, на вертикальных поверхностях 341—342, 343
в круглых трубах 122—124
ламинаризация 109
моделирование 108—109
в некруглых трубах 125—127
в объемах, численный расчет 37
в пограничных слоях 110
неньютоновских жидкостей 174—175
однофазный теплообмен в трубах 236—241
гладкие трубы 236—237
жидкие металлы 337
интенсификация 324—327
кольцевые каналы 237, 238—241
основные положения 107
перенос тепла свободной конвекцией около вертикальных поверхностей 276
совместный перенос тепла излучением и конвекцией 516—518
теплообмен при смешанной конвекции в каналах 319, 315
уравнения сохранения 107—108
осреднение 108
- Турбулентность:**
влияние при пленочной конденсации 342—343
интегральный масштаб 112—113
источник 109
ламинаризация 109
моделирование 108—109
ограничение феноменологических законов переноса 72
характеристики при течении в круглой трубе 122—124
- Турбулентные переносные свойства 72**
Турбулентные пограничные слои:
дифференциальные методы расчета 118
интегральные методы расчета 118
модели, не использующие дифференциальные уравнения 118
модели с одним уравнением 119
модели с двумя уравнениями 119
модели, в которых используется уравнение для напряжений 119
моделирование крупномасштабной турбулентности 119
универсальные законы 116—118
- Угловые коэффициенты в радиационном теплообмене между диффузными стенками 466—469**
Удельная внутренняя энергия 14
Удельная теплоемкость 15
в полимерах 329
Удельная энтальпия 14
Уменьшение сопротивления 174
влияние на теплоотдачу 336—337
Универсальный закон дефекта скорости 121
Универсальные законы для турбулентных пограничных слоев 116—118
— аэродинамического следа Коулса 117
— дефекта скорости Карлюна 117
— стенки 117
таблица 117
универсальный профиль скорости 118
- Уравнения баланса 22—27**
дифференциальная форма 27—28
для энтальпии, температуры и концентрации 27—28
решение и замыкание 28
для изменений энтальпии, температуры и концентрации 22—23
число единиц переноса (Т) и эффективности 24—27
- Уравнение Беренсона для пленочного кипения на горизонтальной поверхности в большом объеме 377**
Уравнение Бернулли 140
Уравнение Блейка — Кармона — Козени 153
Уравнение Бромли для пленочного кипения на поверхности горизонтальных цилиндров 378
Уравнение Диттуса — Болтера для теплообмена при однофазной вынужденной конвекции 381
Уравнение импульсов:
газожидкостные течения 187—189
гомогенная модель 187
модель раздельного течения 188
дифференциальная форма для однофазного течения 102—103
интегральная форма для однофазного течения 99
многофазные потоки:
гомогенное течение 178
раздельное течение 179
неньютоновские жидкости 330
пограничный слой 110
течение сжимаемой среды в каналах 129
турбулентный поток 107
- Уравнение Кармона для коэффициента трения на полностью шероховатой поверхности 121**
Уравнение Клаузиуса — Клапейрона:
при гомогенной нуклеации 364
при испарении 365
Уравнение Колебука — Уайта для коэффициента трения в круглой шероховатой трубе 121
Уравнение конечных разностей:
для расчетов полей течения 38—39
для теплообменников 38
Уравнение Ле Фебра для переноса тепла свободной конвекцией 275
Уравнение Максвелла для электромагнитного излучения 458—459
Уравнение Навье — Стокса 102
Уравнение неразрывности:
для газожидкостных потоков 187—188
дифференциальная форма для однофазного течения 102—103
интегральная форма для однофазного течения 99
для многофазных потоков:
гомогенная модель течения 178
раздельная модель течения 179
для пограничных слоев 110
для течения сжимаемой среды в каналах 129
- для турбулентного течения 107
приложения к расчетам теплообменников 31
- Уравнение сохранения:**
в дифференциальной форме 102—103
в интегральной форме 99
для газожидкостных потоков 187—189
гомогенная модель 187—188
модель раздельного течения 188—189
для компонент смеси 16
для многофазных течений 178—180
гомогенная модель 178—179
модель раздельного течения 179—180
для течений в каналах 104
для турбулентных потоков 107
Уравнение Стефана — Максвелла для диффузии 88
Уравнение Уэнтца и Тодоса для падения давления в неподвижном слое 153
Уравнение Хика для падения давления в неподвижных слоях 153
Уравнение Шлюндера:
для развивающегося ламинарного слоя 234
для теплопроводности газа в плотноупакованных слоях 441
Уравнение Эргунда для падения давления в неподвижных слоях 153
Уравнение энергии:
в газожидкостном течении 187—189
гомогенное течение 187
раздельное течение 188
в многофазных потоках:
гомогенное течение 178
раздельное течение 179
в турбулентном потоке 107
неньютоновские жидкости 330
пограничный слой 110
течение сжимаемой среды в каналах 129
дифференциальная форма для однофазного течения 102—103
интегральная форма для однофазного течения 99
- Ускорение силы тяжести, влияние при кипении в большом объеме 374**
Устойчивое равновесие пара и жидкости 364
- Фазовое равновесие:**
в бинарных смесях 411—412
в многокомпонентных смесях 412—413
- Физические свойства:**
изменение с температурой:
влияние на коэффициент трения при течении в круглых трубах 125
влияние на обтекание пучков труб 148—149
влияние на обтекание цилиндров 139
влияние на теплообмен около плоских поверхностей 242—244
влияние на теплообмен при ламинарном течении в каналах 236
влияние на теплообмен при турбулентном течении в каналах 236
в полимерах 328—330
природа изменений 104—105
влияние при развивающемся течении 128
- Формула Сатерленда для изменения вязкости с температурой 104**
Формула Чепмена — Рубенкина для изменения вязкости с температурой 104
Формулировка задачи радиационного теплообмена 469—471
для стенок полости, заполненной газом 496—498
Форсунки в теплообменниках 11—12
Функции вискозиметрические (неньютоновское течение), методы определения 168
- Хладон-12, таблица критических тепловых потоков для течения в вертикальной трубе 397**
Хромоникелевая сталь (инконель), спектральные характеристики отражательной способности окисленной поверхности 465
- Центры парообразования:**
критический размер для парообразования:
при кипении в большом объеме 370
при кипении недогретой жидкости в условиях вынужденной конвекции 382
определение размера активных центров 367
размер в бинарных смесях 413—414

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к русскому изданию	3
Предисловие	4
Используемые обозначения	5

ЧАСТЬ 1

ТЕОРИЯ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

Раздел 1.1. Описание типов теплообменников. Д. Б. Сполдинг	7
---	---

1.1.1. Структура главы	7
1.1.2. Варианты схем движения теплоносителей	7
1.1.3. Типы взаимодействий между потоками	9
1.1.4. Типичные варианты изменения температур теплоносителей	10
1.1.5. Типы поверхностей раздела между теплоносителями	11
1.1.6. Виды теплообменного оборудования	12
1.1.7. Нестационарная работа теплообменников	13

Раздел 1.2. Определения и количественные соотношения для расчета теплообменников. Д. Б. Сполдинг	13
---	----

1.2.1. Введение	13
1.2.2. Термодинамические параметры (краткие сведения)	13
1.2.3. Соотношения для плотностей тепловых потоков и потоков массы	14
1.2.4. Зависимости для расчета коэффициента теплоотдачи	16
1.2.5. Уравнения балансов, описывающие теплообменные аппараты в целом	18
1.2.6. Дифференциальные уравнения, описывающие течения теплоносителей	22
1.2.7. Дифференциальные уравнения в частных производных для описания течений взаимопроникающих сред	27

Раздел 1.3. Аналитические решения уравнений, описывающих процессы в теплообменниках. Д. Б. Сполдинг	28
--	----

1.3.1. Решения для однородного коэффициента теплопередачи в теплообменниках без фазовых превращений	32
1.3.2. Другие аналитические решения	34

Раздел 1.4. Методы численного решения уравнений для теплообменников. Д. Б. Сполдинг	35
---	----

1.4.1. Случаи заданного поля скоростей	35
1.4.2. Случаи, когда поле скоростей подлежит расчету	38
1.4.3. Специальные приложения численных методов	39

Раздел 1.5. Диаграммы для определения средней разности температур при типичных для промышленных теплообменников схемах движения теплоносителей. Дж. Таборек	41
---	----

1.5.1. Введение	41
1.5.2. F - и θ -диаграммы для кожухотрубных теплообменников	43
1.5.3. F - и θ -диаграммы для теплообменников с перекрестным течением теплоносителей	57

ЧАСТЬ 2

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ТЕПЛООБМЕН

Предисловие. Ф. В. Шмидт	69
------------------------------------	----

Раздел 2.1. Основы теории тепло- и массообмена	69
--	----

2.1.1. Введение. Е. У. Шлюндер	69
2.1.2. Физические механизмы явлений переноса. Е. У. Шлюндер	70
2.1.3. Применение методов расчета тепло- и массообмена в инженерной практике. Е. У. Шлюндер	73
2.1.4. Способы представления данных по тепло- и массообмену. Е. У. Шлюндер	80
2.1.5. Тепло- и массообмен в однородных и неоднородных системах. Е. У. Шлюндер	84
2.1.6. Аналогия между процессами переноса теплоты и массы и границы ее применимости. Е. У. Шлюндер	87
2.1.7. Совместный тепло- и массообмен. Е. У. Шлюндер	90
2.1.8. Современное состояние исследований тепло- и массообмена. Е. У. Шлюндер	92

Раздел 2.2. Течение однофазной жидкости	98
---	----

2.2.1. Введение и основные положения. К. Герстен	98
2.2.2. Каналы. К. Герстен	120
2.2.3. Тела, погруженные в жидкость. К. Герстен	133
2.2.4. Пучки гладких и оребренных труб. А. Жукаускас, Р. Улинскас	140
2.2.5. Неподвижные слои. П. Дж. Хегс	152
2.2.6. Псевдооживленные слои. О. Молерус	154
2.2.7. Коллекторы, патрубки и поворотные камеры. Дж. А. Р. Генри	159
2.2.8. Неньютоновские жидкости. С. Армстронг	165

Раздел 2.3. Течения и потери давления многофазных сред	175
--	-----

2.3.1. Введение и основные понятия. Дж. Ф. Хьюитт	175
2.3.2. Газожидкостные потоки. Дж. Ф. Хьюитт	182
2.3.3. Потоки газа с частицами. М. Вебер, У. Стегмайер	204
2.3.4. Потоки жидкости с частицами. М. Вебер, У. Стегмайер	210

Раздел 2.4. Теплопроводность	214	Раздел 2.7. Кипение и испарение	364
2.4.1. Основные уравнения. Х. Мартин	214	2.7.1. Кипение однокомпонентных жидкостей. Основные процессы. Дж. Г. Колльер	364
2.4.2. Стационарная теплопроводность. Х. Мартин	215	2.7.2. Кипение в большом объеме. Дж. Г. Колльер	369
2.4.3. Нестационарный перенос теплоты при скачке температуры. Х. Мартин	217	2.7.3. Кипение в вертикальных трубах. Дж. Г. Колльер	378
2.4.4. Плавление и отвердевание. Х. Мартин	227	2.7.4. Кипение при вынужденной конвекции в горизонтальных трубах. Дж. Г. Колльер	402
2.4.5. Периодические изменения температуры. Х. Мартин	228	2.7.5. Кипение на трубах и в пучках труб. Дж. Г. Колльер	406
2.4.6. Термическое контактное сопротивление. Т. Ф. Ирвайн мл	231	2.7.6. Кипение бинарных и многокомпонентных смесей. Основные процессы. Дж. Г. Колльер	410
Раздел 2.5. Теплообмен при однофазной конвекции	233	2.7.7. Кипение бинарных и многокомпонентных смесей. Кипение в большом объеме. Дж. Г. Колльер	415
2.5.1. Вынужденная конвекция в каналах. В. Гнилинский	233	2.7.8. Кипение бинарных и многокомпонентных смесей. Кипение при вынужденной конвекции. Дж. Г. Колльер	419
2.5.2. Вынужденная конвекция при обтекании погруженных в жидкость тел. В. Гнилинский	242	2.7.9. Интенсификация кипения и испарения. Артур Е. Бергглс	423
2.5.3. Пучки гладких и оребренных труб. В. Гнилинский, А. Жукаускас, А. Скринска	247	Раздел 2.8. Теплообмен в системе газ — твердые частицы	426
2.5.4. Неподвижные слои. В. Гнилинский	259	2.8.1. Неподвижные плотноупакованные слои. Р. Бауэр	426
2.5.5. Теплообмен между жидкостью и частицами в псевдооживленных слоях. С. С. Забродский. Под ред. Х. Мартина	261	2.8.2. Плотноупакованные слои с движущимся через них газом. Р. Бауэр	435
2.5.6. Струи, ударяющиеся о поверхность. Х. Мартин	267	2.8.3. Плотноупакованные и перемешиваемые слои. Е. Мушовский	440
2.5.7. Свободная конвекция около погруженных в жидкость тел. С. У. Чарчилл	274	2.8.4. Псевдооживленные слои. Дж. С. М. Боттерил	445
2.5.8. Свободная конвекция в слоях и полостях. С. У. Чарчилл	295	Раздел 2.9. Теплообмен излучением	451
2.5.9. Совместные свободная и вынужденная конвекция около погруженных в жидкость тел. С. У. Чарчилл	312	2.9.1. Введение. Д. К. Эдвардс	451
2.5.10. Совместные свободная и вынужденная конвекции в каналах. С. У. Чарчилл	315	2.9.2. Радиационные характеристики поверхностей. Д. К. Эдвардс	454
2.5.11. Интенсификация теплообмена. А. Е. Бергглс	321	2.9.3. Перенос излучения между полностью диффузными поверхностями. Д. К. Эдвардс	466
2.5.12. Теплообмен в неньютоновских жидкостях. Р. С. Армстронг, Х. Х. Винтер	327	2.9.4. Радиационный перенос между зеркальными и не полностью диффузными поверхностями. Д. К. Эдвардс	477
2.5.13. Теплообмен в жидких металлах. В. М. Боришанский, Е. В. Фирсова	337	2.9.5. Радиационные свойства газов. Д. К. Эдвардс	484
Раздел 2.6. Конденсация	339	2.9.6. Радиационный перенос при наличии изотермического газа. Д. К. Эдвардс	494
2.6.1. Общие сведения. Д. Баттеруорт	339	2.9.7. Излучение неизотермического газа. Д. К. Эдвардс	501
2.6.2. Пленочная конденсация чистого пара. Д. Баттеруорт	340	2.9.8. Взаимодействие излучения с переносом теплопроводностью или конвекцией. Д. К. Эдвардс	511
2.6.3. Конденсация паровых смесей. Д. Баттеруорт	350	Список литературы	519
2.6.4. Конденсация смесей паров, образующих несмешивающиеся жидкости. Р. Дж. Сардесаи	355	Алфавитно-предметный указатель	549
2.6.5. Капельная конденсация. П. Гриффитс	359		
2.6.6. Интенсификация конденсации. Артур Е. Бергглс	360		
2.6.7. Образование туманов. Д. Чисхолм	362		